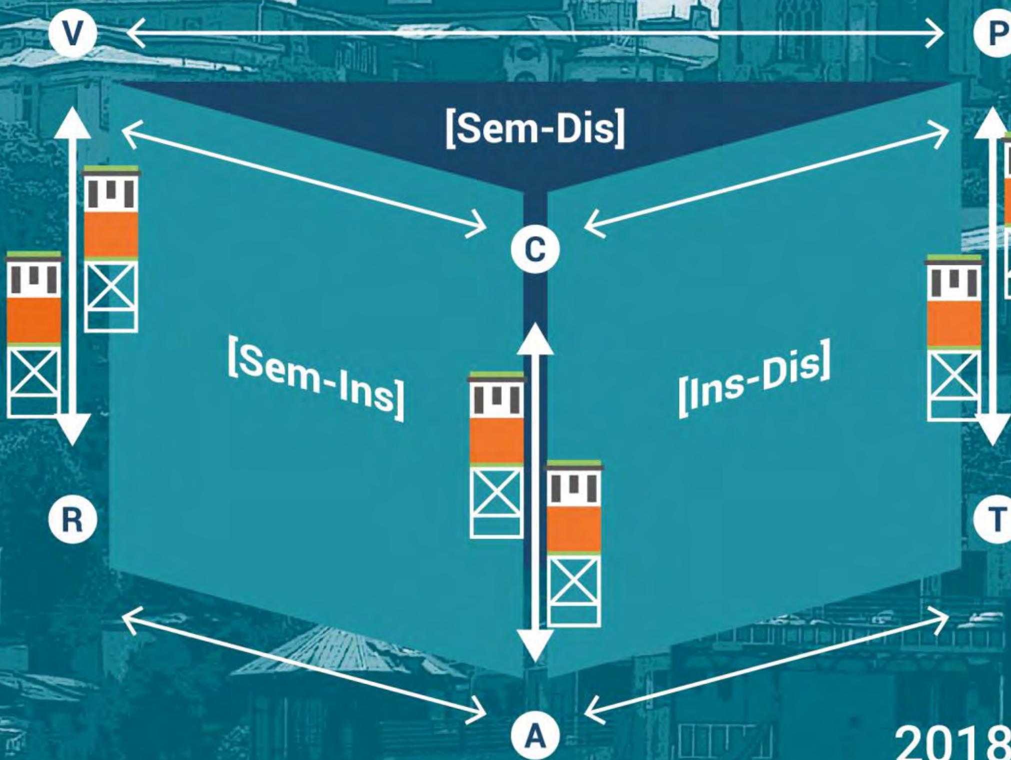
ETM6

Symposium/Symposium/Simposio

Sixième Symposium sur le Travail Mathématique
Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático
Sixth Symposium on Mathematical Work



2018-12-13/18

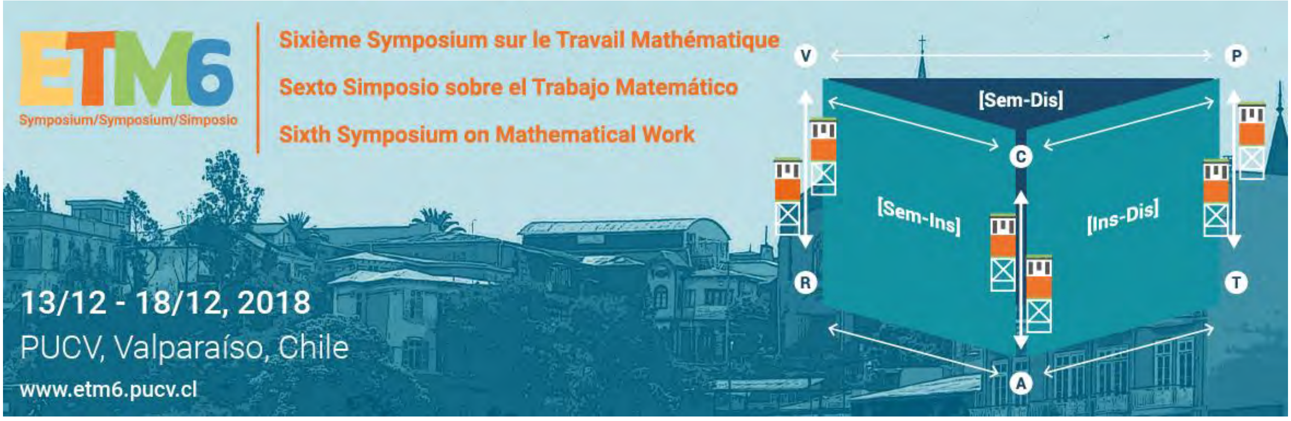
PUCV, Valparaíso, Chile

ACTAS ETM 6 | ACTES ETM 6 | PROCEEDINGS ETM 6

www.etm6.pucv.cl

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Inés Mª Gómez Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Elizabeth Montoya Delgadillo
Philippe R. Richard
Denis Tanguay
Laurent Vivier (Eds)



Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático

Sixième Symposium sur le Travail Mathématique

Sixth Symposium on Mathematical Work

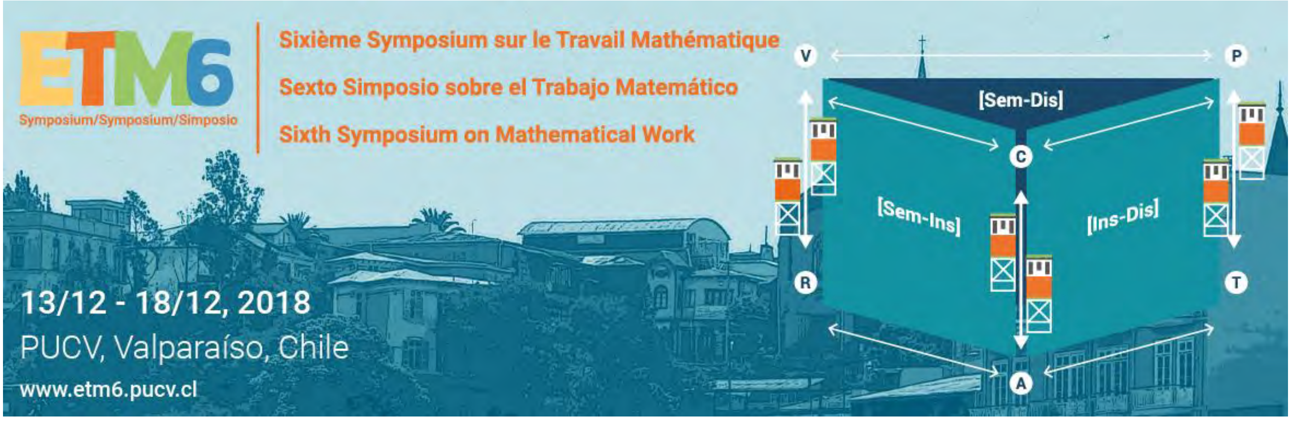
Del 13 al 18 de diciembre 2018

Du 13 au 18 décembre 2018

December, 13 – 18, 2018

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO



Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático

Sixième Symposium sur le Travail Mathématique

Sixth Symposium on Mathematical Work

Del 13 al 18 de diciembre 2018

Du 13 au 18 décembre 2018

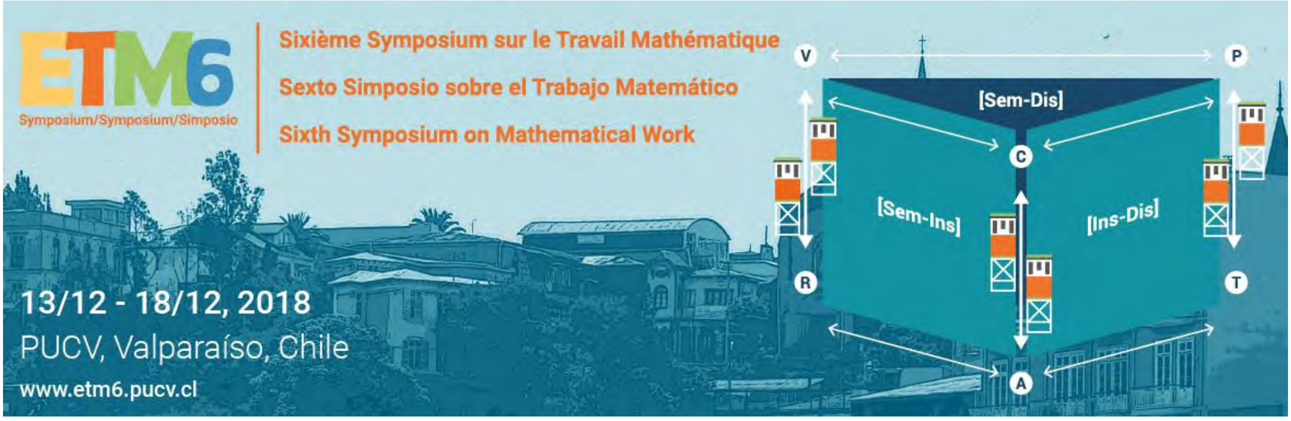
December, 13 – 18, 2018

Editores

Elizabeth Montoya Delgadillo
Philippe R. Richard
Laurent Vivier (Editor Jefe)
Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Denis Tanguay

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas
Av. Brasil 2950, Valparaíso
2340000– Valparaíso
Chile

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Editores

Elizabeth Montoya Delgadillo
Philippe R. Richard
Laurent Vivier (Editor Jefe)
Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Denis Tanguay

Diseño

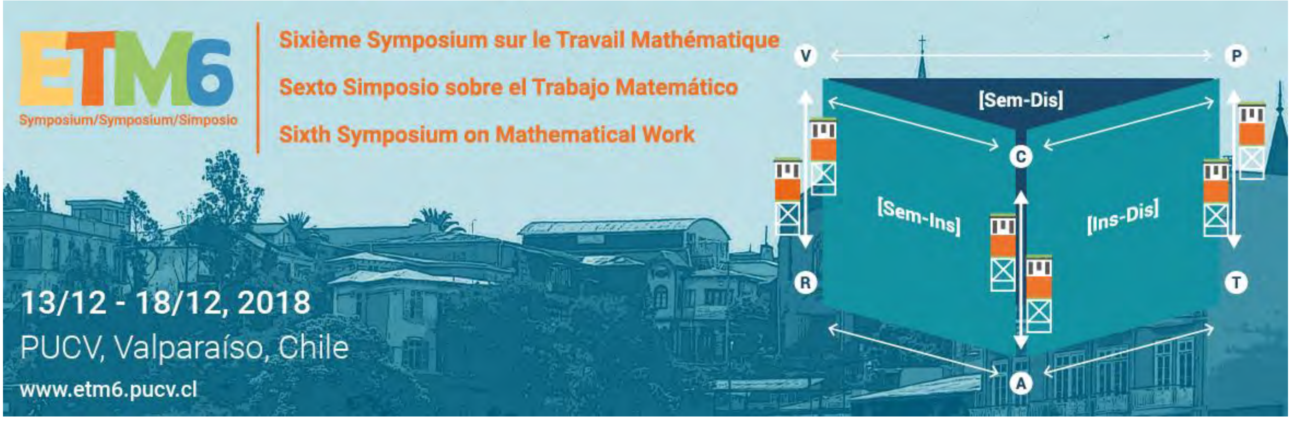
Elizabeth Montoya Delgadillo, Philippe R. Richard, Laurent Vivier

Diseñadora

Camila Valenzuela Rojo

ISBN: 978-956-401-498-2

Impreso en Chile



INTRODUCCIÓN

El Sexto Simposio de Trabajo Matemático (ETM6) fue organizado por el Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), y se desarrolló en la Casa Central del 13 al 18 de diciembre de 2018 en Valparaíso, Chile.

Estos simposios tienen como objetivo generar espacios para entender el trabajo matemático y promover el rol de la investigación en el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. El Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático (ETM6) reunió a 70 investigadores de Argentina, Canadá, Chile, España, Francia, Grecia, Italia, Líbano, México y Perú.

Este encuentro contó con el apoyo de la PUCV, El Laboratorio de Didactica André Revuz (Francia), la Sociedad Chilena de Educación Matemática, la Sociedad de Matemática de Chile, la embajada de Francia en Chile, y del Proyecto Fondecyt 1171744 de Conicyt, Chile.

Como en versiones anteriores, el simposio duró 5 días y son trilingüe (inglés, español, francés). Las 37 comunicaciones orales, las sesiones plenarias y la sesión de poster fueron presentadas en una de las tres lenguas. Sin embargo, los participantes en este encuentro fueron todos hispanófonos y/o francófonos, es por ello, que las actas están principalmente en estos dos idiomas. La metodología de trabajo se realizó en grupos para profundizar en las temáticas del encuentro, favorecer el intercambio de ideas y posibilitar la constitución de una comunidad de investigadores con intereses comunes. En esta oportunidad, el encuentro se organizó en torno a los temas:

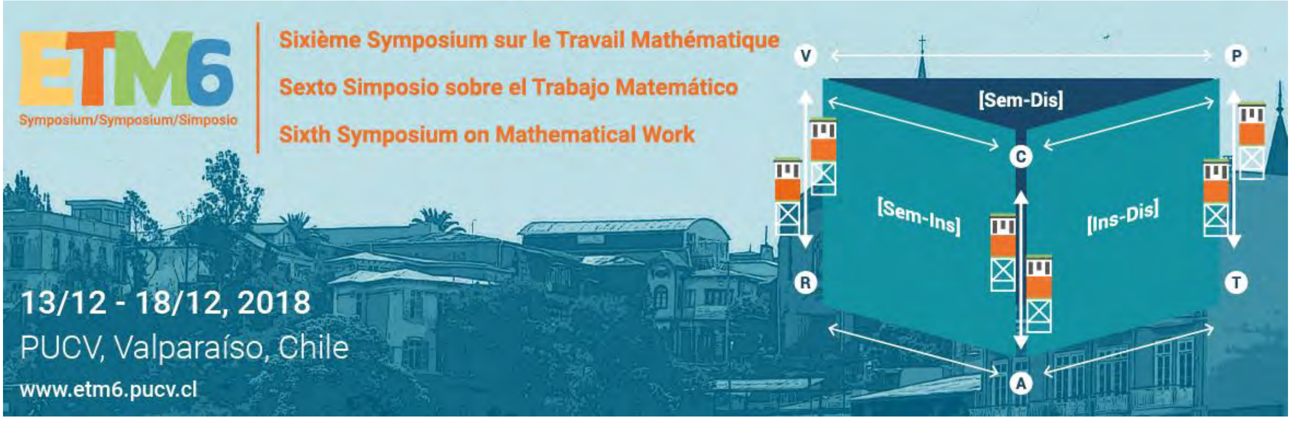
Tema 1: El trabajo matemático y los Espacios de Trabajo Matemático;

Tema 2: Especificidad de las herramientas y signos en el trabajo matemático;

Tema 3: Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor y las interacciones;

Tema 4: Rol y uso de tareas en el trabajo matemático.

Los responsables de cada temática del simposio presentaron en una sesión plenaria de los logros provenientes del actual simposio realizado en Valparaíso, como así



también, de los anteriores Simposios realizados en Chipre, Paris, Montreal, Madrid y Florina.

El simposio contó con varias actividades plenarias, comenzando con la conferencia inaugural titulada “La Teoría de los ETM: desarrollo y perspectivas” a cargo del Dr. Alain Kuzniak, investigador de la Université Paris Diderot, quien expuso una mirada histórica y un repaso reflexivo de esta teoría que ha estado llevando a cabo durante 20 años por una comunidad de investigadores. Además, se realizaron 2 sesiones de discusión y 3 talleres los cuales permitieron familiarizarse con la teoría de la ETM en torno a los temas siguientes:

Taller 1: Una metodología para el estudio del trabajo matemático personal;

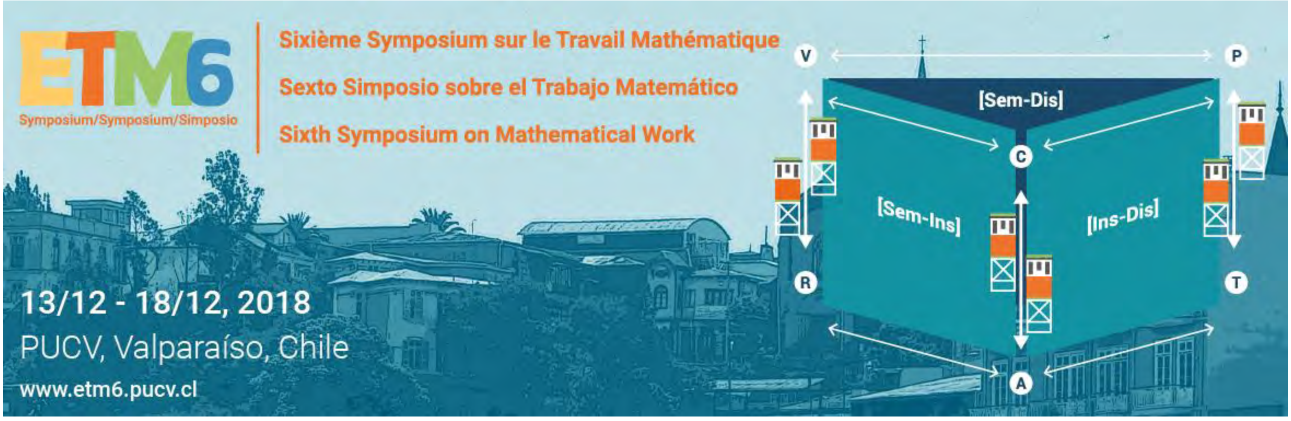
Taller 2: La noción de prueba en la coordinación del trabajo matemático: una perspectiva instrumental… y un poco más;

Taller 3: El trabajo matemático en análisis y el rol de la visualización en su dimensión semiótica instrumental y discursiva.

Los simposios ETM convocan en cada una de sus ediciones a investigadores de diversas partes del mundo que participan de una comunidad científica en torno al estudio del trabajo matemático y, también, de la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, destacando en su organización el resguardo de un espacio de cooperación científica que impulsa el diálogo con otras teorías, la investigación en didáctica de la matemática y el apoyo al trabajo de jóvenes investigadores.

El Simposio contó con una visita a la casa de Neruda de Isla Negra y a una viña en Casa Blanca, y los estudiantes del IMA organizaron con entusiasmo un paseo por los cerros y ascensores de Valparaíso. Antes de finalizar, se dan palabras de agradecimientos al Comité Organizador de la PUCV, y a los estudiantes del Instituto de Matemáticas (IMA) Joaquín Cubillos, María Isabel Gazmuri, Nicolás Muñoz, Constanza Quiroz Vega, Bastián Reyes, Francisca Ramírez, Carlos Zuleta Alfaro por el profesionalismo desplegado en este congreso internacional.

Los organizadores del ETM 6 resaltan la importancia del encuentro de una comunidad internacional acogida por la PUCV con un anfiteatro natural en la ciudad de Valparaíso, la cual se vistió nuevamente de la poesía, el arte…, y que en la actualidad anhela por construir un futuro mejor para sus habitantes. De hecho, en Chile en el año 2019 se generó un estadillo social que ha dejado de manifiesto



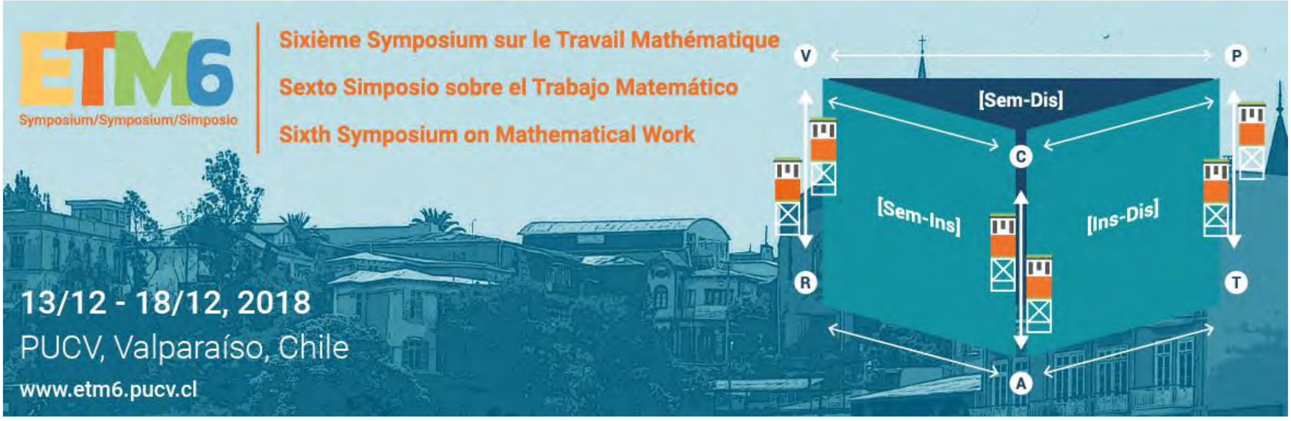
desigualdades sociales, económicas y de género, y otras, que eran visibles al momento del simposio con el descontento de los trabajadores del puerto de Valparaíso.

En esta sexta edición fue una oportunidad para que los colegas y amigos de Alain Kuzniak le rindieran homenaje, algunos a la distancia, por su compromiso con la investigación en la didáctica de las matemáticas y su disponibilidad en la colaboración internacional.

Cabe señalar, que la próxima versión ETM7 se realizará en Strasbourg, Francia, en el mes de julio del año 2021.

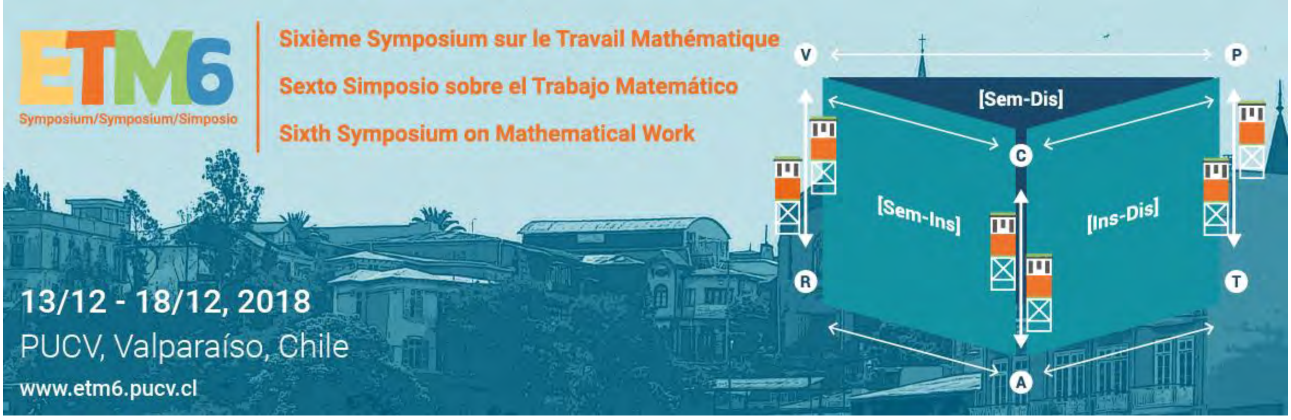
Elizabeth Montoya Delgadillo

Los participantes en la excursión en Casa Blanca



Alcen las copas para un brindis	*Levez vos verres pour faire un bríndis*
Para un investigador creativo	*Pour un chercheur créatif*
Para un colega abierto	*Pour un collègue ouvert*
Para un amigo	*Pour un ami*
Para un franchute	*Pour un franchute,*
Un franchute que se llama Alain	*Un franchute qui s'appelle Alain*
Es un placer de rendirte un homenaje	*C'est un plaisir de te rendre hommage*
En estas tierras chilenas tan especiales	*En ces terres chiliennes si spéciales*
En la compañía de tus colegas y amigos	*En compagnie de tes collègues et amis*
Salud!	*Santé !*

Alain Kuzniak en Chile



INTRODUCTION

Le Sixième Symposium sur le travail mathématique (ETM6) a été organisé par l'Institut de Mathématiques de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), et a eu lieu à la Casa Central du 13 au 18 décembre 2018 à Valparaiso, au Chili.

Ces colloques visent à créer des espaces pour comprendre le travail mathématique et promouvoir le rôle de la recherche dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Le Sixième Symposium sur le travail mathématique (ETM6) a réuni 70 chercheurs d'Argentine, du Canada, du Chili, d'Espagne, de France, de Grèce, d'Italie, du Liban, du Mexique et du Pérou.

Cette réunion a été soutenue par la PUCV, Le Laboratoire de Didactique André Revuz (France), la Sociedad Chilena de Educación Matemática, la Sociedad de Matemática de Chile, l'Ambassade de France au Chili, et le projet Fondecyt 1171744 de la Conicyt, Chili.

Comme dans les éditions précédentes, le symposium a duré 5 jours et a été trilingue (anglais, espagnol, français). Les 37 communications orales, les sessions plénières et la session de posters pouvaient être présentées dans une des trois langues. Cependant, les participants à cette réunion étaient tous hispanophones ou francophones, ce qui explique que les actes sont principalement en français et en espagnol. La méthodologie de travail a été réalisée en groupes afin d'approfondir les thèmes de la rencontre, de favoriser l'échange d'idées et de permettre la constitution d'une communauté de chercheurs ayant des intérêts communs. A cette occasion, la réunion a été organisée autour des thèmes :

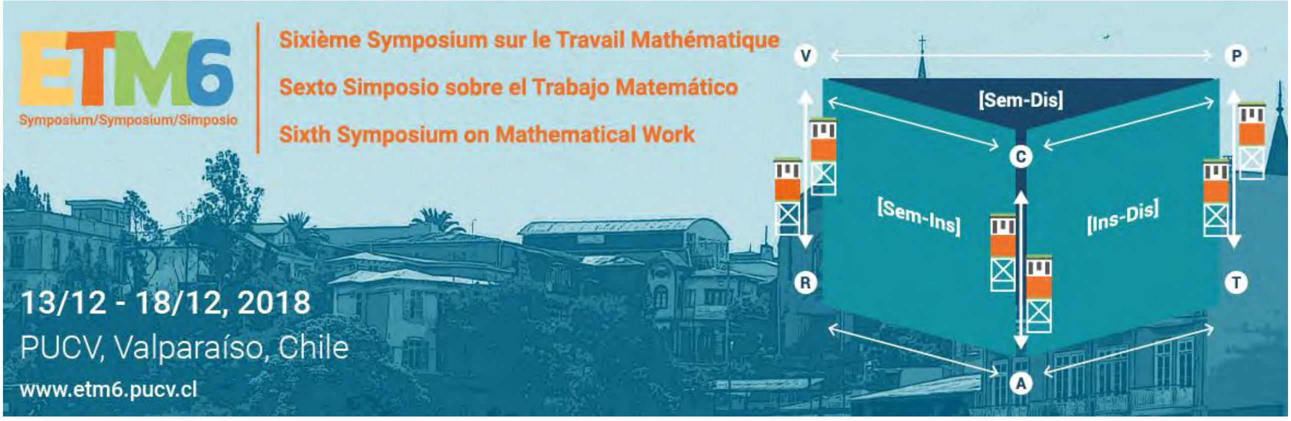
Thème 1 : Le travail mathématique et les Espaces de Travail Mathématique ;

Thème 2 : Spécificité des outils, des signes et du discours dans le travail mathématique ;

Thème 3 : Genèse et développement du travail mathématique : rôle de l'enseignant, du formateur, du collectif et des interactions ;

Thème 4 : Place et usage des tâches dans le travail mathématique.

Les responsables de chaque thème du symposium ont présenté en séance plénière les réalisations du symposium actuel tenu à Valparaiso, à l'instar des précédents



symposiums tenus à Chypre, Paris, Montréal, Madrid et Florina.

Le colloque comprenait plusieurs activités plénières, à commencer par la conférence inaugurale intitulée « La théorie des ETM : développement et perspectives » présentée par Alain Kuzniak, chercheur à l'Université Paris Diderot, qui a proposé un regard historique et une réflexion sur cette théorie en développement depuis 20 ans par une communauté de chercheurs. De plus, il y a eu deux séances de discussion et trois ateliers qui ont permis de se familiariser avec la théorie des ETM autour des sujets suivants :

Atelier 1 : Une méthodologie pour analyser le travail personnel d'étudiants dans la théorie des Espaces de Travail Mathematique ;

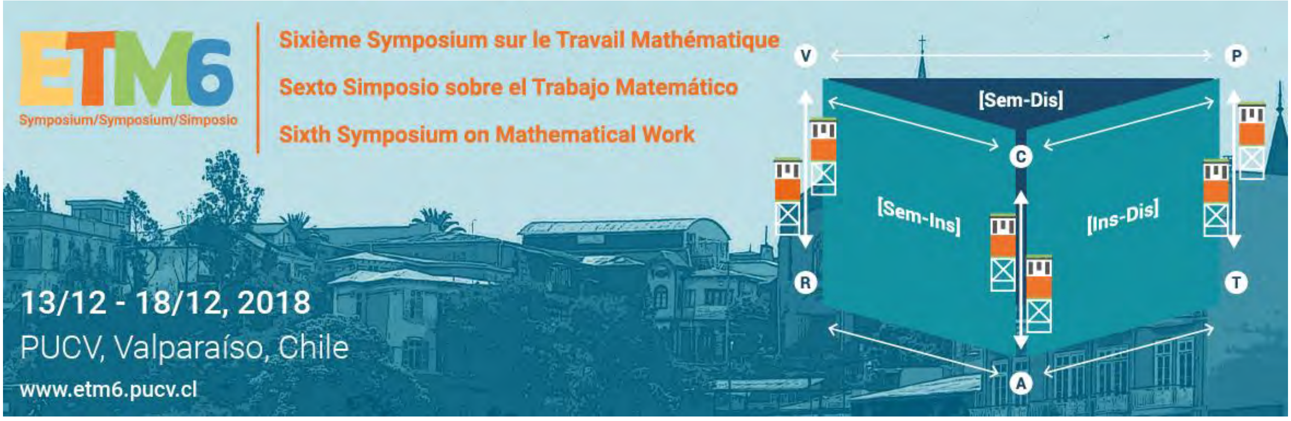
Atelier 2 : La notion de preuve dans la coordination du travail mathématique : une perspective instrumentale… et un peu plus ;

Atelier 3 : Le travail mathématique en analyse et le rôle de la visualisation dans les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive.

Les symposiums ETM réunissent à chaque édition des chercheurs de différentes parties du monde qui participent à une communauté scientifique autour de l'étude du travail mathématique et, aussi, de la théorie des Espaces de travail mathématique, en soulignant dans son organisation l'aménagement d'un espace de coopération scientifique qui favorise le dialogue avec les autres théories, la recherche en didactique des mathématiques et le soutien aux jeunes chercheurs.

Le symposium comprenait une visite de la maison de Neruda à Isla Negra et d'un vignoble à Casa Blanca, et les étudiants de l'IMA ont organisé avec enthousiasme une promenade à travers les *cerros* et les ascenseurs de Valparaíso. Avant de terminer, des mots de gratitude sont adressés au Comité d'Organisation de la PUCV, ainsi qu'aux étudiants de l'Institut de Mathématiques (IMA) Joaquín Cubillos, María Isabel Gazmuri, Nicolás Muñoz, Constanza Quiroz Vega, Bastián Reyes, Francisca Ramírez, Carlos Zuleta Alfaro pour le professionnalisme dont ils ont fait preuve dans ce congrès international.

Les organisateurs d'ETM 6 soulignent l'importance de la rencontre d'une communauté internationale accueillie par la PUCV avec un amphithéâtre naturel dans la ville de Valparaiso, lieu de poésie, d'art..., et qui souhaite maintenant construire un avenir meilleur pour ses habitants. En effet, au Chili, en 2019, s'est développé un



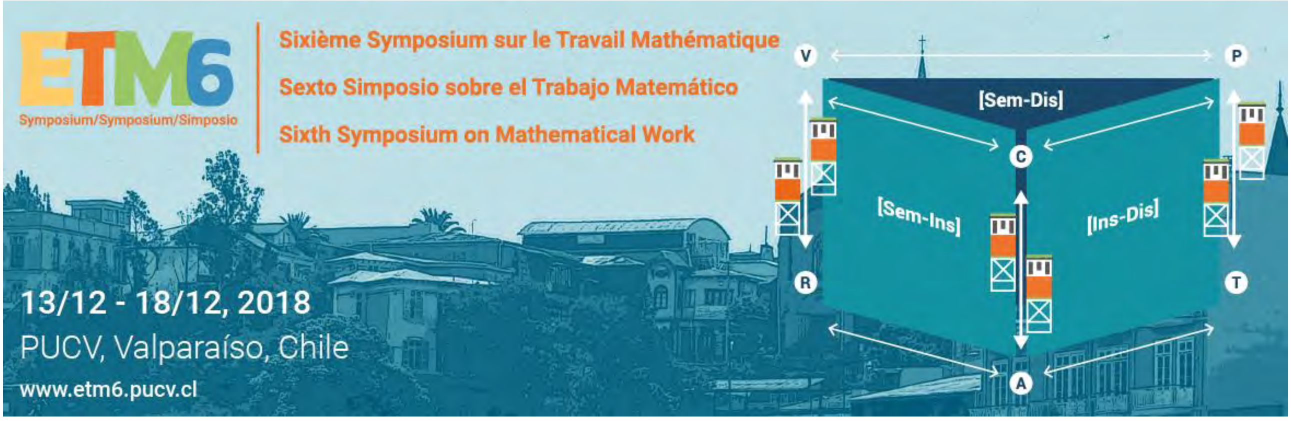
mouvement social qui a notamment révélé des inégalités sociales, économiques et de genre, qui étaient déjà visibles au moment du symposium avec le mécontentement des travailleurs du port de Valparaiso.

Cette sixième édition a été l'occasion pour les collègues et amis d'Alain Kuzniak de lui rendre hommage, certains à distance, pour son engagement dans la recherche en didactique des mathématiques et pour sa disponibilité pour une collaboration internationale.

Il est à noter que la prochaine édition ETM7 se tiendra à Strasbourg, France, au mois de juillet 2021.

Elizabeth Montoya Delgadillo

Les participants à l'excursion à Casa Blanca



Levez vos verres pour faire un bríndis	*Alcen las copas para un brindis*
Pour un chercheur créatif	*Para un investigador creativo*
Pour un collègue ouvert	*Para un colega abierto*
Pour un ami	*Para un amigo*
Pour un franchute,	*Para un franchute*
Un franchute qui s'appelle Alain	*Un franchute que se llama Alain*
C'est un plaisir de te rendre hommage	*Es un placer de rendirte un homenaje*
En ces terres chiliennes si spéciales	*En estas tierras chilenas tan especiales*
En compagnie de tes collègues et amis	*En la compañía de tus colegas y amigos*
Santé !	*Salud!*

Alain Kuzniak au Chili

ÍNDICE / TABLE DES MATIERES / TABLE OF CONTENTS

PRESIDENTE / PRÉSIDENTE / CHAIR

Elizabeth MONTOYA DELGADILLO

CO-PRESIDENTES / CO-PRÉSIDENTS / CO-CHAIRS

Philippe R. RICHARD & Laurent VIVIER

COMITÉ CIENTÍFICO / COMITE SCIENTIFIQUE / SCIENTIFIC COMMITTEE

Philippe R. RICHARD, Université de Montréal, Canada – Co-Président du Comité Scientifique
Laurent VIVIER, Université Paris Diderot, France – Co-Président du Comité Scientifique
Denis TANGUAY, Université du Québec à Montréal, Canada – Resp.Thème 1
Michela MASCHIETTO, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia, Italia – Resp. Thème 2
Inés Mª GÓMEZ-CHACÓN, Universidad Complutense de Madrid, España – Resp. Thème 3
Alain KUZNIAK, Université Paris Diderot, France – Resp.Thème 4
Elizabeth MONTOYA DELGADILLO, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile – Présidente du Comité d'Organisation
Nuria CLIMENT, Universidad de Huelva, España
Charlotte DEROUET, Université de Strasbourg, France
Jesús FLORES SALAZAR, Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
Carolina HENRÍQUEZ, Universidad de Talca, Chile
Athanasios GAGATSIS, University of Cyprus, Κύπρος
Patricio HERBST, University of Michigan, United States of America
Assia NECHACHE, Université de Paris-Est-Créteil, France
Konstantinos NIKOLANTONAKIS, Université de la Macédoine Ouest, Ελλάδα
Asuman OKTAÇ, CINVESTAV, México
Manuel SANTOS TRIGO, CINVESTAV, México
Fabienne VENANT, Université du Québec à Montréal, Canada
Diana ZAKARYAN, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

COMITÉ DE ORGANIZACIÓN / COMITE D'ORGANISATION / ORGANIZING COMMITTEE

Elizabeth MONTOYA DELGADILLO (Presidenta)
Manuel GOIZUETA
Jaime MENA LORCA
Romina MENARES ESPINOZA
Patricia VÁSQUEZ SALDIAS
Saúl COSMES ARAGÓN
Pedro VIDAL SZABO

Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

LA THEORIE DES ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE DEVELOPPEMENT ET PERSPECTIVES

Alain Kuzniak

Université Paris Diderot, LDAR, France

Alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

Dans cette contribution, nous présentons quelques éléments clés de la théorie des Espaces de Travail Mathématique en nous appuyant sur l'évolution de ce cadre théorique. En repartant des origines de la théorie, il s'agit de montrer son développement, de présenter son état actuel et d'interroger les perspectives de recherches qu'elle permet d'envisager.

***Mots-clés** : Espace de Travail Mathématique, Paradigmes, travail mathématique, théorie didactique.*

INTRODUCTION

Cette conférence inaugurale du symposium ETM6 nous permet de présenter quelques éléments clés de la théorie des ETM en prenant appui sur un parcours dans le temps. En repartant des origines de la théorie, il s'agira de montrer son développement et de s'interroger sur son état actuel et sur les perspectives de recherches qu'elle permet d'envisager.

Développé depuis maintenant depuis plus de 20 ans par un collectif de chercheurs venus d'Amérique Latine, du Canada et d'Europe, le corpus théorique des Espaces de Travail Mathématique n'a été présenté et reconnu que récemment comme une théorie. Dans cette contribution, la constitution progressive de cette identité théorique est dégagée en insistant sur quelques-unes de ses étapes et certains éléments clés de la théorie. L'exposé se termine par un survol de certaines des directions de recherches actuellement en cours et qui s'appuient sur la théorie des ETM.

AUX ORIGINES DE LA THEORIE

Un corpus théorique et méthodologique développé dans le contexte de la didactique française

En dépit de quelques querelles de chapelle liées à la personnalité des différents chercheurs impliqués dans son développement, il faut reconnaître que la didactique des mathématiques en France repose sur un ensemble de principes théoriques et méthodologiques qui contribuent à établir une véritable homogénéité culturelle.

De manière un peu simplifiée, on peut tout d'abord identifier deux théories à forte orientation épistémologique où la réflexion sur le contenu mathématique à enseigner sert de point d'appui et de cadre à l'expansion théorique.

- La Théorie des Situations Didactiques (TSD), dont les fondements ont été posés par Brousseau (1997), associe la recherche théorique et les données empiriques en relation étroite avec la classe. Son but est de développer une didactique expérimentale qui va au-delà de la didactique classique telle que décrite dans la Magna Didactica de Comenius où toutes les directives et idées ont été données a priori et ne sont pas validées par des études de terrain.

- La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) initiée par Chevallard (1992) s'appuie sur une vision anthropologique et holistique des actes d'apprentissage et d'enseignement. Ce cadre holistique, basé sur l'étude des praxéologies, vise à une autonomie théorique de la didactique indépendamment d'autres domaines scientifiques comme les mathématiques, la sociologie ou la psychologie.

Ces deux théories bénéficient d'une visibilité internationale et d'une reconnaissance dont témoignent les prix qui ont été attribués à leurs fondateurs : la médaille Klein 2003 à Brousseau et le prix Freudenthal 2009 à Chevallard.

Deux autres cadres théoriques sont très influents dans le contexte français et prennent en compte cette fois, de manière plus centrale, des éléments cognitifs propres au sujet apprenant des mathématiques.

- La Théorie des Champs Conceptuels développée par Vergnaud (1991) apporte une dimension psychologique et cognitive, basée sur la théorie de l'apprentissage de Piaget. Elle complète les deux théories précédentes fortement influencées par l'épistémologie mathématique.
- L'approche sémiotique de Duval (2006) avec le développement des registres sémiotiques privilégie les signes et la sémiose en tant que médiateurs des objets mathématiques qui ne sont accessibles que par leurs différentes représentations sémiotiques.

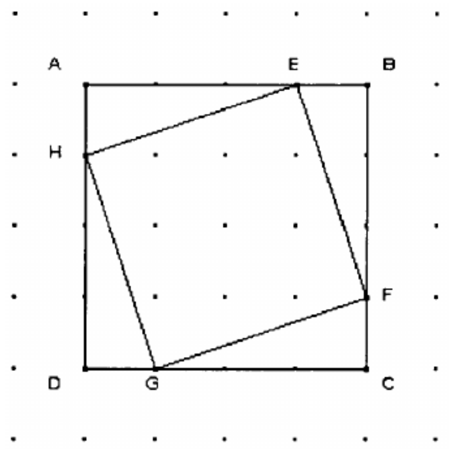
Cette présentation serait incomplète si l'on ne prenait pas compte un ensemble de développements théoriques liés à différentes façons de considérer l'activité des individus impliqués dans l'acte d'enseignement. Ces approches s'inscrivent dans la tradition soviétique des travaux sur l'activité humaine (Vygotski, Leontieff) réinterprétés par des ergonomes français comme Pastre ou Clot. Suivant les points de vue considérés, on peut alors signaler l'approche instrumentale (Lagrange, Artigue, etc.) sur l'usage des outils informatiques dans l'enseignement ou bien la double approche didactique et ergonomique sur le métier d'enseignant (Robert et Rogalski, 2002).

C'est dans ce contexte que la théorie des ETM (Kuzniak, Tanguay et Elia 2016, Gómez-Chacón, Kuzniak et Vivier 2016) a été développée en cherchant à relier et à préserver très étroitement les points de vue épistémologique et cognitif. Son ouverture sur la longue durée aux collaborations internationales en fait aussi la spécificité et l'originalité. Enfin, il convient de signaler son étroite relation avec les pratiques des enseignants et le développement des apprentissages dans les classes de façon à éviter un développement théorique hors sol.

Deux exemples fondateurs

Pour illustrer cet ancrage dans la réalité des acteurs de l'éducation et aussi cette ouverture sur l'international, j'évoquerai brièvement deux exemples anciens qui éclairent certaines des motivations initiales de la théorie.

1. La production d'une élève-professeure des écoles, licenciée en philosophie (Houdement et Kuzniak, 1999a)



Il s'agit d'un problème classique demandant aux étudiants de montrer que le quadrilatère central (HEFG) est un carré comme le carré de base (ABCD). Une étudiante en formation d'enseignants du premier degré montre ce résultat en vérifiant seulement que les côtés sont égaux, car EH est égal à AE. Pour montrer cette « fausse » égalité, elle a utilisé son compas pour effectuer un report de mesure. De fait, l'écart des longueurs et l'incertitude relative (de l'ordre de 3 %) sont faibles, ce qui peut expliquer l'erreur de report, mais dans le même temps, on pourrait s'attendre à une application évidente de l'inégalité triangulaire ou encore à un appui sur l'intuition visuelle qui contredit l'égalité. Qu'est-ce qui peut motiver une erreur aussi flagrante ? Ici, une application sommaire des niveaux de Van Hiele à cette étudiante se révèle doublement inefficace, car, de fait, l'étudiante en question est une adulte et, par ailleurs, elle avait une licence de philosophie ce qui garantit a priori un niveau de raisonnement rationnel élevé et bien organisé.

2. Des conceptions différentes sur la géométrie chez de futurs professeurs au Chili et en France en 2005

Un élément déclencheur fort du travail théorique initié autour d'une meilleure compréhension du travail géométrique vient de la recherche menée entre 2003 et 2005 sur l'enseignement de la géométrie au niveau de la formation des enseignants au Chili et en France (Guzman et Kuzniak, 2006). Dans une étude tentant de préciser le type de rapports à la géométrie qu'entretenaient les étudiants-professeurs chiliens et français, deux réponses caractéristiques, mais opposées de chacune des populations apparurent.

> Au Chili ; c'est facile et amusant, il y a beaucoup de dessins et de constructions avec les instruments.
>
> En France : c'est ennuyeux, il faut écrire beaucoup, justifier tout ce qu'on voit.

Cette fois, encore, il s'avérait nécessaire d'expliquer les raisons de fond qui pouvaient expliquer une différence si marquée entre le ressenti des futurs professeurs dans chacun des pays.

Décrire, comprendre et façonner le travail mathématique

Les recherches entamées autour du groupe initialement impliqué dans le projet ECOS-Sud entre Paris et Valparaiso se sont attachées à développer un ensemble d'outils théoriques et méthodologiques pertinents pour permettre l'étude de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques au cours de la scolarité obligatoire, mais aussi en formation des professeurs.

Ces recherches visaient à comprendre les différences entre l'enseignement des mathématiques dans différentes institutions et pays, mais sans la volonté de les hiérarchiser contrairement à la philosophie des grandes études internationales telles que PISA ou TIMSS, toutes imprégnées de ce point de vue.

Il s'agissait aussi de centrer les recherches sur les mathématiques en prenant en compte les finalités à long terme d'un sujet « travaillant » les mathématiques. Ce qui a conduit à poser le *travail mathématique* comme central dans la recherche didactique envisagée. Ces travaux ont donné lieu à une première synthèse qui mettait en relation un *espace de travail* propice à la réalisation du travail mathématique adéquat, conforme à celui attendu par l'école, et des *paradigmes* différents qui orientent et dirigent le travail des élèves et des professeurs. La recherche visait à décrire, comprendre et (trans)former le travail mathématique pour le mettre en adéquation avec des attentes qui pouvaient différer en fonction du contexte culturel et historique d'un pays ou d'une institution à une autre.

LE TEMPS DE LA THÉORIE

La reconnaissance en tant que théorie du corpus méthodologique et théorique développé autour des ETM est un phénomène récent. Ce développement de la théorie a été porté par toute une communauté de chercheurs venus de différents pays et continents. Des symposiums, des groupes de travail, des thèses et de nombreux articles écrits en collaboration ont aussi permis cette avancée de la théorie. Dans la suite de cet exposé, je vais rendre compte de cette évolution basée sur une approche dynamique de la recherche didactique.

Un développement théorique et méthodologique porté par une communauté de chercheurs

La première émergence visible d'une recherche prenant en compte l'idée de travail mathématique en association avec la notion de paradigme et d'espace de travail apparaît dans deux articles portant sur la géométrie de Houdement et Kuzniak parus en 1999. L'aspect le plus visible et le plus connu de ces articles porte sur la notion de paradigmes conçus comme des manières différentes de penser et de prouver en géométrie. L'idée de base résumée par les auteurs est la suivante :

> En éducation, trois paradigmes distincts structurent le domaine de la géométrie. Ces paradigmes reflètent les différentes étapes de la succession des cycles académiques. Chaque étape se caractérise par des pratiques et des défis spécifiques sur l'enseignement et l'apprentissage de la discipline. (Houdement et Kuzniak, 1999, p. 285).

Trois paradigmes ont été ainsi introduits et désignés sous les termes Géométrie I, II et III. Chaque paradigme est suffisamment global et cohérent pour définir et structurer la géométrie en tant que domaine mathématique et pour mettre en place des espaces de travail appropriés pour résoudre un large éventail de problèmes. En France, seuls deux d'entre eux — Géométrie I et II — jouent actuellement un rôle dans l'enseignement secondaire.

Cette première description est complétée par la proposition suivante sur l'impact potentiel de ces paradigmes sur l'enseignement de la géométrie.

> Les élèves et les enseignants peuvent se situer implicitement dans des paradigmes différents et ces différences d'approche peuvent conduire à des malentendus et à des blocages. (Ibid., p. 285)

L'idée de paradigme comme moyen pour comprendre des différences entre institutions sans nécessairement les juger et les classer a pris tout son sens grâce au projet ECOS que nous avons déjà mentionné. Ce projet a marqué le début d'un travail collaboratif qui perdure encore entre les équipes de Valparaiso, pilotée alors par Ismenia Guzman et celles de Paris et Strasbourg (Castela, Houdement, Kuzniak et Rauscher)

Grâce à cette collaboration, mais aussi à la rencontre de chercheurs intéressés par le cadre théorique des paradigmes géométriques comme Straesser (Allemagne), Gagatsis (Chypre) et Parzysz (France), une petite communauté de chercheurs a pu se créer et donner naissance à une première rencontre à Nicosie en 2009. En 2010, à Paris, l'idée d'organiser les rencontres sous forme de symposium est établie. Il s'agissait de favoriser les échanges en groupes restreints puis la publication sous forme d'actes et d'articles dans des revues d'une sélection des contributions majeures. A partir de 2012, ETM 3 à Montréal, ces symposiums ont pris le nom de Symposium ETM avec ETM4 à Madrid en 2014 et ETM5 à Florina en 2016. Ces symposiums ne visent pas seulement à développer la théorie des ETM, mais plus largement à favoriser les échanges sur les recherches en didactique qui prennent en compte, d'une manière ou d'une autre, le travail mathématique. C'est pour cela que ETM6, à Valparaiso, en 2018, était un symposium sur le Travail Mathématique.

L'aventure continue puisqu'en 2021, le septième symposium aura lieu à Strasbourg et sera organisé conjointement par les équipes de Strasbourg et Paris pilotées par Charlotte Derouet, Assia Nechache et Laurent Vivier.

En 2016, la publication de numéros spéciaux sur les Espaces de Travail Mathématique dans la revue Bolema et surtout dans la revue *ZDM Mathematics Education* marque ce que d'aucuns ont désigné comme le « coming out » théorique des ETM. En effet, dans leurs commentaires qui clôturaient le numéro spécial de ZDM, Radford et Artigue parlaient de la théorie des ETM et il devenait alors naturel de résumer sous le terme de théorie ce désormais vaste corpus que jusque là, à la fois par modestie et par prudence, les chercheurs du champ avaient choisi de caractériser comme une approche théorique et méthodologique. De fait, assumer les ETM comme une théorie suppose de pouvoir répondre à un certain nombre de critères sur lesquels Radford avait attiré l'attention dès le symposium de Montréal (ETM3, 2012).

Pour avancer sur ce point, nous nous référons à la caractérisation de ce qu'est une théorie en didactique des mathématiques, telle qu'elle a été retenue par Bikner-Ahsbahs et Prediger (2014) dans leur ouvrage sur la mise en réseau de différentes théories. Inspirées par Radford (2008), ces auteures préconisent l'explicitation des principes, de la méthodologie, du type de problèmes et des *Key-constructs* qui vont conférer à une théorie sa spécificité et son originalité dans le champ de la didactique des mathématiques.

SUR QUELQUES POINTS FONDAMENTAUX DE LA THEORIE DES ETM

Au cœur de la théorie : le travail mathématique

La théorie des ETM a pour but l'étude spécifique du travail mathématique dans lequel élèves et enseignants sont effectivement engagés dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Mais que recouvre cette notion de *travail mathématique* jugée centrale dans cette théorie ? L'expression *travail mathématique* doit être considérée comme un ensemble syntaxique et sémantique qui combine étroitement travail et mathématiques. Le travail apparaît comme un ensemble d'activités humaines organisées pour atteindre des buts ; l'orientation et la finalité de ce travail sont supportées par les mathématiques. Réciproquement, les mathématiques, ainsi considérées, sont transformées par le fait même qu'elles sont envisagées comme un travail humain spécifique.

Le travail mathématique est une forme de travail intellectuel particulièrement marqué par la rationalité inhérente aux mathématiques. De ce fait, la double approche de Habermas (1969), qui souligne à la fois l'action instrumentale et le choix rationnel comme constitutif du travail, nous semble particulièrement bien adaptée à notre approche.

> By « work » or purposive-rational action, I understand either instrumental action or rational choice or their conjunction. Instrumental action is governed by technical rules based on empirical knowledge. (...). The conduct of rational choice is governed by strategies based on analytic knowledge. (...) Purposive-rational action realizes defined goals under given conditions. (Habermas, 1969, pp. 92-93).

La traduction française (1970) transforme le mot *action,* utilisé en anglais, dans le sens d'une *activité,* et nous confronte à l'emploi sinon ambigu du moins polysémique de termes proches comme action, activité, actes, etc. Par ailleurs, il nous est impossible d'éviter cette confrontation terminologique du fait de l'importance des théories de l'activité dans le contexte de la didactique des mathématiques notamment dans les pays francophones. Dans l'approche, issue des travaux de Leontieff (1978), une vision inclusive des notions d'opérations, d'actions et d'activités est privilégiée. Chacun de ces termes renvoyant progressivement à des degrés de plus en plus élevés dans le développement de la conscience du sujet agissant. L'activité acquiert un rôle premier et crucial chez des auteurs comme Radford (2019) où l'activité produit le mouvement qui réalise l'*actualisation* des connaissances (knowledge) dans le savoir (knowing) :

> Knowing as the actualization of knowledge evokes indeed this temporal dimension of a whole in continuous movement. And what produces the movement is activity: knowledge and knowing are related through activity. Indeed, knowing can appear only through activity. This activity actualizes knowledge, brings it to life—like the classroom activity of solving an algebraic equation brings algebraic knowledge to life. (Radford, 2019)

De manière plus prosaïque et en minorant les hypothèses d'ordre psychologique sur le développement de la pensée, c'est l'*action* qui est privilégiée dans la théorie des ETM où elle est vue comme la manifestation visible du travail d'un sujet. Ce choix a de nombreuses répercussions théoriques et méthodologiques qui sont encore en cours d'exploration (Kuzniak et Nechache 2018). A partir de l'analyse des actions mathématiques repérées chez un sujet, il s'agit d'identifier son travail mathématique avec à terme l'idée de l'adapter ou de le transformer en fonction des attentes variées qui s'exercent sur lui dans le champ de la didactique des mathématiques.

Dans la théorie des ETM, le travail est basé sur un ensemble d'actions organisées et finalisées ce qui permet de mettre l'accent sur la dualité entre, d'une part, les processus du travail et, d'autre part, les résultats du travail. Granger (1963) relie les résultats produits par le travail mathématique aux contenus et il associe les processus aux structures et formes engendrées par ce travail. L'abstraction du travail mathématique peut conduire à regarder ces formes et structures comme l'essence de ce travail. Selon moi, il importe de garder l'équilibre entre processus et produit pour rendre compte du travail mathématique dans sa globalité.

D'une certaine façon, cette dualité et cette abstraction du travail mathématique obligent à dépasser les points de vue usuels sur le travailleur considéré comme un tâcheron (ou manœuvre) voire comme un technicien essentiellement concerné par les résultats pour y intégrer le niveau d'organisation des processus proche de l'ingénieur et, in fine, constitutif du travail du mathématicien (Nechache, 2017).

Enfin pour conclure sur cette partie, le travail mathématique est ce que font les mathématiciens, *ces individus qui approfondissent la compréhension humaine des mathématiques* (Thurston, 1994). Il s'effectue en différents contextes et avec des motivations différentes. Par ailleurs, ce travail s'inscrit dans la durée, une certaine permanence et il suppose des efforts. Ce sera un des buts de la théorie des ETM de reconnaître et d'étudier tous ces éléments constitutifs du travail dans le cadre scolaire.

L'Espace de Travail Mathématique et son diagramme

De la présentation que nous venons d'en donner, il résulte que pour saisir le travail mathématique des individus confrontés à des tâches mathématiques, il est nécessaire de prendre en compte deux *aspects* de ce travail étroitement liés dans la pratique des mathématiciens. Le premier aspect de nature épistémologique est en relation avec les contenus mathématiques du domaine étudié ; le second de nature cognitive, est lié aux processus et manières de faire utilisés par des individus en train de résoudre ces tâches. Dans la théorie des ETM, ces deux aspects du travail mathématique sont identifiés et décrits grâce à deux plans : le plan épistémologique et le plan cognitif, chaque plan étant lui-même organisé de manière triadique. Le *plan épistémologique* est organisé selon des critères purement mathématiques et trois composantes en interaction ont été introduites pour le décrire : un ensemble d'objets concrets et tangibles (representamen) ; un ensemble d'artefacts tels que des instruments de dessin ou des formules ; un système théorique de référence basé sur des définitions, propriétés et théorèmes.

Le *plan cognitif* est structuré autour de trois processus cognitifs associés à un sujet rationnel qui peut être épistémique ou bien réel. Il s'agit de la visualisation liée au déchiffrement et à l'interprétation des signes ; de la construction dépendante des artefacts utilisés et des techniques associées ; de la preuve transmise par des actions produisant des validations et basée sur le cadre théorique de référence.

Un Espace de Travail Mathématique (ETM) désigne alors un espace abstrait qui permet l'organisation et la distribution de ces divers éléments constitutifs du travail mathématique. Il vise à rendre compte de la manière dont le travail mathématique se développe et se déploie dans un contexte éducatif quand les individus sont confrontés à des tâches mathématiques.

La question de la mise en relation et de l'organisation des différentes composantes du travail est vite devenue un élément central des recherches menées autour du travail mathématique dans la théorie des ETM. Cette réflexion est allée de pair avec l'exploration des représentations possibles pour décrire les relations et les interactions entre les différentes composantes mises en jeu. Il est ainsi apparu important d'associer un diagramme pour visualiser cet ensemble complexe de relations et d'interactions. Le diagramme des ETM ainsi créé est étroitement associé au développement théorique des ETM. Cependant, les deux ne doivent pas être confondus, le diagramme doit avant tout être vu comme un outil permettant de visualiser et de synthétiser des analyses détaillées du travail mathématique produit par des sujets effectuant des tâches mathématiques.

La mise au point et le choix de la représentation la plus adéquate pour rendre compte des formes de travail rencontrées ne sont pas aisés du fait de la diversité des formes de travail. Une des premières représentations (Figure 1) utilisées fait apparaître l'ETM dans le cas spécifique de la géométrie, de manière planaire, sans visualiser les relations (Kuzniak, 2004).

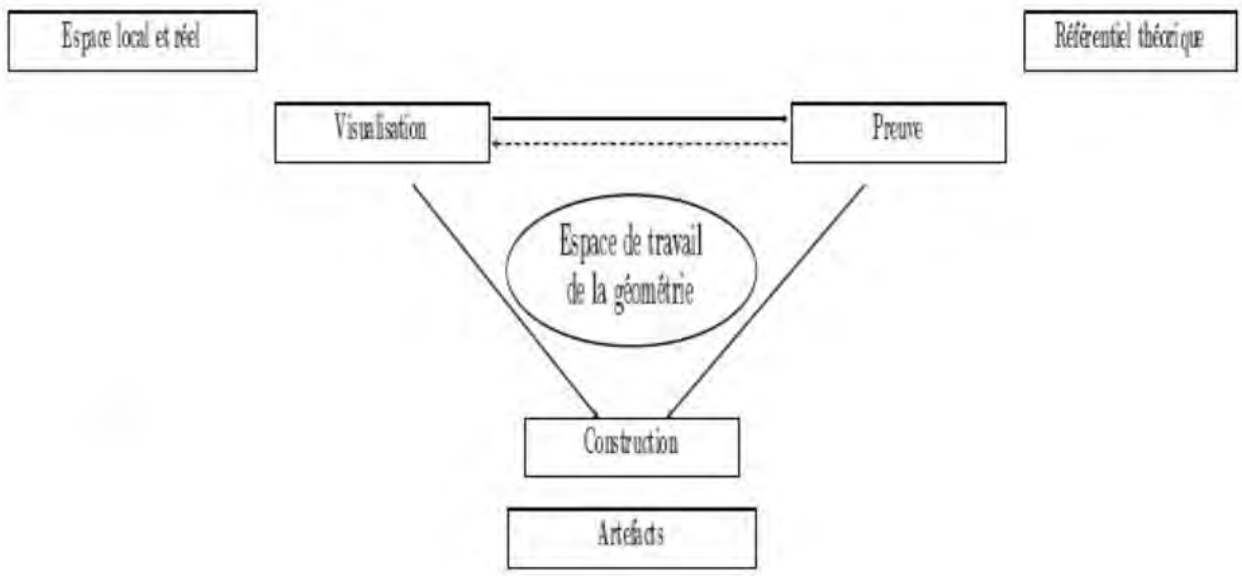


Figure 1. ETG, processus cognitifs et composantes épistémologiques (Kuzniak, 2004).

A partir de 2009, sous l'influence des premiers symposiums, on assiste à l'apparition des premiers diagrammes bidimensionnels (Figure 2) qui résultent aussi pour partie de l'introduction, à forte portée métaphorique, des plans épistémologique et cognitif.

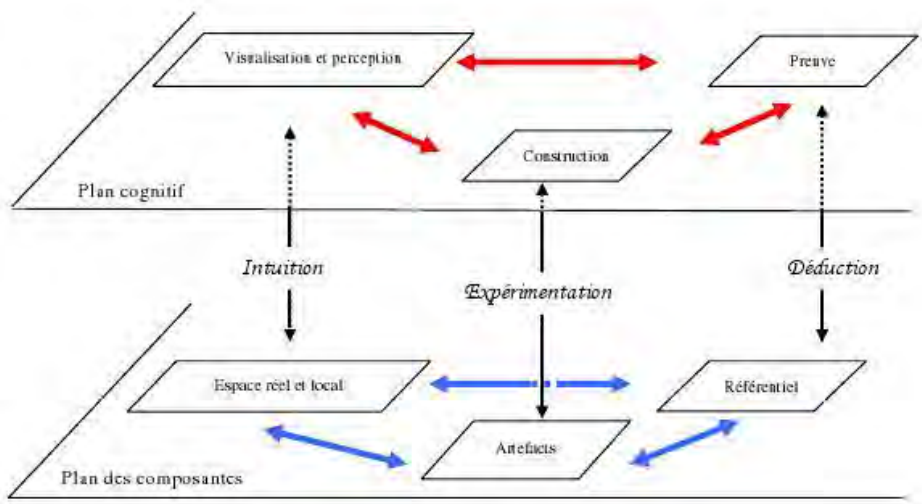


Figure 2. Interactions dans l'ETG (Kuzniak, 2009).

Très rapidement, la question des relations entre les plans épistémologique et cognitif conduit à l'émergence du diagramme des ETM sous la forme d'un prisme tel que nous le connaissons aujourd'hui.

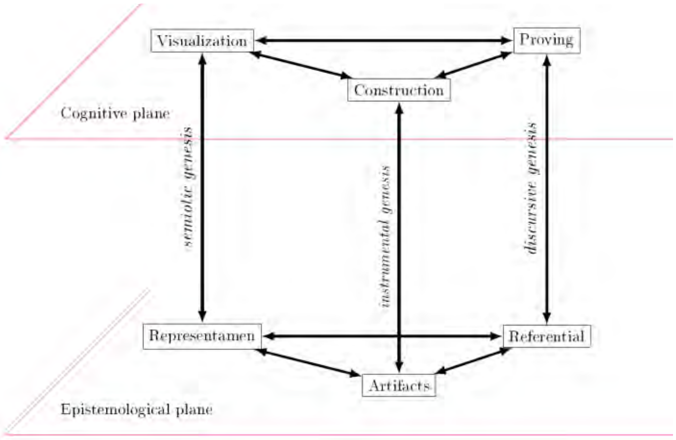


Figure 3. Le diagramme des ETM. Version 2016

Par la suite, les efforts de Richard et Coutat (2011) pour donner un sens à toutes les relations et interactions existant dans l'ETM ont permis de dégager l'idée des plans verticaux (Sem-Ins, Ins-Dis et Sem-Dis) qui rendent visibles certains états et contextes du travail (Figure 4).

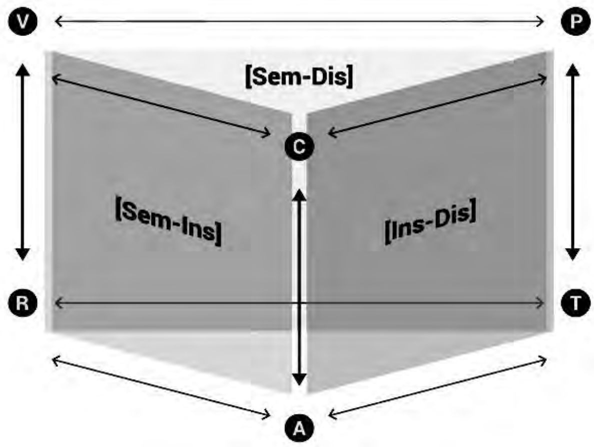


Figure 4. Les trois plans verticaux de l'ETM

L'articulation entre les plans repose sur une conception génétique du travail vu comme le développement des interactions entre les diverses composantes et dimensions de l'ETM. Ce développement suppose des transformations et des adaptations que l'on décrit dans la théorie grâce à trois genèses fondamentales liées au diagramme : les genèses sémiotique, instrumentale et discursive de la preuve (Figure 3).

Les différents types d'ETM

Un des points qui est parfois mal compris par les chercheurs, extérieurs à la théorie, est celui de la variété des ETM qui sont pris en compte dans la théorie. En fait, cette variété a plusieurs origines qui ne doivent pas être confondues et qui se traduisent par l'introduction de différents types d'ETM au fur et à mesure de l'avancée des recherches englobant des thèmes et des domaines mathématiques nouveaux.

Une première variété, intrinsèque à l'idée du travail mathématique dans la théorie des ETM. Comme je l'ai déjà indiqué, la conception du travail mathématique dans les

ETM est essentiellement dynamique et génétique. Ce travail évolue dans le temps en fonction des compétences nouvelles acquises par les individus ou en fonction des nouvelles demandes formulées par les diverses institutions qui gravitent autour de l'éducation mathématique.

Une deuxième variété, relatif à la position des actants par rapport à ce travail. Dans ce cas, le type de travail mathématique va dépendre de l'engagement du sujet dans les tâches. Il va aussi dépendre de la position du sujet par rapport à ces tâches : en est-il le concepteur, le prescripteur, l'exécuteur ? Pour rendre compte de ces différentes positions et les étudier, trois types de travail sont mis en relation avec des ETM différents.

Le travail de référence est défini, souvent de manière partielle et implicite, par les concepteurs des programmes. L'ETM de référence qui lui est associé rend compte des attentes institutionnelles. Il est construit a priori et suppose une organisation globale qui est destinée à être mise en forme par les enseignants pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Dans ce cadre, les tâches attendues sont normalement lissées et peaufinées par des experts pour être ensuite partagées par le monde éducatif.

Le travail personnel d'un élève ou d'un étudiant rend compte de la réalité du travail des individus qui s'approprie et transforme la tâche en relation avec leur ETM personnel qui de fait est très mouvant et évolutif en fonction des nouvelles actions que les sujets sont amenés à faire. Cela n'empêche pas de pouvoir identifier, au-delà des variations dues aux tâches proposées, des formes stables conformes ou non au travail attendu.

Le travail idoine et l'ETM idoine réfèrent à cet état intermédiaire de transmission et de médiation du savoir où une tension existe entre les attentes du professeur et la redéfinition de la tâche pour avancer dans la constitution du travail personnel des élèves. L'ETM concerné a été désigné sous le terme d'ETM idoine pour insister justement sur ces transformations qui le caractérisent pour s'ajuster au mieux au projet éducatif et à la réalité des apprenants. Il est donc mouvant et évolutif, mais, là encore, il est possible de le caractériser grâce à certains invariants que les recherches sur l'ETM idoine ont permis d'exhiber. Ces recherches ont établi la nécessité de prendre en compte deux états de cet ETM : un état *potentiel* qui correspond à ce que prévoit le professeur et un état *actuel* ou *effectif* qui donne à voir le travail réalisé dans la classe.

Une troisième variété, liée aux domaines en jeu. L'extension des études utilisant le cadre théorique des ETM à d'autres domaines que la géométrie a montré l'importance des changements de domaines mathématiques, chacun d'eux pouvant embarquer un ETM particulier associé au domaine en question. De manière plus précise, Montoya-Delgadillo et Vivier (2014) ont caractérisé ces changements en introduisant un jeu entre un domaine source et un domaine but.

De l’usage de la théorie des ETM pour l’étude et la régulation des situations didactiques

Les tâches ne font pas partie d’un ETM, mais elles participent de son activation lorsqu’un sujet y est confronté et doit se les approprier pour les effectuer. La vérification de l’efficacité des tâches comme supports de situations didactiques et vecteurs d’un travail mathématique adéquat est un objet d’étude important dans le cadre de la théorie. Les individus engagés dans une tâche produisent des actions avec des impulsions et aussi des buts à atteindre. De ce fait, il est possible de parler d’une circulation et d’une dynamique du travail dans l’ETM dont les diagrammes, à travers l’analyse détaillée de la réalisation des tâches, tentent de rendre compte. De ce fait, de nombreuses recherches ont tenté de visualiser au mieux avec l’aide du diagramme les formes de travail rencontrées et la diversité des formes de travail explique la variété des représentations utilisées.

Le premier chercheur à avoir tenté de saisir cette circulation grâce aux diagrammes est Lebot (2011) dans une étude sur l’apprentissage de la notion d’angle au collège. Par la suite, toutes les études fines sur le travail mathématique, notamment dans le cas de travaux de thèses, se sont trouvées confrontées à la description de cette circulation en apportant des solutions les plus adaptées à leurs problèmes.

Ainsi, Henríquez (Figure 5, 2014), pour son étude du travail personnel des étudiants confrontés à des tâches de géométrie, a choisi de représenter l’ensemble de la circulation dans un seul diagramme.

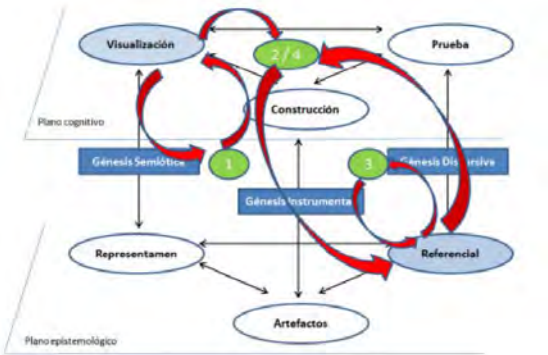


Figure 5. Circulation du travail géométrique (Henríquez, 2014)

La difficulté technique pour représenter rapidement ces différents éléments dans un seul diagramme l’a conduite à rechercher, malheureusement sans le succès espéré, un outil technologique qui permettrait de réaliser rapidement ces visualisations du travail et ainsi de pouvoir en faire un outil de formation.

D’autre part, dans son étude des probabilités à densité continue, Derouet (2016) confrontée au jeu entre différents domaines a choisi une forme de représentation articulant trois ETM représentés chacun par un diagramme. Cela lui permet une représentation des passages entre les différents ETM (fibrations externes). Plus récemment, Trunkenwald (Trunkenwald & Laval, 2019) a repris cette idée, mais en considérant les projections planes de chacun des prismes ce qui rend plus lisibles et moins complexes les diagrammes utilisés.

Parmi d'autres études, citons celles de Menares (2017) qui a introduit les plans verticaux orientés pour bien montrer l'idée de passage d'une genèse à l'autre qui anticipe l'idée de fibration interne. Pizarro (2018) a introduit l'idée de semi-plan vertical pour insister sur le fait que certains des éléments du plan épistémologique sont parfois convoqués sans que la genèse discursive de la preuve soit mise en œuvre. Enfin, Moutet (2017) a préféré utiliser un ETM étendu avec deux plans épistémologiques, celui de la physique et celui des mathématiques, pour décrire le travail effectué en cinématique relativiste.

Cette diversité des représentations utilisées répond à des questions de recherche précises, mais elle incite aussi à une vigilance diagrammatique dont les travaux en cours sur la méthodologie utilisée dans la théorie rendent compte (Kuzniak et Nechache, 2019b).

Travail mathématique complet, conforme et correct

Dans le cadre de leurs travaux sur la planification du travail, Kuzniak et Nechache (2014, 2015) ont privilégié l'idée de comics et introduit la notion de travail mathématique complet et conforme. Dans cette conception, l'analyse d'une tâche ou d'un ensemble de tâches grâce aux ETM aide à comprendre le travail et à le planifier à court et moyen terme. La théorie des ETM permet ainsi d'analyser le travail mathématique élaboré lors d'une session de classe ou d'un ensemble de sessions en précisant ses différentes étapes qui sont rendues visibles grâce aux comics qui réunissent une série de diagrammes sur le travail mathématique en cours.

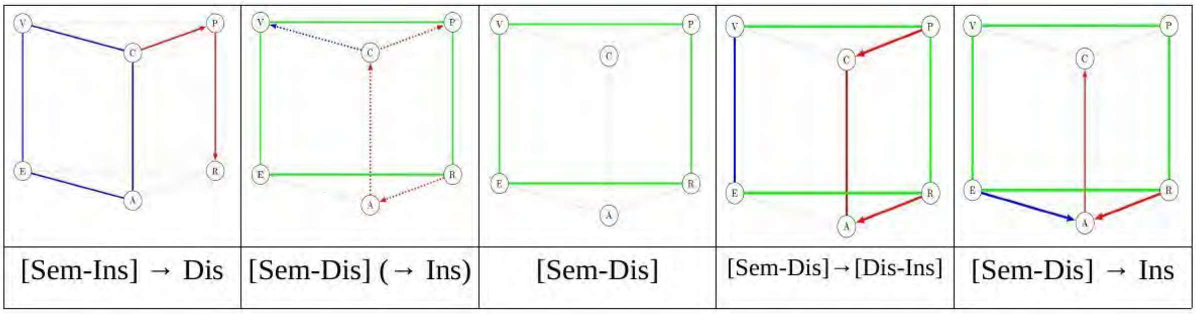


Figure 6. Comics ou série de diagrammes sur une suite de sessions de géométrie (Kuzniak et Nechache, 2015)

Ces deux auteurs considèrent que le travail mathématique est complet lorsque la circulation est assurée entre toutes les dimensions et composantes du digramme des ETM. Le travail est dit conforme lorsque les processus et procédures utilisés sont valables et conformes aux attentes présentes dans le paradigme privilégié. Enfin, le travail est dit correct lorsque les résultats obtenus sont exacts. L'étude de ces différents états du travail est favorisée par la différenciation établie entre outil et instrument par Kuzniak, Nechache et Drouhard (2016). Les outils sont en relation avec le plan épistémologique et les instruments avec le plan cognitif. De ce fait, il est possible de différencier trois types d'outils et d'instruments (sémiotique, technologique et théorique) associés à chacune des dimensions de l'ETM conformément à la vision triadique du travail mathématique.

Le diagramme des ETM, les ETM apparaissent alors comme des outils méthodologiques qui permettent de s'assurer de la complétude, de la conformité et de la correction du travail. En cas de difficultés lors de la réalisation de la tâche, ils permettent de comprendre l'origine de certains blocages qui peuvent être dus à des confinements dans un plan ou une dimension du diagramme, à des malentendus durant la réalisation de la tâche… Il est alors possible de proposer des adaptations relatives, par exemple, au choix de nouvelles tâches spécifiques, d'artefacts plus adaptés, etc. Il est également possible de proposer des médiations favorisant les rebonds qui aident à sortir de ces blocages ou confinements. En plus de permettre des descriptions et des analyses fines d'implémentations de tâches dans les classes, l'usage des ETM rend possible la mise au point fine de tâches planifiées pour construire le travail mathématique attendu.

PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Pour conclure, je souhaite aborder quelques-unes des perspectives de recherches qui s'offrent aux chercheurs investis dans la réflexion autour du travail mathématique à travers l'usage de la théorie des ETM.

Questions internes à la théorie des ETM

L'histoire de la théorie des ETM et la présentation des divers usages du diagramme pour l'étude du travail mathématique montrent que deux points étroitement liés méritent l'attention des chercheurs. Le premier porte sur la méthodologie de recherche associée à la théorie des ETM, et le second est concerné par l'approfondissement de la compréhension des différentes et nombreuses genèses à l'œuvre dans le développement du travail mathématique.

La définition précise d'une méthodologie pour conduire les études relevant des ETM est nécessaire pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les diverses études menées dans les groupes de réflexion sur la mise en réseau des théories en didactique des mathématiques (Bikner-Ahsbahs, Knipping et Pressmeg, 2015) insistent sur la dialectique entre une théorie et la méthodologie qui lui est associée. Leur développement va de pair, de même que leur acceptation dans une communauté plus large que celle des seuls chercheurs privilégiant cette théorie.

La mise en place d'une méthodologique propre aux ETM suppose aussi par une meilleure compréhension de différentes genèses qui interviennent dans le travail mathématique.

Lors du dernier symposium, trois ateliers étaient consacrés à ces questions.

Décrire précisément le jeu à l'intérieur de la théorie : Atelier Kuzniak-Nechache

Kuzniak et Nechache ont proposé une méthode d'étude du travail personnel des étudiants basée sur un découpage de leur activité pendant l'accomplissement d'une tâche en une suite d'actions mathématiques bien précises. Puis, chacune de ces actions est analysée de manière très fine avec la théorie des ETM pour identifier la circulation du travail à l'œuvre dans la résolution. Le diagramme sert alors à visualiser et à synthétiser le flux du travail au cours de la résolution d'une tâche. Enfin, une synthèse est proposée de manière à caractériser le travail mathématique (conformité, blocages, confinements, etc.).

Rôle et fonction de la visualisation dans ce jeu entre genèses : Atelier Montoya-Delgadillo et Vivier.

Depuis son origine, c'est sans doute à travers les différentes extensions des recherches à des domaines mathématiques nouveaux que la théorie a connu ses progrès les plus convaincants et les plus fondamentaux. En quittant le domaine de la géométrie, les chercheurs ont dû concevoir de manière étendue certains des processus cognitifs associés initialement au travail géométrique comme la visualisation. Celle-ci est vue désormais comme le processus cognitif plus large associé à l'identification et au développement d'un ensemble de traitements et transformations sur les representamen englobés dans la genèse sémiotique. Montoya et Vivier étudient le rôle des signes de l'analyse mathématique qui donnent naissance à un travail spécifique de visualisation basée sur des tableurs, des écritures numériques… Cette approche montre aussi la nécessité des paradigmes pour comprendre en profondeur chaque domaine mathématique.

Comprendre, dans le modèle, un travail de preuve qui ne se réduit pas à la seule dimension discursive de preuve : Atelier Henríquez et Richard

La compréhension profonde des différentes genèses ou des plans de travail est reliée à des questions méthodologiques, mais aussi à des études plus précises et détaillées sur la nature des preuves et des validations dans le travail mathématique. Il est ainsi possible de décrire plusieurs types de preuves introduits (discursivo-graphique, mécanique, algorithmique) en relation avec les différentes genèses et les plans verticaux de l'ETM (Richard, Venant et Gagnon, 2018). Dans quelle mesure les outils de la théorie permettent-ils de caractériser les preuves et les modes de validation les plus fréquemment utilisés dans l'enseignement des mathématiques en liaison avec des outils technologiques mécaniques ou informatiques ?

Vers une étude du travail mathématique dans sa globalité

La question de l'identification du travail mathématique global à partir d'études particulières portant sur des tâches spécifiques et parfois isolées est une question qui ne concerne pas que la seule théorie des ETM. En effet, toute approche théorique en didactique est confrontée à cette tension entre les résultats d'études partielles et leur interprétation en terme global, car la plupart des recherches reposent sur l'étude de situations et de tâches particulières. Cependant, les études sur les pratiques enseignantes montrent une rapide stabilisation de ces pratiques et laisse supposer la standardisation du travail mathématique mis en œuvre qui en résulte.

Un des enjeux de la recherche est de repérer ces invariants et les tâches emblématiques apportent des pistes de réflexions fructueuses sur cette question. Introduites par Kuzniak et Nechache (2016), les tâches emblématiques sont des tâches particulières qui doivent remplir un certain nombre de conditions que seules l'analyse et l'expérimentation permettent de valider. Elles doivent notamment :

1. Être disponibles dans les ETM de référence, autrement dit bénéficier d'une reconnaissance qui témoigne de leur adéquation au travail mathématique visé par l'institution scolaire pour les élèves.
2. Être vivantes dans les ETM idoines, autrement dit faire partie des tâches qui sont effectivement proposées d'abord dans les ETM idoines potentiels définis par les manuels, mais aussi et surtout dans les classes ordinaires.
3. Être potentiellement porteuses d'un travail mathématique complet et conforme aux exigences du paradigme privilégie dans l'institution. Les tâches emblématiques doivent permettre une circulation complète entre les composantes et les plans en s'appuyant sur un travail conforme au niveau des processus et correct au niveau des résultats.

En s'appuyant sur l'étude de tâches emblématiques, il est alors possible de rendre compte plus globalement du travail mathématique développé dans les classes par les élèves avec leurs professeurs.

Extension des domaines d'études

Je n'aborderai pas ici, faute de temps et de place, les nombreuses recherches portant sur des domaines spécifiques. Elles contribuent pourtant de manière fondamentale à l'évolution de la théorie en interrogeant ses fondements, ses limites et ses méthodes. Initialement, les recherches ont porté sur la géométrie en formation des enseignants et sur la géométrie en contexte technologique. Puis, deux domaines ont fait l'objet d'intenses travaux : les probabilités et l'analyse. L'étude de l'algèbre et de l'algèbre linéaire a aussi permis de fructueux rapprochements avec d'autres théories comme l'épistémographie de Drouhard ou la théorie APOS de Dubinsky.

Plus récemment, des recherches ont porté sur des domaines frontières des mathématiques et de la physique comme la cinématique classique ou relativiste. De même, l'importance des statistiques et de l'algorithmique a confronté le cadre des ETM aux questions d'interfaces avec le travail dans d'autres disciplines et conduit les chercheurs à envisager de nouvelles représentations qui sont en cours d'exploration.

LE FUTUR DE LA THÉORIE

Notre rapide parcours dans l'histoire de la théorie ainsi que dans les travaux récents produits lors du symposium ETM6 montre la richesse et la diversité de la théorie des ETM aujourd'hui. Comme nous l'avons vu, de nombreux outils ont été introduits tant au niveau global (types d'Espaces de Travail Mathématique, circulation entre ces espaces, tâches emblématiques, paradigmes) qu'à un niveau plus local portant sur l'étude précise de tâches (outils, instruments, fibrations, avatars).

La constitution d'un corpus théorique de plus en plus vaste rend l'accès à la théorie des ETM plus complexe et oblige à une vigilance accrue sur ses usages par les chercheurs pour en éviter les dérives parfois ravageuses avec des emplois erratiques et incontrôlés. Il devient essentiel de raffiner et de préciser son usage en favorisant un emploi adéquat des divers outils qui ont été introduits pour permettre l'étude plus précise des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.

Cependant, et dans le même temps, les chercheurs investis dans la théorie doivent éviter le repliement sectaire : frein à l'innovation, à l'imagination théorique et au développement méthodologique qui ont caractérisé jusqu'ici la recherche sur les ETM. Par ailleurs, il importe de garder cette plasticité ouverte et intégratrice qui en fait un des attraits (Artigue, 2016 ; Bikner-Ahsbahs, 2017).

La théorie des ETM vise à comprendre et à planifier le travail mathématique dans le cadre scolaire, mais, de fait, toute l'activité d'enseignement et d'apprentissage ne se résume pas au seul travail mathématique et il est important de considérer les éléments extérieurs à ce travail, mais qui participent de sa bonne réalisation : affects et émotions, travail collaboratif et collectif, modes de pensée spécifiques, échanges langagiers, contexte culturel et social… Autant d'éléments complémentaires et indispensables qui ne relèvent pas directement de la théorie, mais qui peuvent contribuer à des échanges fructueux avec les spécialistes de ces questions et ceci sans dénaturer la spécificité et la nature de chacune des recherches. Cette complémentarité explique notamment les échanges avec des chercheurs s'insérant dans d'autres cadres théoriques comme la théorie APOS, les MTSK ou les théories de l'activité.

Cependant, cette ouverture ne doit pas conduire la théorie à se dissoudre dans le « mainstream » de l'éducation mathématique qui a souvent perdu de vue les enjeux de savoir disciplinaire propre aux mathématiques (Radford, 2017).

Enfin, il importe de garder ce que Richard appelle l'intelligence (au sens anglais du terme) de la théorie à savoir une capacité adaptative sans reniement des principes de base et des finalités à long terme. La garantie de cet avenir est le travail fait en commun par une communauté renouvelée de chercheurs exigeants et curieux. De ce point de vue, le symposium de Valparaiso est porteur d'espoir avec le fort investissement de jeunes, et de moins jeunes, chercheurs particulièrement brillants et motivés.

REFERENCES

Artigue, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lens. *ZDM-Mathematics education*,48(6), 935-939.

Bikner-Ahsbahs, A. (2017). Introduction to the papers of TWG17: Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research. *In Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.). Proc. Of the 10th CERME pp 2683-2691. Dublin, Ireland.* Dublin.

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. & Pressmeg, N. (2015). *Approaches to qualitative research in Mathematics Education.* New-York: Springer.

Bikner-Ahsbahs, A. & Prediger, S. (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education.* New-York: Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* New York: Springer.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12* (1), 73-112.

Coutat, S., & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés mathématiques. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 97–126.

Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral*. Université Paris Sorbonne Cité, Université Paris Diderot.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61 (1-2).103-131.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 30(54), 1-22.

Guzman, I., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Paris : Irem Paris-Diderot.

Granger, G.G. (1963). *Philosophie du style*. Paris : Armand Colin.

Henríquez (2014). *El trabajo geométrico de profesores en el transito de la geometria sintética a la analitica en el nivel secundaria.* Tesis. Pontificia Universidad de Valparaiso.

Habermas, J. (1969). *Technology and Science as Ideology*. Boston: Beacon Press.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40(3)*, 283–312.

Kuzniak, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France, In Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E. & Vivier, L. Eds, *Chypre et France-Recherche en Didactique des Mathématiques*, Lefkosia.

Kuzniak, A. (2003). Paradigmes et espaces de travail géométriques. *Note d'habilitation pour diriger des recherches. Université Denis Diderot Paris 7.*

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM-Mathematics education*,48(6), 721-737.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J.-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education.*

Kuzniak, A & Nechache, A. (2015). Using the Geometric Working Spaces in order to plan the teaching of geometry. *Proceedings of Cerme9. Prague.*

Kuzniak, A & Nechache, A. (2016) Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines et personnels : existence et usages. *Quinto Simposio Espacio de Trabajo Matemático - ETM5.* Florina, Grecia.

Kuzniak, A & Nechache, A. (2019). Personal geometrical work of pre-service teachers: a case study based on the theory of Mathematical Working Spaces. *In Procedings of Cerme11. Utrecht, Nederlands.*

Kuzniak, A & Nechache, A. (2019b). Une méthodologie pour analyser le travail personnel d'étudiants dans la théorie des Espaces de Travail Mathématique. *Actas Symposium ETM6.*

Lebot, D. (2011). Mettre en place le concept d'angle et de sa grandeur à partir de situations ancrées dans l'espace vécu : Quelles influences sur les ETG ? *Master de didactique des mathématiques (non publié).* Paris : Irem, Université Paris-Diderot.

Leontieff (1978). Activity, Consciousness, and Personality. *Prentice Hall.*

Montoya, E., & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19,* 73–101.

Moutet, L. (201). Diagrammes et théorie de la relativité restreinte : Une ingénierie didactique, Université Paris-Diderot.

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19,* p. 67-90

Pizarro, A. (2018). *El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos.* Université Paris Sorbonne Cité, Université Paris Diderot.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM–Mathematics Education,* 40, 317–327.

Radford, L. (2017). On inferentialism. *Mathematics Education Research Journal*, *29(4),* 493-508.

Radford, L. (2019). On the Epistemology of the Theory of Objectification. *Procedings of Cerme11. Utrecht, Nederlands.*

Richard P.R., Venant, F., & Gagnon M. (2019). Issues and challenges about instrumental proof In: Hanna, G., Reid, D., de Villiers. M. (eds), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Springer International Publisher.

Thurston, W. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 30(2), 161–177.

Trunkenwald, J., & Laval, D. (2019). Algorithms as a discovery process in frequentist approach to prediction interval. *Procedings of Cerme11. Utrecht, Nederlands.*

Vergnaud, G. (1990). La theorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2), 133-170.

LES DIFFÉRENTS SYMPOSIUMS DE 2009 À 2018

Symposium	Lieu et organisateurs	Publications associées
2009 (ETM1) Rencontres Franco-chypriotes	Nicosie, Chypre, Athanasios Gagatsis	2009 Livre
2010 (ETM2) Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique	Paris, France, Alain Kuzniak et Laurent Vivier.	2011 et 2012 Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, volume 16
2012 ETM3 Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique	Montréal, Canada, Philippe R. Richard et Annette Braconne-Michoux	Actes Université de Montréal. Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 17.4(I, II). 2014
2014 ETM4 Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique	Madrid, Espagne, Inés Gómez-Chacón	Actes Numéro spécial Bolema, 30(54) Numéro spécial ZDM, 48(6)
2016 ETM5 Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique	Florina, Grèce, Kostas Nikolantonakis	Actes Numéro spécial Menon, 4ème numéro thématique, novembre 2018
ETM6 Valparaiso Symposium sur le travail mathématiques	Valparaiso, Chili, Elizabeth Montoya-Delgadillo	Actes

LA TEORÍA DE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICOS DESARROLLO Y PERSPECTIVAS

Alain Kuzniak

Universidad de Paris, LDAR, Francia

Alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

En este trabajo se presentan algunos elementos clave de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático a partir de la evolución de este marco teórico. Empezando por los orígenes de la teoría, se trata de mostrar su desarrollo y cuestionar su estado actual y las perspectivas de investigación que permite proyectar.

***Palabras clave**: Espacio de trabajo matemático, paradigmas, trabajo matemático, teoría didáctica.*

INTRODUCCIÓN

Esta conferencia inaugural del simposio ETM6 nos permite presentar algunos elementos clave de la teoría de los ETM basada en un viaje en el tiempo. A partir de los orígenes de la teoría, se trata de mostrar su desarrollo y de cuestionar su estado actual y las perspectivas de investigación que nos permite imaginar.

Desarrollado desde hace más de 20 años por un colectivo de investigadores de América Latina, Canadá y Europa, el corpus teórico de los Espacios de Trabajo Matemáticos ha sido presentado y reconocido recientemente como una teoría. En esta contribución, la constitución progresiva de esta identidad teórica se revela insistiendo en algunas de sus etapas y en algunos elementos clave de la teoría. La presentación concluye con una visión general de algunas de las líneas de investigación actualmente en curso que se basan en la teoría de los ETM.

EN LOS ORÍGENES DE LA TEORÍA

Un corpus teórico y metodológico desarrollado en el contexto de la didáctica francesa

A pesar de algunas disputas entre grupos académicos con la personalidad de los distintos investigadores implicados en su desarrollo, hay que reconocer que la didáctica de las matemáticas en Francia se basa en un conjunto de principios teóricos y metodológicos que contribuyen a establecer una verdadera homogeneidad cultural.

De una manera un poco simplificada, podemos primero identificar dos teorías con una fuerte orientación epistemológica donde la reflexión sobre el contenido matemático a enseñar sirve de base y marco para la expansión teórica.

- La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), cuyos fundamentos fueron establecidos por Brousseau (1997), combina la investigación teórica y los datos empíricos en estrecha relación con la clase. Su objetivo es desarrollar una didáctica experimental que vaya más allá de la didáctica clásica descrita en la

Magna Didáctica de Comenius, en la que todas las orientaciones e ideas han sido dadas a priori y no han sido validadas por un trabajo de investigación sobre el terreno.

- La Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) iniciada por Chevallard (1992) se basa en una visión antropológica y holística de los actos de aprendizaje y enseñanza. Este marco holístico, basado en el estudio de las praxeologías, apunta a una autonomía teórica de la didáctica independientemente de otros dominios científicos como las matemáticas, la sociología o la psicología.

Estas dos teorías disfrutan de visibilidad y reconocimiento internacional, como lo demuestran los premios otorgados a sus fundadores: la Medalla Klein 2003 a Brousseau y el Premio Freudenthal 2009 a Chevallard.

Otros dos marcos teóricos son muy influyentes en el contexto francés y esta vez tienen en cuenta, de manera más central, los elementos cognitivos específicos del sujeto que está aprendiendo matemáticas.

- La Teoría de los Campos Conceptuales desarrollada por Vergnaud (1991) proporciona una dimensión psicológica y cognitiva, basada en la teoría del aprendizaje de Piaget. Complementa las dos teorías anteriores fuertemente influenciadas por la epistemología matemática.
- El enfoque semiótico de Duval (2006) con el desarrollo de registros semióticos se centra en los signos y la semiosis como mediadores de objetos matemáticos que sólo son accesibles a través de sus diferentes representaciones semióticas.

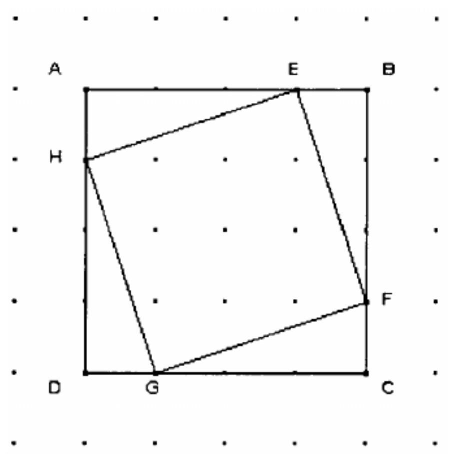
Esta presentación quedaría incompleta si no se tuvieran en cuenta una serie de desarrollos teóricos relacionados con las diferentes formas de considerar la actividad de las personas implicadas en el acto de enseñanza. Estos enfoques están en línea con la tradición soviética de trabajo sobre la actividad humana (Vygotski, Leontieff) reinterpretada por ergónomos franceses como Pastre o Clot. Dependiendo de los puntos de vista considerados, se puede entonces señalar el enfoque instrumental (Lagrange, Artigue, etc.) sobre el uso de herramientas informáticas en la enseñanza o el doble enfoque didáctico y ergonómico de la profesión docente (Robert y Rogalski, 2002).

Es en este contexto que la teoría de los ETM (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016, Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016) se desarrolló buscando vincular y preservar muy estrechamente los puntos de vista epistemológico y cognitivo. Su apertura a largo plazo a las colaboraciones internacionales también la hace única y original. Por último, cabe señalar que está íntimamente ligado a las prácticas docente y al desarrollo del aprendizaje en el aula, con el fin de evitar el desarrollo teórico a fuera de la realidad.

Dos ejemplos de fundadores

Para ilustrar este anclaje en la realidad de los actores de la educación y también esta apertura a lo internacional, mencionaré brevemente dos ejemplos antiguos que dan luz sobre algunas de las motivaciones iniciales de la teoría.

1. La producción de una alumna-profesora de nivel primaria, licenciada en filosofía (Houdement y Kuzniak, 1999a).



Este es un problema clásico que pide a los estudiantes que demuestren que el cuadrilátero central (HEFG) es un cuadrado como el cuadrado de base (ABCD). Un estudiante de formación de docentes para la primaria muestra este resultado comprobando únicamente que los lados son iguales, porque EH es igual a AE. Para mostrar esta "falsa" igualdad, utilizó su compás para hacer un reporte de medición. De hecho, la desviación de longitud y la incertidumbre relativa (del orden del 3%) son pequeñas, lo que puede explicar el error de arrastre, pero al mismo tiempo, uno podría esperar una aplicación obvia de la desigualdad triangular o una dependencia de la intuición visual que contradice la igualdad. ¿Qué podría motivar un error tan flagrante? Aquí, una aplicación resumida de los niveles de Van Hiele a este estudiante es doblemente ineficaz, porque, de hecho, el estudiante en cuestión es un adulto y, además, tenía un título en filosofía, lo que garantiza a priori un alto y bien organizado nivel de razonamiento racional.

2. Diferentes concepciones sobre geometría entre futuros profesores de Chile y Francia en 2005

Un fuerte impulso para el trabajo teórico iniciado en torno a una mejor comprensión del trabajo geométrico proviene de la investigación realizada entre 2003 y 2005 sobre la enseñanza de la geometría en la formación de profesores en Chile y Francia (Guzmán y Kuzniak, 2006). En un estudio que intentaba aclarar el tipo de relaciones con la geometría que tenían los estudiantes-profesores chilenos y franceses, surgieron dos respuestas características pero opuestas de cada una de las poblaciones.

En Chile: es fácil y divertido, hay muchos dibujos y construcciones con los instrumentos.

En Francia: es aburrido, hay que escribir mucho, justificar todo lo que se ve.

Una vez más, era necesario explicar las razones fundamentales que podían explicar una diferencia tan marcada entre los sentimientos de los futuros profesores de cada país.

Describir, entender y dar forma al trabajo matemático

La investigación iniciada en torno al grupo inicialmente involucrado en el proyecto ECOS-Sud entre París y Valparaíso se centró en el desarrollo de un conjunto de herramientas teóricas y metodológicas relevantes para permitir el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas durante la educación primaria y secundaria, pero también en la formación de profesores.

Esta investigación buscaba entender las diferencias entre la enseñanza de las matemáticas en diferentes instituciones y países, pero sin la voluntad de clasificarlas por orden de jerarquía, contrariamente a la filosofía de grandes estudios internacionales como PISA o TIMSS, todos ellos impregnados de este punto de vista.

También se trataba de centrar la investigación en matemáticas teniendo en cuenta los objetivos a largo plazo de un sujeto que "trabaja" en matemáticas. Esto condujo a que el trabajo matemático se colocara en el centro de la investigación didáctica prevista. Este trabajo dio lugar a una primera síntesis que vinculó un espacio de trabajo propicio para la realización de un trabajo matemático adecuado, de acuerdo con lo esperado por la escuela, y diferentes paradigmas que orientan y dirigen el trabajo de los alumnos y profesores. El objetivo de la investigación era describir, comprender y (trans)formar el trabajo matemático para que se ajuste a las expectativas que pueden variar según el contexto cultural e histórico de un país o institución.

EL TIEMPO DE LA TEORÍA

El reconocimiento como teoría del corpus metodológico y teórico desarrollado en torno a los ETM es un fenómeno reciente. Este desarrollo de la teoría ha sido apoyado por toda una comunidad de investigadores de diferentes países y continentes. Simposios, grupos de trabajo, tesis y numerosos artículos colaborativos también han contribuido a este avance teórico. En lo que sigue, presentaré la evolución basada en un enfoque dinámico de la investigación didáctica.

Un desarrollo teórico y metodológico apoyado por una comunidad de investigadores

El primer surgimiento visible de una investigación que tiene en cuenta la idea del trabajo matemático en asociación con la noción de paradigma y espacio de trabajo aparece en dos artículos sobre la geometría de Houdement y Kuzniak publicados en 1999. El aspecto más visible y conocido de estos artículos es la noción de paradigmas concebidos como diferentes formas de pensar y demostrar en geometría. La idea básica resumida por los autores es la siguiente:

> En la educación, tres paradigmas distintos estructuran el campo de la geometría. Estos paradigmas reflejan las diferentes etapas de la sucesión de ciclos académicos. Cada etapa se caracteriza por prácticas y desafíos específicos en la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina. (Houdement et Kuzniak, 1999, p. 285).

Se han introducido tres paradigmas, designados con los términos Geometría I, II y III. Cada paradigma es lo suficientemente global y coherente como para definir y estructurar la geometría como un dominio matemático y proporcionar espacios de trabajo adecuados para resolver una amplia gama de problemas. Solo dos de ellos – Geometría I y II – desempeñan un papel importante en la enseñanza secundaria actual en Francia.

Esta primera descripción se complementa con la siguiente propuesta sobre el impacto potencial de estos paradigmas en la enseñanza de la geometría.

> Los estudiantes y los profesores pueden encontrarse implícitamente en diferentes paradigmas y estas diferencias de enfoque pueden llevar a malentendidos mutuos y bloqueos. (Ibid., p. 285)

La idea del paradigma como medio para entender las diferencias entre instituciones sin necesidad de juzgarlas ni clasificarlas ha cobrado todo su significado gracias al proyecto ECOS-Sud que ya hemos mencionado. Este proyecto marcó el inicio de un trabajo de colaboración que aún continúa entre los equipos de Valparaíso, entonces liderados por Ismenia Guzmán y los de París y Estrasburgo (Castela, Houdement, Kuzniak y Rauscher).

Gracias a esta colaboración, pero también al encuentro de investigadores interesados en el marco teórico de paradigmas geométricos como Straesser (Alemania), Gagatsis (Chipre) y Parzysz (Francia), se creó una pequeña comunidad de investigadores que dio lugar a un primer encuentro en Nicosia en 2009. En 2010, en París, se estableció la idea de organizar las reuniones en forma de un simposio. El objetivo era fomentar los intercambios en pequeños grupos y luego la publicación en forma de actas y artículos en revistas de una selección de contribuciones importantes. Desde 2012, ETM3 en Montreal, estos simposios han tomado el nombre de Simposio ETM con ETM4 en Madrid en 2014 y ETM5 en Florina en 2016. El objetivo de estos simposios no es sólo desarrollar la teoría de los ETM, sino también, en términos más generales, fomentar los intercambios sobre la investigación en didáctica que tenga en cuenta, de una manera u otra, el trabajo matemático. Es por eso que ETM6, en Valparaíso, en 2018, fue un simposio sobre el Trabajo Matemático.

La aventura continúa ya que, en 2021, el séptimo simposio tendrá lugar en Estrasburgo y será organizado conjuntamente por los equipos de Estrasburgo y París dirigidos por Charlotte Derouet, Assia Nechache y Laurent Vivier.

En 2016, la publicación de números especiales sobre los Espacios de Trabajo Matemáticos en la revista Bolema y especialmente en la revista ZDM *Mathematics Education* marca lo que algunos han denominado el "coming out" teórico de los ETMs. De hecho, en sus comentarios que cerraban el número especial de ZDM, Radford y Artigue comentaban sobre la teoría de los ETM y luego se hizo natural resumir bajo el término de teoría este ya vasto corpus que, hasta entonces, tanto por modestia como por prudencia, los investigadores en el campo habían optado por caracterizarlo como un enfoque teórico y metodológico. De hecho, asumir el modelo del ETM como teoría implica ser capaz de cumplir una serie de criterios sobre los que Radford ya había llamado la atención en el simposio de Montreal (MTE3, 2012).

Para avanzar en este punto, nos referimos a la caracterización de lo que es una teoría en la didáctica de las matemáticas, como lo sostienen Bikner-Ahsbahs y Prediger (2014) en su libro sobre la creación de redes de diferentes teorías. Inspirados por Radford (2008), los autores abogan por la aclaración de los principios, metodología, tipo de problemas y *Key-constructs* que darán a una teoría su especificidad y originalidad en el ámbito de la didáctica matemática.

SOBRE ALGUNOS PUNTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE LOS ETM

En el centro de la teoría: el trabajo matemático

El propósito de la teoría de los ETM es el estudio específico del trabajo matemático en el que los alumnos y los profesores se dedican realmente a la enseñanza de las matemáticas. Pero, ¿qué abarca esta noción de trabajo matemático, que se considera central en esta teoría? La expresión trabajo matemático debe ser considerada como un conjunto sintáctico y semántico que combina estrechamente trabajo y matemáticas. El trabajo aparece como un conjunto de actividades humanas organizadas para alcanzar objetivos; la orientación y el propósito de este trabajo se apoya en las matemáticas. Por el contrario, las matemáticas, así consideradas, se transforman por el hecho mismo de ser consideradas como una obra humana específica.

El trabajo matemático es una forma de trabajo intelectual particularmente marcada por la racionalidad inherente a las matemáticas. En consecuencia, el doble enfoque de Habermas (1969), que hace énfasis tanto en la acción instrumental como en la elección racional como componente del trabajo, nos parece particularmente adecuado para nuestro enfoque.

> By « work » or purposive-rational action, I understand either instrumental action or rational choice or their conjunction. Instrumental action is governed by technical rules based on empirical knowledge. (...). The conduct of rational choice is governed by strategies based on analytic knowledge. (...) Purposive-rational action realizes defined goals under given conditions. (Habermas, 1969, pp. 92-93).

La traducción francesa (1970) transforma la palabra *acción*, utilizada en inglés, en la palabra *actividad*, y nos confronta con el uso, si no ambiguo, al menos polisémico, de términos relacionados tales como acción, actividad, actos, etc. Además, es imposible evitar esta confrontación terminológica debido a la importancia de las teorías de la actividad en el contexto de la didáctica matemática, especialmente en los países francófonos. En el enfoque, que surgió del trabajo de Leontieff (1978), se favorece una visión inclusiva de los conceptos de operaciones, acciones y actividades. Cada uno de estos términos se refiere niveles cada vez más avanzados en el desarrollo de la conciencia del sujeto que actúa. La actividad adquiere un papel primario y crucial, con autores como Radford (2019) por lo que la actividad produce el movimiento que realiza la *actualización* del conocimiento (knowledge) en el saber (knowing).

> Knowing as the actualization of knowledge evokes indeed this temporal dimension of a whole in continuous movement. And what produces the movement is activity: knowledge and knowing are related through activity. Indeed, knowing can appear only through activity. This activity actualizes knowledge, brings it to life—like the classroom activity of solving an algebraic equation brings algebraic knowledge to life. (Radford, 2019)

De una manera más prosaica y disminuyendo las hipótesis psicológicas sobre el desarrollo del pensamiento, es la acción que es privilegiada en la teoría de los ETM en la cual que es vista como la manifestación visible del trabajo de un sujeto. Esta elección tiene muchas implicaciones teóricas y metodológicas que todavía están siendo exploradas (Kuzniak y Nechache 2018). A partir del análisis de las acciones matemáticas identificadas en una persona, se trata de identificar su trabajo matemático con el propuesto de adaptarlo o transformarlo en función de las distintas expectativas que se ejercen sobre él en el campo de la didáctica matemática.

En la teoría de los ETM, el trabajo se basa en un conjunto de acciones organizadas y finalizadas, lo que permite enfatizar la dualidad entre los procesos de trabajo, por un lado, y los resultados del trabajo, por el otro. Granger (1963) vincula los resultados producidos por el trabajo matemático con los contenidos y asocia los procesos con las estructuras y formas generadas por este trabajo. La abstracción del trabajo matemático puede llevar a considerar estas formas y estructuras como la esencia de este trabajo. En mi opinión, es importante mantener el equilibrio entre proceso y producto para reflejar el trabajo matemático en su globalidad.

De cierto modo, esta dualidad y abstracción del trabajo matemático nos obliga a ir más allá de los puntos de vista habituales sobre el trabajador considerado como un *tâcheron* (o tabajador a destajo) o incluso como un técnico esencialmente preocupado por los resultados para integrar el nivel de organización de los procesos próximos al ingeniero y, en definitiva, constitutivos del trabajo del matemático (Nechache, 2017).

Finalmente, para concluir con esta parte, el trabajo matemático es lo que hacen los matemáticos, *aquellos individuos que profundizan la comprensión humana de las matemáticas* (Thurston, 1994). Este tiene lugar en diferentes contextos y con diferentes motivaciones. Además, este trabajo es a largo plazo, implica una cierta permanencia y requiere esfuerzos. Uno de los objetivos de la teoría de los ETM será reconocer y estudiar todos estos elementos del trabajo en el contexto escolar.

El Espacio de Trabajo Matemático y su diagrama

De la presentación que acabamos de hacer, se deduce que para entender el trabajo matemático de los individuos que se enfrentan a tareas matemáticas, es necesario tomar en cuenta dos aspectos estrechamente relacionados de este trabajo en la práctica de los matemáticos. El primer aspecto de naturaleza epistemológica está relacionado con el contenido matemático del dominio estudiado; el segundo de naturaleza cognitiva está relacionado con los procesos y formas de hacer que utilizan los individuos para resolver estas tareas. En la teoría de los ETM, estos dos aspectos del trabajo matemático se identifican y describen en dos planos: el plano *epistemológico* y el plano *cognitivo*, cada plano organizado de manera triádica. El *plano epistemológico* está organizado según criterios puramente matemáticos y se han introducido tres componentes interactivas para describirlo: un conjunto de objetos concretos y tangibles (representamen); un conjunto de artefactos como instrumentos de dibujo o formulas; un sistema de referencia teórico basado en definiciones, propiedades y teoremas.

El *plano cognitivo* se estructura en torno a tres procesos cognitivos asociados a un sujeto racional que puede ser epistémico o real. Se trata de la visualización relacionada con la decodificación e interpretación de los signos; la construcción dependiente de los artefactos utilizados y las técnicas asociadas; las pruebas transmitidas por acciones que producen validaciones y basadas en el referencial teórico.

Un Espacio de Trabajo Matemático (ETM) se refiere entonces a un espacio abstracto que permite la organización y distribución de estos diversos elementos del trabajo matemático. Su objetivo es entender cómo el trabajo matemático se desarrolla y se despliega en un contexto educativo cuando las personas se enfrentan a tareas matemáticas.

La cuestión de la relación y organización de los diferentes componentes del trabajo se convirtió rápidamente en un elemento central de la investigación llevada a cabo sobre el trabajo matemático en la teoría de los ETM. Esta reflexión fue acompañada por una exploración de posibles representaciones para describir las relaciones e interacciones entre los diversos componentes involucrados. Por lo tanto, parecía importante asociar un diagrama para visualizar este complejo conjunto de relaciones e interacciones. El diagrama de los ETM así creado está estrechamente relacionado con el desarrollo teórico de los ETM. Sin embargo, no hay que confundir los dos, el diagrama debe ser visto en primer lugar como una herramienta para visualizar y sintetizar los análisis detallados del trabajo matemático producido por los sujetos que realizan tareas matemáticas.

El desarrollo y la elección de la representación más apropiada para reflejar las formas de trabajo encontradas no es fácil debido a la diversidad de formas de trabajo. Una de las primeras representaciones (Figura 1) utilizadas muestra el ETM en el caso específico de la geometría, de forma plana, sin visualizar las relaciones (Kuzniak, 2004).

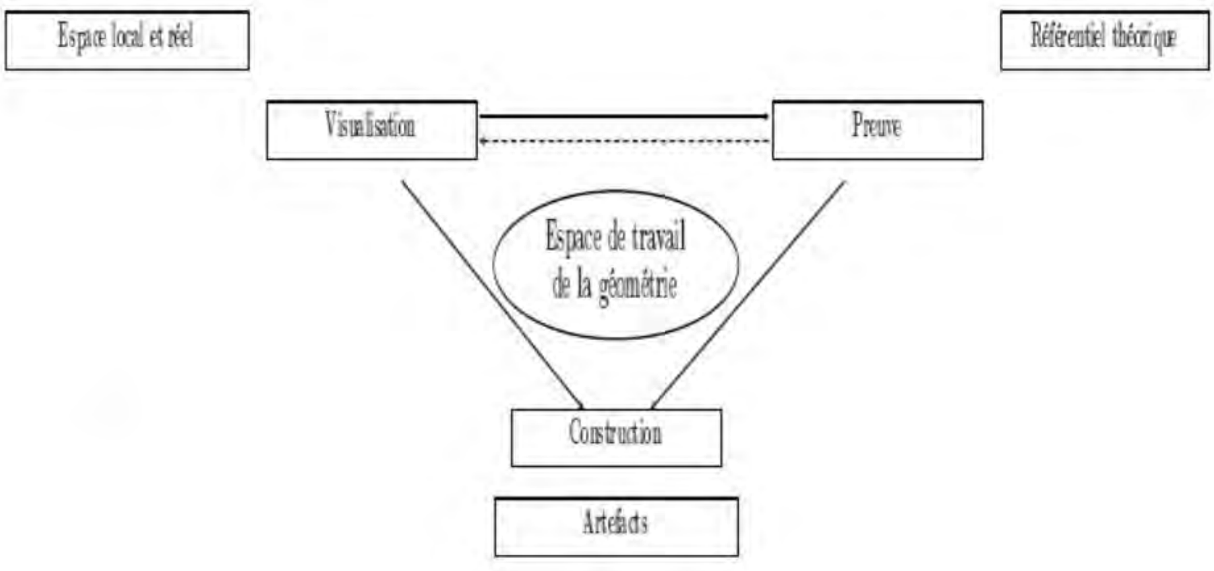


Figura 1: ETG, procesos cognitivos y componentes epistemológicos (Kuzniak, 2004).

A partir de 2009, bajo la influencia de los primeros simposios, aparecieron los primeros diagramas bidimensionales (Figura 2), que también resultaron en parte de la introducción, con un fuerte alcance metafórico, de los planos epistemológico y cognitivo.

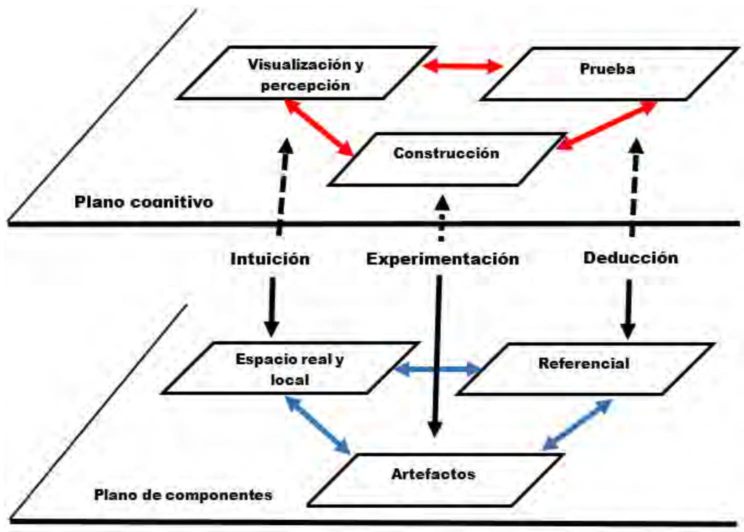


Figura 2. Interacciones en el ETG, Kuzniak, 2009.

Muy rápidamente, la cuestión de las relaciones entre los planos epistemológico y cognitivo conduce a la aparición del diagrama de los ETM en forma de prisma tal como lo conocemos ahora (Figura 3).

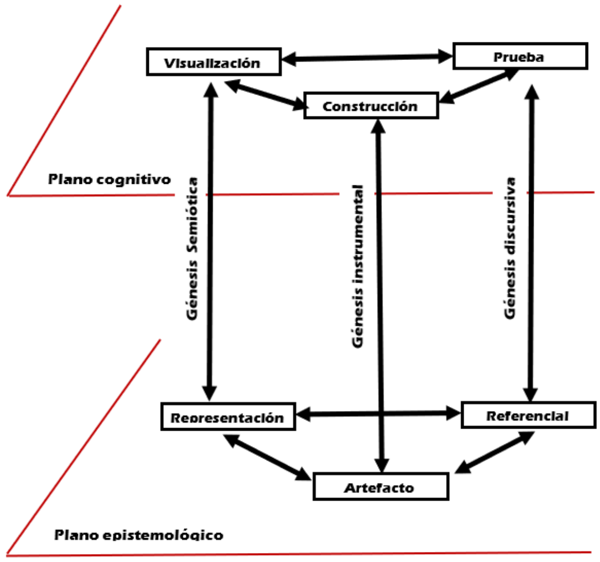


Figura 3. El diagrama del ETM. Versión 2016

Posteriormente, los intentos de Richard y Coutat (2011) por dar sentido a todas las relaciones e interacciones existentes en el ETM, condujeron a la idea de planos verticales (Sem-Ins, Ins-Dis y Sem-Dis) que hacen visibles ciertos estados y contextos del trabajo (Figura 4).

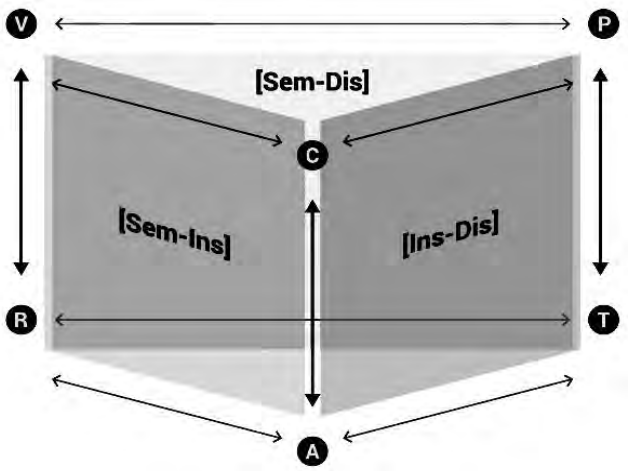


Figura 4. Los tres planos verticales del ETM

La articulación entre los planes se basa en una concepción genética del trabajo visto como el desarrollo de interacciones entre los diversos componentes y dimensiones del ETM. Este desarrollo implica transformaciones y adaptaciones que se describen en la teoría a través de tres génesis fundamentales relacionadas con el diagrama: los génesis semiótica, instrumental y discursiva de la prueba (Figura 3).

Los diferentes tipos de ETM

Uno de los puntos que a veces es malinterpretado por los investigadores, fuera de la teoría, es la variedad de ETM que se tienen en cuenta en la teoría. De hecho, esta variedad tiene diversos orígenes que no deben confundirse y que dan lugar a la introducción de diferentes tipos de ETM a medida que la investigación avanza abarcando nuevos temas y dominios matemáticos.

Una primera variedad, intrínseca a la idea del trabajo matemático en la teoría ETM. La concepción del trabajo matemático en los ETM es esencialmente dinámica y genética. Este trabajo evoluciona con el tiempo en función de las nuevas competencias adquiridas por los individuos o de las nuevas exigencias formuladas por las distintas instituciones que se dedican a la enseñanza de las matemáticas.

Una segunda variedad, relativa a la posición de los actores en relación con este trabajo. En este caso, el tipo de trabajo matemático dependerá del interés y vinculación de la persona en las tareas. También dependerá de la posición del sujeto en relación con estas tareas: ¿es el diseñador, el prescriptor, el ejecutor? Para tener en cuenta estas diferentes posiciones y estudiarlas, tres tipos de trabajo están vinculados a diferentes ETMs.

El trabajo de referencia es definido, a menudo de forma parcial e implícita, por los responsables del diseño del programa. El ETM de referencia asociado refleja las expectativas institucionales. Se construye a priori y asume una organización global que pretende ser moldeada por los profesores para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En este contexto, las tareas esperadas son normalmente alisadas y refinadas por expertos para ser luego compartidas en el mundo educativo.

El trabajo personal del alumno refleja la realidad del trabajo de los individuos que se apropian y transforman la tarea en relación a su ETM personal, el cual es muy cambiante y evolutivo de acuerdo con las nuevas acciones que los sujetos son conducidos a realizar. Esto no impide la identificación, más allá de las variaciones debidas a las tareas propuestas, de formas estables de trabajo que están de acuerdo o no con el trabajo esperado.

El trabajo idóneo y el ETM idóneo se refieren a este estado intermedio de transmisión y mediación del saber en el que existe una tensión entre las expectativas del profesor y la redefinición de la tarea para avanzar en la constitución del trabajo personal de los alumnos. El ETM en cuestión ha sido designado como el ETM idóneo para enfatizar las transformaciones que lo caracterizan, con el fin de ajustarse lo más posible al proyecto educativo y a la realidad de los alumnos. Por lo tanto, se está moviendo y evolucionando, pero una vez más, se puede caracterizar por algunas invariantes que han sido demostradas a través de la investigación sobre el ETM idóneo. Estas investigaciones establecieron la necesidad de tener en cuenta dos estados del ETM: un estado *potencia*l que corresponde a lo que el profesor espera y un estado *actual* o *efectivo* que muestra el trabajo realizado en el aula.

Una tercera variedad, relacionada con los dominios en juego. La extensión de los estudios que utilizan el marco teórico de las ETM a otros dominios distintos de la geometría ha demostrado la importancia de los cambios en los dominios matemáticos, cada uno de los cuales puede incluir un ETM particular asociado con un dominio determinado. Más concretamente, Montoya-Delgadillo y Vivier (2014) caracterizaron estos cambios introduciendo un juego entre un dominio fuente y un dominio de destino.

El uso de la teoría ETM para el estudio y regulación de situaciones didácticas.

Las tareas no forman parte de un ETM, sino que forman parte de su activación cuando un sujeto se enfrenta a ellas y debe apropiarse de ellas para llevarlas a cabo. La verificación de la eficacia de las tareas como soporte de situaciones didácticas y vectores de un adecuado trabajo matemático es un tema de estudio importante en el contexto de la teoría. Los individuos involucrados en una tarea producen acciones con impulsos y también metas a alcanzar. Como resultado, es posible hablar de una circulación y dinámica de trabajo en el ETM que los diagramas, a través del análisis detallado del desarrollo de las tareas, intentan reflejar. Como resultado, muchos estudios han tratado de visualizar las formas de trabajo encontradas con la ayuda del diagrama y la diversidad de las formas de trabajo explica la variedad de representaciones utilizadas.

El primer investigador que intentó captar esta circulación a través de los diagramas fue Lebot (2011) en un estudio sobre el aprendizaje del concepto de ángulo en la enseñanza secundaria. Posteriormente, todos los estudios superiores sobre el trabajo matemático, especialmente en el caso de los trabajos de tesis, se enfrentaron a la descripción de esta circulación, aportando las soluciones más adecuadas a sus problemas.

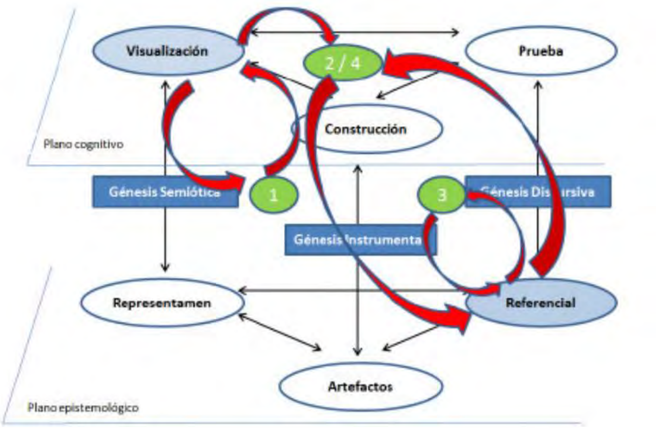


Figura 5. Circulación del trabajo geométrico (Henríquez, 2014)

Así, Henríquez (Figura 5, 2014), para su estudio del trabajo personal de estudiantes que entregan tareas de geometría, optó por representar todo el movimiento en un solo diagrama.

La dificultad técnica de representar rápidamente estos diferentes elementos en un solo diagrama la llevó a buscar, desafortunadamente sin el éxito esperado, una herramienta tecnológica que le permitiera realizar rápidamente estas visualizaciones del trabajo y así poder convertirla en una herramienta de formación.

Por otro lado, en su estudio de las probabilidades de densidad continua, Derouet (2016), enfrentada a la interacción entre diferentes dominios, eligió una forma de representación que articula tres ETMs cada una representada por un diagrama. Esto le permite representar los pasajes entre los diferentes ETMs (fibraciones externas). Más recientemente, Trunkenwald (Trunkenwald & Laval, 2019) ha retomado esta idea, pero considerando las proyecciones planas de cada uno de los prismas, lo que hace que los diagramas utilizados sean más legibles y menos complejos.

Entre otros estudios, mencionemos los de Menares (2017) que introdujo planos verticales orientados para mostrar claramente la idea de pasar de una génesis a otra que anticipa la idea de la fibración interna. Pizarro (2018) introdujo la idea del semiplano vertical para enfatizar que algunos de los elementos del plano epistemológico a veces se convocan sin que se implemente la génesis discursiva de la evidencia. Finalmente, Moutet (2017) prefirió utilizar una ETM extendida con dos planos epistemológicos, el de la física y el de las matemáticas, para describir el trabajo realizado en la cinemática relativista.

Esta diversidad de representaciones utilizadas responde a preguntas de investigación específicas, pero también fomenta una vigilancia diagramática que se refleja en el trabajo en curso sobre la metodología utilizada en la teoría (Kuzniak y Nechache, 2019b).

Trabajo matemático completo, conforme y correcto

En su trabajo sobre la planificación del trabajo, Kuzniak y Nechache (2014, 2015) se centraron en la idea de los cómics e introdujeron la noción de trabajo matemático completo y conforme. En este diseño, el análisis de una tarea o conjunto de tareas utilizando los ETMs ayuda a entender el trabajo y planificarlo a corto y medio plazo. La teoría de los ETM permite así analizar el trabajo matemático desarrollado durante una sesión de clase o un conjunto de sesiones especificando sus diferentes etapas, que se hacen visibles a través de cómics que reúnen una serie de diagramas sobre el trabajo matemático en un curso.

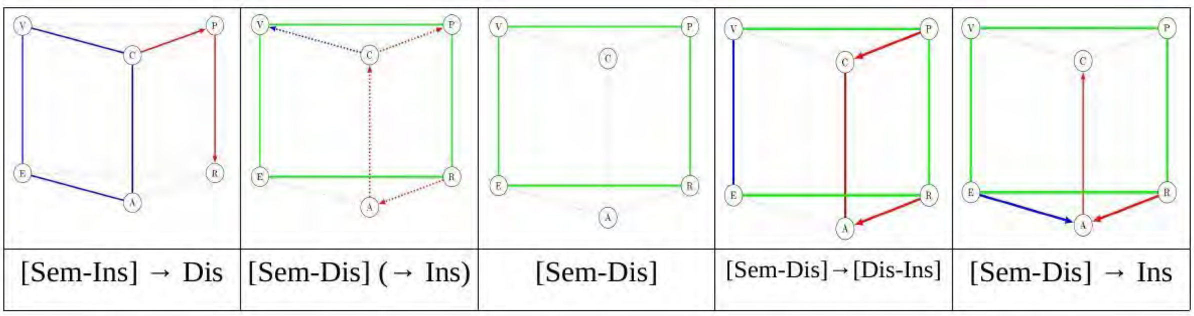


Figura 6. Cómics o series de diagramas sobre una serie de sesiones de geometría (Kuzniak y Nechache, 2015)

Estos dos autores consideran que el trabajo matemático está completo cuando la circulación está asegurada entre todas las dimensiones y componentes del diagrama del ETM. El trabajo se considera conforme cuando los procesos y procedimientos utilizados son válidos y coherentes con las expectativas del paradigma privilegiado. Finalmente, se dice que el trabajo es correcto cuando los resultados obtenidos son exactos. El estudio de estas diferentes condiciones de trabajo se apoya en la diferenciación entre herramienta e instrumento establecida por Kuzniak, Nechache y Drouhard (2016). Las herramientas están relacionadas con el plano epistemológico y los instrumentos con el plano cognitivo. Como resultado, se diferencian tres tipos de herramientas e instrumentos (semiótico, tecnológico y teórico.) asociados a cada de las dimensiones del ETM según la visión triádica del trabajo matemático:

El diagrama del ETM, los ETM aparecen entonces como herramientas metodológicas que permiten garantizar la integridad, la conformidad y la corrección del trabajo. En caso de dificultades durante la realización de la tarea, permiten comprender el origen de ciertos bloqueos que pueden deberse a confinamientos en un plano o una dimensión del diagrama, a malentendidos durante la realización de la tarea... Es posible entonces proponer adaptaciones relativas, por ejemplo, a la elección de nuevas tareas específicas, artefactos más adaptados, etc. También es posible proponer mediaciones que promuevan rebotes que ayuden a salir de estos bloqueos o confinamientos. Además de permitir descripciones y análisis detallados de las implementaciones de tareas en las clases, el uso de los ETMs permite afinar las tareas programadas para construir el trabajo matemático esperado.

PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN

Para concluir, me gustaría discutir algunas de las perspectivas de investigación disponibles para los investigadores involucrados en reflexionar sobre el trabajo matemático a través del uso de la teoría de los ETM.

Cuestiones internas en la teoría de los ETM

La historia de la teoría de los ETM y la presentación de los diversos usos del diagrama para el estudio del trabajo matemático muestran que dos puntos estrechamente relacionados merecen la atención de los investigadores. El primero se refiere a la metodología de investigación asociada a la teoría, y el segundo se refiere a la profundización de la comprensión de los diferentes y numerosos génesis que intervienen en el desarrollo del trabajo matemático.

La definición precisa de una metodología para realizar estudios en el marco de los ETM es necesaria por varias razones. En primer lugar, los diversos estudios realizados en grupos focales sobre la creación de redes de teorías en la didáctica de las matemáticas (Bikner-Ahsbahs, Knipping y Pressmeg, 2015) muestran una dialéctica entre una teoría y su metodología asociada. Su desarrollo va de la mano, así como su aceptación en una comunidad más amplia que la de los investigadores que favorecen esta teoría.

La aplicación de una metodología específica para los ETM también requiere una mejor comprensión de las diferentes génesis implicadas en el trabajo matemático.

En el último simposio se dedicaron tres talleres a estas cuestiones.

Describir con precisión el juego dentro la teoría: Taller de Kuzniak-Nechache

Kuzniak y Nechache propusieron un método de estudio del trabajo personal de los alumnos basado en la división de su actividad durante la realización de una tarea en episodios compuestos por una serie de acciones matemáticas específicas. A continuación, cada una de estas acciones se analiza de forma muy detallada con la teoría de las ETMs para identificar la circulación del trabajo en curso en la resolución. El diagrama se utiliza para visualizar y sintetizar el flujo de trabajo durante la resolución de una tarea. Finalmente, se propone una síntesis para caracterizar el trabajo matemático (conformidad, bloqueos, confinamientos, etc.).

Papel y función de la visualización en este juego entre génesis: taller de Montoya-Delgadillo y Vivier.

Desde su origen, es sin duda a través de las diversas extensiones de la investigación a nuevos campos matemáticos que la teoría ha hecho su progreso más convincente y fundamental. Al abandonar el campo de la geometría, los investigadores tuvieron que diseñar extensivamente algunos de los procesos cognitivos inicialmente asociados con el trabajo geométrico, como la visualización. Esto se ve ahora como el proceso cognitivo más amplio asociado con la identificación y el desarrollo de un conjunto de tratamientos y transformaciones en la representación incluida en la génesis semiótica. Montoya-Delgadillo y Vivier estudian el papel de los signos del análisis matemático que dan lugar a un trabajo de visualización específico basado en hojas de cálculo, escritos numéricos... Este enfoque también muestra la necesidad de los paradigmas para comprender en profundidad cada dominio matemático.

Comprender, en la teoría, un trabajo de prueba que no se reduce a la dimensión discursiva de la prueba: Taller Henríquez y Richard

La comprensión profunda de las diferentes génesis o planes de trabajo está vinculada a cuestiones metodológicas, pero también a estudios más precisos y detallados sobre la naturaleza de las pruebas y validaciones en el trabajo matemático. De esta manera es posible describir varios tipos de pruebas introducidas (discursivográficas, mecánicas, algorítmicas) en relación con los diferentes génesis y planos verticales del ETM (Richard, Venant y Gagnon, 2018). ¿En qué medida las herramientas teóricas permiten caracterizar las pruebas y los métodos de validación más utilizados en la enseñanza de las matemáticas en combinación con herramientas tecnológicas mecánicas o informáticas?

Hacia un estudio del trabajo matemático en su globalidad

La cuestión de identificar el trabajo matemático global a partir de estudios particulares relacionados con tareas específicas y a veces aisladas es una cuestión que no sólo afecta a la teoría de los ETM. En efecto, cualquier enfoque teórico de la didáctica se enfrenta a esta tensión entre los resultados de los estudios parciales y su interpretación en términos globales, ya que la mayor parte de la investigación se basa en el estudio de situaciones y tareas particulares. Sin embargo, los estudios sobre las prácticas de enseñanza muestran una rápida estabilización de estas prácticas y sugieren la consiguiente estandarización del trabajo matemático implementado.

Uno de los retos de la investigación es identificar estas invariantes y las tareas emblemáticas proporcionan vías para una reflexión fecunda sobre esta cuestión. Introducidas por Kuzniak y Nechache (2016), las tareas emblemáticas son tareas particulares que deben cumplir una serie de condiciones que sólo pueden ser validadas mediante el análisis y la experimentación. En particular, una tarea emblemática debe:

1. Ser disponibles en los ETM de referencia, es decir, beneficiarse de un reconocimiento que acredite su relevancia para el trabajo matemático que la escuela pretende realizar con los alumnos.
2. Estar presentes en los ETM idóneos, es decir, formar parte de las tareas que se proponen realmente, en primer lugar, en los ETM potencialmente idóneos definidos por los libros de texto, pero también y sobre todo en las clases ordinarias.
3. Ser susceptibles de desarrollar un trabajo matemático completo de acuerdo con los requerimientos del paradigma privilegiado en la institución. Las tareas emblemáticas deben permitir una circulación completa entre las componentes y los planes basados en un trabajo, en conformidad con el nivel del proceso y correcto en término de resultados.

A partir de unos estudios de tareas emblemáticas, es posible entonces informar más globalmente sobre el trabajo matemático desarrollado en las clases por los alumnos con sus profesores.

Extensión de los dominios de estudio

No discutiré aquí, debido a las limitaciones de tiempo y espacio, la extensa investigación sobre dominios específicos. Sin embargo, contribuyen fundamentalmente a la evolución de la teoría al cuestionar sus fundamentos, límites y métodos. Inicialmente, la investigación se centró en la geometría en la formación del docente y en la geometría en un contexto tecnológico. Luego, dos dominios fueron objeto de un intenso trabajo: la probabilidad y el análisis. El estudio del álgebra y del álgebra lineal también ha permitido conexiones fecundas con otras teorías como la epistemografía de Drouhard o la teoría APOE de Dubinsky.

Más recientemente, la investigación se ha centrado en dominios fronterizos de las matemáticas y la física, como la cinemática clásica o relativista. De manera similar, la importancia de las estadísticas y los algoritmos ha enfrentado el marco de los ETM con problemas de interfaces con el trabajo en otras disciplinas y ha llevado a los investigadores a considerar nuevas representaciones que se están explorando.

EL FUTURO DE LA TEORÍA

Nuestro breve viaje a través de la historia de la teoría, así como el reciente trabajo realizado en el simposio ETM6, muestra la riqueza y diversidad de la teoría de la ETM en el presente. Como hemos visto, se han introducido muchas herramientas tanto a nivel global (tipos de espacios de trabajo matemáticos, circulación entre estos espacios, tareas emblemáticas, paradigmas) como a nivel más local en cuanto al estudio preciso de tareas (herramientas, instrumentos, fibraciones, avatares).

La constitución de un corpus teórico cada vez más amplio hace más complejo el acceso a la teoría ETM y exige que los investigadores estén más atentos a su uso para evitar sus deviaciones, a veces devastadoras, con usos erráticos e incontrolados. Es cada vez más importante perfeccionar y clarificar su uso promoviendo el uso adecuado de las diversas herramientas que se han introducido para permitir un estudio más preciso de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, y al mismo tiempo, los investigadores implicados en la teoría deben evitar el repliegue sectario: un freno a la innovación, a la imaginación teórica y al desarrollo metodológico, que hasta ahora han caracterizado la investigación sobre los ETM. Además, es importante mantener esta plasticidad abierta e integradora que se convierte en una de las atracciones (Artigue 2016, Bikner-Ahsbahs, 2017).

La teoría de los ETM tiene como objetivo comprender y planificar el trabajo matemático en el ámbito escolar, pero en realidad, toda la actividad de enseñanza y aprendizaje no se limita al trabajo matemático por sí solo y es importante considerar los elementos que se encuentran fuera de este trabajo, pero que contribuyen a su realización con éxito: afectos y emociones, trabajo colaborativo y colectivo, formas específicas de pensar, intercambios lingüísticos, contexto cultural y social... Todos estos son elementos complementarios y esenciales que no están directamente relacionados con la teoría, pero que pueden contribuir a intercambios fructíferos con especialistas en estos campos sin distorsionar la especificidad y la naturaleza de cada investigación. Esta complementariedad explica en particular los intercambios con investigadores que forman parte de otros marcos teóricos como la teoría APOE, el MTSK o las teorías de actividad.

Sin embargo, esta apertura no debe llevar a que la teoría se disuelva en el "mainstream" de la educación matemática, que a menudo ha perdido de vista las cuestiones de conocimiento disciplinario específicas de las matemáticas (Radford, 2017).

Finalmente, es importante mantener lo que Richard llama la inteligencia (en el sentido inglés del término) de la teoría, es decir, una capacidad de adaptación sin negar los principios básicos y los objetivos a largo plazo. La garantía de este futuro es el trabajo conjunto de una renovada comunidad de investigadores exigentes y curiosos. Desde este punto de vista, el simposio de Valparaíso es una fuente de esperanza con la fuerte inversión de investigadores jóvenes y no tan jóvenes, particularmente brillantes y motivados.

REFERENCES

Artigue, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lens. *ZDM-Mathematics education*,48(6), 935-939.

Bikner-Ahsbahs, A. (2017). Introduction to the papers of TWG17: Theoretical perspectives and approaches in mathematics education research. *In Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.). Proc. Of the 10th CERME pp 2683-2691. Dublin, Ireland.* Dublin.

Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. & Pressmeg, N. (2015). *Approaches to qualitative research in Mathematics Education.* New-York: Springer.

Bikner-Ahsbahs, A. & Prediger, S. (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education.* New-York: Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* New York: Springer.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12* (1), 73-112.

Coutat, S., & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés mathématiques. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 97–126.

Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral*. Université Paris Sorbonne Cité, Université Paris Diderot.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61 (1-2).103-131.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 30(54), 1-22.

Guzman, I., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Paris : Irem Paris-Diderot.

Granger, G.G. (1963). *Philosophie du style*. Paris: Armand Colin.

Henríquez (2014). *El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundaria.* Tesis. Pontificia Universidad de Valparaiso.

Habermas, J. (1969). *Technology and Science as Ideology*. Boston: Beacon Press.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40(3)*, 283–312.

Kuzniak, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France, In Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E. & Vivier, L. Eds, *Chypre et France-Recherche en Didactique des Mathématiques*, Lefkosia.

Kuzniak, A. (2003). Paradigmes et espaces de travail géométriques. *Note d'habilitation pour diriger des recherches. Université Denis Diderot Paris 7.*

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM-Mathematics education*,48(6), 721-737.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J.-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education.*

Kuzniak, A & Nechache, A. (2015). Using the Geometric Working Spaces in order to plan the teaching of geometry. *Proceedings of Cerme9. Prague.*

Kuzniak, A & Nechache, A. (2016) Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines et personnels : existence et usages. *Quinto Simposio Espacio de Trabajo Matemático - ETM5.* Florina, Grecia.

Kuzniak, A & Nechache, A. (2019). Personal geometrical work of pre-service teachers: a case study based on the theory of Mathematical Working Spaces. *In Procedings of Cerme11. Utrecht, Nederlands.*

Kuzniak, A & Nechache, A. (2019b). Une méthodologie pour analyser le travail personnel d'étudiants dans la théorie des Espaces de Travail Mathématique. *Actas Symposium ETM6.*

Lebot, D. (2011). Mettre en place le concept d'angle et de sa grandeur à partir de situations ancrées dans l'espace vécu : Quelles influences sur les ETG ? *Master de didactique des mathématiques (non publié).* Paris : Irem, Université Paris-Diderot.

Leontieff (1978). Activity, Consciousness, and Personality. *Prentice Hall.*

Montoya, E., & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19,* 73–101.

Moutet, L. (201). Diagrammes et théorie de la relativité restreinte : Une ingénierie didactique, Université Paris-Diderot.

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19,* p. 67-90

Pizarro, A. (2018). *El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos.* Université Paris Sorbonne Cité, Université Paris Diderot.

Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM–Mathematics Education,* 40, 317–327.

Radford, L. (2017). On inferentialism. *Mathematics Education Research Journal*, *29(4),* 493-508.

Radford, L. (2019). On the Epistemology of the Theory of Objectification. *Procedings of Cerme11. Utrecht, Nederlands.*

Richard P.R., Venant, F., & Gagnon M. (2019). Issues and challenges about instrumental proof In: Hanna, G., Reid, D., de Villiers. M. (eds), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Springer International Publisher.

Thurston, W. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 30(2), 161–177.

Trunkenwald, J., & Laval, D. (2019). Algorithms as a discovery process in frequentist approach to prediction interval. *Procedings of Cerme11. Utrecht, Nederlands.*

Vergnaud, G. (1990). La theorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2), 133-170.

LOS DIFERENTES SIMPOSIOS DE 2009 A 2018

Simposio	Lugar y organizadores	Publicaciones relacionadas
2009 (ETM1) Rencontres Franco-chypriotes	Nicosie, Chypre, Athanasios Gagatsis	2009 Livre
2010 (ETM2) Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique	Paris, France, Alain Kuzniak et Laurent Vivier.	2011 et 2012 Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, volume 16
2012 (ETM3) Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique	Montréal, Canada, Philippe R. Richard et Annette Braconne-Michoux	Actes Université de Montréal. Relime: Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 17.4(I, II). 2014
2014 (ETM4) Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique	Madrid, Espagne, Inés Gómez-Chacón	Actes Numéro spécial Bolema, 30(54) Numéro spécial ZDM, 48(6)
2016 (ETM5) Symposium sur les Espaces de Travail Mathématique	Florina, Grèce, Kostas Nikolantonakis	Actes Numéro spécial Menon, 4ème numéro thématique, novembre 2018
2018 (ETM6) Valparaiso Symposium sur le travail mathématiques	Valparaíso, Chili, Elizabeth Montoya-Delgadillo	Actes

ATELIER 1

UNE METHODOLOGIE POUR ANALYSER LE TRAVAIL PERSONNEL D'ETUDIANTS DANS LA THEORIE DES ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE

Alain Kuzniak[a] et Assia Nechache[b]

[a]Université de Paris, Laboratoire de Didactique André Revuz,

[b]Université Cergy-Pontoise, Laboratoire de Didactique André Revuz, France

alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr, assia.nechache@u-cergy.fr

OBJECTIF DE L'ATELIER

L'objectif de cet atelier est de montrer l'usage de la théorie des ETM et de son diagramme pour analyser et décrire la circulation du travail mathématique afin de caractériser ce travail (complétude, conformité, blocage, confinement, etc.). Cette analyse prend appui sur les différentes dimensions de l'ETM ainsi que sur les outils (sémiotique, technologique, théorique) associés à chacune de celles-ci. Il s'agit pour nous de fournir aux participants des éléments permettant d'avancer sur la question suivante : comment utiliser la théorie des Espaces de Travail Mathématique comme un cadre méthodologique pour analyser le travail mathématique personnel d'un sujet ?

Après un bref rappel théorique (*section 2*), nous avons proposé aux participants d'analyser une tâche géométrique (*section 3*) et le travail géométrique produit par un étudiant autour de cette tâche (*section 4*). A l'issue de l'atelier, nous avons présenté aux participants une méthodologie (*section 4*) fondée sur la théorie des Espaces de Travail mathématique que nous avons élaborée dans le cadre de notre recherche portant sur l'étude du travail personnel d'étudiants en master qui se destinent à enseigner à l'école primaire (Kuzniak et Nechache, 2018) dans le domaine de la géométrie.

LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE DANS LA THÉORIE DES ETM

Identifier et comprendre le travail mathématique d'un sujet au cours de la réalisation de tâches mathématiques est une préoccupation de la théorie des ETM. L'étude du travail personnel dans cette théorie passe par l'analyse de ce travail à travers les différentes composantes de l'ETM (dimensions et outils associés à chacune de ces dimensions).

La première étape de l'analyse permet de décrire le développement du travail personnel effectif (et de sa circulation) à l'aide du diagramme des ETM *via* les comics (Kuzniak et Nechache, 2015). Cela passe par l'identification d'éventuels blocages ou malentendus durant la réalisation de la tâche. Puis, le but de l'analyse est de caractériser ce travail mathématique (complétude ou non, confinement sur une dimension, conformité aux exigences épistémologiques de la discipline). Ces deux temps d'analyse sont à la base de la méthodologie pour identifier et comprendre le travail personnel d'un sujet.

ETUDE DU TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE PRODUIT PAR DES ÉTUDIANTS

La tâche proposée aux étudiants : une brève présentation

La tâche « le terrain d'Alphonse » a pour énoncé :

> Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?
>
> *Une information complémentaire*
>
> Alphonse a demandé à une amie périgourdine de l'aider et celle-ci ne lui a renvoyé que la longueur d'une des diagonales : 630 m.

Pour résoudre cette tâche, les étudiants doivent mobiliser des connaissances portant sur les quadrilatères, les notions d'échelle et de mesure de l'aire d'un quadrilatère. La réalisation de cette tâche suppose une première modélisation liée à la forme et la représentation du terrain (Figure 1). Nous ne détaillons pas ici cette phase.

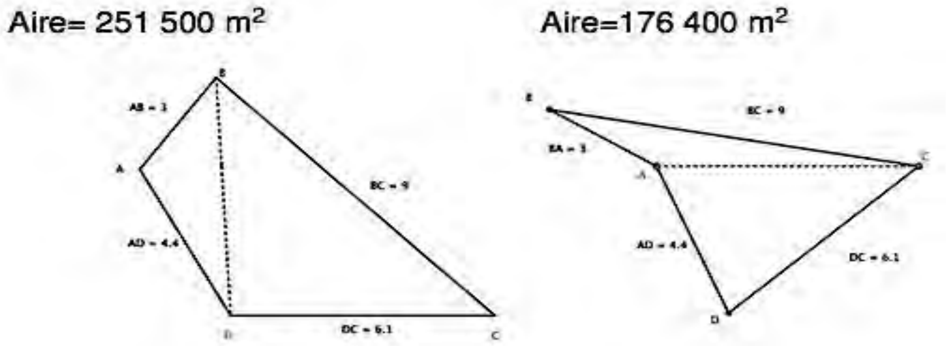


Figure 1. Exemples de formes possibles du terrain d'Alphonse (avec une diagonale tracée à l'intérieur)

La mise en œuvre de la tâche en classe

Nous avons proposé la tâche « le terrain d'Alphonse » à des étudiants de première année de master qui se destinent à enseigner à l'école primaire. La mise en œuvre de cette tâche a été conduite selon trois phases ayant des objectifs spécifiques. Chacune des phases s'achève par une mise en commun.

Lors de la première phase, nous avons distribué l'énoncé de la tâche **sans l'information complémentaire** concernant la longueur de l'une des diagonales du terrain et nous avons laissé 10 minutes aux étudiants pour chercher une solution. L'objectif est de faire constater qu'il manque une donnée (i.e. la longueur d'une diagonale) pour pouvoir résoudre la tâche. À l'issue de cette phase, nous avons ramassé les productions des étudiants avant de procéder à une mise en commun.

Dans la deuxième phase, nous avons proposé l'information complémentaire sur la diagonale et nous avons laissé 10 minutes pour chercher une solution. L'objectif de cette phase est de mettre en évidence les différentes formes possibles du terrain (voir figure 1). Après les 10 minutes du temps de recherche, nous avons ramassé les productions d'étudiants et nous avons par la suite mené une mise en commun. Cette mise en commun permet de rendre compte des formes possibles du terrain d'Alphonse et de discuter les méthodes utilisées par les étudiants.

Lors de la dernière phase, les étudiants ont mené un travail de calcul d'aire du terrain en se plaçant tout d'abord dans le cas où le terrain avait la forme d'un quadrilatère convexe puis une forme non convexe (Fig 1). La mise en commun à l'issue du temps de recherche, permet de répertorier toutes les procédures utilisées par les étudiants afin de les discuter. Il s'agit plus particulièrement, de confronter les résultats obtenus par chacun des étudiants en fonction des procédures choisies et en fonction de la forme du terrain choisie pour mener les calculs.

MISE EN SITUATION DES PARTICIPANTS DE L'ATELIER

Nous avons invité les participants à prendre connaissance de la tâche et à la résoudre par groupe de quatre. Une première mise en commun a permis de repérer les différentes méthodes utilisées par les participants et de discuter de leur validité.

Puis nous avons proposé d'analyser une production d'un étudiant nommé Francis (Annexe 1) conçue lors de la première phase de la mise en œuvre de la tâche dans une classe de première année de master. Nous avons alors suggéré de centrer l'analyse du travail sur l'identification des dimensions, des plans verticaux en jeu et des outils associés à chacune des dimensions utilisés par l'étudiant au cours de la réalisation de la tâche (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016). Enfin, nous leur avons demandé de décrire la circulation du travail mathématique produit par cet étudiant à l'aide du diagramme des ETM.

Lors de la mise en commun, nous avons pu faire constater aux participants qu'ils produisaient différentes analyses et différentes circulations du travail *via* le diagramme des ETM. Comme prévu, cette diversité nous a permis de faire prendre conscience aux participants des limites d'une analyse basée uniquement sur le diagramme des ETM et de les inciter à pratiquer une vigilance diagrammatique. En effet, le diagramme des ETM doit avant tout être un outil pour visualiser l'analyse détaillée du travail mathématique produit par un sujet lors de la réalisation de la tâche. Cela suppose une méthodologie précise pour analyser les productions.

Par la suite, nous avons mis l'accent sur la nécessité de commencer l'analyse du travail mathématique personnel en précisant la granularité de cette analyse. En fonction des besoins de l'analyse, la granularité pourra être plus ou moins fine. L'objectif de cette analyse est de reconstituer les principaux épisodes planifiés par le sujet pour réaliser la tâche qui lui a été prescrite. Chaque épisode est décrit grâce à une série d'actions du sujet que nous avons pu repérer.

L'analyse du travail personnel est double : descendant (effet loupe) et ascendant sur la production du sujet. L'analyse *descendante* est un « zoom in » sur la production d'un sujet afin de repérer précisément chacune de ses actions dans la réalisation de la tâche. Ces actions sont regroupées en épisodes. L'analyse *ascendante* est un « zoom out » sur la production du sujet afin d'obtenir une visualisation synthétique, à l'aide du diagramme des ETM, des épisodes possiblement planifiés et extériorisés par le sujet.

Dans la suite, nous illustrons sur un exemple notre analyse du travail mathématique.

UNE MÉTHODE POUR ANALYSER LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE PERSONNEL : LE CAS DE L'ÉTUDIANT FRANCIS

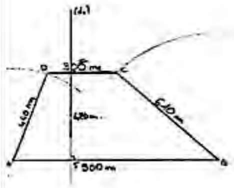
Pour étudier la production écrite de Francis nous avons construit et utilisé une grille d'analyse des actions de cet étudiant. Puis nous avons aussi examiné les échanges qui ont eu lieu entre Francis et l'enseignant, mais aussi entre Francis et les autres étudiants de la classe lors de la mise en commun.

Notre méthode d'analyse est composée de deux étapes décrites ci-dessous.

Etape 1. Repérage et interprétation des actions de l'étudiant (Analyse descendante)

Dans cette étape, nous avons repéré les actions de Francis pour réaliser la tâche prescrite. Nous les avons ensuite interprétées dans la théorie des ETM. Le tableau ci-dessous montre la manière dont l'analyse a été menée.

La première colonne indique les actions de Francis relevées sur sa production écrite et des échanges lors de la mise en commun. La deuxième colonne décrit l'interprétation de chacune de ces actions dans la théorie des ETM à l'aide des différentes composantes du diagramme (*Cf.* Table 1). Cette interprétation s'appuie sur un codage qui permet de repérer exactement les différentes articulations des dimensions ou des composantes au cours de la réalisation de la tâche. Ainsi, le codage **[Sem ↔ Ins]** signifie un travail entre les deux dimensions sémiotique et instrumentale. Le codage **Ref → [Sem-Ins]** signifie que le pôle réferentiel a été un élement déclencheur d'un travail qui s'est essentiellement déroulé dans le plan sémiotico-instrumental.

	Actions mathématiques repérables de l'étudiant	Interprétation de ces actions en termes d'ETM
Episode 1 : Construction de la figure à l'échelle	***Action 1- Choix d'une échelle pour réaliser la figure*** ech : 1cm = 1hm. 100m.	***Ref***
	Action 2- Construction de la figure par ajustement à l'aide de la règle graduée et d'un compas 	**[Sem ←→ Ins]** La règle graduée et le compas sont utilisés comme des outils technologiques avec lesquels il exerce un contrôle visuel (sémiotique) et instrumentale. *Un travail simultané des deux dimensions instrumental et sémiotique.*

Episode 2 : Justification de la nature du quadrilatère	***Action 3- Explication de la construction du quadrilatère*** *« J'ai pris la grande base 900 m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle »* **(Propos de Francis)**	**[Sem ←→ Ins]** Usage simultané des outils sémiotiques (Sem) et technologiques (Ins) pour expliquer la construction de la figure. *Des contrôles visuels et instrumentaux sont utilisés* *Production d'un discours pour expliquer le processus de construction du representamen (dessin du trapèze). Ce discours s'appuie sur les outils technologique (Ins) et les outils sémiotiques (Sem).*
	Action 4- Justification de la nature du quadrilatère *« j'ai tracé une perpendiculaire à la grande base et cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elles sont parallèles entre elles. donc cela fait un trapèze »* **(Propos de Francis)** [illegible]	**[Ins ←→ Dis]** Usage de l'équerre (outil technologique) pour vérifier le parallélisme des deux côtés du quadrilatère afin d'en déduire que c'est un trapèze. Usage de la définition du Trapèze (outil théorique) pour en déduire que le quadrilatère construit est bien un trapèze. *Les connaissances de l'étudiant portant sur le trapèze activent la dimension instrumentale.* *Production d'un discours pour justifier à l'aide d'une propriété (outil théorique) le processus de construction et le résultat de ce processus (i.e. Trapèze).*

Episode 3 : Calcul de l'aire du quadrilatère	*Action 5- Mesure de la hauteur du trapèze* mesure [ES] = 120 m	(Ins) Usage de la règle graduée (outil technologique) pour mesurer une longueur sur une figure
	Action 6- Calcul de l'aire du trapèze $A = \frac{300 + 900}{2} \times 120$ $A = \frac{1200}{2} \times 120$ $A = 600 \times 120$	(Ins) Usage de la formule de calcul d'aire d'un trapèze (outil technologique) *Les connaissances de l'étudiant portant sur l'objet trapèze activent la dimension instrumentale*

Table 1. Repérage et interprétation des actions d'un étudiant (analyse descendante)

L'analyse *descendante,* « Zoom in », consiste en une sorte d'analyse « à l'aide d'une loupe » du travail mathématique. Elle doit non seulement permettre de repérer les actions mathématiques produites par l'étudiant pour réaliser la tâche, mais aussi d'identifier la manière dont le travail de l'étudiant a été structuré. Ainsi, le travail de Francis est structuré en six actions qui ont été étudiées plus finement avec le diagramme des ETM. Ces actions **peuvent être** regroupées en trois épisodes.

Etape 2 : Visualisation synthétique du travail géométrique produit par Francis (analyse ascendante)

Dans cette étape, on procède à une analyse *ascendante*, « Zoom out » pour effectuer une visualisation synthétique du travail géométrique produit par Francis. Le travail de Francis est structuré globalement en trois épisodes (Tableau 2): construction de la figure à l'échelle, justification de la nature du quadrilatère, calcul de l'aire du quadrilatère. Ces épisodes sont visualisés grâce aux comics et correspondent à renvoient à l'organisation du travail par l'étudiant. Elles donnent une « idée » du développement du travail géométrique de Francis au cours de la réalisation de la tâche.

Quelques éléments de caractérisation du travail géométrique de Francis :

A partir de notre analyse, nous déduisons que Francis a construit à l'échelle une figure en ayant a priori l'idée de la nature de la figure à obtenir (i.e. le trapèze). Pour cela, il utilise les outils technologiques (compas, règle, équerre) de la dimension instrumentale (épisode 1). Par la suite, il propose une justification de la nature de la figure (épisode 2) et calcule l'aire de cette figure (épisode 3) basée encore une fois sur les outils technologiques de la dimension instrumentale. Par conséquent, le processus suivi est *conforme* au travail mathématique attendu dans le paradigme GI. Par contre le résultat n'est pas *correct* car Francis raisonne sur une figure particulière et obtient une valeur de l'aire. De plus, le résultat n'est pas correct car il manque de contrôle théorique et instrumental (les conditions de construction d'un quadrilatère et précision de la construction). Nous dirons que le résultat de ce travail n'est pas **correct** alors que le processus est **conforme**.

Francis emploie deux sortes de discours dans le deuxième épisode qui ne sont pas des discours de preuve. En effet, le premier discours élaboré dans le plan [Sem-Ins] a pour fonction d'expliquer le processus de construction du trapèze (vu comme un representamen) appuyé sur les outils technologiques (règle et compas) de la dimension instrumentale.

Le deuxième discours est élaboré dans le plan [Ins-Dis] a pour fonction de justifier le processus de construction à l'aide de l'une des propriétés du trapèze (référentiel théorique).

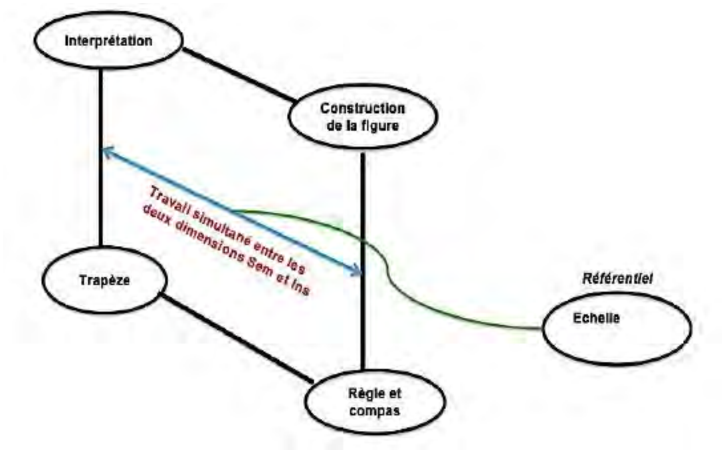
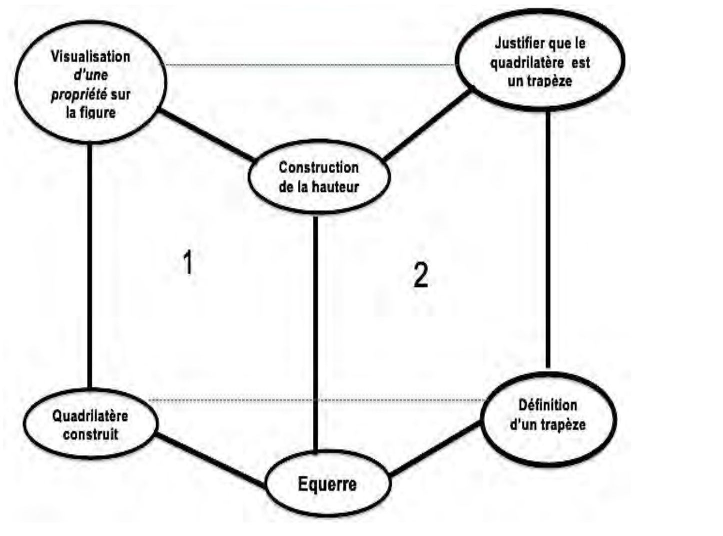
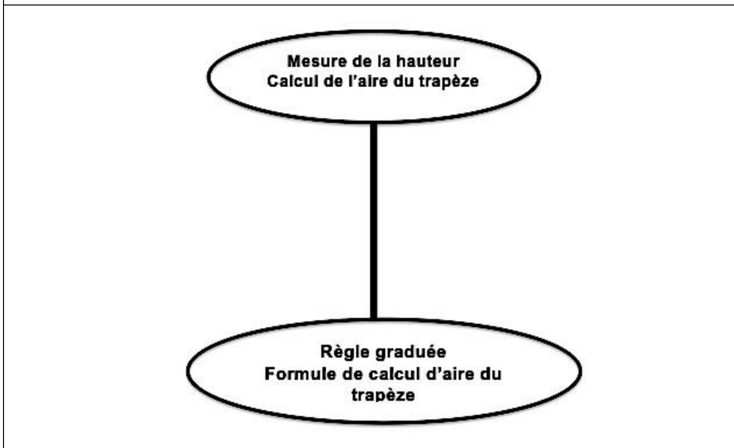
	**Épisode 1** **Construction de la figure à l'échelle** Le référentiel théorique est un *activateur* d'un travail simultané et dynamique entre les deux dimensions sémiotique et instrumentale **Action 1 et action 2**
	**Épisode 2** **Justification de la nature du quadrilatère** **1)** Production d'un discours dans le plan [Sem-Ins] qui explicite la technique de construction permettant d'obtenir un trapèze. ***Action 3*** **2)** Production d'un deuxième discours dans le plan [Dis-Ins] explicitant la les connaissances qui justifie la technique de construction du trapèze (i.e. Trapèze). ***Actions 4***
	**Épisode 3** **Calcul de l'aire du quadrilatère** Usage d'une formule de calcul d'aire associée à l'objet trapèze et prise de mesures sur le representamen (ici le dessin du trapèze construit dans l'épisode 1) à l'aide des outils technologiques de la dimension instrumentale. **Action 5 et action 6**

Table 2. La visualisation synthétique du travail géométrique de Francis (Analyse descendante)

En conclusion, on constate que dans le travail de Francis, l'entité trapèze est convoqué sous différents aspects au cours de la réalisation de la tâche :

- l'aspect *dessin du trapèze* (representamen),
- l'aspect *artefact matériel* (règle, compas, équerre) ou *symbolique* (formule de calcul d'aire) associés au trapèze.
- l'aspect *propriété et définition* associées au trapèze

Ainsi le travail de Francis est basé sur les différentes composantes épistémologiques de *l'entité* trapèze (Kuzniak et Nechache, 2015). Cette entité est le triplet constitué des trois aspects du trapèze cités précédemment. Chacun des aspects est associé à l'une des trois composantes du plan épistémologique l'ETM_G de Francis.

A cette cette ***entité*** épistémologique du trapèze présente dans le travail de Francis, il est possible d'associer une entité cognitive correspondante sur le trapèze. Selon nous, c'est elle qui a piloté le travail géométrique de Francis dans la réalisation de la tâche prescrite. Cette entité cognitive aide à comprendre les raisons de la circulation de ce travail dans les différents plans de l'ETM.

SYNTHÈSE

Dans cet atelier nous avons présenté une méthode d'analyse du travail personnel qui améliore et approfondit notre compréhension du travail mathématique personnel d'un sujet au sein d'une institution scolaire.

Cette méthode représente métaphoriquement une loupe que l'on déplace dans deux sens inverses sur la production du sujet. Elle est composée d'une analyse descendante (Zoom in) et ascendante (Zoom out).

L'analyse descendante consiste à découper en une suite d'actions mathématiques l'activité d'un sujet durant la réalisation d'une tâche. Ces actions mathématiques sont objectifiées et prélevées dans le discours écrit (productions écrites) et/ou oral (mises en commun, entretien, etc.) du sujet concerné. Ces actions sont par la suite analysées de manière fine à l'aide des outils de la théorie des ETM et décrites à l'aide des différentes composantes du diagramme des ETM. Ces actions et leur interprétation dans la théorie des ETM sont résumées dans un tableau à double entrée qui permet de suivre pas à pas dans le temps la réalisation de la tâche et la circulation du travail mathématique à travers les différents plans de l'ETM.

L'analyse ascendante consiste à regrouper les actions du sujet repérées en des actions plus globales qualifiées d'épisodes. Ces épisodes sont visualisés de manière synthétique à l'aide du diagramme des ETM afin d'obtenir une vue globale du développement du travail mathématique d'un sujet au cours de la réalisation d'une tâche.

Cette analyse, à double sens et à granularité fine, permet de caractériser le travail mathématique en termes de conformité du processus et de validité du résultat par rapport aux attentes épistémologiques. Par ailleurs, elle peut permettre de détecter et d'expliquer les sources de blocages et des malentendus qui peuvent se produire au cours de l'exécution de la tâche. Elle permet aussi d'identifier les *activateurs* du travail mathématique associés aux composantes de l'ETM. Cette analyse donne une explication de la circulation du travail mathématique et contribue à comprendre la manière dont le travail s'effectuer.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Kuzniak, A. (2019. La théorie des Espaces de Travail Mathématique. Développement et perspectives. *Conférence du sixième symposium ETM*. Valparaiso, Décembre 2018.

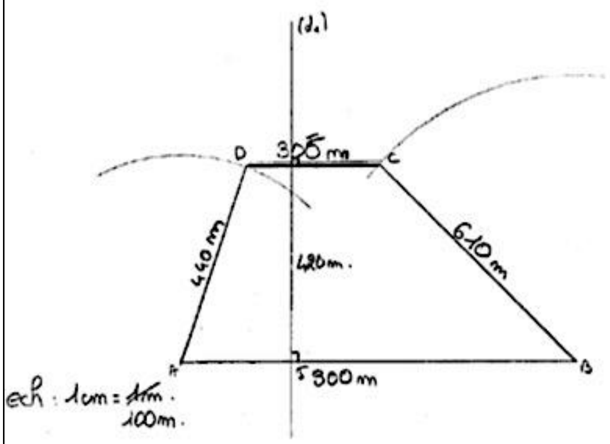
Kuzniak, A. et Nechache, A. (2019). Geometrical paradigms and geometric work of pre-service school teachers: rethinking the field. *CERME 11*. Utrecht, Février 2019.

Kuzniak, A. et Nechache, A. (2018). Le terrain d'Alphonse ou les infortunes de la mesure. *45e colloque de COPIRELEM*, Blois, juin 2018.

Kuzniak, A, Nechache, A &Drouhard (2016). Understanding the developpement of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics education*, 48 (6), 861-874.

Kuzniak, A & Nechache, A. (2015). Using the Geometric Working Spaces in order to plan the teaching of geometry. In *Proceedings of Cerme9 Prague.*

ANNEXE 1 PRODUCTION DE FRANCIS

<table>
<tr><th>Discours de Francis à la mise en commun</th><th>Production écrite de Francis</th></tr>
<tr><td>
Professeur : Est-ce que pensez que vous auriez peut-être besoin d'une information supplémentaire pour pouvoir réussir.
Etudiant 1 : Il faudrait la forme du quadrilatère.
Professeur : La forme du quadrilatère. Est-ce que vous avez une idée de ce que ça pourrait être ? Est-ce que cela peut être un carré ?
Etudiants : Non.
Professeur : Un rectangle, Un losange.
Etudiants : Non.
Professeur : Tout cela vous savez calculer les aires. Ensuite, un trapèze ?
Etudiant 2 : Cela pourrait mais...
Etudiant 3 : Oui mais avec les mesures cela ne coïncide pas.
Francis. Si cela fait un trapèze.
Professeur : Cela fait un trapèze ?
Francis. Oui, j'ai pris la grande base 900 m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle et puis j'ai tracé une perpendiculaire à la grande base et cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elles donc cela fait un trapèze...
Professeur : Donc. Francis ici en faisant un dessin à l'échelle et en mettant les mesures qu'il a trouvées prouve avec ses instruments que c'est un trapèze.
</td><td>


[AB]⊥(d1) et [DC]⊥(d1)
or si deux droites sont perpendiculaire à une même droite alors ces deux droites sont parallèles entre elle. [AB]//[DC]

En mesure [I J] = 420m. I ∈ [DC] et J ∈ [AB].
$A = \frac{300+900}{2} \times 420$
$A = \frac{1200}{2} \times 420$
$A = 600 \times 420$.
</td></tr>
</table>

TALLER 1

UNA METODOLOGÍA PARA ANALIZAR EL TRABAJO PERSONAL DE LOS ESTUDIANTES EN LA TEORÍA DE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

Alain Kuzniak[a] et Assia Nechache[b]

[a]Université de Paris, Laboratoire de Didactique André Revuz,

[b]Université Cergy-Pontoise, Laboratoire de Didactique André Revuz, France

alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr, assia.nechache@u-cergy.fr

OBJETIVO DEL TALLER

El objetivo de este taller es mostrar el uso de la teoría de los ETM y su diagrama para analizar y describir la circulación del trabajo matemático con el fin de caracterizar este trabajo (integridad, conformidad, bloqueo, confinamiento, etc.). Este análisis se basa en las diferentes dimensiones del ETM, así como en las herramientas (semiótica, tecnología, teoría) asociadas a cada una de ellas. El objetivo es proporcionar a los participantes elementos para avanzar en la siguiente pregunta: ¿cómo utilizar la teoría de los espacios de trabajo matemáticos como marco metodológico para analizar el trabajo matemático personal de una asignatura?

Después de un breve recordatorio teórico (sección 2), se pidió a los participantes que analizaran una tarea geométrica (sección 3) y el trabajo geométrico producido por un estudiante en torno a esta tarea (sección 4). Al final del taller, presentamos a los participantes una metodología (sección 4) basada en la teoría de los espacios de trabajo matemáticos que desarrollamos como parte de nuestra investigación sobre el estudio del trabajo personal de los estudiantes de maestría que pretenden enseñar en la escuela primaria (Kuzniak y Nechache, 2018) en el campo de la geometría.

TRABAJO MATEMÁTICO EN LA TEORÍA DE ETM

Identificar y comprender el trabajo matemático de una asignatura durante la realización de tareas matemáticas es una preocupación de la teoría ETM. El estudio del trabajo personal en esta teoría implica analizar este trabajo a través de los diferentes componentes de la ETM (dimensiones y herramientas asociadas a cada una de estas dimensiones).

El primer paso del análisis describe el desarrollo del trabajo personal real (y su circulación) utilizando el diagrama ETM a través del cómic (Kuzniak y Nechache, 2015). Esto implica identificar posibles bloqueos o malentendidos durante la realización de la tarea. Luego, el propósito del análisis es caracterizar este trabajo matemático (integridad o no, confinamiento en una dimensión, conformidad con los requisitos epistemológicos de la disciplina). Estos dos períodos de análisis son la base de la metodología para identificar y comprender el trabajo personal de un sujeto.

ESTUDIO DEL TRABAJO GEOMÉTRICO REALIZADA POR LOS ESTUDIANTES

La tarea propuesta a los estudiantes: una breve presentación. La tarea "Terreno de Alphonse" tiene el siguiente enunciado:

> Alphonse acaba de volver de un viaje al Périgord, donde vio una parcela en forma de cuadrilátero que interesaba a su familia. Le gustaría estimar su área. Para ello, durante su viaje, midió, sucesivamente, los cuatro lados del campo y encontró, aproximadamente, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m.
>
> Tiene dificultades para hallar el área. ¿Puedes ayudarlo indicándole el método a seguir?
>
> *Información complementaria*
>
> Alphonse le pidió ayuda a un amigo del Perigord y ella sólo le devolvió la longitud de una de las diagonales: 630 m.

Para resolver esta tarea, los estudiantes deben movilizar el conocimiento sobre los cuadriláteros, las nociones de escala y la medición del área de un cuadrilátero. La realización de esta tarea requiere un primer modelado relacionado con la forma y representación del terreno (Figura 1). No detallamos esta fase aquí.

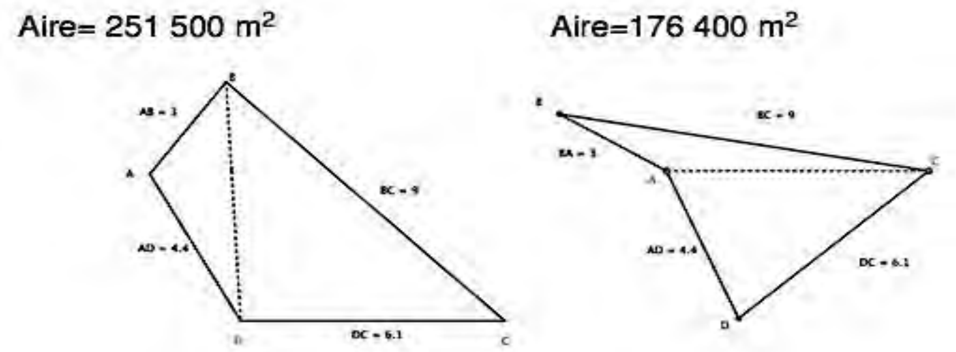


Figura 1: Ejemplos de posibles formas del terreno de Alphonse (con una diagonal dibujada en su interior)

La implementación de la tarea en el aula

Hemos ofrecido la tarea "El terreno de Alfonso" a los estudiantes de primer año de maestría que están destinados a enseñar en la escuela primaria. La ejecución de esta tarea se llevó a cabo en tres fases con objetivos específicos. Cada una de las fases termina con una puesta en común.

En la primera fase, distribuimos el enunciado de la tarea **sin información adicional** sobre la longitud de una de las diagonales del terreno y dimos a los estudiantes 10 minutos para buscar una solución. El objetivo es mostrar que falta un dato (es decir, la longitud de una diagonal) para poder resolver la tarea. Al final de esta fase, recogimos las producciones de los estudiantes antes de hacer la puesta en común.

En la segunda fase, propusimos información adicional sobre la diagonal y permitimos 10 minutos para buscar una solución. El objetivo de esta fase es resaltar las diferentes formas posibles del terreno (ver Figura 1). Después de los 10 minutos de investigación, recogimos las producciones de los estudiantes y luego realizamos una puesta en común. Esta permite informar sobre las posibles formas del terreno de Alphonse y discutir los métodos utilizados por los estudiantes.

En la última fase, los estudiantes realizaron un cálculo del área del terreno colocándose primero en el caso de que el terreno tuviera la forma de un cuadrilátero convexo y luego una forma no convexa (Fig. 1). La puesta en común al final del tiempo de investigación permite enumerar todos los procedimientos utilizados por los estudiantes para discutirlos. Más específicamente, los resultados obtenidos por cada estudiante deben ser comparados de acuerdo con los procedimientos elegidos y la forma del campo elegido, para llevar a cabo los cálculos.

SIMULACIONES DE LOS PARTICIPANTES DEL TALLER

Invitamos a los participantes a leer la tarea y resolverla en grupos de cuatro. Una primera puesta en común permitió identificar los diferentes métodos utilizados por los participantes y discutir su validez.

Luego propusimos analizar una producción de un estudiante llamado Francis (Apéndice 1) diseñada durante la primera fase de la implementación de la tarea en una clase magistral de primer año. Luego sugerimos que el análisis del trabajo se centrara en identificar las dimensiones, los planos verticales en juego y las herramientas asociadas a cada una de las dimensiones utilizadas por el estudiante durante la tarea (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016). Finalmente, les pedimos que describieran la circulación del trabajo matemático producido por este estudiante usando el diagrama ETM.

Durante la puesta en común, pudimos mostrar a los participantes que estaban realizando diferentes análisis y flujos de trabajo a través del diagrama ETM. Como era de esperar, esta diversidad nos permitió concienciar a los participantes de las limitaciones de un análisis basado únicamente en el diagrama del ETM y animarlos a estar atentos al diagrama. En efecto, el diagrama ETM debe ser ante todo una herramienta para visualizar el análisis detallado del trabajo matemático producido por un sujeto durante la realización de la tarea. Esto requiere una metodología precisa para analizar la producción.

Posteriormente, enfatizamos la necesidad de comenzar el análisis del trabajo matemático personal especificando la minuciosidad de este análisis. Dependiendo de las necesidades del análisis, la minuciosidad puede ser más o menos fina. El objetivo de este análisis es reconstruir los principales episodios previstos por el sujeto para llevar a cabo la tarea prescrita para él. Cada episodio se describe a través de una serie de acciones del sujeto que pudimos identificar.

El análisis del trabajo personal es doble: de arriba hacia abajo (efecto lupa) y de abajo hacia arriba sobre la producción del sujeto. El análisis *descendente* es un "zoom in" sobre la producción de un tema con el fin de identificar con precisión cada una de sus acciones en el desempeño de la tarea. Estas acciones se agrupan en episodios. El análisis *ascendente* es un "zoom out" sobre la producción del sujeto para obtener una visualización sintética, mediante el diagrama ETM, de los episodios posiblemente planificados y externalizados por el sujeto.

A continuación, mostramos con un ejemplo nuestro análisis del trabajo matemático.

UN MÉTODO DE ANÁLISIS DEL TRABAJO MATEMÁTICO PERSONAL: EL CASO DEL ESTUDIANTE FRANCIS

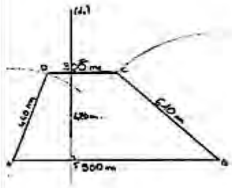
Para estudiar la producción escrita de Francis construimos y utilizamos una tabla de análisis de las acciones de este estudiante. Luego también examinamos las interacciones que tuvieron lugar entre Francis y el profesor, pero también entre Francisco y los otros estudiantes de la clase durante la puesta en común.

Nuestro método de análisis consiste en dos pasos que se describen a continuación.

Etapa 1. Identificación e interpretación de las acciones del estudiante (análisis descendente)

En esta etapa, identificamos las acciones de Francis para llevar a cabo la tarea prescrita. Luego, los interpretamos en la teoría de los ETM. La siguiente tabla muestra cómo se llevó a cabo el análisis.

La primera columna muestra las acciones de Francis registradas en su producción escrita y en sus intercambios durante la puesta en común. La segunda columna describe la interpretación de cada una de estas acciones en la teoría ETM utilizando los diferentes componentes del diagrama (ver Tabla 1). Esta interpretación se basa en una codificación que permite identificar exactamente las diferentes articulaciones de las dimensiones o componentes durante la ejecución de la tarea. Por lo tanto, el código [Sem ↔ Ins] significa trabajar entre las dos dimensiones de la semiótica y la instrumental. La codificación Ref → [Sem-Ins] significa que el polo referente fue un detonante para un trabajo que esencialmente tuvo lugar en el plano semiótico-instrumental.

	Actions mathématiques repérables de l'étudiant	Interprétation de ces actions en termes d'ETM
Episode 1 : Construction de la figure à l'échelle	***Action 1- Choix d'une échelle pour réaliser la figure*** éch : 1cm = ~~1hm~~ 100m.	**Ref**
	Action 2- Construction de la figure par ajustement à l'aide de la règle graduée et d'un compas  	**[Sem ←→ Ins]** La règle graduée et le compas sont utilisés comme des outils technologiques avec lesquels il exerce un contrôle visuel (sémiotique) et instrumentale. *Un travail simultané des deux dimensions instrumental et sémiotique.*
Episode 2 : Justification de la nature du quadrilatère	***Action 3- Explication de la construction du quadrilatère*** *« J'ai pris la grande base 900 m ensuite à partir des deux extrémités des 900m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle »* **(Propos de Francis)**	**[Sem ←→ Ins]** Usage simultané des outils sémiotiques (Sem) et technologiques (Ins) pour expliquer la construction de la figure. *Des contrôles visuels et instrumentaux sont utilisés* *Production d'un discours pour expliquer le processus de construction du representamen (dessin du trapèze). Ce discours s'appuie sur les outils technologique (Ins) et les outils sémiotiques (Sem).*
	Action 4- Justification de la nature du quadrilatère *« j'ai tracé une perpendiculaire à la grande base et cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300m du coup comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elles sont parallèles entre elles. donc cela fait un trapèze »* **(Propos de Francis)** (DC)⊥(Δ) et [AB]⊥(Δ) or si deux droites sont perpendiculaire à une même droite les deux droites sont parallèles entre elles. (AB)//(DC)	**[Ins ←→ Dis]** Usage de l'équerre (outil technologique) pour vérifier le parallélisme des deux côtés du quadrilatère afin d'en déduire que c'est un trapèze. Usage de la définition du Trapèze (outil théorique) pour en déduire que le quadrilatère construit est bien un trapèze. *Les connaissances de l'étudiant portant sur le trapèze activent la dimension instrumentale.* *Production d'un discours pour justifier à l'aide d'une propriété (outil théorique) le processus de construction et le résultat de ce processus (i.e. Trapèze).*

Episode 3 : Calcul de l'aire du quadrilatère	*Action 5- Mesure de la hauteur du trapèze* mesure [SJ] = 120cm	(Ins) Usage de la règle graduée (outil technologique) pour mesurer une longueur sur une figure
	Action 6- Calcul de l'aire du trapèze $A = \frac{300+900}{2} \times 120$ $A = \frac{1200}{2} \times 120$ $A = 600 \times 120$	(Ins) Usage de la formule de calcul d'aire d'un trapèze (outil technologique) *Les connaissances de l'étudiant portant sur l'objet trapèze activent la dimension instrumentale*

Tabla 1. Identificar e interpretar las acciones de un estudiante (análisis de arriba hacia abajo)

El análisis descendente, "Zoom in", consiste en una forma de análisis "utilizando una lupa" del trabajo matemático. No sólo debe identificar las acciones matemáticas producidas por el estudiante para realizar la tarea, sino también identificar cómo se ha estructurado el trabajo del estudiante. Así, el trabajo de Francis se estructura en seis acciones que se han estudiado más a fondo con el diagrama de los ETM. Estas acciones se pueden agrupar en tres episodios.

Etapa 2: Visualización sintética del trabajo geométrico producida por Francis (análisis ascendente

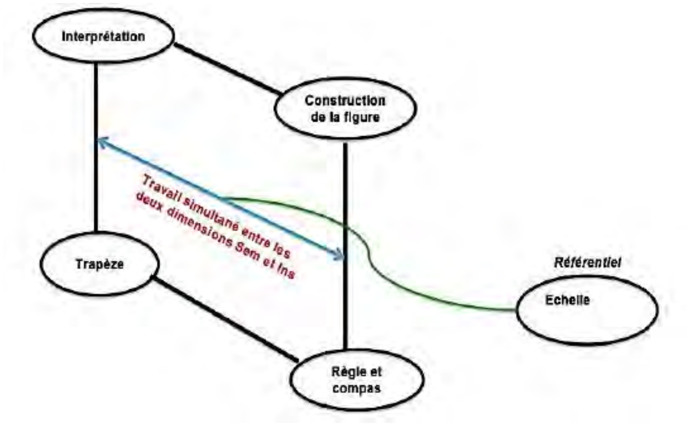
En este etapa se realiza un análisis ascendente, "Zoom out", para realizar una visualización sintética del trabajo geométrico producido por Francis. El trabajo de Francis se estructura generalmente en tres episodios (Tabla 2): construcción de la figura a escala, justificación de la naturaleza del cuadrilátero, cálculo del área del cuadrilátero. Estos episodios se visualizan a través de cómics y corresponden a la organización del trabajo del estudiante. Dan una "idea" del desarrollo del trabajo geométrico de Francisco durante la realización de la tarea.

Algunos elementos de caracterización del trabajo geométrico de Francis:

De nuestro análisis, deducimos que Francis construyó una figura a escala teniendo a priori la idea de la naturaleza de la figura a obtener (es decir, el trapecio). Para ello, utiliza las herramientas tecnológicas (compass, regla, cuadrado) de la dimensión instrumental (episodio 1). A continuación, propone una justificación de la naturaleza de la figura (episodio 2) y calcula el área de esta figura (episodio 3) a partir de las herramientas tecnológicas de la dimensión instrumental. Por lo tanto, el proceso seguido es consistente con el trabajo matemático esperado en el paradigma GI. Por otro lado, el resultado no es correcto porque Francis razonó sobre una figura en particular y obtuvo un valor del área. Además, el resultado no es correcto porque carece de control teórico e instrumental (las condiciones de construcción de un cuadrilátero y la precisión de la construcción). Diremos que el resultado de este trabajo no es correcto mientras el proceso sea conforme.

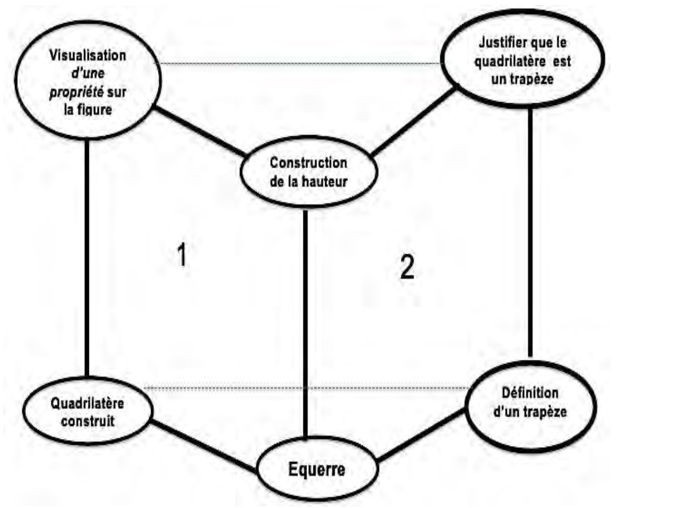
Francis usa dos tipos de discursos en el segundo episodio que no son discursos de prueba. En efecto, el primer discurso elaborado en el plano [Sem-Ins] tiene la función de explicar el proceso de construcción del trapecio (visto como un representamen) basado en las herramientas tecnológicas (regla y compás) de la dimensión instrumental.

El segundo discurso se elabora en el plano [Ins-Dis] que tiene la función de justificar el proceso de construcción utilizando una de las propiedades del trapecio (referencial teórico).

<table>
<tr>
<td>


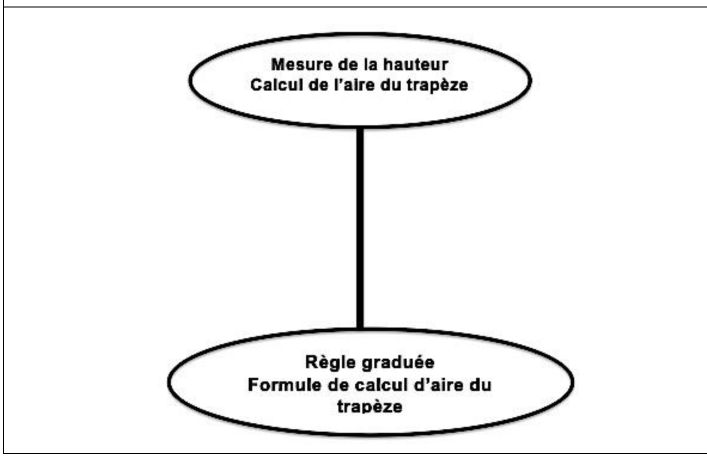
</td>
<td>

Episodio 1

Construcción de la figura a escala
El referencial teórico es un activador de un trabajo simultáneo y dinámico entre las dos dimensiones semiótica e instrumental.
Acción 1 y acción 2
</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>

Episodio 2
Justificación de la naturaleza del cuadrilátero

1) Producción de un discurso en el plano [Sem-Ins] que explica la técnica de construcción utilizada para obtener un trapecio.
Acción 3
2) Producción de un segundo discurso en el plano [Dis-Ins] explicando el conocimiento que justifica la técnica de construcción del trapecio (i.e. Trapecio).
Acción 4
</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>

Episodio 3
Cálculo del área del cuadrilátero
Utilización de una fórmula para calcular el área asociada al objeto trapecio y medición de la representación (aquí el dibujo del trapecio construido en el episodio 1) utilizando las herramientas tecnológicas asociadas a la dimensión instrumental.
Acción 5 y acción 6
</td>
</tr>
</table>

Tabla 2. La visualización sintética del trabajo geométrico de Francis (análisis Descendente).

En conclusión, se puede ver que, en el trabajo de Francis, la entidad trapezoidal es convocada en diferentes aspectos durante la realización de la tarea:

- el aspecto de diseño del trapecio (representamen),
- el aspecto material (regla, compás, cuadrado) o simbólico (fórmula de cálculo de área) del artefacto asociado con el trapecio.
- el aspecto de propiedad y definición asociado al trapecio

Así, el trabajo de Francis se basa en las diferentes componentes epistemológicas de la entidad trapezoidal (Kuzniak y Nechache, 2015). Esta entidad es el trío formado por los tres aspectos del trapecio antes mencionados. Cada uno de estos aspectos está asociado con uno de los tres componentes del plano epistemológico de ETMG de Francis.

A esta entidad epistemológica del trapecio presente en el trabajo de Francis, es posible asociar una entidad cognitiva correspondiente al trapecio. En nuestra opinión, fue ella quien dirigió el trabajo geométrico de Francis en la realización de la tarea prescrita. Esta entidad cognitiva ayuda a entender las razones de la circulación de este trabajo en los diferentes planos del ETM.

SYNTHÈSE

En este taller presentamos un método de análisis del trabajo personal que mejora y profundiza nuestra comprensión del trabajo matemático personal de una persona dentro de una institución escolar.

Este método representa metafóricamente una lupa que se mueve en dos direcciones opuestas sobre la producción del individuo. Se compone de un análisis descendente (Zoom in) y ascendente (Zoom out).

El análisis descendente consiste en dividir la actividad de una persona durante la realización de una tarea en una serie de acciones matemáticas. Estas acciones matemáticas son objetivadas y tomadas del discurso escrito (producciones escritas) y/o oral (pooling, entrevista, etc.) del individuo particular. Estas acciones se analizan en detalle utilizando herramientas de la teoría de los ETM y se describen utilizando los diferentes componentes del diagrama de los ETM. Estas acciones y su interpretación en la teoría de ETM se resumen en una tabla de doble entrada que permite seguir paso a paso en el tiempo la realización de la tarea y la circulación del trabajo matemático a través de los diferentes planes de l ETM.

El análisis ascendente consiste en agrupar las acciones identificadas del individuo en acciones más globales llamadas episodios. Estos episodios se visualizan de forma sintética utilizando el diagrama del ETM para obtener una visión general del desarrollo del trabajo matemático de un individuo durante la realización de una tarea.

Este análisis de dos direcciones, de calidad muy fina, permite caracterizar el trabajo matemático en términos de la conformidad del proceso y la validez del resultado en relación con las expectativas epistemológicas. Además, puede ayudar a identificar y explicar las causas de los bloqueos y malentendidos que pueden ocurrir durante la ejecución de la tarea. También identifica los dinamizadores matemáticos del trabajo asociados a los componentes del ETM. Este análisis proporciona una explicación de la circulación del trabajo matemático y ayuda a entender cómo se realiza este

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

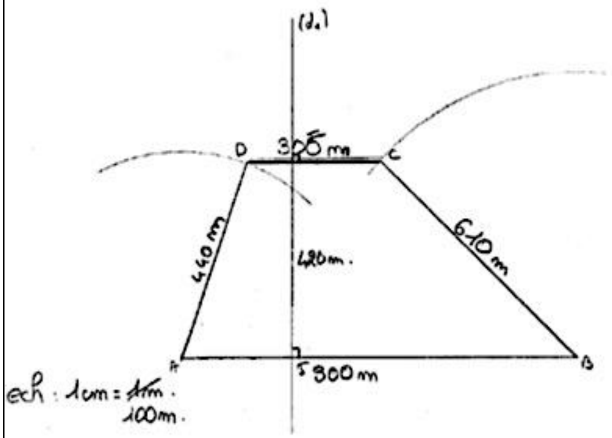
Kuzniak, A. (2019. La théorie des Espaces de Travail Mathématique. Développement et perspectives. *Conférence du sixième symposium ETM*. Valparaiso, Décembre 2018.

Kuzniak, A. et Nechache, A. (2019). Geometrical paradigms and geometric work of pre-service school teachers: rethinking the field. *CERME 11*. Utrecht, Fevrier 2019.

Kuzniak, A. et Nechache, A. (2018). Le terrain d'Alphonse ou les infortunes de la mesure. 45e colloque de COPIRELEM, Blois, juin 2018.Kuzniak, A, Nechache, A &Drouhard (2016). Understanding the developpement of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics education*, 48 (6), 861-874.

Kuzniak, A & Nechache, A. (2015). Using the Geometric Working Spaces in order to plan the teaching of geometry. In *Proceedings of Cerme9 Prague.*

ANEXO 1: PRODUCCIÓN DE FRANCIS

Discurso de Francis en la puesta en común	**Producción escrita de Francis**
Profesor: ¿Cree que podría necesitar información adicional para tener éxito? **Estudiante 1:** Se debe usar la formula del cuadrilátero. **Profesor:** La fórmula ¿Tienes idea de lo que podría ser? ¿Puede ser un cuadrado? **Estudiantes**: No. **Profesor:** Un rectángulo, un rombo. **Estudiantes:** No. **Profesor:** Todo esto lo sabes para calcular áreas. ¿Entonces un trapecio? **Estudiante 2:** Podría, pero... **Estudiante 3:** Sí, pero con las medidas no coincide. **Francis:** Si hace un trapecio... **Profesor:** ¿Es un trapecio? **Francis:** Sí, tomé la base grande 900 m, luego de ambos extremos de los 900 m con el compás, hice 410 a un lado y 610 a cada lado y luego con la regla traté de encontrar los 300 con los dos arcos del círculo y luego dibujé una perpendicular a la base grande y esta línea perpendicular a la base grande también era perpendicular a los pequeños 300 m de manera que dos líneas son perpendiculares a la misma derecha, son paralelas entre sí, así que se hace un trapecio.... **Profesor:** Así que Francis aquí, dibujando a escala y poniendo las medidas que encontró, demuestra con los instrumentos que se trata de un trapecio.	 [AB]⊥(d1) et [DC]⊥(d1) or si deux droites sont perpendiculaire à une même droite alors ces deux droites sont parallèles entre elle. [AB]//[DC] On mesure [IJ] = 420m. I∈[DC] et J∈[AB]. $A = \frac{300+900}{2} \times 420$ $A = \frac{1200}{2} \times 420$ $A = 600 \times 420$.

ATELIER 2

LA NOTION DE PREUVE DANS LA COORDINATION DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE : UNE PERSPECTIVE INSTRUMENTALE… ET UN PEU PLUS

Carolina Andrea Henríquez Rivas[a] et Philippe R. Richard[b]

[a]Universidad de Talca, Chili, [b]Université de Montréal, Canada

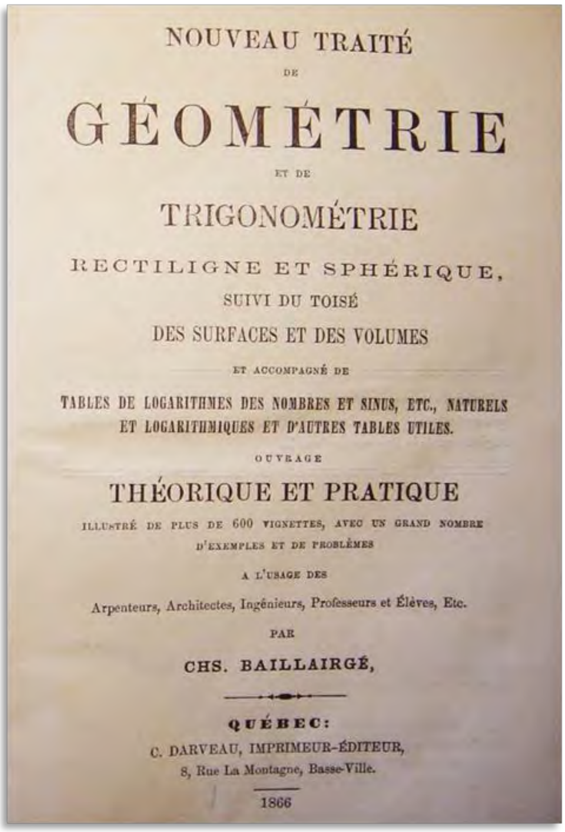
cahenriquez@utalca.cl, philippe.r.richard@umontreal.ca

RÉSUMÉ

Cet atelier vise à montrer comment les représentations sémiotiques et les outils technologiques influencent le point de vue traditionnel de la notion de preuve pour la réalisation du travail mathématique. À partir de considérations didactiques, épistémologiques et cognitives, nous distinguons la logique du constructeur (constitution des mathématiques ou présentation orthodoxe des textes mathématiques) de la logique de l'utilisateur-lecteur (apprentissage ou mise en œuvre des connaissances mathématiques). La théorie des espaces de travail mathématique (ThETM) nous amène à traiter des questions et des enjeux relatifs à la preuve, au raisonnement et à la nécessité épistémique, profitant des possibilités qu'offre le regard des genèses et des fibrations dans une perspective instrumentale. Nous discutons plus particulièrement de la coordination des genèses sémiotique, discursive et instrumentale de l'espace de travail pour fonder des preuves discursivo-graphiques, des preuves mécaniques et des preuves algorithmiques qui circulent à l'école. Enfin, nous concluons sur un rapprochement nécessaire entre heuristique et validation.

LE RAISONNEMENT HUMAIN EN MATHÉMATIQUE

Avec son traitement axiomatique et systématique de la géométrie, on considère souvent les Éléments d'Euclide comme étant le texte fondateur du raisonnement mathématique. Si l'influence de cet ouvrage sur le développement de la logique et de la science occidentale est fondamentale, sa forme a peu changé jusqu'au XIX[e] siècle. À cette époque, on commença à introduire des notations algébriques dans de nouvelles versions des *Éléments*, aussi bien sur le plan des énoncées que dans le développement du texte (ex. les « + » et les « = », Fig. 1) : plusieurs démonstrations par l'absurde de l'original euclidien ont été remplacées par des raisonnements directs (Richard, Oller, & Meavilla, 2016). Cependant, le rôle des figures par rapport au discours ne change pas, c'est plutôt leur relation au référentiel qui se transforme, au gré des nouvelles structurations proposées (propositions et raisonnements) et des moyens employés pour exprimer puis raccorder les unités signifiantes (mots du langage courant ou termes techniques, symboles mathématiques, signes graphiques, etc.).



NOUVEAU TRAITÉ

DE

GÉOMÉTRIE

ET DE

TRIGONOMÉTRIE

RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE,

SUIVI DU TOISÉ

DES SURFACES ET DES VOLUMES

ET ACCOMPAGNÉ DE

TABLES DE LOGARITHMES DES NOMBRES ET SINUS, ETC., NATURELS ET LOGARITHMIQUES ET D'AUTRES TABLES UTILES.

OUVRAGE

THÉORIQUE ET PRATIQUE

ILLUSTRÉ DE PLUS DE 600 VIGNETTES, AVEC UN GRAND NOMBRE D'EXEMPLES ET DE PROBLÈMES

A L'USAGE DES

Arpenteurs, Architectes, Ingénieurs, Professeurs et Élèves, Etc.

PAR

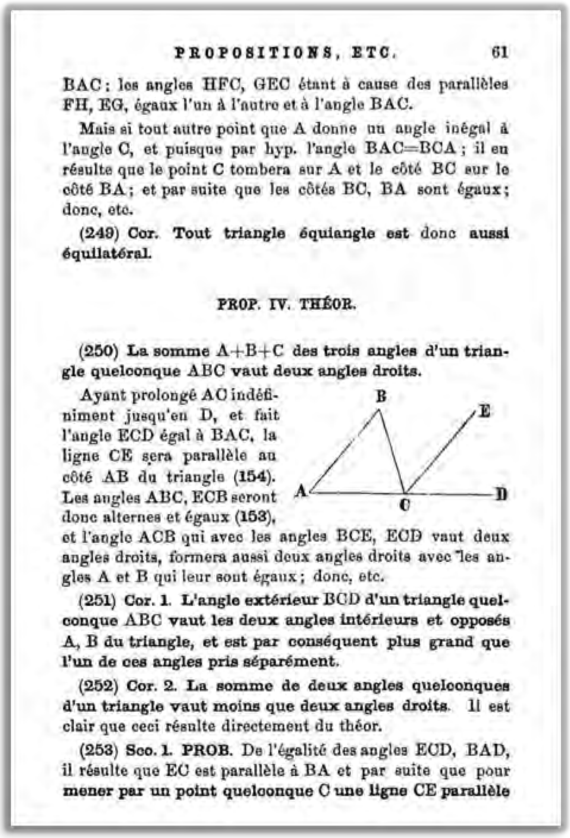
CHS. BAILLAIRGÉ,

QUÉBEC:

C. DARVEAU, IMPRIMEUR-ÉDITEUR,

8, Rue La Montagne, Basse-Ville.

1866



PROPOSITIONS, ETC. 61

BAC: les angles HFC, GEC étant à cause des parallèles FH, EG, égaux l'un à l'autre et à l'angle BAC.

Mais si tout autre point que A donne un angle inégal à l'angle C, et puisque par hyp. l'angle BAC=BCA; il en résulte que le point C tombera sur A et le côté BC sur le côté BA; et par suite que les côtés BC, BA sont égaux; donc, etc.

(249) **Cor. Tout triangle équiangle est donc aussi équilatéral.**

PROP. IV. THÉOR.

(250) **La somme A+B+C des trois angles d'un triangle quelconque ABC vaut deux angles droits.**

Ayant prolongé AC indéfiniment jusqu'en D, et fait l'angle ECD égal à BAC, la ligne CE sera parallèle au côté AB du triangle (154). Les angles ABC, ECB seront donc alternes et égaux (153), et l'angle ACB qui avec les angles BCE, ECD vaut deux angles droits, formera aussi deux angles droits avec les angles A et B qui leur sont égaux; donc, etc.

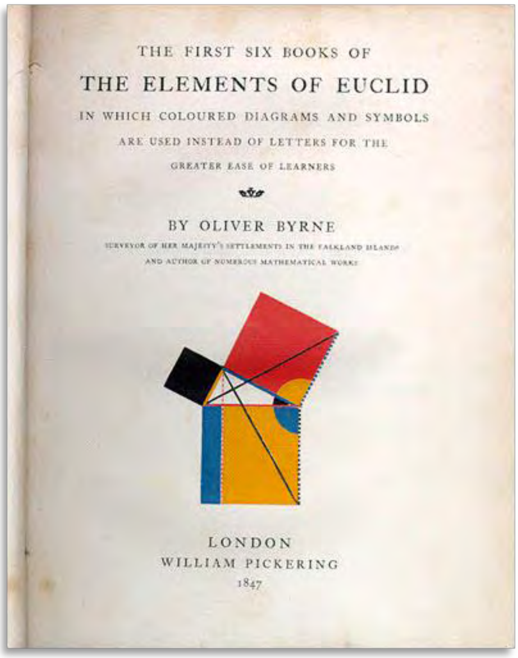
(251) **Cor. 1. L'angle extérieur BCD d'un triangle quelconque ABC vaut les deux angles intérieurs et opposés A, B du triangle, et est par conséquent plus grand que l'un de ces angles pris séparément.**

(252) **Cor. 2. La somme de deux angles quelconques d'un triangle vaut moins que deux angles droits.** Il est clair que ceci résulte directement du théor.

(253) **Sco. 1. PROB.** De l'égalité des angles ECD, BAD, il résulte que EC est parallèle à BA et par suite que pour **mener par un point quelconque C une ligne CE parallèle**

Figure 1. Dans son Nouveau traité de Géométrie (1866), Charles Baillargé condense le référentiel de John Playfair, celui-ci ayant déjà restructuré le référentiel d'Euclide avec l'introduction de notations algébriques et l'augmentation de raisonnements directs.

Parmi ces moyens, on retrouve l'approche originale de Byrne (1847), qui formule ses preuves avec des éléments figuraux et des symboles graphiques (Fig. 2), de même que les preuves en deux colonnes (Fig. 3), déjà présentes aux États-Unis au début du XX[e] siècle (Herbst, 2002). Avant l'usage des notations algébriques dans les *Éléments*, des auteurs comme Clairaut (1741) cherchaient à ce que le lecteur puisse se convaincre du bien-fondé de certains énoncés géométriques à l'aide de raisonnements inductifs, avant de démontrer ces énoncés déductivement, comme si l'on était en train d'expérimenter sur des figures animées par l'esprit. Ce type d'initiative, plutôt naturelle pour quelqu'un qui a aussi écrit une *Théorie des comètes* (1760), manifestait aussi l'intention d'initier le lecteur-apprenant à certaines idées d'une géométrie de l'infini nouvelle, celle de Fontenelle (1727). Mais le plus important est que ce jeu « physique » sur les figures géométriques, animé de toute évidence par le discours et la visualisation de déplacements (infiniment proches, par exemple) sur des figures statiques, est devenu presque deux siècles et demi plus tard une réalité où l'on peut maintenant effectuer des déplacements dans une géométrie dite dynamique. Mis à part le cas des dispositifs informatiques et la nature des inférences impliquées (Fig. 4), c'est le discours qui contrôle essentiellement la représentation et la transformation des figures, comme c'est lui qui apporte preuves et démonstrations (voir section suivante).



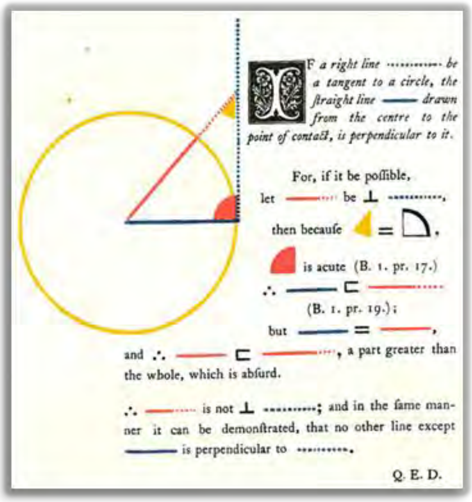
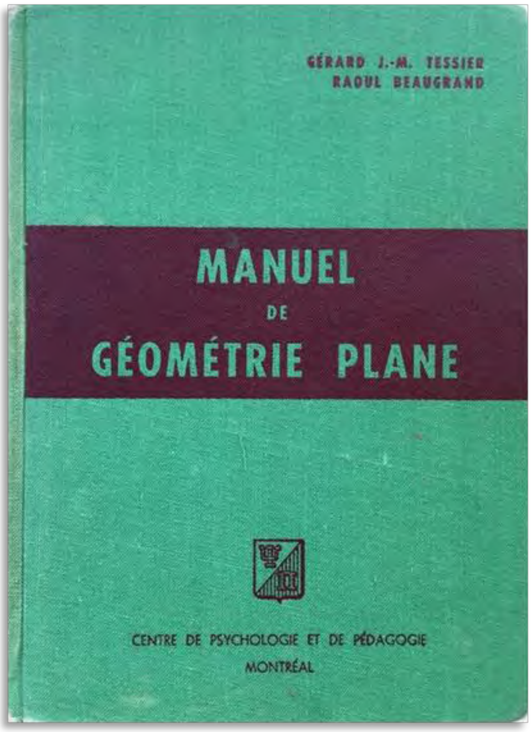
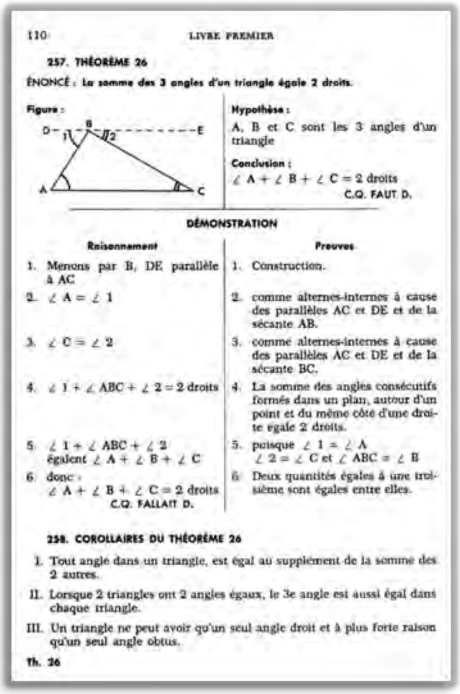


Figure 2. Dans les Éléments (1847) d'Oliver Byrne, les unités figurales pertinentes et quelques symboles graphiques nécessaires sont introduits à la structure discursive de la preuve « pour la plus grande facilité des apprenants ».





110 LIVRE PREMIER

257. THÉORÈME 26

ÉNONCÉ : La somme des 3 angles d'un triangle égale 2 droits.

Figure :

Hypothèse : A, B et C sont les 3 angles d'un triangle

Conclusion : ∠ A + ∠ B + ∠ C = 2 droits
C.Q. FAUT D.

DÉMONSTRATION

Raisonnement	Preuves
1. Menons par B, DE parallèle à AC	1. Construction.
2. ∠ A = ∠ 1	2. comme alternes-internes à cause des parallèles AC et DE et de la sécante AB.
3. ∠ C = ∠ 2	3. comme alternes-internes à cause des parallèles AC et DE et de la sécante BC.
4. ∠ 1 + ∠ ABC + ∠ 2 = 2 droits	4. La somme des angles consécutifs formés dans un plan, autour d'un point et du même côté d'une droite égale 2 droits.
5. ∠ 1 + ∠ ABC + ∠ 2 égalent ∠ A + ∠ B + ∠ C	5. puisque ∠ 1 = ∠ A ∠ 2 = ∠ C et ∠ ABC = ∠ B
6. donc : ∠ A + ∠ B + ∠ C = 2 droits C.Q. FALLAIT D.	6. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

258. COROLLAIRES DU THÉORÈME 26

I. Tout angle dans un triangle, est égal au supplément de la somme des 2 autres.

II. Lorsque 2 triangles ont 2 angles égaux, le 3e angle est aussi égal dans chaque triangle.

III. Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit et à plus forte raison qu'un seul angle obtus.

Th. 26

Figure 3. Dans le Manuel de géométrie plane (1958), Gérard Tessier et Raoul Beaugrand présentent des théorèmes et des démonstrations dans un style en deux colonnes, les aspects traditionnellement fonctionnels du discours semblent se subordonner à une même structure. Ce manuel est vraisemblablement inspiré d'une tradition étatsunienne entamée avec l'initiative novatrice du Plane Geometry (1913) d'Arthur Schultze et Frank L. Sevenoak.

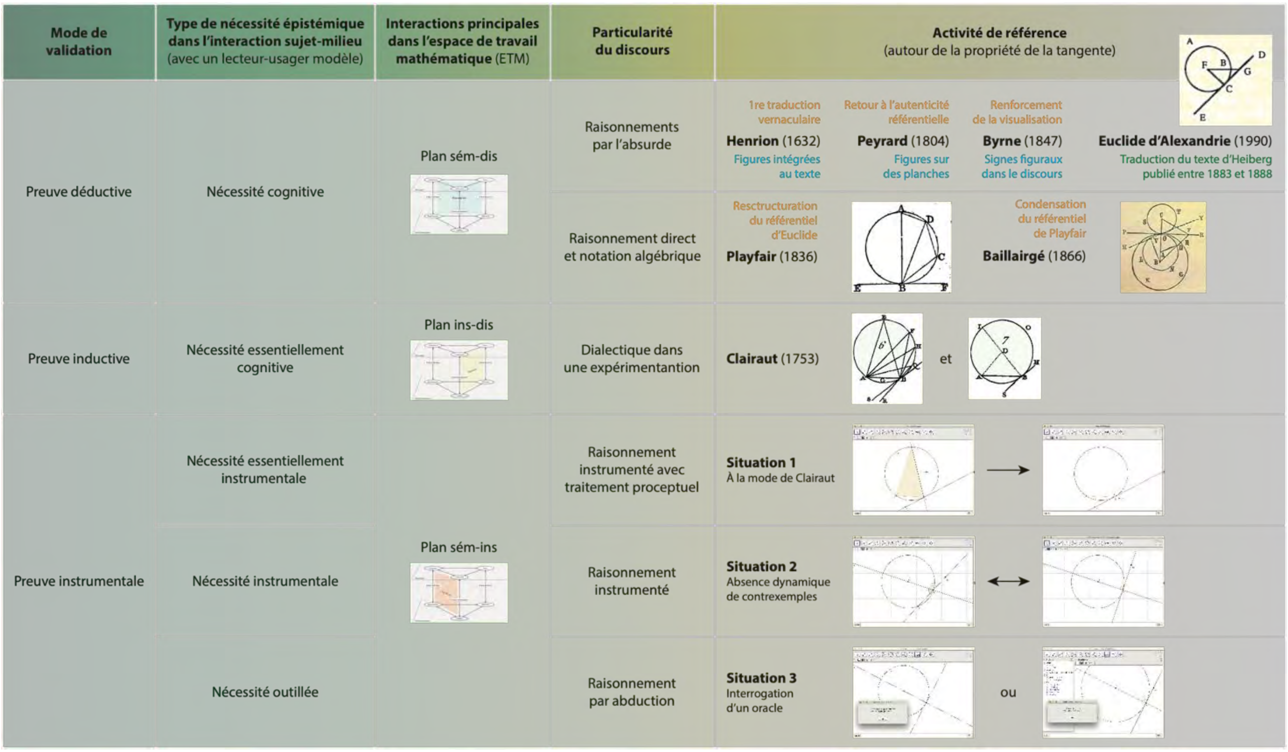


Figure 4. Raisonnement, preuve et démonstration : rapprochement de particularités discursives selon trois types de preuve et de nécessité épistémique dans l'activité mathématique (Richard, Oller, & Meavilla, 2016).

Au regard de la ThETM, un changement remarquable dans la coordination des genèses sémiotique et discursive apparaît avec ce que l'on appelle les *preuves sans mots* (Alsina et Nelsen, 2006). Dans ces preuves, le contrôle par le discours n'est plus aussi exclusif et l'exploration des moyens sémiotiques à mettre en œuvre pour compenser cela montre jusqu'à quel point l'ordre du symbolique peut être autonome. Certains agencements de figures arrivent même à représenter d'authentiques raisonnements mathématiques, pourvu que le lecteur y soit habitué. Dans un exemple présenté au cours de l'atelier (Fig. 5), on montre comment l'inférence de structure :

$$f(a + b + c, \square, d) = (a + b + c = d)$$

où f est l'inférence qui émerge de la séquence de figures, et $\square$ les propositions figurales signifiantes d'une figure-énoncé représentant les hypothèses de la situation. On voit ici que le raisonnement qui se dégage de la séquence de figures est complètement autonome et que l'énoncé aussi semble l'être, modulo le fait qu'on mentionne dans la mise en situation qu'il est un parallélogramme et qu'il s'agit bien d'une partition d'aires. Aurait-on pu se passer complètement de cette dernière information textuelle ou orale, et ainsi parler d'une preuve sémiotique authentique ? Comme être humain, le discours est en nous, il nous appartient quoi qu'il en soit, il est l'expression verbale de notre pensée et c'est en enchaînant des énoncés que nous formons nos messages. Il ne s'agit donc pas de nier un rôle aussi fondamental ou de tenter d'y échapper, sinon de souligner qu'en plus des moyens traditionnels, le travail mathématique est encore inventif dans ses moyens de communication et de traitement. Avec *f*, nous parlons d'une inférence figurale (Richard, 2004 a, b) qui fonde une preuve discursivo-graphique (Richard, Venant & Gagnon, 2019).

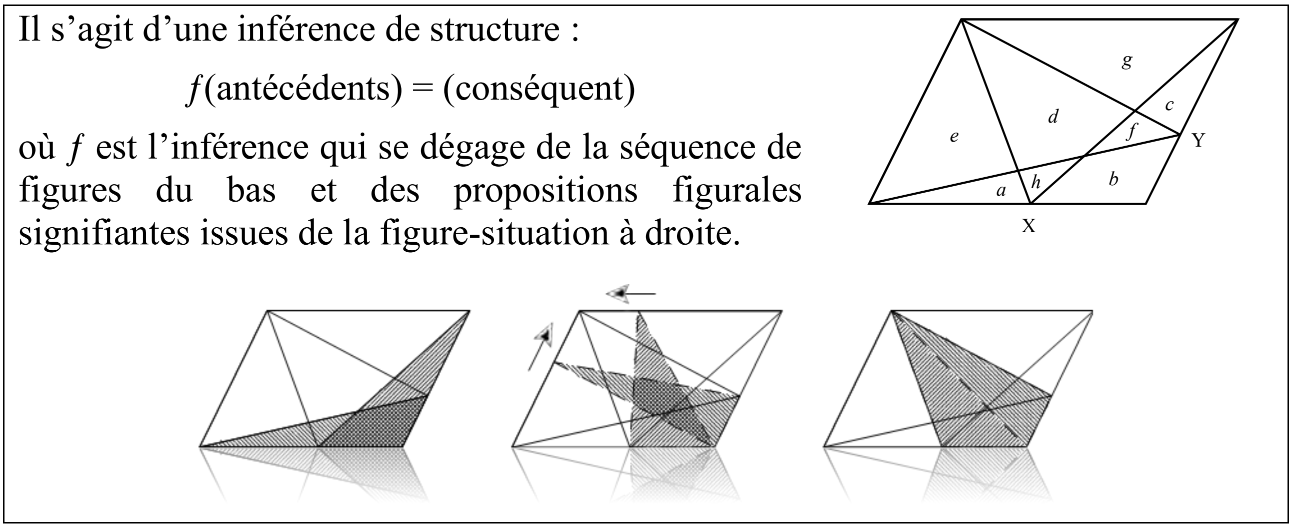


Figure 5. Preuve sans mots par expansion discursivo-graphique de l'égalité a + b + c = d dans la partition du parallélogramme, en haut à droite, à l'aide d'une séquence de figures qui fonde un raisonnement (Richard, 2003).

Malgré l'autonomie relative du discours et des divers systèmes de représentations sémiotiques en mathématique, il n'y a pas de registres exécutables, à l'image d'un programme informatique. Pour s'activer, une représentation sémiotique doit être en interaction avec un utilisateur ou un lecteur, tout comme les raisonnements discursivo-graphique par ailleurs. Cependant, si au lieu d'une séquence de figures, la situation de la Fig. 5 se posait à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique, il serait facile de l'associer à une question d'instrumentation dans une dynamique utilisateur-milieu. Ce qui change ici est que la figure représentée à l'interface du dispositif possède sa propre cohérence, indépendamment de toute lecture ou de tout usage éventuel, selon les modèles internes qui la définissent. De nos jours, avec des logiciels comme Géogébra, une même représentation à l'écran cache déjà deux figures : une figure numérique, qui découle d'un protocole de construction et qui s'affiche sur un domaine discret, et une figure symbolique, où les objets qui la constitue sont modélisés en algèbre à l'aide du calcul symbolique (Recio, Richard & Vélez, 2019). Si l'on consulte un oracle pour tenter de dégager des propriétés sur une telle figure, par exemple pour savoir si deux droites sont parallèles, le logiciel peut retourner qu'elles le sont effectivement, en spécifiant que le résultat est issu d'une évaluation par calcul (figure géométrique). Et si l'on indique que l'on veut en savoir plus, le logiciel ajoute que le parallélisme est toujours vrai (figure symbolique). Ces réponses proviennent bien de l'artéfact, pas du registre de représentation sémiotique, mais le questionnement initial émanait effectivement de l'usager dans sa quête de produire une inférence. Il s'agirait alors d'une inférence figurale instrumentée (Coutat, Laborde et Richard, 2016), sa justification étant essentiellement gérée (calculée) par la machine. Enfin, si au lieu de faire appel à un outil logique, on recourait à un outil physique, on pourrait placer *f* dans la perspective des machines mathématiques (Bartolini-Bussi & Maschietto, 2005). Le travail mathématique profite certes depuis longtemps de l'usage de toutes de sortes d'outils, mais les preuves discursivo-graphiques semblent insuffisantes pour rendre compte à elles seules du travail mathématique instrumenté. Il faut donc aussi s'interroger sur la coordination des genèses lorsque la genèse instrumentale est au premier plan.

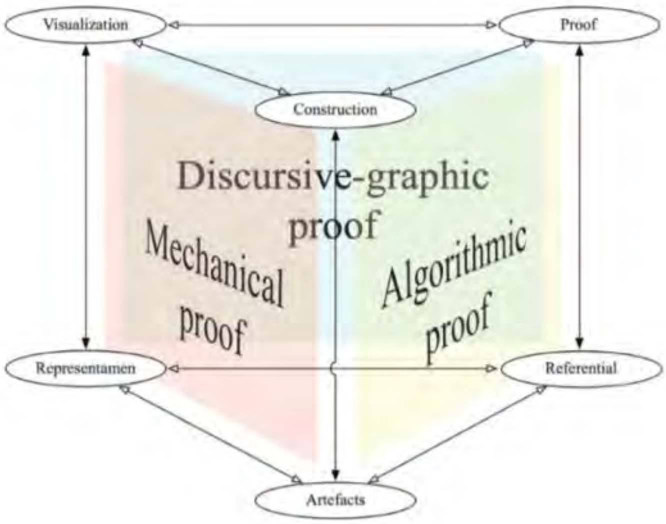


Figure 6. Les preuves instrumentales apparaissent dans le modèle des espaces de travail sur les plans verticaux saillants, et la preuve discursivo-graphique dans le plan de fond, soulignant la coordination des genèses dominantes (Richard, Venant & Gagnon, 2019).

QUELQUES ÉLÉMENTS THÉORIQUES

On sait que dans la ThETM, le travail mathématique se construit progressivement comme un processus de rapprochement des aspects épistémologiques et cognitifs selon trois développements génétiques étroitement reliés, identifiés dans la théorie comme les genèses sémiotique, instrumentale et discursive (Kuzniak & Richard, 2014). L'espace de travail mathématique se révèle en tant que modèle théorique et méthodologique qui permet de rapporter l'activité mathématique, potentielle ou réelle, au cours de la résolution de problèmes ou de tâches mathématiques. Il permet en particulier de décrire les interactions dominantes, finalisées ou non, selon la nature ou l'enjeu de moments signifiants. Du point de vue de la théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau (1998), il peut s'agit d'interactions didactiques, au cours de la dévolution d'une tâche, ou d'interactions adidactiques, dans la résolution même de la tâche. Lorsqu'on s'intéresse aux composantes de l'espace de travail mathématique, on voit tout de suite que la notion de preuve se rattache traditionnellement au plan épistémologique par la genèse discursive. Ce n'est pas une contradiction avec le propos développé jusqu'ici, parce que le travail mathématique a toujours été intimement lié au langage et à l'écriture. Et c'est justement en regardant plus finement le rôle joué par les systèmes de représentation sémiotique et les outils technologiques que l'on a pu convenir de nuancer sur la prépondérance du discours. Dès que l'on considère la perspective instrumentale, la notion de preuve dévoile toute sa complexité. Dans ce qui suit, nous décrivons brièvement les deux types de preuves instrumentales sur le plan de la coordination des genèses dominantes (Fig. 6). Des explications et des références plus complètes se trouvent dans l'article de Richard, Venant et Gagnon (2019).

Figure 7. Deux preuves mécaniques de l'égalité de Pythagore à l'école.

Le premier type de preuve instrumentale est la **preuve mécanique**, l'adjectif étant pris ici dans un sens qui relève du fonctionnement d'un mécanisme et non pas de l'automatisation d'un processus. Ces preuves, représentées à la Fig. 6 dans le plan vertical de gauche, s'activent avant tout par la coordination des genèses sémiotique et instrumentale. À l'instar de la méthode des pesées d'Archimède ou du déplacement d'éléments de figure à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique, la justification « *f* » repose sur la cohérence physique du mécanisme ou logique de la figure. Les preuves mécaniques sont fonctionnelles : elles permettent d'établir un résultat à partir d'un énoncé, mais ce n'est pas selon une rationalité toute mathématique. Il peut y en avoir, si l'on mathématise la construction ou le fonctionnement du mécanisme pour mieux en comprendre la validité, mais au cours de ce type de preuve ce n'est pas l'effet recherché. On veut être efficace en matière de raisonnement (instrumenté) et tirer une conclusion à partir des hypothèses mathématiques qui sont pertinentes dans la situation retenue. Au cours de l'atelier, nous avons donné deux exemples de preuve mécanique de l'égalité de Pythagore (Fig. 7). La première à gauche est justifiée par la comparaison des poids de morceaux de cartons qui représentent les carrés de l'hypoténuse A et des côtés B et C d'un triangle rectangle (Castelnuovo & Barra, 1976) et la seconde, à droite, par le transfert de volumes liquides dans de petites chambres parallélépipédiques (YouTube, 2009). Bien entendu, l'avantage de ces preuves a aussi son inconvénient, car elles soulèvent une question de transparence opérationnelle, que ce soit par rapport à la structure de l'artefact, de son fonctionnement ou de sa conduite. Ainsi, bien que ce soit facilement imaginable, rien n'indique que le mécanisme de la « preuve liquide » peut s'adapter à d'autres triangles rectangles, c'est-à-dire se généraliser, tandis que la « preuve solide » avait été réalisée avec plusieurs groupes d'élèves : chaque équipe partait de triangles avec des mesures propres, ce qui ajoute une dimension inductive à la justification. Bien entendu, ces preuves dépendent de l'habileté du sujet à manipuler l'outil, à comprendre son fonctionnement ou à interpréter conséquemment les résultats. Il en est de même avec les systèmes qui produisent des raisonnements, comme cela est le cas avec les outils de raisonnement automatisé implémentés dans GéoGébra. Ce qui est plus subtil ici est l'effet de la modélisation algébrique, qui calcule symboliquement avec des racines de polynômes, donc dans $\mathbb{C}$, et qui retourne des objets géométriques dans $\mathbb{R}^2$. Par exemple, en cherchant des lieux de points, certaines courbes algébriques affichées par le logiciel sont souvent difficiles à interpréter par l'utilisateur et dépendent crucialement de la façon avec laquelle la figure souche a été construite (Recio, Richard & Vélez, 2019). Pour reprendre les mots d'Alembert : « l'algèbre est généreuse, elle donne souvent plus qu'on lui demande ».

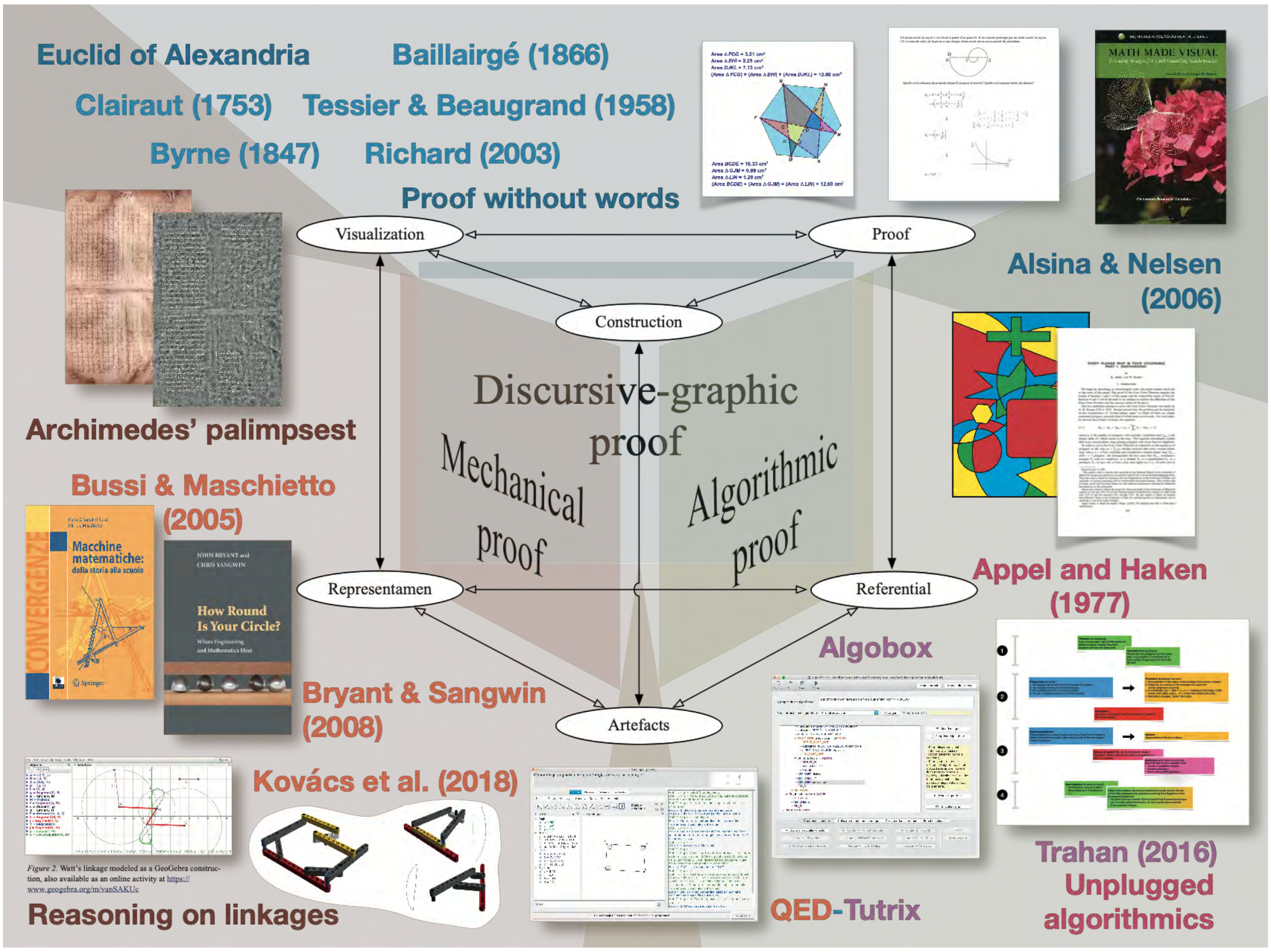


Figure 8. Références et illustrations historiques ou actuelles de preuves discursivo-graphiques (vers le haut), mécaniques (vers la gauche) et algorithmiques (vers la droite).

Le deuxième type de preuve instrumentale est la **preuve algorithmique**. Lorsque l'exécution d'un algorithme par une machine est dirigée par l'utilisateur, il est facile d'en retenir une marque typique de genèse instrumentale. Mais en même temps, la mise en place ou le développement d'un algorithme est naturellement associé à la genèse discursive (suite explicite et finie d'instructions ou d'opérations symboliques), même si l'on peut aussi étendre l'algorithme aux actions mécaniques ou à d'autres processus. Dans un processus de preuve algorithmique, il ne s'agit pas tant de valider un algorithme dans une sorte d'activité informatique débranchée, mais plutôt de considérer l'algorithmique associée à une tâche mathématique dont le but manifeste est de prouver. En effet, si les preuves algorithmiques apparaissent dans le plan vertical droit à la Fig. 6, c'est pour souligner le jeu des genèses lors de la conception pour et dans l'usage de la preuve. Il s'agit alors d'un processus d'adaptation réciproque entre le développement d'un algorithme et de son exécution dans une situation de validation mathématique. Dans ce processus, il y aurait des cas de figure qui admettent des ajustements par rapport aux conditions initiales de prédiction, ou des preuves provisoires qui découlent de l'activité instrumentée, jusqu'à la convergence d'une preuve finale. Selon Venant (2018, p. 58) :

> La pensée informatique (…) contribue au développement des compétences en résolution de problèmes en amenant d'abord à analyser le problème posé pour le restructurer sous forme de tâches correspondant chacune à un ou des objectifs, à évaluer la difficulté de chacune de ces tâches pour, enfin, être capable d'écrire les commandes précises à donner à un ordinateur pour qu'il les résolve.

Au cours de l'atelier, nous avons donné un exemple dans lequel la pensée algorithmique se manifestait par une aptitude à formuler des problèmes et à y proposer des solutions, de façon à ce que la résolution puisse être effectuée par un outil de traitement automatique de l'information. Des références connues, comme la célèbre démonstration du théorème des quatre couleurs, sont illustrées à la Fig. 8, conjointement aux autres types de preuve. Toutefois, le mode de pensée algorithmique dans le travail mathématique peut apparaître indépendamment de l'exécution d'un algorithme par une machine, comme le font les mathématiciens lorsqu'ils décomposent une tâche en sous-tâches à traiter par différents moyens techniques. De même, elle peut apparaître au cours d'un raisonnement instrumenté à l'interface d'un système tutoriel comme QED-Tutrix (Leduc, 2016 ; Tessier-Baillargeon, 2015) où un agent tuteur intelligent répond aux actions ou formulations de l'élève, celui-ci testant méthodiquement le discours tenu par machine dans sa quête d'une preuve (Font, Richard & Gagnon, 2018).

Au même titre que les preuves mécaniques, les preuves algorithmiques montrent qu'il est possible d'engager des raisonnements sur un plan particulier de l'espace de travail mathématique. Dès qu'un outil entre en jeu, les raisonnements instrumentés viennent alors compléter le raisonnement discursivo-graphique pour la réalisation du travail mathématique. Puisqu'une preuve peut consister en plusieurs étapes de raisonnement et qu'un raisonnement peut se constituer en plusieurs preuves, il n'y a pas de hiérarchie entre les types de preuves, un même processus de preuve peut aussi bien en inclure plusieurs types en même temps. Un exemple qui montre bien leur entrelacement vient de Villiers (2018). Posé dans un environnement informatique, le problème précédent sur la partition du parallélogramme a été conduit vers des polygones de degré supérieur (Fig. 9). Sa proposition d'une version interactive de la preuve fournie automatiquement les mesures des deux côtés de l'égalité. C'est déjà une preuve à la fois mécanique et discursivo-graphique proche de nos considérations autour de la Fig. 5. Par exemple, dans la situation de gauche (Fig. 9), on peut déplacer les points A, B ou C pour changer l'allure du parallélogramme, de même que les points E ou F pour en modifier la position sur les côtés [BC] et [CD] respectivement. L'argument discursivo-graphique du déplacement des points E et F s'étend à n'importe quelle configuration du parallélogramme ABCD : la préservation des propriétés visuelles (ex. parallélisme des côtés) ou le repérage d'invariants (ex. mesures des aires) dans le déplacement participent à l'effort de preuve de l'usager qui questionne ainsi le milieu. À l'interface de la situation, l'auteur ajoute un bouton d'aide qui participe à la dévolution du problème (astuce) et un bouton de généralisation qui permet à l'utilisateur de passer à la situation suivante (pentagone). En fait, l'utilisateur peut toujours passer à une situation plus générale (pentagone ou autre [k + 1]-gone, jusqu'à un octogone) sans même avoir résolu le problème précédent (parallélogramme ou k-gone). Ce serait alors une activité de preuve assez riche qui permettrait également d'engager une preuve algorithmique, en résolvant dans ses moindres détails chaque problème de preuve.

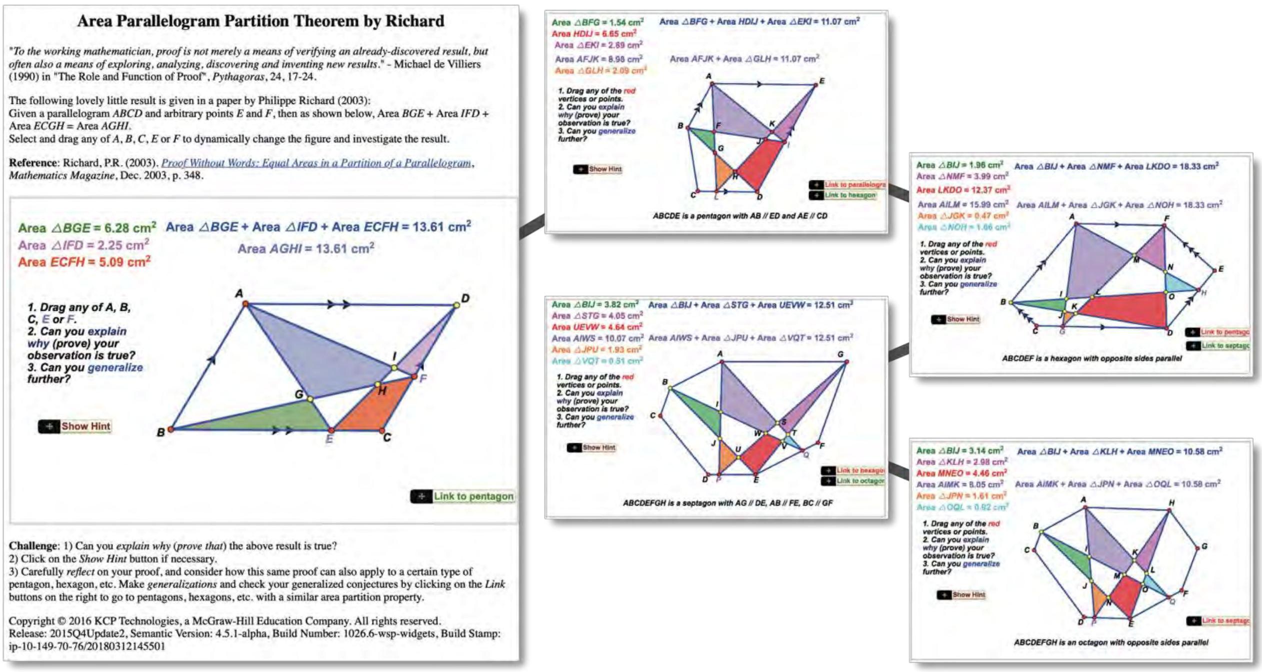


Figure 9. Problème de la partition du parallélogramme (Richard, 2003) posé dans un environnement informatique (Villiers, 2018) et généralisé à une classe de problèmes sur des polygones de degrés supérieurs. Les situations de droite se présentent après avoir cliqué sur un des boutons « lien vers ‹ n-gone › ».

L’atelier s’est terminé en proposant deux défis aux participants. Le premier défi consistait à concevoir certaines activités de preuve discursivo-graphique, et le second, des activités de preuve instrumentale à l'école, mécanique ou algorithmique. Une mise en garde sur la polysémie de ces deux derniers termes a été soulevée pour bien situer l’aspect calculatoire d’un raisonnement déductif, l’automatisation d’un raisonnement ou la mécanisation d’une preuve (formalisation complète) selon les contextes.

CONCLUSIONS

La valeur ajoutée des trois types de preuves que nous avons travaillés dans cet atelier s’enracine d’emblée dans la transversalité caractéristique du travail mathématique et rejoint, à sa manière, l’idée du « travail mathématique complet » soulevé par Kuzniak, Nechache & Drouhard (2016). Car si les mathématiques couvrent plusieurs domaines (géométrie, analyse, algèbre, etc.), elles sont continuellement en interaction avec plusieurs disciplines, dont la physique ou l’informatique pour ne nommer que deux voisines proches. Il faut surtout souligner que la reconnaissance de ces preuves, en particulier les preuves instrumentales, implique une ouverture sur les différentes manières dont la preuve peut être obtenue dans le travail mathématique à l’école. Dans son fameux *Comment poser et résoudre un problème* (1973), George Pólya expliquait que si la solution que nous avons finalement obtenue est longue et complexe, il est naturel de soupçonner qu’il en existe une plus claire et moins compliquée. Il se peut aussi que même si nous avons réussi à trouver une solution satisfaisante, nous soyons toujours intéressés à trouver une nouvelle solution, comme celui qui après avoir vu un objet souhaite maintenant le toucher. Avec son approche heuristique, non seulement pour les problèmes de preuve, mais pour les problèmes en général, il nous parait évident que Pólya était un apôtre de l’utilisation combinée de la sémiotique et du discursif dans ses raisonnements, ce qui laisse croire qu’il aurait été à l’aise avec le concept des preuves discursivo-graphiques. Cependant, s’il a rarement abordé la question du travail mathématique avec des outils techniques, nous savons que ses écrits ont manifestement influencé plusieurs physiciens et informaticiens. Nous pouvons croire aisément que s’il avait eu à portée de main un ordinateur aussi facilement qu’aujourd’hui, il aurait sans doute trouvé un moyen de nous faire participer avantageusement à cette aventure instrumentale. En suivant les traces de Pólya, nous en déduisons que l’intégration des preuves instrumentales dans le travail mathématique à l’école est un enrichissement souhaitable des moyens de validation et, ce faisant, une ouverture sur une meilleure compréhension du travail de l’expert.

RÉFÉRENCES

Alsina, C., & Nelsen, R. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. Washington: the Mathematical Association of America.

Bartolini Bussi M.G., & Maschietto M. (2005). *Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola*. Springer. DOI 10.1007/88-470-0403-9.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage : Grenoble.

Coutat, S., Laborde, C., & Richard, P.R. (2016). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 1–27. DOI 10.1007/s10649-016-9684-9.

Font, L., Richard, P.R. & Gagnon, M. (2018). Improving QED-Tutrix by Automating the generation of Proofs. In P. Quaresma and W. Neuper (Eds.): *Proceedings 6th International Workshop on Theorem proving components for Educational software, (ThEdu'17), Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science, 267*, 38–58. DOI 10.4204/EPTCS.267.3.

Herbst, P.G. (2002). Establishing a custom of proving in american school geometry: evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 283–312. DOI 10.1023/A:1020264906740.

Kuzniak, A., Nechache, A. & Drouhard, J.P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 48*(6), 843–859. DOI 10.1007/s11858-016-0773-0.

Kuzniak, A. & Richard, P.R. (2014). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 17.4*(I), 5-40. DOI 10.12802/relime.13.1741a.

Leduc, N. (2016). *QED-Tutrix : système tutoriel intelligent pour l'accompagnement des élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane* (Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal). Tiré de https://publications.polymtl.ca/2450/.

Radford, L. (2017). On inferentialism. *Mathematics Education Research Journal, 29*(4), 493–508. DOI 10.1007/s13394-017-0225-3.

Recio, T., Richard, P.R. & Vélez, M. P. (2019) Designing tasks supported by GeoGebra Automated Reasoning Tools for the development of mathematical skills. *International Journal for Technology in Mathematics Education, Volume 26*(2), 81–88. DOI 10.1564/tme_v26.2.05.

Richard P.R., Venant, F., Gagnon M. (2019). Issues and challenges in instrumental proof. In: Hanna, G., Reid, D., de Villiers. M. (eds), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 139-172). Springer International Publisher. DOI 10.1007/978-3-030-28483-1_7.

Richard, P.R. (2003). Proof Without Words: Equal Areas in a Partition of a Parallelogram, *Mathematics Magazine 76* (5), 348. DOI 10.1080/0025570X.2003.11953208.

Richard, P.R. (2004a). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berne : Peter Lang.

Richard, P.R. (2004b). L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics, 57*(2), 229–263. Kluwer Academic Publishers. DOI 10.1023/B:EDUC.0000049272.75852.c4.

Richard, P.R., Oller, A.M. & Meavilla, V. (2016). The Concept of Proof in the Light of Mathematical Work. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 48*(6), 843–859. DOI 10.1007/s11858-016-0805-9.

Tessier-Baillargeon, M. (2015). *GeoGebraTUTOR : Développement d'un système tutoriel autonome pour l'accompagnement d'élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane et genèse d'un espace de travail géométrique idoine* (Thèse de doctorat, Université de Montréal). Tiré de https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/15902.

Venant, F. (2018). Programmer les mathématiques : la pensée informatique à l'école primaire. *Bulletin AMQ*, vol. LVIII, n° 3, pp. 57-70.

Villiers, M. (2018, 19 décembre). *Area Parallelogram Partition Theorem*. Retrieved from: http://dynamicmathematicslearning.com/area-parallelogram-partition-richard-theorem.html

TALLER 2

LA NOCIÓN DE PRUEBA EN LA COORDINACIÓN DEL TRABAJO MATEMÁTICO: UNA PERSPECTIVA INSTRUMENTAL…Y UN POCO MÁS

Carolina Andrea Henríquez Rivas[a] et Philippe R. Richard[b]

[a]Universidad de Talca, Chili, [b]Université de Montréal, Canada

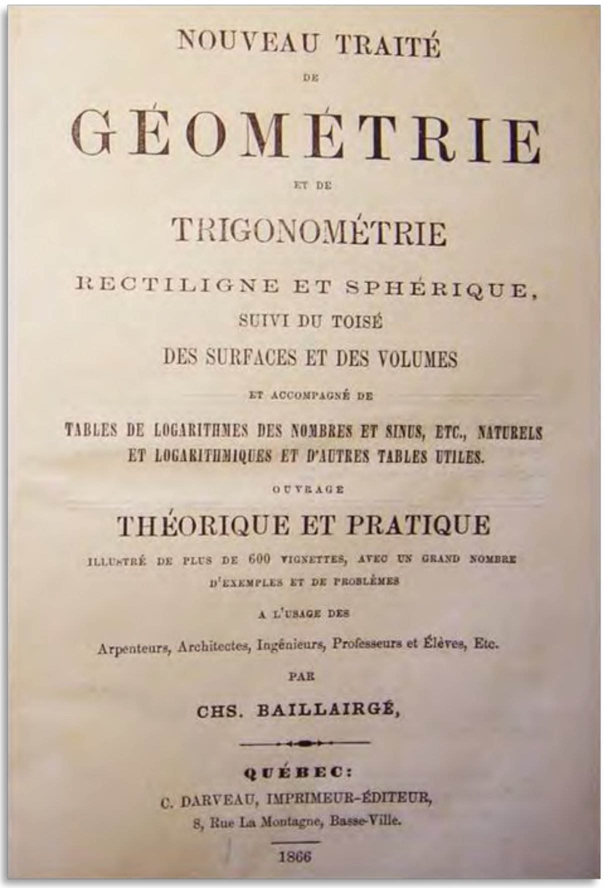
cahenriquez@utalca.cl, philippe.r.richard@umontreal.ca

RESUMEN

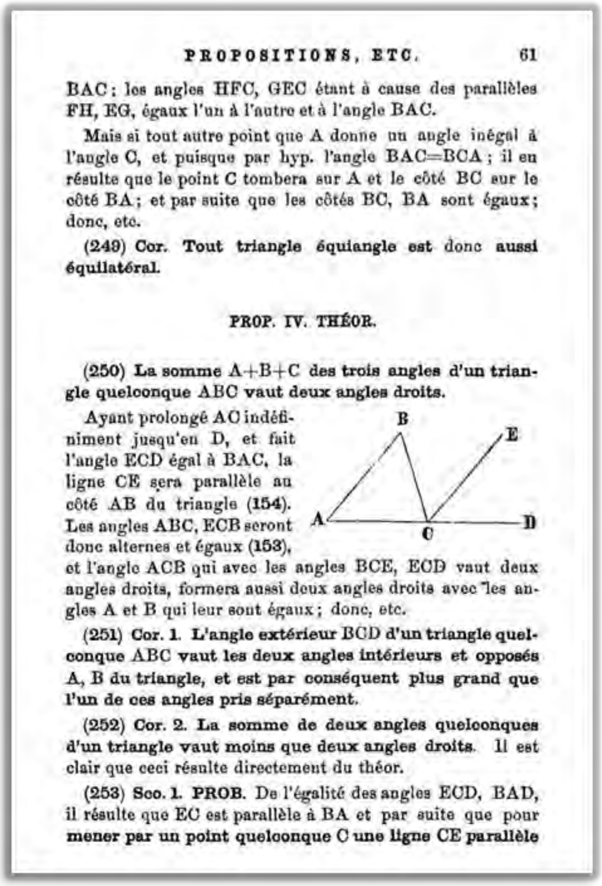
Este taller pretende mostrar cómo las representaciones semióticas y las herramientas tecnológicas influyen en la visión tradicional de la noción de prueba para la realización del trabajo matemático. A partir de consideraciones didácticas, epistemológicas y cognitivas, se distinguirá la lógica del constructor (constitución de las matemáticas o presentación ortodoxa de los textos matemáticos) de la lógica del usuario-lector (aprendizaje o aplicación de los conocimientos matemáticos). La teoría de los espacios de trabajo matemáticos (TeETM) nos llevará a abordar preguntas y cuestiones relacionadas con la prueba, el razonamiento y la necesidad epistémica, aprovechando las posibilidades que ofrece la mirada de las génesis y las fibraciones desde una perspectiva instrumental. En particular, discutiremos la coordinación de la génesis semiótica, discursiva e instrumental del espacio de trabajo para formar la base de las pruebas discursivo-gráficas, las pruebas mecánicas y las pruebas algorítmicas que transitan en la escuela. Finalmente, concluimos con una necesaria reconciliación entre heurística y validación.

RAZONAMIENTO HUMANO EN MATEMÁTICAS

Con su tratamiento axiomático y sistemático de la geometría, los Elementos de Euclides a menudo se consideran como el texto fundamental del razonamiento matemático. Si bien la influencia de este trabajo en el desarrollo de la lógica y la ciencia occidentales es fundamental, su forma cambió poco hasta el siglo XIX. En ese momento, las anotaciones algebraicas se introdujeron en nuevas versiones de los *Elementos*, tanto en términos de las declaraciones como en el desarrollo del texto (por ejemplo, les "+" y los "=", Fig. 1): varias demostraciones por el absurdo del euclidiano original han sido reemplazadas por los razonamientos directos (Richard, Oller & Meavilla, 2016). Sin embargo, el papel de las figuras en relación con el discurso no cambia, sino que es su relación con el referencial lo que se transforma, de acuerdo con las nuevas estructuras propuestas (proposiciones y razonamientos) y los medios utilizados para expresar y conectar las unidades significantes (palabras de lenguaje actual o términos técnicos, símbolos matemáticos, signos gráficos, etc.).



NOUVEAU TRAITÉ
DE
GÉOMÉTRIE
ET DE
TRIGONOMÉTRIE
RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE,
SUIVI DU TOISÉ
DES SURFACES ET DES VOLUMES
ET ACCOMPAGNÉ DE
TABLES DE LOGARITHMES DES NOMBRES ET SINUS, ETC., NATURELS
ET LOGARITHMIQUES ET D'AUTRES TABLES UTILES.
OUVRAGE
THÉORIQUE ET PRATIQUE
ILLUSTRÉ DE PLUS DE 600 VIGNETTES, AVEC UN GRAND NOMBRE
D'EXEMPLES ET DE PROBLÈMES
A L'USAGE DES
Arpenteurs, Architectes, Ingénieurs, Professeurs et Élèves, Etc.
PAR
CHS. BAILLAIRGÉ,
QUÉBEC:
C. DARVEAU, IMPRIMEUR-ÉDITEUR,
8, Rue La Montagne, Basse-Ville.
1866



PROPOSITIONS, ETC. 61

BAC; les angles HFC, GEC étant à cause des parallèles FH, EG, égaux l'un à l'autre et à l'angle BAC.

Mais si tout autre point que A donne un angle inégal à l'angle C, et puisque par hyp. l'angle BAC=BCA; il en résulte que le point C tombera sur A et le côté BC sur le côté BA; et par suite que les côtés BC, BA sont égaux; donc, etc.

(249) **Cor. Tout triangle équiangle est** donc **aussi équilatéral.**

PROP. IV. THÉOR.

(250) **La somme** A+B+C **des trois angles d'un triangle quelconque** ABC **vaut deux angles droits.**

Ayant prolongé AC indéfiniment jusqu'en D, et fait l'angle ECD égal à BAC, la ligne CE sera parallèle au côté AB du triangle (**154**). Les angles ABC, ECB seront donc alternes et égaux (**153**), et l'angle ACB qui avec les angles BCE, ECD vaut deux angles droits, formera aussi deux angles droits avec les angles A et B qui leur sont égaux; donc, etc.

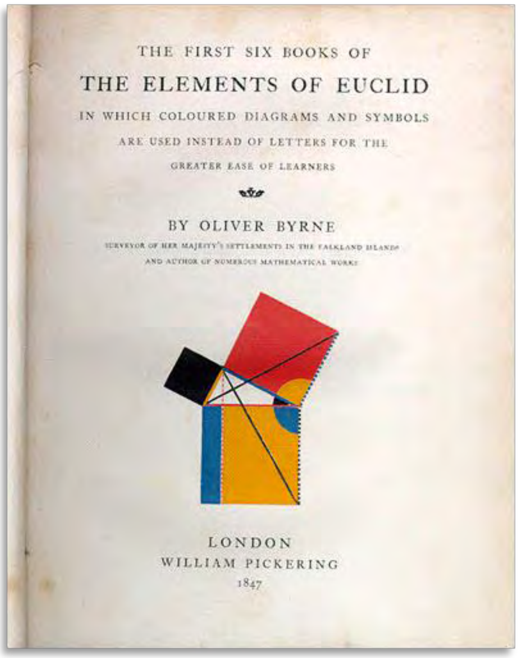
(251) **Cor. 1. L'angle extérieur** BCD **d'un triangle quelconque** ABC **vaut les deux angles intérieurs et opposés A, B du triangle, et est par conséquent plus grand que l'un de ces angles pris séparément.**

(252) **Cor. 2. La somme de deux angles quelconques d'un triangle vaut moins que deux angles droits.** Il est clair que ceci résulte directement du théor.

(253) **Sco. 1. PROB.** De l'égalité des angles ECD, BAD, il résulte que EC est parallèle à BA et par suite que pour **mener par un point quelconque** C **une ligne** CE **parallèle**

Figura 1. En su Nuevo tratado sobre geometría (1866), Charles Baillargé condensa el referencial de John Playfair, que ya ha reestructurado el referencial de Euclides con la introducción de notaciones algebraicas y el aumento de razonamientos directos.

Entre estos medios está el enfoque original de Byrne (1847), que formula sus pruebas con elementos figurales y símbolos gráficos (Fig. 2), así como pruebas en dos columnas (Fig. 3), ya presentes en los Estados Unidos a principios del siglo XX (Herbst, 2002). Antes del uso de notaciones algebraicas en los *Elementos*, autores como Clairaut (1741) buscaban que el lector pudiera convencerse de la validez de ciertos enunciados geométricos por medio de razonamientos inductivos, antes de demostrar deductivamente estos enunciados, como si uno estuviéramos experimentando sobre figuras animadas por el espíritu. Este tipo de iniciativa, bastante natural para alguien que también escribió una *Teoría de los Cometas* (1760), manifestó también la intención de presentar al lector-alumno ciertas ideas de una geometría infinita nueva, la de Fontenelle (1727). Pero lo más importante es que este juego "físico" sobre figuras geométricas, obviamente animado por el discurso y la visualización de desplazamientos (infinitamente cercanos, por ejemplo) sobre figuras estáticas, se convirtió casi dos siglos y medio después en una realidad donde ahora podemos hacer desplazamientos en una geometría denominada dinámica. Aparte del caso de los dispositivos informáticos y la naturaleza de las inferencias involucradas (Fig. 4), es el discurso el que esencialmente controla la representación y transformación de las figuras, ya que es el que aporta pruebas y demostraciones (véase la siguiente sección).



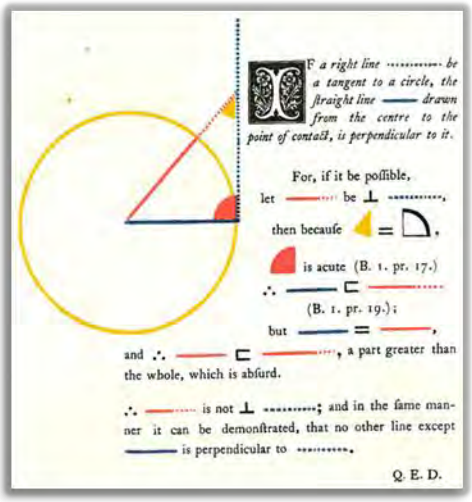
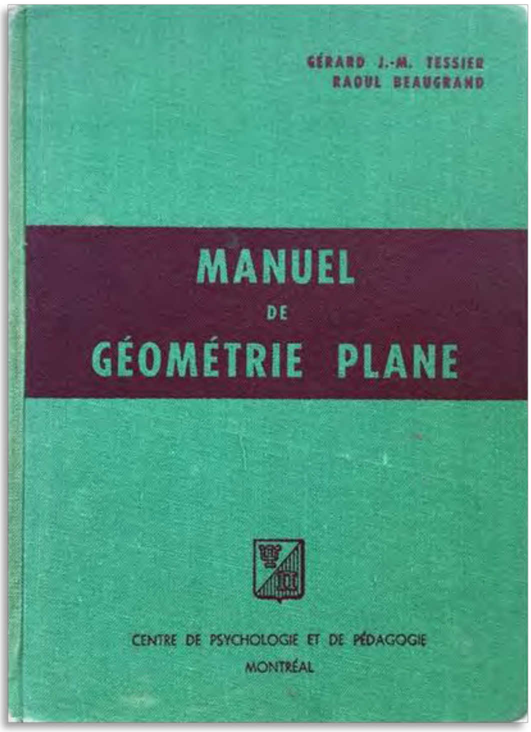
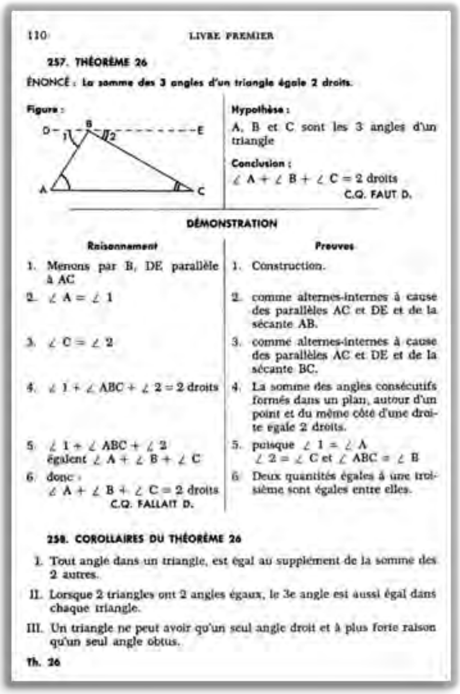


Figura 2. En los Elementos (1847) de Oliver Byrne, las unidades figurales pertinentes y algunos símbolos gráficos necesarios se introducen en la estructura discursiva de la prueba "para la mayor facilidad de los alumnos".





110 LIVRE PREMIER

257. THÉORÈME 26

ÉNONCÉ : La somme des 3 angles d'un triangle égale 2 droits.

Figure :

Hypothèse :
A, B et C sont les 3 angles d'un triangle

Conclusion :
$\angle A + \angle B + \angle C = 2$ droits
C.Q. FAUT D.

DÉMONSTRATION

Raisonnement	Preuves
1. Menons par B, DE parallèle à AC	1. Construction.
2. $\angle A = \angle 1$	2. comme alternes-internes à cause des parallèles AC et DE et de la sécante AB.
3. $\angle C = \angle 2$	3. comme alternes-internes à cause des parallèles AC et DE et de la sécante BC.
4. $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2 = 2$ droits	4. La somme des angles consécutifs formés dans un plan, autour d'un point et du même côté d'une droite égale 2 droits.
5. $\angle 1 + \angle ABC + \angle 2$ égalent $\angle A + \angle B + \angle C$	5. puisque $\angle 1 = \angle A$, $\angle 2 = \angle C$ et $\angle ABC = \angle B$
6. donc : $\angle A + \angle B + \angle C = 2$ droits C.Q. FALLAIT D.	6. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

258. COROLLAIRES DU THÉORÈME 26

I. Tout angle dans un triangle, est égal au supplément de la somme des 2 autres.

II. Lorsque 2 triangles ont 2 angles égaux, le 3e angle est aussi égal dans chaque triangle.

III. Un triangle ne peut avoir qu'un seul angle droit et à plus forte raison qu'un seul angle obtus.

Th. 26

Figura 3. En el Manual de geometría plana (1958), Gérard Tessier y Raoul Beaugrand presentan teoremas y demostraciones en un estilo de dos columnas, los aspectos tradicionalmente funcionales del discurso parecen estar subordinados a la misma estructura. Es probable que este manual esté inspirado en una tradición estadounidense iniciada con la innovadora Plane Geometry (1913) de Arthur Schultze y Frank L. Sevenoak.

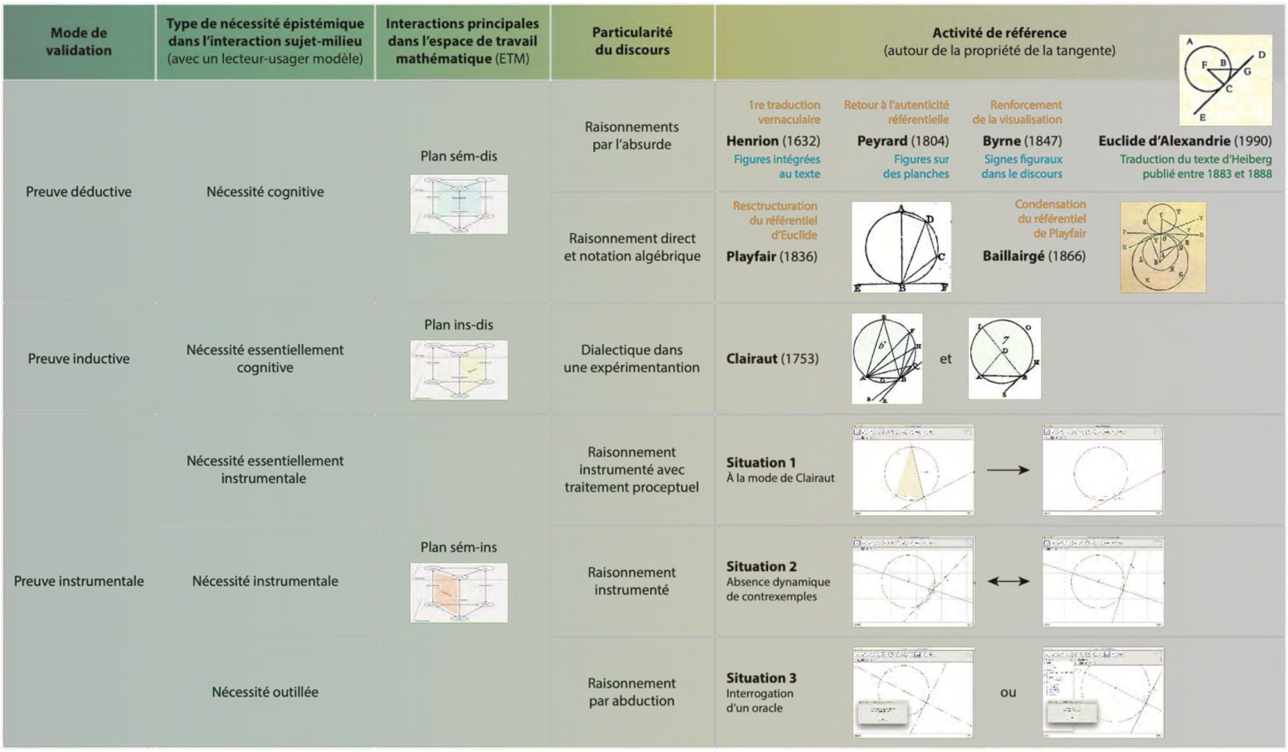


Figure 4. Razonamiento, prueba y demostración: aproximación de las particularidades discursivas según tres tipos de pruebas y necesidades epistémicas en la actividad matemática (Richard, Oller, & Meavilla, 2016).

A la luz de la TeETM, se produce un cambio notable en la coordinación de las génesis semiótica y discursiva aparece con las llamadas *pruebas sin palabras* (Alsina & Nelsen, 2006). En estas pruebas, el control mediante el discurso ya no es tan exclusivo y la exploración de los medios semióticos a poner en juego para compensar esto muestra hasta qué punto el orden de lo simbólico puede ser autónomo. Ciertos arreglos de figuras pueden incluso representar un auténtico razonamiento matemático, siempre que el lector esté acostumbrado. En un ejemplo presentado durante el taller (Fig. 5), mostramos cómo la inferencia de estructura:

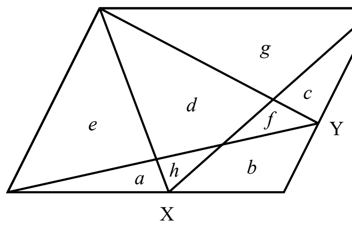
$$f(a+b+c, \square, d) = (a+b+c=d)$$

donde f es la inferencia que emerge de la secuencia de figuras, y $\square$ las proposiciones figurales significativas de un figura-enunciado que representa las hipótesis de la situación. Vemos aquí que el razonamiento que emerge de la secuencia de figuras es completamente autónomo y que el enunciado también parece serlo, módulo el hecho de que uno menciona en el escenario que es un paralelogramo y que es de hecho una partición de áreas. ¿Podríamos haber prescindido completamente de esta última información textual u oral, y así hablar de una auténtica prueba semiótica? Como ser humano, el discurso está en nosotros, nos pertenece de todos modos, es la expresión verbal de nuestro pensamiento y es mediante el encadenamiento de enunciados que formamos nuestros mensajes. Por lo tanto, no se trata de negar un papel tan fundamental o de tratar de escapar de él, sino de enfatizar que, además de los medios tradicionales, el trabajo matemático sigue siendo inventivo en sus medios de comunicación y tratamiento. Con f, hablamos de una inferencia figural (Richard, 2004 a, b) que funda una prueba discursivo-gráfica (Richard, Venant & Gagnon, 2019).

Esta es una inferencia de estructura:

$$f(\text{antecedentes}) = (\text{consecuente})$$

donde f es la inferencia que se desprende de la secuencia de figuras de abajo y de las proposiciones figurales significativas de la figura-situación de la derecha.



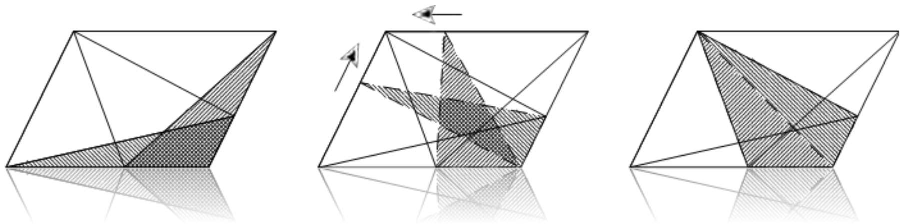


Figure 5. Prueba sin palabras por expansión discursivo-gráfica de la igualdad a + b + c = d en la partición del paralelogramo, en la parte superior derecha, usando una secuencia de figuras que fundamenta un razonamiento (Richard, 2003).

A pesar de la relativa autonomía del discurso y los diversos sistemas de representaciones semióticas en matemáticas, no hay registros ejecutables, como un programa informático. Para activarse, una representación semiótica debe interactuar con un usuario o lector, al igual que los razonamientos discursivo-gráficos. Sin embargo, si en lugar de una secuencia de figuras, la situación de la FIG. 5 surgió en la interfaz de un software de geometría dinámica, sería fácil asociarlo con una cuestión de instrumentación en una dinámica de utilizador-milieu. Lo que cambia aquí es que la figura representada en la interfaz del dispositivo tiene su propia coherencia, independientemente de cualquier lectura o posible uso, según los modelos internos que la definen. Hoy en día, con software como Géogébra, la misma representación en la pantalla ya esconde dos figuras: una figura numérica, que deriva de un protocolo de construcción y que aparece en un dominio discreto, y una figura simbólica, donde los objetos que lo constituyen están modelados en álgebra utilizando cálculo simbólico (Recio, Richard & Vélez, 2019). Si consultamos un oráculo para tratar de encontrar propiedades en dicha figura, por ejemplo para saber si dos rectas son paralelas, el software puede devolver que sí lo son efectivamente, especificando que el resultado es de una evaluación por cálculo (figura geométrica). Y si indicamos que queremos saber más, el software añade que el paralelismo siempre es verdadero (figura simbólica). Estas respuestas provienen del artefacto, no del registro de representación semiótica, pero el cuestionamiento inicial emanó efectivamente del usuario en su búsqueda para producir una inferencia. Se trataría entonces de una inferencia figural instrumentada (Coutat, Laborde & Richard, 2016), siendo su justificación esencialmente gestionada (calculada) por la máquina. Finalmente, si en lugar de utilizar una herramienta lógica, recurrimos a una herramienta física, podríamos ubicar a f en la perspectiva de las máquinas matemáticas (Bartolini-Bussi & Maschietto, 2005). El trabajo matemático se ha beneficiado durante mucho tiempo del uso de todo tipo de herramientas, pero las pruebas discursivo-gráficas parecen insuficientes para dar por sí solas cuenta del trabajo matemático instrumentado. Por lo tanto, también es necesario cuestionar la coordinación de las génesis cuando la génesis instrumental está en primer plano.

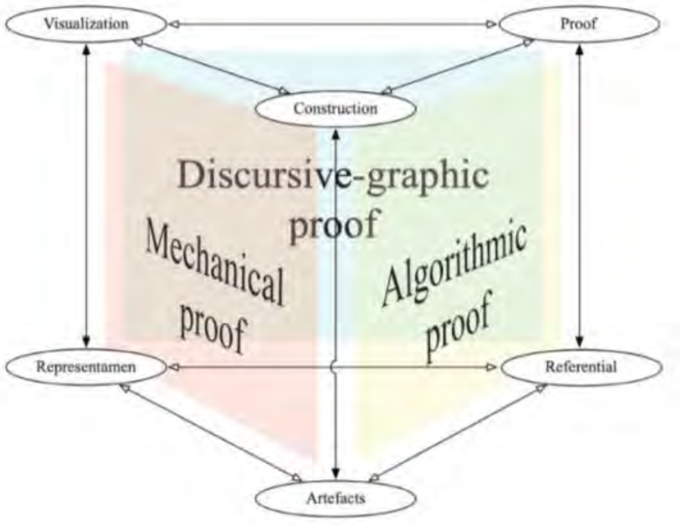


Figura 6. Las pruebas instrumentales aparecen en el modelo de los espacios de trabajo en planos verticales salientes, y la prueba discursivo-gráfica en el plano del fondo, destacando la coordinación de las génesis dominantes (Richard, Venant & Gagnon, 2019).

ALGUNOS ELEMENTOS TEÓRICOS

Sabemos que en TeETM, el trabajo matemático se construye progresivamente como un proceso de reunir aspectos epistemológicos y cognitivos de acuerdo con tres desarrollos genéticos estrechamente relacionados, identificados en la teoría como génesis semiótica, instrumental y discursiva (Kuzniak & Richard, 2014). El espacio de trabajo matemático se revela como un modelo teórico y metodológico que permite reportar la actividad matemática, potencial o real, durante la resolución de problemas o tareas matemáticas. Permite, en particular, describir las interacciones dominantes, finalizadas o no, según la naturaleza o la importancia de los momentos significativos. Desde el punto de vista de la teoría de situaciones didácticas (TSD) Brousseau (1998), puede tratarse de interacciones didácticas, durante la devolución de una tarea, o interacciones adidácticas, en la resolución misma de la tarea. Cuando observamos los componentes del espacio de trabajo matemático, vemos de inmediato que la noción de prueba está tradicionalmente conectada al plano epistemológico por la génesis discursiva. Esto no es una contradicción con lo que se ha dicho hasta ahora, porque el trabajo matemático siempre ha estado íntimamente relacionado con el lenguaje y la escritura. Y es precisamente al observar con mayor precisión el papel desempeñado por los sistemas de representación semiótica y las herramientas tecnológicas que se ha podido convenir matizar sobre la preponderancia del discurso. Tan pronto como consideramos la perspectiva instrumental, la noción de prueba devela toda su complejidad. En lo que sigue, describimos brevemente los dos tipos de pruebas instrumentales en el plano de la coordinación de las génesis dominantes (Fig. 6). Las explicaciones y referencias más completas se encuentran en el artículo de Richard, Venant y Gagnon (2019).

Figura 7. Dos pruebas mecánicas de la igualdad de Pitágoras en la escuela.

El primer tipo de prueba instrumental es la **prueba mecánica**, el adjetivo se toma aquí en un sentido que se relaciona con el funcionamiento de un mecanismo y no con la automatización de un proceso. Estas pruebas, mostradas en la Fig. 6 en el plano vertical de la izquierda, se activan sobre todo por la coordinación de las génesis semiótica e instrumental. Al igual que el método de pesaje de Arquímedes o del desplazamiento de elementos de figura en la interfaz de un software de geometría dinámica, la justificación "f" se basa en la coherencia física del mecanismo o la lógica de la figura. Las pruebas mecánicas son funcionales: permiten establecer un resultado a partir de un enunciado, pero no está de acuerdo con ninguna racionalidad matemática. Puede haber algunos, si se matematiza la construcción o el funcionamiento del mecanismo para comprender mejor su validez, pero durante este tipo de prueba no es el efecto buscado. Queremos ser eficaces en el razonamiento (instrumentado) y sacar una conclusión a partir de las hipótesis matemáticas que son pertinentes en la situación elegida. Durante el taller, dimos dos ejemplos de pruebas mecánicas de la igualdad de Pitágoras (Fig. 7). La primera a la izquierda se justifica comparando los pesos de los trozos de cartón que representan los cuadrados de la hipotenusa A y los lados B y C de un triángulo rectángulo (Castelnuovo & Barra, 1976) y la segunda, a la derecha, mediante la transferencia de volúmenes de líquido en pequeñas cámaras de paralelepípedos (YouTube, 2009). Por supuesto, la ventaja de esta prueba también tiene su inconveniente, ya que plantea una cuestión de transparencia operativa, ya sea en relación con la estructura del artefacto, su funcionamiento o su conducta. Así, aunque esto es fácilmente imaginable, no hay nada que indique que el mecanismo de la "prueba líquida" se pueda adaptar a otros triángulos rectángulos, es decir, generalizarse, mientras que la "prueba sólida" se llevó a cabo con varios grupos de estudiantes: cada equipo partió de triángulos con sus propias medidas, lo que añade una dimensión inductiva a la justificación. Por supuesto, estas pruebas dependen de la habilidad del sujeto para manipular la herramienta, comprender su funcionamiento o interpretar consecuentemente los resultados. Lo mismo ocurre con los sistemas que producen razonamiento, como es el caso de las herramientas de razonamiento automatizadas implementadas en GeoGebra. Lo que es más sutil aquí es el efecto de la modelización algebraica, que calcula simbólicamente con raíces de polinomios, por lo tanto en $\mathbb{C}$, y devuelve objetos geométricos en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, al buscar lugares de puntos, algunas curvas algebraicas mostradas por el software son a menudo difíciles de interpretar por el usuario y dependen en gran medida de cómo se construyó inicialmente la figura (Recio, Richard & Vélez, 2019). En palabras de Alembert: "el álgebra es generoso, a menudo da más de lo que se pide".

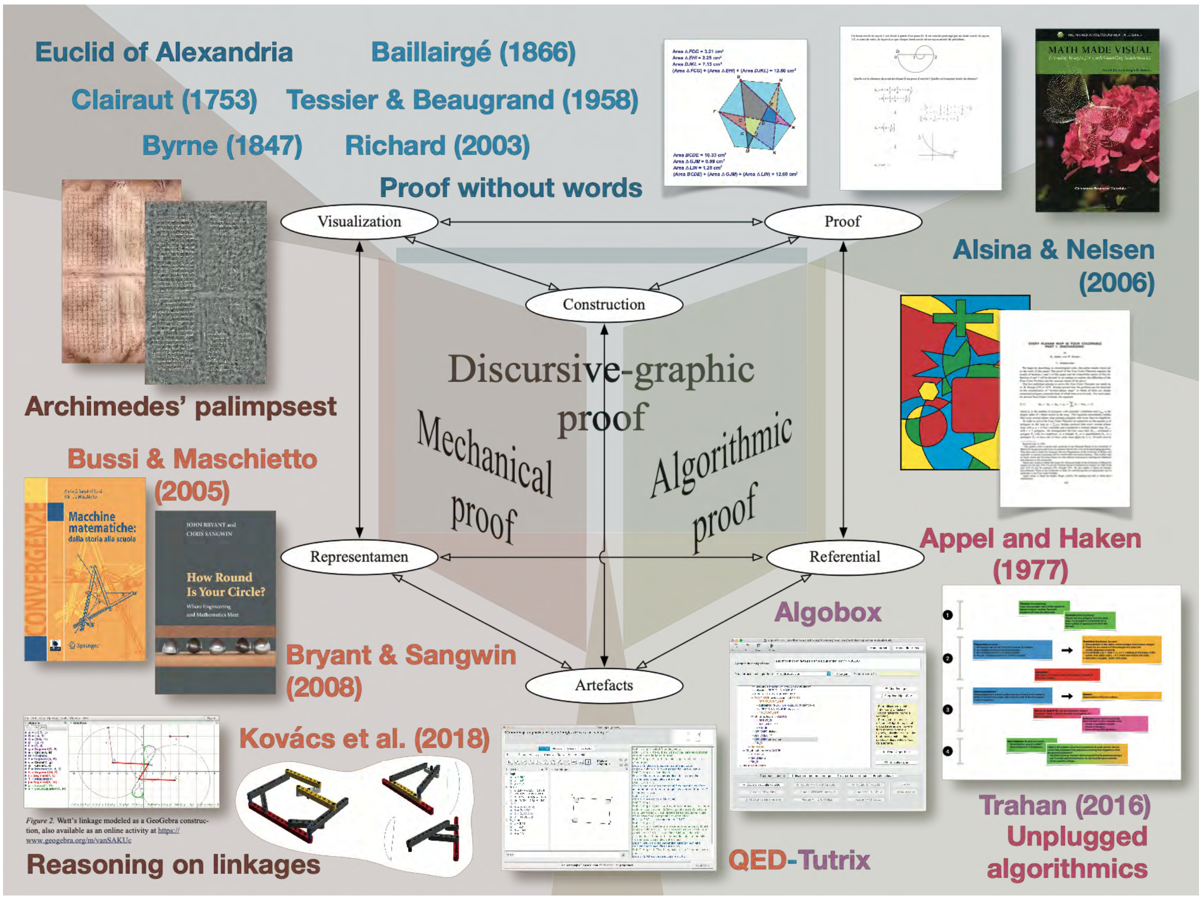


Figura 8. Referencias e ilustraciones históricas o actuales de pruebas discursivo-gráficas (hacia arriba), mecánicas (hacia la izquierda) y algorítmicas (hacia la derecha).

El segundo tipo de prueba instrumental es la **prueba algorítmica**. Cuando la ejecución de un algoritmo de una máquina es dirigida por un usuario, es fácil retener una marca típica de génesis instrumental. Pero al mismo tiempo, la configuración o el desarrollo de un algoritmo está naturalmente asociado con la génesis discursiva (secuencia explícita y finita de instrucciones u operaciones simbólicas), aunque el algoritmo también puede extenderse a acciones mecánicas u otros procesos. En un proceso de prueba algorítmica, no se trata tanto de validar un algoritmo en una especie de actividad informática desconectada, sino de considerar el algoritmo asociado con una tarea matemática cuyo objetivo manifiesto es probar. De hecho, si las pruebas algorítmicas aparecen en el plano vertical derecho en la Fig. 6, esto es para destacar el juego de las génesis durante el diseño para y en el uso de la prueba. Es entonces un proceso de adaptación mutua entre el desarrollo de un algoritmo y su ejecución en una situación de validación matemática. En este proceso, habría casos de figura que admiten ajustes en relación con las condiciones iniciales de predicción, o pruebas provisionales derivadas de la actividad instrumentada, hasta la convergencia de una prueba final. Según Venant (2018, 58):

> El pensamiento informático (…) contribuye al desarrollo de las competencias de resolución de problemas, al llevar en primer lugar a analizar el problema planteado para reestructurarlo en forma de tareas correspondientes a uno o varios objetivos, evaluar la dificultad de cada una de estas tareas para, por último, ser capaz de escribir los comandos precisos que se deben dar a un ordenador para que los resuelva.

Durante el taller, dimos un ejemplo en el que el pensamiento algorítmico se manifestaba por la capacidad de formular problemas y proponer soluciones, de modo que la resolución se puede realizar mediante una herramienta de tratamiento automático de la información. Las referencias conocidas, como la célebre demostración del teorema de los cuatro colores, se ilustran en la Fig. 8, conjuntamente con otros tipos de prueba. Sin embargo, el modo de pensamiento algorítmico en el trabajo matemático puede aparecer independientemente de la ejecución de un algoritmo por parte de una máquina, como lo hacen los matemáticos cuando descomponen una tarea en sub-tareas para ser procesadas por diferentes medios técnicos. Del mismo modo, puede aparecer durante un razonamiento instrumentado en la interfaz de un sistema de tutoría como QED-Tutrix (Leduc, 2016; Tessier-Baillargeon, 2015) donde un agente tutor inteligente responde a las acciones o formulaciones del alumno, este último probando metódicamente el discurso impulsado por la máquina en su búsqueda de una prueba (Font, Richard & Gagnon, 2018).

De la misma manera que las pruebas mecánicas, las pruebas algorítmicas muestran que es posible participar en el razonamiento en un plano particular del espacio de trabajo. Tan pronto como una herramienta entra en juego, los razonamientos instrumentados completan el razonamiento discursivo-gráfico para la realización del trabajo matemático. Dado que una prueba puede constar de varias etapas de razonamiento y el razonamiento puede estar compuesto por varias pruebas, no existe una jerarquía entre los tipos de pruebas, el mismo proceso de prueba también puede incluir varios tipos de pruebas al mismo tiempo. Un ejemplo que muestra su entrelazamiento proviene de Villiers (2018). Puesto en un entorno informático, el problema anterior en la partición de paralelogramo fue conducido a polígonos de mayor grado (Fig. 9). Su propuesta de una versión interactiva de la prueba proporcionó automáticamente medidas en ambos lados de la igualdad. Esta es una prueba al mismo tiempo mecánica y discursivo-gráfica cercana a nuestras consideraciones en torno a la Fig. 5. Por ejemplo, en la situación de la izquierda (Fig. 9), los puntos A, B o C se pueden desplazar para cambiar el comportamiento del paralelogramo, así como los puntos E o F para cambiar la posición en los lados [BC] y [CD], respectivamente. El argumento discursivo-gráfico del desplazamiento de los puntos E y F se extiende a cualquier configuración del paralelogramo ABCD: la preservación de las propiedades visuales (por ejemplo, el paralelismo de los lados) o la identificación de invariantes (por ejemplo, las medidas de las áreas) en el desplazamiento, contribuyen al esfuerzo de prueba del usuario que cuestiona en consecuencia al medio. En la interfaz de la situación, el autor agrega un botón de ayuda que participa en la devolución del problema (consejo) y un botón de generalización que permite al usuario pasar a la siguiente situación (pentágono). De hecho, el usuario siempre puede cambiar a una situación más general (pentágono u otro [k + 1]-gono, hasta un octágono) sin siquiera haber resuelto el problema anterior (paralelogramo o k-gono). Esta sería entonces una actividad de prueba particularmente rica que también permitiría iniciar una prueba algorítmica resolviendo hasta el más mínimo detalle cada problema de prueba.

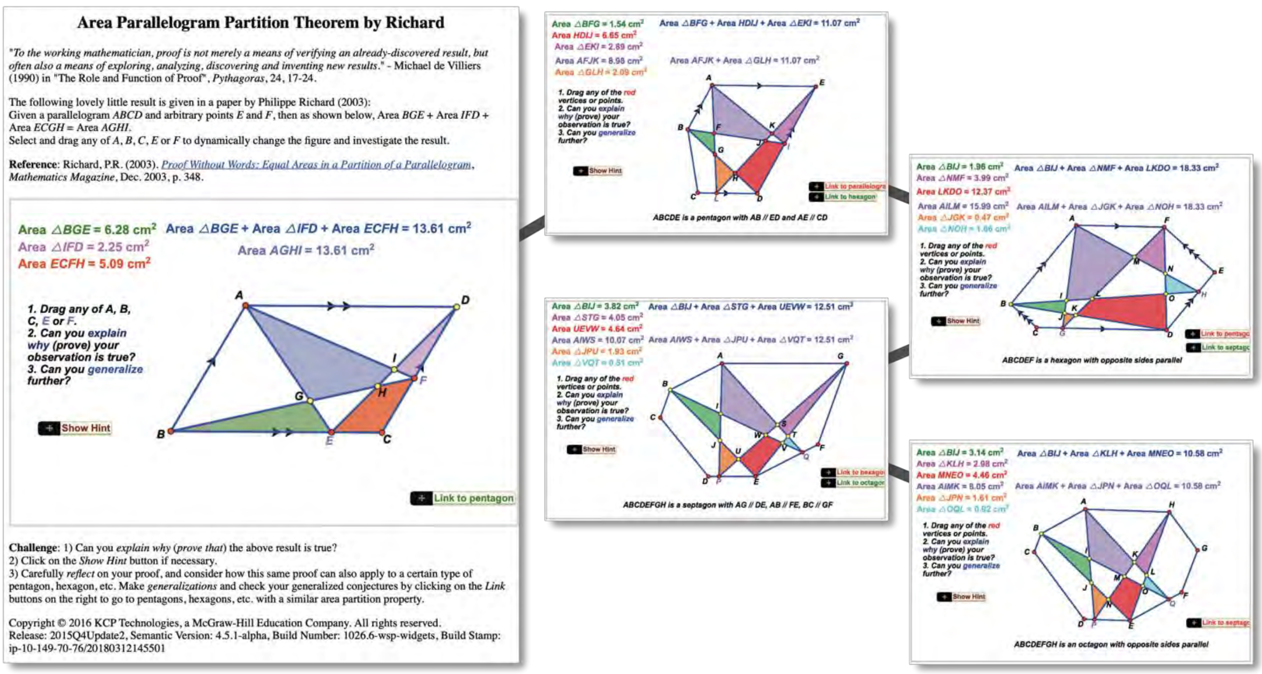


Figura 9. El problema de la partición en paralelogramo (Richard, 2003) se planteó en un entorno informático (Villiers, 2018) y se generalizó a una clase de problemas en polígonos de grados superiores. Las situaciones a la derecha aparecen después de hacer clic en uno de los botones "enlace a n-gone".

El taller finalizó con dos desafíos para los participantes. El primer desafío fue diseñar algunas actividades de prueba discursivo-gráfica, y el segundo, actividades de prueba instrumental en la escuela, mecánicas o algorítmicas. Se planteó una advertencia sobre la polisemia de estos dos últimos términos para situar el aspecto computacional del razonamiento deductivo, la automatización del razonamiento o la mecanización de la prueba (formalización completa) en diferentes contextos.

CONCLUSIONES

El valor agregado de los tres tipos de prueba en los que hemos trabajado en este taller se basa en la transversalidad característica del trabajo matemático y se asemeja, a su manera, a la idea de "trabajo matemático completo" planteada por Kuzniak, Nechache & Drouhard (2016). Porque si las matemáticas cubren varios dominios (geometría, análisis, álgebra, etc.), están continuamente interactuando con varias disciplinas, incluidas la física o la informática, por nombrar solo dos vecinos cercanos. Debe enfatizarse que el reconocimiento de estas pruebas, especialmente las pruebas instrumentales, implica una apertura sobre las diferentes formas en que se puede obtener la prueba en el trabajo matemático en la escuela. En su famoso *Cómo preguntar y resolver un problema* (1973), George Pólya explicó que si la solución que finalmente obtuvimos es larga y compleja, es natural sospechar que hay una solución más clara y menos complicada. También es posible que, aunque hayamos logrado encontrar una solución satisfactoria, todavía estemos interesados en encontrar una nueva solución, como la que ha visto un objeto que ahora quiere tocarlo. Con su enfoque heurístico, no solo por problemas de prueba, sino por problemas en general, nos parece obvio que Polya fue un apóstol del uso combinado de la semiótica y discurso en su razonamiento, lo que sugiere que hubiera sido cómodo con el concepto de pruebas discursivo-gráficas. Sin embargo, si rara vez ha abordado la cuestión del trabajo matemático con herramientas técnicas, sabemos que sus escritos obviamente han influido en muchos físicos e informáticos. Podemos creer fácilmente que si tuviera una computadora a su alcance tan fácilmente como lo hace hoy, probablemente habría encontrado una manera de hacernos participar en esta aventura instrumental. Siguiendo los pasos de Pólya, concluimos que la integración de pruebas instrumentales en el trabajo matemático en la escuela es un enriquecimiento deseable de los medios de validación y, al hacerlo, una apertura a una mejor comprensión del trabajo del experto.

RÉFÉRENCES

Alsina, C., & Nelsen, R. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. Washington: the Mathematical Association of America.

Bartolini Bussi M.G., & Maschietto M. (2005). *Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola*. Springer. DOI 10.1007/88-470-0403-9.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage : Grenoble.

Coutat, S., Laborde, C., & Richard, P.R. (2016). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 1–27. DOI 10.1007/s10649-016-9684-9.

Font, L., Richard, P.R. & Gagnon, M. (2018). Improving QED-Tutrix by Automating the generation of Proofs. In P. Quaresma and W. Neuper (Eds.): *Proceedings 6th International Workshop on Theorem proving components for Educational software, (ThEdu'17), Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science, 267*, 38–58. DOI 10.4204/EPTCS.267.3.

Herbst, P.G. (2002). Establishing a custom of proving in american school geometry: evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 283–312. DOI 10.1023/A:1020264906740.

Kuzniak, A., Nechache, A. & Drouhard, J.P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 48*(6), 843–859. DOI 10.1007/s11858-016-0773-0.

Kuzniak, A. & Richard, P.R. (2014). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 17.4*(I), 5-40. DOI 10.12802/relime.13.1741a.

Leduc, N. (2016). *QED-Tutrix : système tutoriel intelligent pour l'accompagnement des élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane* (Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal). Tiré de https://publications.polymtl.ca/2450/.

Radford, L. (2017). On inferentialism. *Mathematics Education Research Journal, 29*(4), 493–508. DOI 10.1007/s13394-017-0225-3.

Recio, T., Richard, P.R. & Vélez, M. P. (2019) Designing tasks supported by GeoGebra Automated Reasoning Tools for the development of mathematical skills. *International Journal for Technology in Mathematics Education, Volume 26*(2), 81–88. DOI 10.1564/tme_v26.2.05.

Richard P.R., Venant, F., Gagnon M. (2019). Issues and challenges in instrumental proof. In: Hanna, G., Reid, D., de Villiers. M. (eds), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching* (pp. 139-172). Springer International Publisher. DOI 10.1007/978-3-030-28483-1_7.

Richard, P.R. (2003). Proof Without Words: Equal Areas in a Partition of a Parallelogram, *Mathematics Magazine 76* (5), 348. DOI 10.1080/0025570X.2003.11953208.

Richard, P.R. (2004a). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*. Berne : Peter Lang.

Richard, P.R. (2004b). L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics, 57*(2), 229–263. Kluwer Academic Publishers. DOI 10.1023/B:EDUC.0000049272.75852.c4.

Richard, P.R., Oller, A.M. & Meavilla, V. (2016). The Concept of Proof in the Light of Mathematical Work. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 48*(6), 843–859. DOI 10.1007/s11858-016-0805-9.

Tessier-Baillargeon, M. (2015). *GeoGebraTUTOR : Développement d'un système tutoriel autonome pour l'accompagnement d'élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane et genèse d'un espace de travail géométrique idoine* (Thèse de doctorat, Université de Montréal). Tiré de https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/15902.

Venant, F. (2018). Programmer les mathématiques : la pensée informatique à l'école primaire. *Bulletin AMQ*, vol. LVIII, n° 3, pp. 57-70.

Villiers, M. (2018, 19 décembre). *Area Parallelogram Partition Theorem*. Retrieved from: http://dynamicmathematicslearning.com/area-parallelogram-partition-richard-theorem.html

ATELIER 3

LE TRAVAIL MATHEMATIQUE EN ANALYSE ET LE ROLE DE LA VISUALISATION DANS LES DIMENSIONS SEMIOTIQUE, INSTRUMENTALE ET DISCURSIVE

Elizabeth Montoya Delgadillo[a] et Laurent Vivier[b]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, [b]Université de Paris, France

elizabeth.montoya@pucv.cl, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Dans cet atelier, on explore la signification que peuvent avoir les étudiants au début de l'université de certaines notions de l'analyse. Plus précisément, on identifie des connaissances nécessaires des mathématiques mais aussi des outils utilisés pour une visualisation adéquate des représentations des objets de l'analyse. On précise les arguments utilisés selon les propriétés et définitions ainsi que des artefacts en jeu[1].

INTRODUCTION

La visualisation joue un rôle important dans le travail mathématique. En analyse, il est nécessaire d'interpréter, avec des connaissances spécifiques disponibles, ce que les signes donnent à voir et qui ne correspondent pas directement à ce qui doit être visualisé en relation avec les définitions et les propriétés en jeu (Kuzniak, Montoya Delgadillo & Vivier, 2018). Nous proposons un travail permettant de montrer la difficulté cognitive que rencontre des étudiants de première et deuxième années d'université pour visualiser correctement des représentations d'objets de l'analyse.

Pour introduire le problème de la visualisation en analyse, nous avons d'abord présenté quelques représentations mathématiques (voir annexe 1) en posant systématiquement la question : Que visualise-t-on ? avec une demande de distinction entre les signes et leurs interprétations par un sujet selon les connaissances mathématiques mobilisés. On pourra se reporter à (Kuzniak, Montoya Delgadillo & Vivier, 2018) pour une discussion sur certaines de ces représentations. La théorie des ETM a ensuite été présentée rapidement (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016 ; Gómez-Chacón, Kuzniak & Vivier, 2016 ; Kuzniak & Richard, 2014 ; Kuzniak, 2011) avec une centration en analyse et les paradigmes de l'analyse (Montoya Delgadillo & Vivier, 2016) que l'on trouvera en annexe 2.

Puis, il a été proposé de travailler sur un corpus de réponses écrites provenant d'un questionnaire, issu d'un travail avec Viviane Durand-Guerrier, adressé à des étudiants de mathématiques de l'Université de Montpellier (France) au deuxième semestre de l'année 2015 :

---

1 Une seconde partie était prévue pour l'étude de la triade cruciale de l'analyse, discret-dense-continu, avec l'introduction de la notion de perspectives de localité pour analyser en détail le travail en analyse dans les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive. La première partie ayant nécessité les deux sessions d'atelier, cette deuxième partie n'a pas été abordée et nous ne la développons pas ici.

- Un groupe A1 de 35 étudiants de première année d'université,
- Un groupe A3 de 69 étudiants de deuxième année d'université.

On a discuté des données quantitatives des réponses des deux groupes ainsi que les réponses de certains étudiants du groupe A3 à trois questions du questionnaire sur un total de 9 questions. La question posée dans l'atelier : **Pour chacune des trois questions (5, 4 et 8) faire une analyse en se focalisant sur la visualisation et plus spécifiquement sur les connaissances mathématiques et instrumentales qui peuvent faire défaut à la visualisation.**

Les trois questions seront présentées ci-dessous avec la réponse d'un étudiant (E20), les autres productions seront des extraits de réponses à ces questions. Pour d'autres développements sur ce questionnaire, voir (Durand-Guerrier & Vivier, 2016 ; Durand-Guerrier, Montoya Delgadillo & Vivier, 2019).

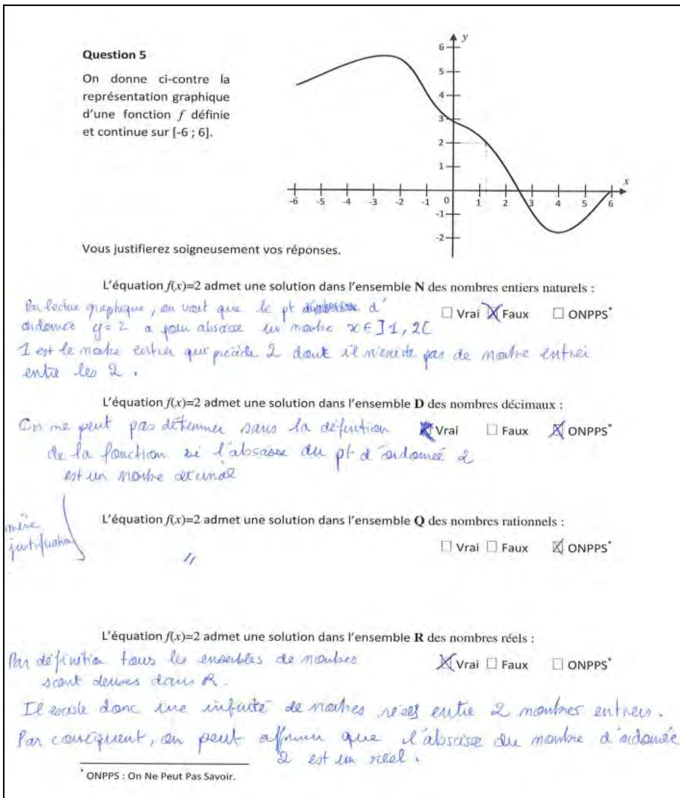
Chacune de ces trois questions donne des représentations numériques (Q4 et Q8) ou graphiques (Q4 et Q5) de fonctions (Q4 et Q5) et de suites (Q8). En parallèle, pour Q4 et Q5, on fournit des propriétés mathématiques des fonctions. Comme on ne donnait pas de formules (à l'exception de Q8 où l'on donne une formule tableur), on peut s'attendre à ce que les représentations données bloquent tout recours au paradigme AC, c'est-à-dire à des calculs de type algébrique, souvent routinisés, usuels dans l'enseignement. L'entrée se fait donc dans le paradigme AG par une visualisation des signes numériques ou graphiques. Cette première visualisation des signes est inévitable avec, par exemple : « un tableur qui affiche deux expressions numériques ayant les mêmes chiffres », comme en question Q8, ou encore « deux courbes se coupent en un point », comme en question Q5 (voir ci-dessous). Mais, comme on s'en rendra compte ci-dessous, pour répondre convenablement aux questions posées, il est essentiel, sans nécessairement changer de paradigme, d'aller au-delà de cette visualisation première. Cette visualisation peut être qualifiée d'iconique pour notre propos, et les questions posées requièrent une visualisation non iconique avec un contrôle par des connaissances mathématiques et des artefacts (ici, il s'agit uniquement du tableur) ouvrant la voie à une genèse discursive. Ainsi, les questions se positionnent plutôt dans le plan [Sem-Ins] et requièrent un changement avec la dimension discursive.

LA QUESTION 5

La question 5 est une question standard sur l'utilisation des graphiques pour résoudre une équation : on donne le graphique d'une fonction f continue sur [-6,6] et l'on demande si l'équation $f(x)=2$ admet une solution dans chacun des ensembles de nombres usuels (**N**, **Z**, **D**, **Q** et **R**).

La réponse de E20

L'étudiant E20 (figure 1) visualise le problème sur la courbe et, en s'aidant de deux petits segments, arrive à la conclusion que le point d'ordonnée 2 ne peut pas être entier. Il est intéressant de relever qu'il ne justifie pas l'existence de ce point. La visualisation iconique des signes graphiques, ou l'habitude du travail mathématique, *montre* que ce point existe. Cela semble, pour lui, un fait qu'il reprend systématiquement dans les autres questions, et plus particulièrement pour la dernière question où, **R** rassemblant tous les nombres (il parle de densité, ce qui est un argument erroné), cette abscisse est nécessairement un nombre réel. On peut ainsi remarquer que la question de l'existence, que l'on peut prouver dans **R** avec le Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI), ne se pose apparemment pas pour E20. On relève un travail dans le plan [Sem-Dis] avec une genèse discursive incomplète et avec des erreurs.



Transcription :

Par lecture graphique, on voit que le point d'ordonnée $y = 2$ a pour abscisse un nombre $x \in]1, 2[$
1 est le nombre entier qui précède 2, donc il n'existe pas de nombre entier entre les 2.

On ne peut pas déterminer sans la définition de la fonction si l'abscisse du point d'ordonnée 2 est un nombre décimal

Même justification

Par définition tous les ensembles de nombres sont denses dans **R**.
Il existe donc une infinité de nombres réels entre 2 nombres entiers. Par conséquent, on peut affirmer que l'abscisse du nombre d'ordonnée 2 est un réel.

Figure 1 : Réponses de E20 à Q5

Les réponses quantitatives

Dans la table 1 suivante, on donne les effectifs, pour les deux groupes A1 et A3, par réponse à la question Q5. Les réponses sont constituées de quadruplets où V signifie que la case « Vrai » a été cochée, F la case « Faux » et O la case « On ne peut pas savoir ». Si un étudiant a coché plusieurs cases, les réponses sont concaténées dans des parenthèses et un « x » signifie l'absence de réponse à un item. Les réponses correctes sont dans les lignes grisées. Toutes les réponses rencontrées sont dans la colonne de gauche et un « / » marque l'absence d'une réponse pour l'un des deux groupes.

Reponses	Effectif A3 N = 69	Effectif A1 N = 35
FOOV	37	19
FOxV	1	/
OOOV	9	6
FVVV	8	5
FVOV	6	2
FOOO	2	/
OVVV	2	/
OOOO	1	/
FVFV	1	/
VVOV	1	/
FVOO	1	/
FVOF	/	1
VFFV	/	1
OOO (VO)	/	1

Table 1 : Réponses à Q5 pour les groupes A1 et A3

Comme on peut s'y attendre avec cette question sur une situation standard, beaucoup d'étudiants réussissent avec 25 (71 %) pour A1, et 47 (68 %) pour A3 (réponses FOOV, OOOV et FOxV). Mais, comme on l'a vu avec E20, ces réponses peuvent être soutenues par des raisonnements incomplets ou faux (genèse discursive) que l'on ne peut que partiellement voir dans les réponses écrites. A noter également que tous les étudiants ont répondu à cette question, beaucoup s'aidant d'une trace graphique comme celle de E20 (42 de A3 et 23 de A1, soit plus de 60 % des étudiants).

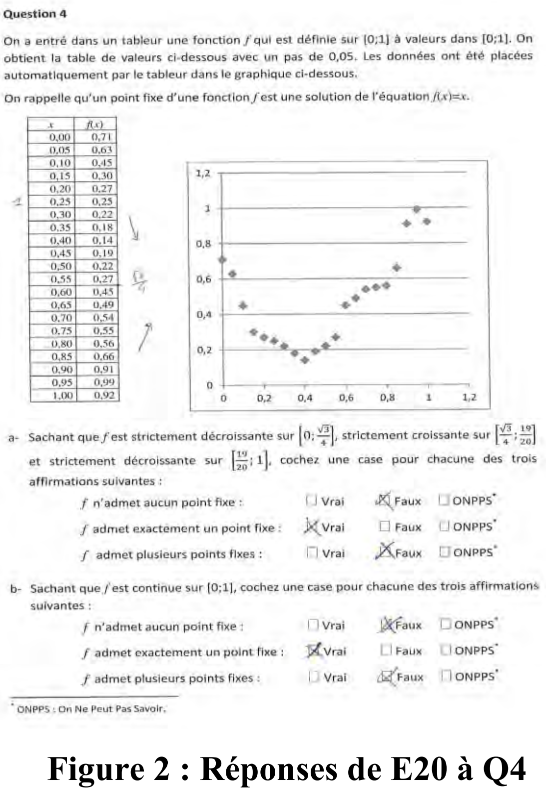
Par ailleurs, 8 (23 %) étudiants pour A1 et 19 (28 %) pour A3 affirment que la solution existe dans **D** (réponses du type ·V··). Qu'il s'agisse d'un problème de compréhension de cet ensemble de nombres qui peut parfois être confondu avec **R** ou bien un problème plus lié avec le TVI — serait-il vrai dans **D** ? —, on relève un problème de connaissance de base de l'analyse d'environ 1/4 des étudiants de l'étude, entravant conséquemment une genèse discursive correcte. Notons également que deux étudiants de A1 affirment que la solution est dans $\mathbf{D}_1$ (1,2 ou 1,3).

En outre, quelques étudiants ne pensent pas au TVI, ou ne savent pas l'utiliser comme on peut le constater, par exemple, avec les réponses FOOO et OOOO puisque ces étudiants ne reconnaissent pas une connaissance (le TVI) permettant de donner une réponse positive, qui est pourtant un contenu enseigné au lycée et reprise à l'université.

LA QUESTION 4

La question 4 pose la question de l'existence de points fixes (la définition est rappelée) pour une fonction *f* définie sur [0,1]. Cette fonction est représentée par une table de valeurs et un graphique, provenant explicitement d'un tableur. Deux questions sont posées selon des propriétés de *f* : sur ses variations en question *a* puis sur sa continuité en question *b*. Dans ce qui suit, on donne les réponses des étudiants E20, E26, E38 et E44 dont nous donnons une analyse dans l'atelier. La réponse correcte à la question *a* est FFO et celle de la question *b* est FFV.

L'étudiant E20 (figure 2) donne la même réponse aux deux questions *a* et *b*, comme s'il ne prenait pas en compte les propriétés de la fonction (les variations sont reportées sur le tableau de valeurs). Il semble que seules les données numériques (tableau de valeurs) soient prises en compte pour compter le nombre de points fixes : il y en a « 1 » (voir le signe à gauche du tableau) d'où, vraisemblablement, la réponse 'exactement un point fixe' aux deux questions. En plus du problème de connaissances mathématiques (propriétés non ou mal prises en compte), il faut noter qu'il y a également un problème de connaissance sur les signes renvoyés par l'artefact, ici un tableur : potentiellement, la deuxième colonne présente des valeurs approchées[2], donc on n'est pas sûr que *f*(0,25) = 0,25 de manière exacte. Cela se double probablement d'un problème mathématique de compréhension des nombres. Cet étudiant reste pour l'essentiel dans la dimension sémiotique et la visualisation n'est pas soutenue par des connaissances ni mathématiques ni instrumentales.



Question 4

On a entré dans un tableur une fonction *f* qui est définie sur [0;1] à valeurs dans [0;1]. On obtient la table de valeurs ci-dessous avec un pas de 0,05. Les données ont été placées automatiquement par le tableur dans le graphique ci-dessous.

On rappelle qu'un point fixe d'une fonction *f* est une solution de l'équation $f(x)=x$.

x	$f(x)$
0,00	0,71
0,05	0,63
0,10	0,45
0,15	0,30
0,20	0,27
0,25	0,25
0,30	0,22
0,35	0,18
0,40	0,14
0,45	0,19
0,50	0,22
0,55	0,27
0,60	0,45
0,65	0,49
0,70	0,54
0,75	0,55
0,80	0,56
0,85	0,66
0,90	0,91
0,95	0,99
1,00	0,92

a- Sachant que *f* est strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$, strictement croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{19}{20}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{19}{20};1\right]$, cochez une case pour chacune des trois affirmations suivantes :

f n'admet aucun point fixe : Vrai Faux ONPPS*

f admet exactement un point fixe : Vrai Faux ONPPS*

f admet plusieurs points fixes : Vrai Faux ONPPS*

b- Sachant que *f* est continue sur [0;1], cochez une case pour chacune des trois affirmations suivantes :

f n'admet aucun point fixe : Vrai Faux ONPPS*

f admet exactement un point fixe : Vrai Faux ONPPS*

f admet plusieurs points fixes : Vrai Faux ONPPS*

* ONPPS : On Ne Peut Pas Savoir.

Figure 2 : Réponses de E20 à Q4

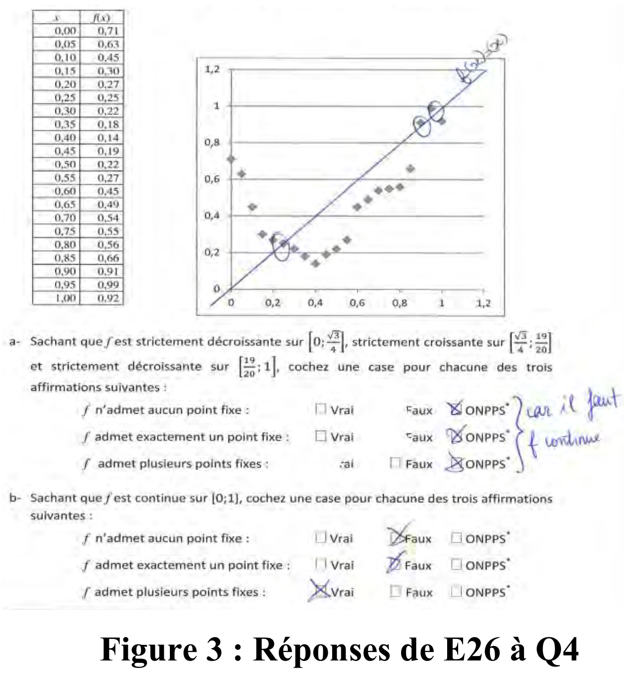
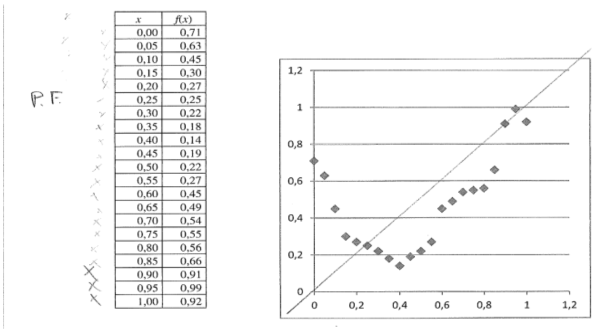


Figure 3 : Réponses de E26 à Q4

[2] Ce qui n'est pas le cas de la première colonne qui est une décision de l'opérateur qui, souvent, recherche une tabulation avec un pas constant, ici de 0,05.

La réponse de E26 (figure 3) contraste fortement avec celle de E20. La réponse de E26 est correcte et avance une raison mathématique qui repose sur la continuité à la question *a* (même si, mathématiquement, la continuité n'est pas une condition nécessaire). En outre, il trace sur le graphique la droite d'équation $y = x$ et, pour la question *b*, probablement, localise trois points fixes en lien avec le TVI sans indiquer que 0,25 est un point fixe. Notons toutefois que la localisation du deuxième point fixe devrait être plus large et englober deux points du graphique de part et d'autre de la droite $y = x$. Il s'agit d'un travail dans le plan [Sem-Dis] avec l'utilisation adéquate d'une connaissance mathématique, la continuité.



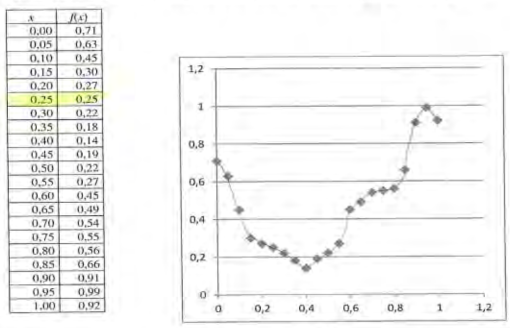


Figure 4 : Réponses de E38 à Q4 **Figure 5 : Réponses de E44 à Q4**

E38 (figure 4) répond correctement à la question *b* (FFV) sans donner d'explication. En revanche, il répond FOO pour la question *a* et écrit « *f* admet au moins un point fixe », point fixe qu'il indique clairement sur le tableau de valeurs. Ainsi, s'il y a bien une prise en compte, correcte semble-t-il, des propriétés mathématiques de la fonction, la visualisation du tableau (notamment pour 0,25) et les questions liées aux nombres et à l'artefact semblent identiques à E20. La droite d'équation $y = x$ est tracée sans que l'on sache ce qu'il en a fait.

E44 (figure 5) répond de manière identique à E38, FOO-FFV, avec également l'indication du point fixe 0,25 dans le tableau par surlignage. Il trace une courbe continue passant par les points, pratiquement comme s'il reliait les points par des segments. On ne sait pas ce qu'il fait de cette trace graphique.

Les réponses quantitatives

On donne dans la table 2 les réponses des étudiants des deux groupes A1 et A3 de manière identique à la table 1. Les réponses obtenues sont codées sous la forme de deux triplets : le premier triplet correspond à la question *a*, et le second, à la question *b*.

Réponses	Effectif A3 N = 69	Effectif A1 N = 35
FOO-FOO	19	1
FOO-FFV	13	2
FFV-FFV	7	6
OOO-FFV	5	5
OOO-OOO	5	1
FVF-FVF	4	3
FFO-FFV	3	/
FVF-OOO	2	1
FFV-FOO	2	/
VFF-VFF	1	/
Fxx-FFV	1	/
FOO-OOO	1	/
FOO-VFV	1	/
F(OV)O-OOO	1	/
FVF-OOO	1	/
FVF-FOO	1	/
VFF-FVF	1	/
FVO-FFV	/	2
FVF-FOO	/	2
OFO-FFV	/	1
FFV-FFO	/	1
OOO-VFF	/	1
FFV-FVF	/	1
FFO-FVO	/	1
FVF-FOV	/	1
FOF-FOO	/	1
FVO-OOO	/	1
FVO-FFO	/	1
FFO-OOO	/	1
FVO-FVF	/	1
F(FO)(VO)-FOO	/	1

Table 2 : Réponses à Q4 pour les groupes A1 et A3

Presque tous les étudiants ont répondu à cette question (seuls deux de A3 ne donnent aucune réponse). Contrairement à Q5, la Q4 est peu réussie avec 5 étudiants pour A1 (14 %) et 5 étudiants pour A3 (7 %). La question *b* est mieux réussie, 16 pour A1 (48 %) et 29 pour A3 (42 %), que la question *a*, 7 pour A1 (20 %) et 10 pour A3 (14 %).

Par ailleurs, 11 étudiants de A1 (31 %) et 36 étudiants de A3 (52 %) donnent la même réponse aux deux questions, comme si les propriétés mathématiques de f n'étaient pas importantes. On relève en particulier la réponse FFV-FFV (6 de A1 et 7 de A3) qui semble indiquer une *continuité naturelle* où toute courbe/fonction est continue – avec parfois une courbe continue tracée, comme en figure 5.

On note beaucoup de réponses FOO pour la question *a* de la part des étudiants de A3 (35, soit 50 %), et plus modéré pour A1 (4, soit 11 %), ce qui indiquerait une visualisation mal contrôlée par des connaissances mathématiques et de l'artefact (cf. l'analyse de E20 ci-dessus) du point fixe 0,25. On relève toutefois une précaution dans le fait qu'on ne sait pas s'il y en a exactement un ou plusieurs, possiblement par une visualisation graphique. En revanche, la réponse FVF semble indiquer une pure visualisation numérique non contrôlée (7 pour A1, soit 20 %, et 8 pour A3, soit 12 %) s'appuyant sur une visualisation iconique de la table numérique.

En tout, si l'on prend en compte la réponse 'au moins un point fixe', qui regroupe FOO, FVF, FFV, à la question *a*, on trouve 19 étudiants de A1 (54 %) et 54 pour A3 (78 %). Ces étudiants semblent avoir une visualisation inadéquate des signes numériques ou graphiques – on peut y reconnaître une visualisation iconique.

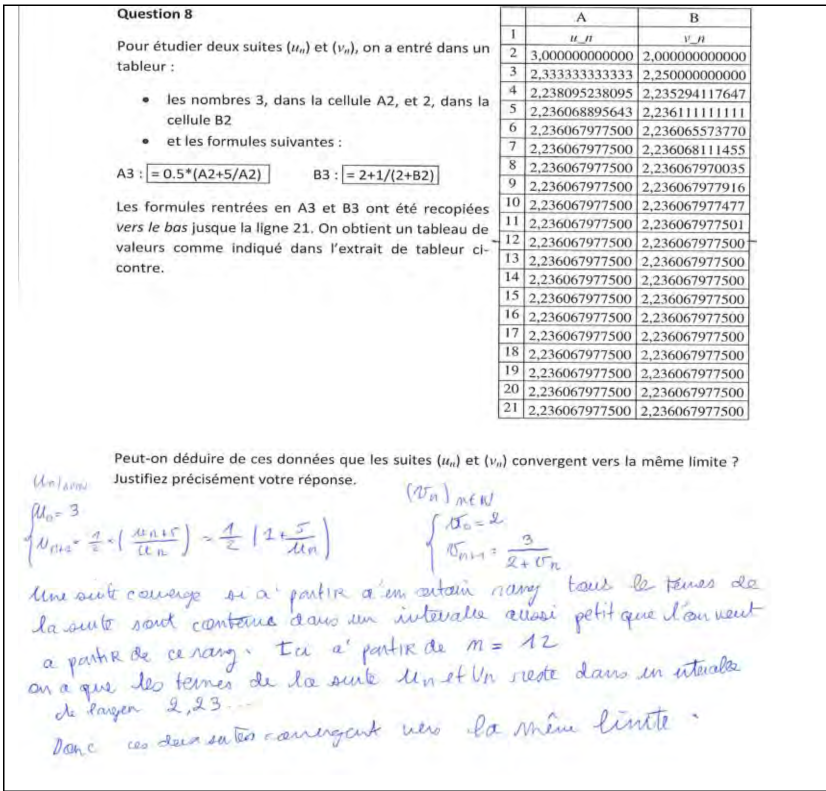
Ces réponses FOO (5, soit 14 %, pour A1 et 22, soit 32 %, pour A3) et FVF (5, soit 14 %, pour A1 et 5, soit 7 %, pour A3) sont encore très présentes à la question *b* (où FFV est la réponse correcte) malgré l'hypothèse de continuité qui devrait rendre disponible le TVI.

LA QUESTION 8

A la question 8, on donne deux suites récurrentes avec leurs formules dans la syntaxe d'un tableur ainsi que les 20 premiers termes de ces suites calculés par le tableur, avec une précision de 12 décimales. La question est de savoir si, avec ces données, on peut dire que ces deux suites convergent vers la même limite. Nous avons sélectionné et analysé les réponses des étudiants E20, E24, E48, E62 et E63.

La réponse correcte est que ces données sont insuffisantes pour répondre à la question, car les premiers termes d'une suite ne peuvent en aucun cas donner une indication sur le comportement asymptotique, mais seulement une éventuelle conjecture. En outre, le fait que les 12 premières décimales se stabilisent rapidement constitue un signe que l'on peut, de manière erronée, interpréter comme une preuve que les suites convergent et que leurs limites sont égales.

Les réponses de E20, E24, E48, E62, E63



Question 8

Pour étudier deux suites (u_n) et (v_n), on a entré dans un tableur :

- les nombres 3, dans la cellule A2, et 2, dans la cellule B2
- et les formules suivantes :

A3 : $\boxed{= 0.5*(A2+5/A2)}$ B3 : $\boxed{= 2+1/(2+B2)}$

Les formules rentrées en A3 et B3 ont été recopiées *vers le bas* jusque la ligne 21. On obtient un tableau de valeurs comme indiqué dans l'extrait de tableur ci-contre.

	A	B
1	u_n	v_n
2	3,000000000000	2,000000000000
3	2,333333333333	2,250000000000
4	2,238095238095	2,235294117647
5	2,236068895643	2,236111111111
6	2,236067977500	2,236065573770
7	2,236067977500	2,236068111455
8	2,236067977500	2,236067970035
9	2,236067977500	2,236067977916
10	2,236067977500	2,236067977477
11	2,236067977500	2,236067977501
12	2,236067977500	2,236067977500
13	2,236067977500	2,236067977500
14	2,236067977500	2,236067977500
15	2,236067977500	2,236067977500
16	2,236067977500	2,236067977500
17	2,236067977500	2,236067977500
18	2,236067977500	2,236067977500
19	2,236067977500	2,236067977500
20	2,236067977500	2,236067977500
21	2,236067977500	2,236067977500

Peut-on déduire de ces données que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ? Justifiez précisément votre réponse.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{u_n + 5}{u_n} \right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5}{u_n}\right) \end{cases}$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2 + v_n} \end{cases}$

Une suit converge si a partir d'un certain rang tous le termes de la suite sont contenue dans un intevalle aussi petit que l'on veut a partir de ce rang. Ici a partir de $n = 12$ on a que les termes de la suite u_n et V_n reste dans un intervalle de largeur 2,23…
Donc ces deux suites convergent vers la même limite.

Transcription :

Une suite converge si à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont contenus dans un intervalle aussi petit que l'on veut à partir de ce rang. Ici à partir de n = 12, on a que les termes de la suite u_n et v_n reste dans un intervalle de largeur 2,23…
Donc ces deux suites convergent vers la même limite.

Figure 6 : Réponse de E20 à Q8

On remarque tout d'abord, pour E20 (figure 6), un problème de compréhension de la priorité des opérations dans le tableur (possiblement un problème plus général en mathématiques), puisqu'il effectue la somme avant la division, ce qui entraîne des erreurs dans les expressions formelles des suites. Toutefois, cela ne semble pas avoir d'incidence sur la réponse à Q8. La définition de la limite, en langage non formalisé, est imprécise avec une inversion (classique) des quantificateurs. On note également une confusion entre un point d'un intervalle et sa longueur (« 2,23… »). Tout cela aboutit à une réponse erronée « ces deux suites convergent vers la même limite ». Ici, c'est la notion même de limite qui ne lui permet pas de conclure correctement, mais également des connaissances sur les nombres et sur le tableur (les mêmes connaissances qu'à la question Q4). En effet, ces valeurs étant approchées, rien ne dit que les valeurs sont identiques, par exemple, à la 20ème décimale, ce qui pourrait invalider son raisonnement, ou à tout du moins jeter un doute sur sa véracité. On peut penser que la visualisation du tableau de valeurs, comme pour la question Q4, a été primordiale dans le choix de sa réponse. E20 reste essentiellement dans un plan [Sem-Dis] avec un référentiel théorique insuffisant sur la notion de limite.

Peut-on déduire de ces données que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ? Justifiez précisément votre réponse. Oui on peut dire que les suite (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite car à partir du 12ème rang les suites (U_n) et (V_n) ont la même valeur.	Transcription : Oui, on peut dire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite car à partir du 12ème rang les (u_n) et (v_n) ont la même valeur.

Figure 7 : Extrait de la réponse de E63 à Q8

La réponse de E63 (figure 7) est encore plus rapide et repose sur une visualisation directe de ce qui est visible sur le tableau (sans aucune trace écrite). Sa réponse signifie que les suites sont constantes à la même valeur 2,236067977500 à partir du rang 12.

Question 8

Pour étudier deux suites (u_n) et (v_n), on a entré dans un tableur :

- les nombres 3, dans la cellule A2, et 2, dans la cellule B2
- et les formules suivantes :

A3 : $\boxed{= 0.5*(A2+5/A2)}$ B3 : $\boxed{= 2+1/(2+B2)}$

Les formules rentrées en A3 et B3 ont été recopiées *vers le bas* jusque la ligne 21. On obtient un tableau de valeurs comme indiqué dans l'extrait de tableur ci-contre.

$u_0 = 3$
$u_{n+1} = 0,5(u_n + \frac{5}{u_n})$

	A	B
1	u_n	v_n
2	3,000000000000	2,000000000000
3	2,333333333333	2,250000000000
4	2,238095238095	2,235294117647
5	2,236068895643	2,236111111111
6	2,236067977500	2,236065573770
7	2,236067977500	2,236068111455
8	2,236067977500	2,236067970035
9	2,236067977500	2,236067977916
10	2,236067977500	2,236067977477
11	2,236067977500	2,236067977501
12	2,236067977500	2,236067977500
13	2,236067977500	2,236067977500
14	2,236067977500	2,236067977500
15	2,236067977500	2,236067977500
16	2,236067977500	2,236067977500
17	2,236067977500	2,236067977500
18	2,236067977500	2,236067977500
19	2,236067977500	2,236067977500
20	2,236067977500	2,236067977500
21	2,236067977500	2,236067977500

Peut-on déduire de ces données que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ? NON
Justifiez précisément votre réponse.

$U_{n+1} = 0,5 \times \left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \to +\infty$
$V_{n+1} = 2 + 1/(2 + V_n) \to 2$

Figure 8 : Réponse de E24 à Q8

E24 (figure 8), contrairement à E20, donne les bonnes expressions formelles des suites. Néanmoins, on relève une confusion entre le rang *n* et les valeurs des suites au rang *n* ce qui entraîne un calcul de limite, dans le paradigme AC. Le résultat obtenu ne se retrouve pas dans le tableau des valeurs des premiers termes de la suite, mais bien entendu cela n'est pas en contradiction. Pourtant, il a bien étudié les données numériques comme l'attestent les multiples traces sur le tableau. Ici, la visualisation du tableau et le calcul de limite semblent déconnectés dans le travail mathématique[3].

Peut-on déduire de ces données que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ? Justifiez précisément votre réponse. Si le tableur fait l'opération avec une précision de 10^{-12}, on aura $\forall n \geqslant 12$ $A_n = 0,5 \times (A_{n-1}+5/A_{n-1}) = 2,236067977500$ $B_n = 2 + \frac{1}{(2+B_{n-1})} = 2,236067977500$ (on obtiendra ce nombre à chaque fois). Mais le tableur ayant une précision limitée, il aurait fallu des outils plus précis, on ne peut pas conclure.	Transcription : Si le tableur fait l'opération avec une précision de 10^{-12}, on aura $\forall n \geq 12$ $A_n = 0,5 \times (A_{n-1}+5/A_{n-1}) = 2,236067977500$ $B_n = 2+1/(2+B_{n-1}) = 2,236067977500$ (on obtiendra ce nombre à chaque fois). Mais le tableur ayant une précision limitée, il aurait fallu des outils plus précis, on ne peut pas conclure.

Figure 9 : Extrait de la réponse de E48 à Q8

[3] On pourrait ajouter, pour cette déconnexion, un étudiant qui « calcule » des limites égales à zéro pour les deux suites.

E48 (figure 9) exprime bien la question de l'imprécision de l'artefact, mettant en évidence des connaissances sur les nombres et le tableur que beaucoup d'autres étudiants n'ont pas (ou n'utilisent pas). Cela lui permet de conclure sur l'impossibilité de répondre par oui ou par non à la question posée. Notons toutefois qu'il généralise indument les valeurs données par le tableur pour toutes les valeurs de n supérieures à 12. Il s'agit ici d'un travail dans le plan [Sem-Ins] avec un argument instrumental portant sur le tableur.

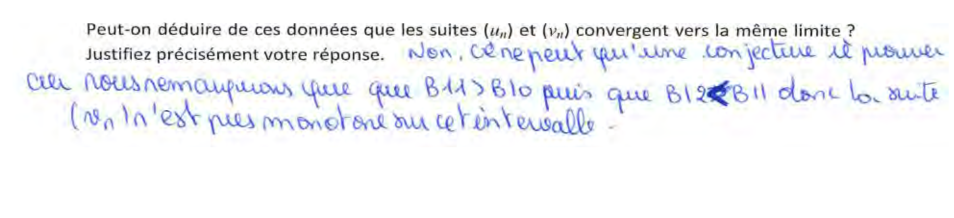
 Peut-on déduire de ces données que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ? Justifiez précisément votre réponse. Non, ce ne peut qu'une conjecture et prouver car nous remarquons que que B11>B10 puis que B12<B11 donc la suite (v_n) n'est pas monotone sur cet intervalle.	Transcription : Non, ce ne peut [être] qu'une conjecture à prouver car nous remarquons que B11>B10 puis que B12<B11 donc la suite (v_n) n'est pas monotone sur cet intervalle.

Figure 10 : Extrait de la réponse de E62 à Q8

E62 (figure 10) répond correctement, mais la justification repose, de manière erronée, sur la monotonie de la suite (v_n), en se limitant aux données jusqu'à la ligne 12 (il entoure la cellule B11). On peut y voir un travail dans le plan [Sem-Dis] avec un argument discursif (faux).

Les réponses quantitatives

7 étudiants de A1 et 13 de A3 ne répondent pas à cet item. C'est beaucoup au regard des autres questions (peut-être est-ce dû au fait qu'il s'agissait de l'avant-dernière question du questionnaire ?). Finalement, seuls 10 étudiants sur les 104 de l'étude se lancent dans un calcul de limite dans un paradigme AC.

Seuls 1/3 des étudiants, tant en A1 qu'en A3, réussissent cet item. Deux étudiants répondent correctement sur la convergence, mais affirment que la limite (si elle existe) est égale à 2,23…500, sans dire qu'il s'agirait d'une valeur approchée de la limite. Peu d'étudiants invoquent les limites de l'artefact (4 de A1 et 5 de A3).

En revanche, 12 étudiants de A1 (34 %) et 17 étudiants de A3 (25 %) affirment que les limites sont égales[4], ce qui montre un défaut de connaissance mathématique sur les limites de suites et qui relèvent du paradigme AG et, parmi ceux-ci, 9 de A1 (26 %) et 11 de A3 (16 %) donnent des arguments sur le comportement des suites au-delà du tableau (dont le fait que les suites sont stationnaires). Pour ces derniers, non seulement il y a un manque de connaissances mathématiques de base sur les suites, mais on relève de plus un manque de connaissances sur le tableur.

On peut ainsi remarquer le poids de la visualisation des données numériques : la ligne 12 et les valeurs identiques. Cela est tout à fait normal et on pouvait s'y attendre. La question est surtout de savoir si l'on peut dépasser ou non cette première visualisation (iconique) avec des connaissances sur les mathématiques et l'artefact.

[4] On pourrait ajouter l'étudiant qui *calcule* des limites égales à zéro pour les deux suites.

CONCLUSION

Dans cet atelier, nous avons mis l'accent sur la visualisation, dans les registres graphique et numérique, qui influence la compréhension de notions mathématiques comme la convergence des suites, le Théorème des Valeurs Intermédiaires ou la continuité, en prenant le cadre systémique sémiotique-instrumental-discursif qu'offre la théorie des ETM. Il a été constaté avec les productions analysées que, pour beaucoup d'étudiants, la visualisation de données numériques et graphiques n'est pas correcte et se limite à une visualisation iconique, avec pour conséquence un confinement dans le paradigme AG.

Nous avons pointé dans l'atelier deux types de connaissances manquantes ou inadéquates : d'une part des connaissances mathématiques portant sur les objets à l'étude et d'autre part des connaissances sur les artefacts utilisés dans le travail mathématique.

Les premières connaissances manquantes se répartissent en deux catégories : (1) les connaissances essentielles sur les nombres, et plus spécifiquement la structuration des ensembles de nombres avec les propriétés de densité et de complétude ; (2) les connaissances spécifiques des objets de l'analyse, suite, fonction et limite pour cette étude. En conséquence de ces lacunes, le travail mathématique est loin du travail attendu en analyse.

Les secondes connaissances manquantes sont également importantes, car on ne peut minimiser l'effet des outils numériques dans le travail mathématique. Bien sûr, l'usage de logiciels recèle un potentiel de valeur ajoutée utile pour le travail mathématique, mais l'interprétation des données que ces logiciels fournissent semble problématique pour beaucoup (trop) d'étudiants. Dans cet atelier, on remarque également que les connaissances instrumentales sur le tableur dont il a été question sont étroitement liées aux connaissances sur les nombres (catégorie (1) ci-dessus).

Au final, beaucoup d'étudiants au début d'université en restent à un travail reposant sur une première visualisation dans un paradigme AG, sans apport de connaissances, mathématiques ou instrumentales, alors que d'autres, très nombreux également, invoquent des connaissances mathématiques, éventuellement avec un changement de plan vertical dans l'ETM, inadéquates ou non contrôlées.

RÉFÉRENCES

Durand-Guerrier, V., Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2019). Real exponential in discreteness-density-completeness contexts, J. Monaghan, E. Nardi and T. Dreyfus (Eds.) (2019), *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics – Conference proceedings*. Kristiansand, Norway: MatRIC, 87-90. Retrieved on [date] from https://matric-calculus.sciencesconf.org/

Durand-Guerrier, V. & Vivier, L. (2016). Densité de D, Complétude de R et analyse réelle Première approche, In C. Winslow et T. Hausberger Editeurs, *Actes de la Première Conférence INDRUM 2016, International Network for Didactic,* *Research in University Mathematics*, 31 mars - 02 avril 2016, Université de Montpellier, France, 143-152.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, *30*(54), 1-22.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak A., Montoya Delgadillo E., Vandebrouck F. & Vivier, L (2016). Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction, In Y. Matheron, G. Gueudet & al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*. *Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques, Brest, août 2015*, 47-66, La Pensée Sauvage.

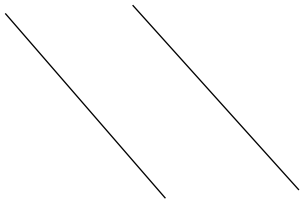
Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2018). La visualización en análisis, In Cuevas Vallejo, C. A., Martínez Reyes, M. Cruz Flores, R. G., Editores Académicos, *Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes*, Pearson Educación de México, 1-18.

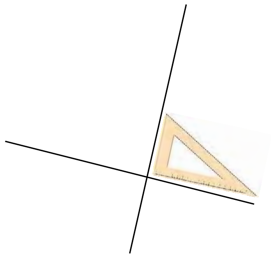
Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, *RELIME*, *17*(4-I), 17-28.

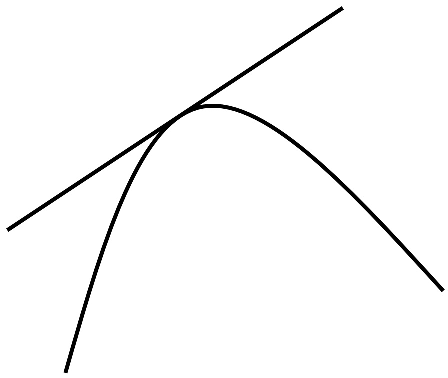
Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM*, 48(6), 739-754.

ANNEXE 1 : EXEMPLES A VISUALISER







1/4 = 0.25 $\pi = 3{,}14$ $x^2 + 2x + 1 = (x - 1)^2$ $3 \times 5 = 23$

$f(x)$=x^5−45.6 x^2−x+7/3 $g(x)$=√(1−sin x) $h(x)$=√(|x−sin x |)

ANNEXE 2 : LES PARADIGMES DE L'ANALYSE

Le paradigme [Analyse Arithmetico-Géométrique] (AG) qui permet des interprétations provenant, avec des implicites, de la géométrie, du calcul arithmétique mais aussi du monde réel. De nombreux problèmes d'Analyse trouvent leur source intuitive dans ce paradigme : calcul de longueur ou d'aires, continuité et tangence... Arithmétique et géométrie sont étroitement liées historiquement dans le développement de ce paradigme auquel il faudrait ajouter tous les problèmes de cinématique dont le rôle dans l'élaboration de l'Analyse a été fondamental.

Le paradigme [Analyse calculatoire] (AC). Dans ce calcul algébrique généralisé, les règles de calcul sont définies, plus ou moins explicitement, et elles sont appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits. Dans ce paradigme, les fonctions vont être identifiées avec leur écriture, retrouvant ainsi l'idéal perdu d'assimiler toutes les fonctions aux fonctions analytiques.

Le paradigme [Analyse Réelle] (AR). Cette fois, un travail spécifique et formel s'appuie sur l'approximation et la localité : bornes, inégalités, travail sur des voisinages, négligeabilité... La précision des définitions associée à la rigueur des raisonnements qui ne peuvent plus s'appuyer simplement sur des évidences intuitives, souvent géométriques, marque une rupture épistémologique avec les deux précédents.

(Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2016, p. 53)

TALLER 3

EL TRABAJO MATEMÁTICO EN ANÁLISIS Y EL ROL DE LA VISUALIZACIÓN EN LAS DIMENSIONES SEMIÓTICA, INSTRUMENTAL Y DISCURSIVA

Elizabeth Montoya Delgadillo[a] et Laurent Vivier[b]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, [b]Université de Paris, France

elizabeth.montoya@pucv.cl, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Este taller explora el significado que pueden tener los estudiantes al comienzo de la Universidad de ciertas nociones de análisis. Específicamente, se identifican conocimientos necesarios de las matemáticas, como así también, herramientas utilizadas para una correcta visualización de representaciones de los objetos de análisis. Se precisan argumentos utilizados según propiedades definiciones, y también artefactos en juego[1].

INTRODUCCIÓN

La visualización juega un rol importante en el trabajo matemático. En el análisis, es necesario interpretar los signos, con conocimientos específicos disponibles, ya que lo que se ve no corresponde directamente a lo que se debe interpretar en relación con las definiciones y propiedades involucradas (Kuzniak, Montoya Delgadillo y Vivier, 2018). Proponemos un trabajo que muestra las dificultades cognitivas que se enfrentan los estudiantes universitarios de primer y segundo año para tener una correcta visualización de representaciones de objetos de análisis.

Para introducir el problema de la visualización en análisis, presentamos algunas representaciones matemáticas (ver anexo 1), proponiendo sistemáticamente la pregunta: ¿Qué visualizamos? Solicitando que se distingan los signos y las interpretaciones que puede hacer un sujeto según los conocimientos matemáticos movilizados. Se puede hacer referencia a (Kuzniak, Montoya Delgadillo y Vivier, 2018) para una discusión de algunos de estas representaciones. La teoría de los ETM (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016; Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016; Kuzniak y Richard, 2014; Kuzniak, 2011) fue presentada rápidamente centrándose en el dominio del análisis y en los paradigmas del análisis (Montoya Delgadillo y Vivier, 2016) como se puede observar en el Anexo 2.

Posteriormente, se propuso trabajar en un corpus de respuestas escritas de un cuestionario realizado con estudiantes de licenciatura de matemáticas de la

[1]Una segunda parte había sido prevista con el estudio de la triada crucial en análisis, discreto-continuo-denso, con la introducción del concepto de las perspectivas de localidad para analizar en detalle el trabajo en análisis en las dimensiones semiótica, instrumental y discursiva. Sin embargo, la primera parte tuvo la necesidad de usar las dos sesiones del taller, es por ello, que la segunda parte no pudo ser abordada y aquí tampoco la vamos a desarrollar.

Universidad de Montpellier (Francia), proveniente de un trabajo con Viviane Durand-Guerrier, durante el segundo semestre del 2015:

- Un grupo de 35 estudiantes de primer año universitario, llamado A1,
- Un grupo de 69 estudiantes de segundo año universitario, llamado A3.

En el taller se discutieron las respuestas cuantitativas de ambos grupos y las respuestas de algunos estudiantes del grupo A3 de tres preguntas del cuestionario de un total de 9 preguntas. La pregunta del taller fue: **Para cada una de las tres preguntas (5, 4 y 8) haga un análisis centrado en la visualización y más específicamente sobre los conocimientos que faltan en términos instrumentales y matemáticos.**

Las tres preguntas se presentan posteriormente con la respuesta de uno de los estudiantes (E20), otras producciones son extractos de respuestas a estas preguntas. Otros estudios sobre este cuestionario se pueden ver en (Durand-Guerrier y Vivier, 2016) y (Durand-Guerrier, Montoya Delgadillo y Vivier, 2019).

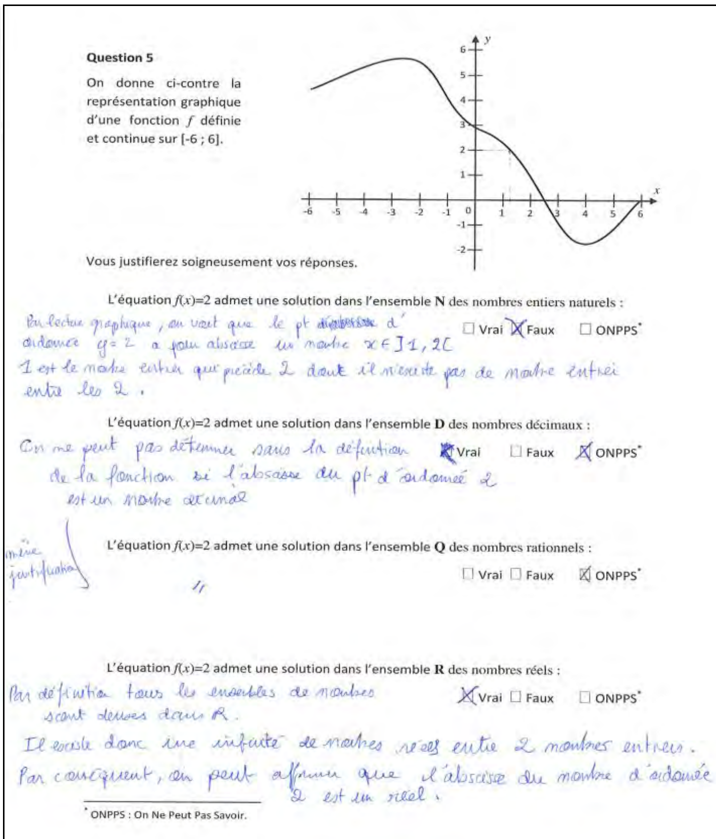
Para cada uno de las tres preguntas se proporciona representaciones numéricas (Q4 y Q8) o gráficas (Q4 y Q5) de funciones (Q4 y Q5) y de sucesiones (Q8). De forma paralela, para Q4 y Q5, se proporcionan propiedades matemáticas de funciones. Como no se entregan fórmulas (excepto Q8, donde se da una fórmula en una hoja de cálculo), se espera que las representaciones bloqueen el uso del paradigma AC, es decir, cálculos algebraicos de tipo rutinario, a menudo, usuales en la enseñanza. Por lo tanto, la entrada se hace en el paradigma AG mediante la visualización de signos numéricos o gráficos. Esta primera visualización de los signos es inevitable, por ejemplo, con "dos expresiones numéricas tienen las mismas cifras en una hoja de cálculo" como en la pregunta Q8, o "dos curvas se cortan en un punto" como en la pregunta Q5 (ver más abajo). Sin embargo, como se tendrá en cuenta más tarde, para responder correctamente a las preguntas, es esencial y sin necesariamente cambiar de paradigma, ir más allá de esta primera visualización. Esta visualización puede ser llamada icónica para nuestros propósitos, y para las preguntas propuestas, además se requiere de una visualización no icónica la cual controla el conocimiento matemático y el artefacto (en este caso, esto es sólo en la hoja de cálculo) abriendo el camino para una génesis discursiva. Así, las preguntas están más bien posicionadas en el plano [Sem-Ins] y requieren un cambio a la dimensión discursiva.

PREGUNTA 5

La pregunta 5 es una pregunta estándar en el uso de gráficas para resolver una ecuación: se da el gráfico de una función f continua en el intervalo [-6,6] y se pregunta si la ecuación $f(x)=2$ tiene una solución en cada uno de los conjuntos de números usuales (**N, Z, D, Q** y **R**).

La respuesta de E20

El estudiante E20 (Figura 1) visualiza el problema sobre la curva y, con la ayuda de dos pequeños segmentos, concluye que el punto de ordenada 2 no puede ser entero. Es interesante observar que no se justifica la existencia de este punto. La visualización icónica de signos gráficos, o la costumbre del trabajo matemático, *muestra* que existe este punto. Esto parece, para este estudiante, un hecho que se utiliza en forma sistemática en otras preguntas, sobre todo para la última pregunta, en que **R**, como una recopilación de todos los números (habla de densidad, lo cual es un argumento incorrecto), la abscisa del punto es necesariamente un número real. Podemos observar que la pregunta de la existencia, lo que puede probar en **R** con el Teorema de los Valores Intermediarios (TVI), la cual no usa E20. Se observa un trabajo en el plano [Sem-Dis] con una génesis discursiva incompleta y con errores.


Question 5

On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur [-6 ; 6].

Vous justifierez soigneusement vos réponses.

L'équation $f(x)=2$ admet une solution dans l'ensemble **N** des nombres entiers naturels :

Par lecture graphique, on voit que le pt ~~d'abscisse~~ d'ordonnée $y=2$ a pour abscisse un nombre $x \in]1,2[$
1 est le nombre entier qui précède 2 donc il n'existe pas de nombre entier entre les 2.

☐ Vrai ☒ Faux ☐ ONPPS*

L'équation $f(x)=2$ admet une solution dans l'ensemble **D** des nombres décimaux :

On ne peut pas déterminer sans la définition de la fonction si l'abscisse du pt d'ordonnée 2 est un nombre décimal

☒ Vrai ☐ Faux ☒ ONPPS*

même justification

L'équation $f(x)=2$ admet une solution dans l'ensemble **Q** des nombres rationnels :

//

☐ Vrai ☐ Faux ☒ ONPPS*

L'équation $f(x)=2$ admet une solution dans l'ensemble **R** des nombres réels :

Par définition tous les ensembles de nombres sont denses dans R.
Il existe donc une infinité de nombres réels entre 2 nombres entiers.
Par conséquent, on peut affirmer que l'abscisse du nombre d'ordonnée 2 est un réel.

☒ Vrai ☐ Faux ☐ ONPPS*

* ONPPS : On Ne Peut Pas Savoir.

Transcripción y traducción:

Mediante la lectura del gráfico, se ve que el punto de ordenada $y = 2$ tiene un número abscisa $x \in]\ 1, 2\ [$
1 es el número entero directamente inferior a 2, así que no hay número entero entre los 2.

No podemos determinar sin definir la función si la abscisa del punto de ordenada 2 es un número decimal

misma justificación

Por definición, todos los conjuntos de números son densos en **R**.
Por tanto, existe un número infinito de números reales entre dos números enteros. Por lo tanto, podemos decir que la abscisa del número de ordenada 2 es un real.

Figura 1: Las respuestas de E20 a Q5

Las respuestas cuantitativas

En la Tabla 1, se dan números, para ambos grupos A1 y A3, según las respuestas a Q5. Las respuestas son constituidas por cuadrupletas, donde V significa que es “verdadero" se comprobó, F para "falso" y O para el caso que "no se puede saber". Si un estudiante ha marcado más casos, las respuestas son concatenadas entre paréntesis y una "x" significa la ausencia de respuesta a un ítem. Las respuestas correctas están en las líneas sombreadas. Todas las respuestas se encuentran en la columna de la izquierda y un "/" marca la ausencia de una respuesta a uno de los dos grupos.

Respuestas	Grupo A3 N = 69	Grupo A1 N = 35
FOOV	37	19
FOxV	1	/
OOOV	9	6
FVVV	8	5
FVOV	6	2
FOOO	2	/
OVVV	2	/
OOOO	1	/
FVFV	1	/
VVOV	1	/
FVOO	1	/
FVOF	/	1
VFFV	/	1
OOO (VO)	/	1

Tabla 1: Respuestas a Q5 para grupos A1 y A3

Como era de esperar con esta pregunta es una situación estándar, muchos estudiantes tienen éxito con 25 (71 %) de A1, y 47 (68 %) de A3 (respuestas FOOV, OOOV y FOxV). Pero, como hemos visto con E20, estas respuestas pueden ser sostenidas por un razonamiento incompleto o falso (génesis discursiva) que se puede ver sólo en forma parcial en las respuestas escritas. También, se debe tener en cuenta que todos los estudiantes han respondido a esta pregunta y que muchos se apoyan de un trazo gráfico como E20 (42 de A3 y 23 de A1, esto corresponde a más del 60 % de los estudiantes).

Además, 8 (23 %) de los estudiantes del grupo A1 y 19 (28 %) del grupo A3 argumentan que la solución está en **D** (respuestas del tipo ·V··). Esta pregunta requiere de la comprensión de este conjunto de números, que a veces, se puede confundir con **R** o bien un problema más asociado con el TVI — ¿Puede ser verdadero en **D**? —, hemos observado un problema de conocimiento básico del análisis para casi el 25% de los estudiantes de este estudio, por lo tanto, tienen una dificultad a nivel da la génesis discursiva. También, se deber tener en cuenta que dos de los estudiantes de A1 afirman que la solución está en $\mathbf{D}_1$ (1,2 o 1,3).

Además, algunos estudiantes no piensan en el TVI, o no saben usarlo como podemos ver, por ejemplo, con las respuestas FOOO y OOOO ya que estos estudiantes no reconocen un conocimiento (TVI) para dar una respuesta positiva. Sin embargo, para este grupo de estudiantes este es con contenido enseñado en la escuela secundaria y trabajado de nuevamente en a la universidad.

PREGUNTA 4

En la pregunta 4 se plantea la existencia de puntos fijos (se da la definición para recordar) para una función *f* definida en [0,1]. Esta función está representada por una tabla de valores y una gráfica, explícitamente a partir de una hoja de cálculo. Dos preguntas se plantean de acuerdo a las propiedades de *f*: sus variaciones en la pregunta *a* y su continuidad en la pregunta *b*. A continuación, damos las respuestas de los estudiantes E20, E26, E38 y E44 que analizamos en el taller. La respuesta correcta a la pregunta *a* es FFO y a la repregunta *b* es FFV.

El estudiante E20 (Figura 2) da la misma respuesta a ambas preguntas *a* y *b*, como si no tuviera en cuenta las propiedades de la función (las variaciones se representan en la tabla de valores). Parece que sólo los datos numéricos (tabla de valores) se tienen en cuenta para contar el número de puntos fijos: hay "1" (ver el signo a la izquierda de la tabla), donde, presumiblemente, la respuesta 'exactamente un punto fijo' en ambas preguntas. Además, de los problemas de matemáticos (propiedades mal tomadas en cuenta), también existe un problema de conocimiento acerca de los signos enviados por el artefacto, en este caso una hoja de cálculo: Potencialmente, la segunda columna muestra aproximaciones[2], por lo tanto, no es seguro que *f*(0,25) = 0,25 exactamente. A esto se añade, posiblemente, un problema matemático de comprensión de los números. Este estudiante permanece esencialmente en la dimensión semiótica y la visualización no se basa sobre conocimiento matemático o instrumental.

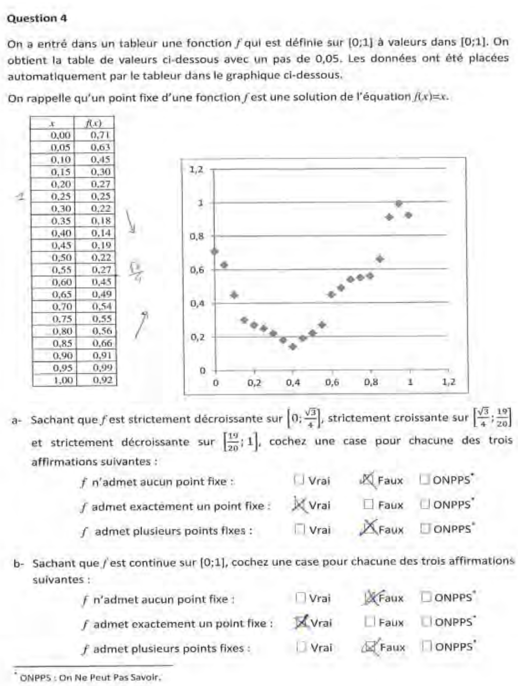


Figura 2: respuestas de E20 a Q4

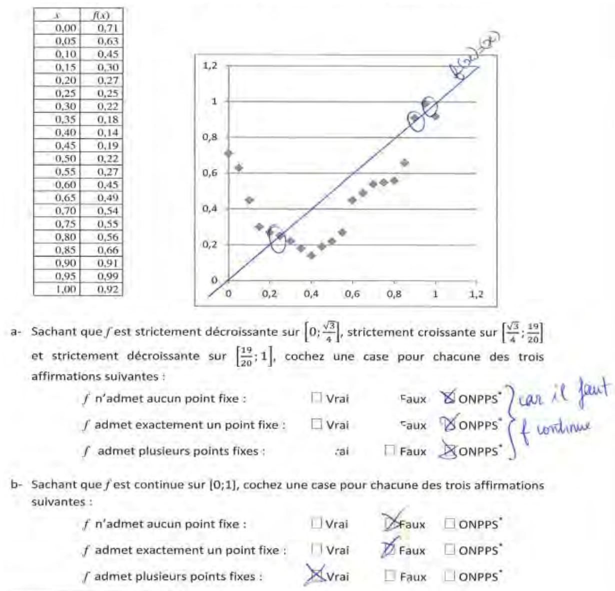
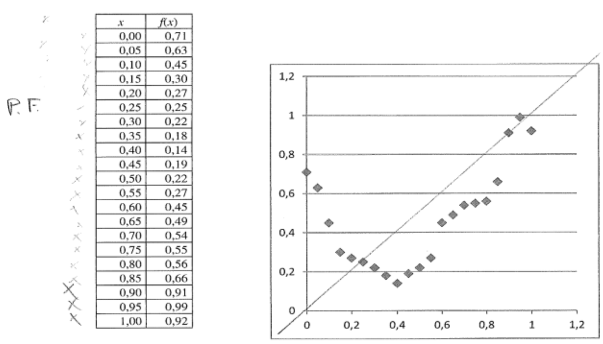


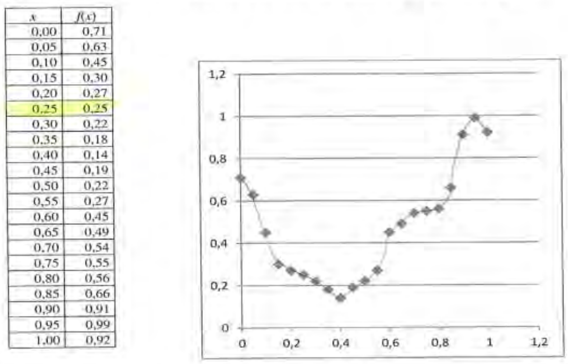
Figura 3: Respuestas de E26 a Q4

[2] Este no es el caso en la primera columna que es una decisión del operador quien a menudo quiere una tabulación con un paso constante, en este caso de 0,05.

La respuesta E26 (Figura 3) contrasta bastante con la de E20. La respuesta de la E26 es correcta y avanza en un razonamiento matemático que se basa en la continuidad en la pregunta *a* (si bien, matemáticamente, la continuidad no es una condición necesaria). Además, se dibuja en la gráfica la recta de ecuación $y = x$ y en la pregunta *b*, probablemente, localiza tres puntos fijos en relación con el TVI sin indicar que 0,25 es un punto fijo. Sin embargo, notemos que la ubicación del segundo punto fijo debería ser más amplia y abarcan dos puntos de la gráfica en ambos lados de la recta $y = x$. Este es un trabajo en el plano [Sem-Dis] con el uso adecuado de conocimientos matemáticos, la continuidad.



x	f(x)
0,00	0,71
0,05	0,63
0,10	0,45
0,15	0,30
0,20	0,27
0,25	0,25
0,30	0,22
0,35	0,18
0,40	0,14
0,45	0,19
0,50	0,22
0,55	0,27
0,60	0,45
0,65	0,49
0,70	0,54
0,75	0,55
0,80	0,56
0,85	0,66
0,90	0,91
0,95	0,99
1,00	0,92



x	f(x)
0,00	0,71
0,05	0,63
0,10	0,45
0,15	0,30
0,20	0,27
0,25	0,25
0,30	0,22
0,35	0,18
0,40	0,14
0,45	0,19
0,50	0,22
0,55	0,27
0,60	0,45
0,65	0,49
0,70	0,54
0,75	0,55
0,80	0,56
0,85	0,66
0,90	0,91
0,95	0,99
1,00	0,92

Figura 4: respuestas de E38 a Q4 **Figura 5: Respuestas de E44 a Q4**

E38 (Figura 4) responde correctamente a la pregunta *b* (FFV) sin proporcionar explicación. Por el contrario, responde FOO a la pregunta *a* y escribe "*f* tiene al menos un punto fijo" punto fijo que deja claro en la tabla de valores. Por lo tanto, si hay una consideración, correcta, al parecer, de las propiedades matemáticas de la función, la visualización de la tabla (destacando 0,25) y las preguntas relacionadas con los números y el artefacto parecen idénticas a E20. La recta de ecuación $y = x$ es trazada sin que sepamos por qué lo hizo.

E44 (Figura 5) responde idénticamente a E38, FOO-FFV, también con la identificación del punto fijo 0,25 en la tabla, dejándolo destacado. Él traza una curva continua uniendo los puntos, como si conectara los puntos con segmentos. No sabemos por qué hizo este gráfico.

Las respuestas cuantitativas

Entregamos la Tabla 2 con las respuestas de los estudiantes de ambos grupos A1 y A3 de una manera idéntica a la Tabla 1. Las respuestas se codifican como dos tripletas: el primero corresponde a la tripleta de la pregunta *a*, y el segundo a la tripleta de la pregunta *b*.

Respuestas	Grupo A3 N = 69	Grupo A1 N = 35
FOO-FOO	19	1
FOO-FFV	13	2
FFV-FFV	7	6
OOO-FFV	5	5
OOO-OOO	5	1
FVF-FVF	4	3
FFO-FFV	3	/
FVF-OOO	2	1
FFV-FOO	2	/
VFF-VFF	1	/
Fxx-FFV	1	/
FOO-OOO	1	/
FOO-VFV	1	/
F(OV)O-OOO	1	/
FVF-OOO	1	/
FVF-FOO	1	/
VFF-FVF	1	/
FVO-FFV	/	2
FVF-FOO	/	2
OFO-FFV	/	1
FFV-FFO	/	1
OOO-VFF	/	1
FFV-FVF	/	1
FFO-FVO	/	1
FVF-FOV	/	1
FOF-FOO	/	1
FVO-OOO	/	1
FVO-FFO	/	1
FFO-OOO	/	1
FVO-FVF	/	1
F(FO)(VO)-FOO	/	1

Tabla 2: Respuestas a Q4 para los grupos A1 y A3

Casi todos los estudiantes respondieron esta pregunta (sólo dos de A3 no dan ninguna respuesta). A diferencia de Q5, la pregunta Q4 tiene poco éxito con 5 estudiantes de A1 (14 %) y 5 estudiantes de A3 (7 %). La pregunta *b* tiene más éxito, 16 de A1 (48 %) y 29 de A3 (42 %), que la pregunta *a*, cuyos resultados son 7 de A1 (20 %) y 10 de A3 (14 %).

Por otro lado, 11 estudiantes de A1 (31 %) y 36 estudiantes de A3 (52 %) dan la misma respuesta a ambas preguntas, como si las propiedades matemáticas de f no fuesen importantes. En particular, destacamos la respuesta FFV-FFV (6 de A1 y 7 de A3) que parece indicar una *continuidad natural* donde cada curva/función es continua – a veces con una curva continua representada como en la Figura 5.

Se observa muchas respuestas de la forma FOO para la pregunta *a*, 35 estudiantes de A3 (50 %) y menos respuestas en el otro grupo, 4 de A1 (11 %), lo que indicaría una visualización mal controlada por conocimientos matemáticos y del artefacto (véase el análisis de E20 más arriba) del punto fijo 0,25. Sin embargo, destacamos el hecho de que no se sabe si hay exactamente uno o más puntos fijos, posiblemente por una visualización gráfica. Por otro lado, la respuesta FVF parece indicar una visualización numérica no controlada (7 de A1, o 20 %, y 8 para A3, o 12 %) basada en una visualización icónica de la tabla numérica.

En total, si se toma en cuenta la respuesta de 'al menos un punto fijo', que reagrupa FOO, FVF, FFV de la pregunta *a*, se encuentran 19 estudiantes de A1 (54 %) y 54 de A3 (78 %). Estos estudiantes parecen tener una visualización inadecuada de los signos numéricos o gráficos – se puede reconocer una visualización icónica.

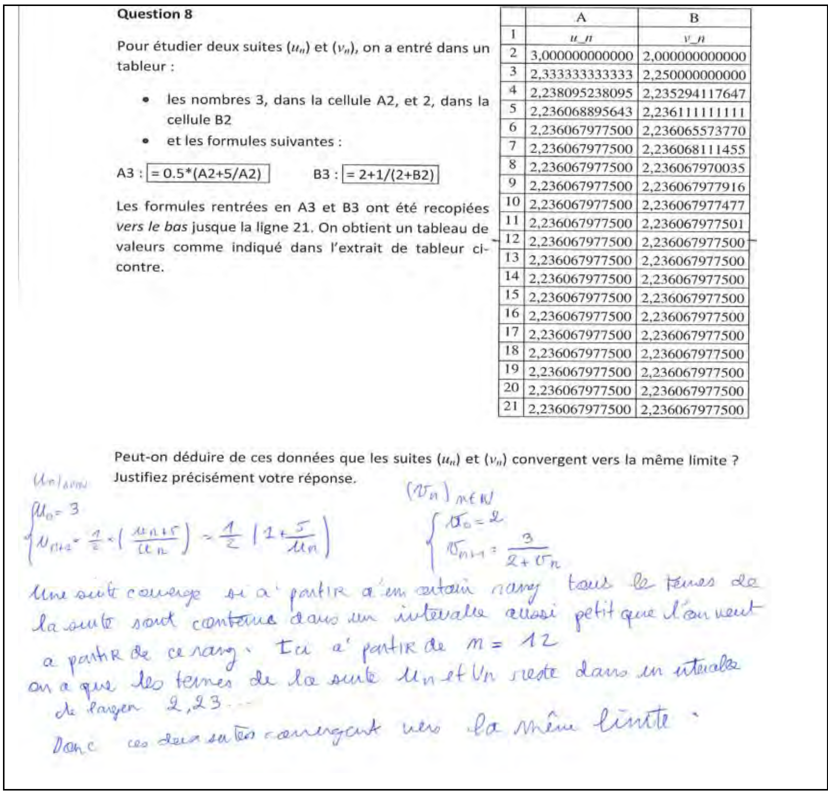
Las respuestas FOO (5, o 14 %, de A1 y 22, o 32 %, de A3) y FVF (5, o 14 % de A1 y 5, o 7 %, de A3) están todavía presentes en la pregunta *b* (donde FFV es la respuesta correcta) a pesar de la suposición de continuidad que debería poner a disposición el TVI.

PREGUNTA 8

En la pregunta 8, damos dos sucesiones recursivas con sus fórmulas en la sintaxis de una hoja de cálculo, y los 20 primeros términos de estas sucesiones calculados por la hoja de cálculo, con una precisión de 12 dígitos. La pregunta es si se puede afirmar, con estos datos, que estas dos sucesiones convergen al mismo límite. Se seleccionaron y analizaron las respuestas de los estudiantes E20, E24, E48, E62 y E63.

La respuesta correcta es que estos datos son insuficientes para responder a la pregunta debido a que los primeros términos de una secuencia no pueden en ningún caso dar una indicación del comportamiento asintótico, y sólo es posible una conjetura. Por otra parte, el hecho de que los primeros 12 decimales se estabilizan rápidamente constituye un signo de que podemos interpretar, erróneamente, como prueba de que las sucesiones convergen y sus límites son iguales.

Las respuestas de E20, E24, E48, E62, E63



Question 8

Pour étudier deux suites (u_n) et (v_n), on a entré dans un tableur :

- les nombres 3, dans la cellule A2, et 2, dans la cellule B2
- et les formules suivantes :

A3 : $\boxed{= 0.5*(A2+5/A2)}$ B3 : $\boxed{= 2+1/(2+B2)}$

Les formules rentrées en A3 et B3 ont été recopiées *vers le bas* jusque la ligne 21. On obtient un tableau de valeurs comme indiqué dans l'extrait de tableur ci-contre.

	A	B
1	u_n	v_n
2	3,000000000000	2,000000000000
3	2,333333333333	2,250000000000
4	2,238095238095	2,235294117647
5	2,236068895643	2,236111111111
6	2,236067977500	2,236065573770
7	2,236067977500	2,236068111455
8	2,236067977500	2,236067970035
9	2,236067977500	2,236067977916
10	2,236067977500	2,236067977477
11	2,236067977500	2,236067977501
12	2,236067977500	2,236067977500
13	2,236067977500	2,236067977500
14	2,236067977500	2,236067977500
15	2,236067977500	2,236067977500
16	2,236067977500	2,236067977500
17	2,236067977500	2,236067977500
18	2,236067977500	2,236067977500
19	2,236067977500	2,236067977500
20	2,236067977500	2,236067977500
21	2,236067977500	2,236067977500

Peut-on déduire de ces données que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ? Justifiez précisément votre réponse.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n+5}{u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{u_n}\right) \end{cases}$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2+v_n} \end{cases}$

Une suite converge si à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont contenus dans un intervalle aussi petit que l'on veut à partir de ce rang. Ici à partir de $n = 12$ on a que les termes de la suite U_n et V_n reste dans un intervalle de largeur 2,23...

Donc ces deux suites convergent vers la même limite.

Transcripción y traducción:

Una sucesión converge si a partir de un cierto rango todos los términos de la sucesión están en un intervalo tan pequeño que se quiere a partir de este rango. Aquí a partir de $n = 12$, tenemos que los términos de la sucesión de u_n y v_n quedan en un intervalo de ancho 2,23...
Así pues, estas dos sucesiones convergen hasta el mismo límite.

Figura 6: Respuesta de E20 a Q8

Se observa, que desde el principio E20 (Figura 6) tiene un problema de comprensión del orden de las operaciones en la hoja de cálculo (posiblemente un problema más general en matemáticas), ya que hace la suma antes que la división, lo que conlleva a errores en las expresiones formales de las secuencias. Sin embargo, esto no parece afectar la respuesta a Q8. La definición del límite en lenguaje no formal es imprecisa con una inversión (clásica) de los cuantificadores. También, hay una confusión entre un punto de un intervalo y su longitud ("2,23..."). Todo esto lleva a una respuesta equivocada "estas dos secuencias convergen al mismo límite". Aquí está el concepto de límite que no permite llegar a la conclusión correcta, pero también el conocimiento de los números y la hoja de cálculo (el mismo conocimiento de la pregunta Q4). De hecho, estos valores son próximos, pero nada dice que los valores son idénticos, por ejemplo, a la 20avo decimal, que podría invalidar su razonamiento, o al menos, poner en duda su veracidad. Se puede pensar que la visualización de la tabla de valores, en cuanto a la pregunta Q4, era de suma importancia en la elección de la respuesta. E20 permanece esencialmente en un plano [Sem-Dis] con un referencial teórico insuficiente para la noción de límite.

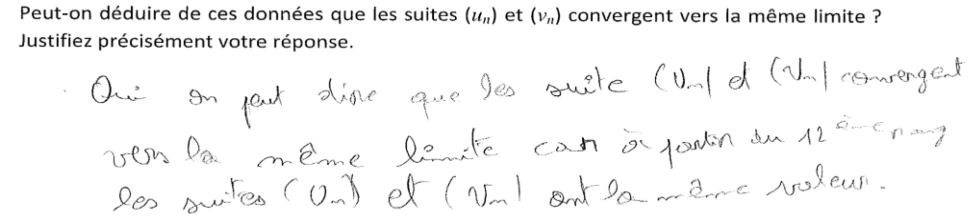
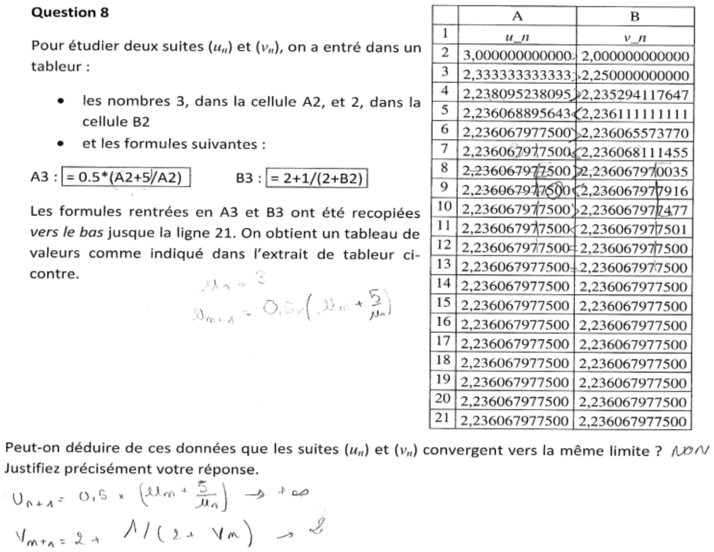
 Peut-on déduire de ces données que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ? Justifiez précisément votre réponse. Oui on peut dire que les suite (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite car à partir du 12ème rang les suites (U_n) et (V_n) ont la même valeur.	Transcripción y traducción: Sí, podemos decir que las sucesiones (u_n) y (v_n) convergen al mismo límite pues a partir del rango 12 las sucesiones (u_n) y (v_n) tienen el mismo valor.

Figura 7: Extracto de la respuesta de E63 a Q8

La respuesta de E63 (Figura 7) es incluso más rápido y se basa en una visualización directa de lo que es visible sobre la tabla de valores (sin ningún rastro escrito). Esta respuesta significa que las sucesiones son constantes en el mismo valor 2,236067977500 desde el rango 12.



Question 8

Pour étudier deux suites (u_n) et (v_n), on a entré dans un tableur :

- les nombres 3, dans la cellule A2, et 2, dans la cellule B2
- et les formules suivantes :

A3 : = 0.5*(A2+5/A2) B3 : = 2+1/(2+B2)

Les formules rentrées en A3 et B3 ont été recopiées *vers le bas* jusque la ligne 21. On obtient un tableau de valeurs comme indiqué dans l'extrait de tableur ci-contre.

$u_0 = 3$

$u_{n+1} = 0,5(u_n + \frac{5}{u_n})$

	A	B
1	u_n	v_n
2	3,000000000000	2,000000000000
3	2,333333333333	2,250000000000
4	2,238095238095	2,235294117647
5	2,236068895643	2,236111111111
6	2,236067977500	2,236065573770
7	2,236067977500	2,236068111455
8	2,236067977500	2,236067970035
9	2,236067977500	2,236067977916
10	2,236067977500	2,236067977477
11	2,236067977500	2,236067977501
12	2,236067977500	2,236067977500
13	2,236067977500	2,236067977500
14	2,236067977500	2,236067977500
15	2,236067977500	2,236067977500
16	2,236067977500	2,236067977500
17	2,236067977500	2,236067977500
18	2,236067977500	2,236067977500
19	2,236067977500	2,236067977500
20	2,236067977500	2,236067977500
21	2,236067977500	2,236067977500

Peut-on déduire de ces données que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ? NON
Justifiez précisément votre réponse.

$U_{n+1} = 0,5 \times \left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) \to +\infty$

$V_{n+1} = 2 + 1/(2 + V_n) \to 2$

Figura 8: Respuesta de E24 a Q8

E24 (Figura 8), a diferencia de E20, ofrece buenas expresiones formales de las sucesiones. Sin embargo, hubo una confusión entre el rango *n* y los valores de la sucesión de rango *n*, resultantes en un cálculo del límite en el paradigma AC. El resultado obtenido no se encuentra en la tabla de valores de los primeros términos de la sucesión, pero por supuesto esto no es una contradicción. Aun así, él ha estudiado los datos numéricos como lo demuestran las múltiples marcas en la tabla. Así, la visualización de la tabla y el cálculo del límite parecen desconectados en el trabajo matemático[3].

[3] Se podría añadir a esta desconexión, un estudiante que "calcula" límites iguales a cero para ambas sucesiones.

Peut-on déduire de ces données que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ? Justifiez précisément votre réponse. Si le tableur fait l'opération avec une précision de 10^{-12}, on aura $\forall n \geqslant 12$ $A_n = 0{,}5 \times (A_{n-1} + 5/A_{n-1}) = 2{,}236067977500$ $B_n = 2 + \frac{1}{(2+B_{n-1})} = 2{,}236067977500$ (on obtiendra ce nombre à chaque fois). Mais le tableur ayant une précision limitée, il aurait fallu des outils plus précis, on ne peut pas conclure.	transcripción: Si la hoja de cálculo efectua la operación con una precisión de 10^{-12}, habrá $\forall n \geq 12$ $A_n = 0{,}5\times(A_{n-1}+5/A_{n-1}) = 2{,}236067977500$ $B_n = 2+1/(2+B_{n-1}) = 2{,}236067977500$ (Se obtiene este número cada vez). Sin embargo, la hoja de cálculo con una precisión limitada, debería haber sido herramientas más precisas, no se puede concluir.

Figura 9: Extracto de la respuesta de E48 a Q8

E48 (Figura 9) expresa el tema de la imprecisión del artefacto, poniendo en evidencia conocimientos sobre los números y la hoja de cálculo que muchos otros estudiantes no tienen (o no utilizan). Esto permite concluir en la imposibilidad de respuesta de sí o no a la pregunta. Cabe señalar, que indebidamente generaliza los valores dados por la hoja de cálculo para todos los valores de n mayor que 12. Este es un trabajo en el plano [Sem-Ins] con un argumento instrumental en la hoja de cálculo.

Peut-on déduire de ces données que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ? Justifiez précisément votre réponse. Non, ce ne peut qu'une conjecture à prouver car nous remarquons que que B11>B10 puis que B12<B11 donc la suite (v_n) n'est pas monotone sur cet intervalle.	Transcripción y traducción: No, puede [ser] únicamente una conjetura a probar porque nos damos cuenta de que B11>B10 puesto que B12<B11 pues la sucesión (v_n) no es monótona en este intervalo.

Figura 10: Extracto de la respuesta de E62 a Q8

E62 (Figura 10) responde correctamente, y la justificación se basa erróneamente en la monotonía de la sucesión (v_n), al limitarse con los datos hasta la línea 12 (que rodea la celda B11). Se puede ver un trabajo en el plano [Sem-Dis] con un argumento discursivo (falso).

Las respuestas cuantitativas

7 estudiantes de A1 y 13 de A3 no responden a esta pregunta. Esto es bastante si se compara con las otras preguntas (tal vez es debido al hecho de que era la penúltima pregunta del cuestionario). Finalmente, sólo 10 de los 104 estudiantes del estudio se realizan un cálculo de límite en un paradigma AC.

Sólo un tercio de los estudiantes, tanto en A1 como en A3 tienen éxito en esta pregunta. Dos estudiantes responden correctamente a la convergencia, pero afirman que el límite (si existe) es igual a 2,23...500, sin decir, que esto sería un valor aproximado del límite. Pocos estudiantes evocan los límites del artefacto (4 de A1 y 5 de A3).

Por el contrario, 12 estudiantes de A1 (34 %) y 17 estudiantes de A3 (25 %) afirman que los límites son iguales[4], lo que muestra un conocimiento matemático defectuoso sobre los límites de sucesiones y que se basa sobre un paradigma AG, entre estos, 9 de A1 (26 %) y 11 de A3 (16 %) dan argumentos sobre el comportamiento de las

[4] Se podría añadir el estudiante que calcula límites iguales a cero para ambas suites.

sucesiones más allá de la tabla de valores (incluyendo el hecho de que las sucesiones son estacionarias). Para estos últimos, no sólo existe una falta de conocimiento matemático básico sobre las sucesiones, sino más bien una falta de conocimiento sobre la hoja de cálculo.

Podemos observar el peso de la visualización de datos numéricos: la línea 12 y los valores idénticos. Esto es bastante normal y esperado. La pregunta es sobre todo si es posible superar esta primera visualización (icónica) con el conocimiento de las matemáticas y del artefacto.

CONCLUSIÓN

En este taller, nos centramos en la visualización, en los registros gráficos y en los registros numéricos, que influye en la comprensión de los conceptos matemáticos tales como la convergencia de las secesiones, el Teorema de los Valores Intermediarios o la continuidad, tomando el marco sistémico semiótico-instrumental-discursivo que ofrece la teoría de los ETM. Se constató con las producciones analizadas que, para muchos estudiantes, la visualización de datos numéricos y gráficos no es correcto y se limita a una visualización icónico, lo que resulta clasificable en el paradigma AG.

Hemos señalado en el taller dos tipos de conocimientos faltantes o insuficientes: de una parte, conocimientos matemáticos en los objetos en estudio y, de otra parte, conocimiento de los artefactos utilizados en el trabajo matemático.

Los primeros conocimientos que faltan se distribuyen en dos categorías: (1) el conocimiento esencial en los números, específicamente la estructura de conjuntos de números con las propiedades de densidad y completitud; (2) el conocimiento específico de los objetos del análisis, sucesión, función y límites para este estudio. Como resultado de estas deficiencias, el trabajo matemático está lejos de ser el trabajo que se espera en el análisis.

Los segundos conocimientos que faltan también son importantes, ya que no se puede minimizar el efecto de las herramientas digitales en el trabajo matemático. Por supuesto, el uso de software tiene un potencial de valor agregado útil para el trabajo matemático, pero la interpretación de los datos que estos softwares proporcionan parecen problemático para muchos (quizás demasiados) estudiantes. En este taller, también observamos que el conocimiento instrumental de la hoja de cálculo del cual se discutió está estrechamente relacionado con el conocimiento de los números (categoría (1) anterior).

Al final, muchos estudiantes al comienzo de la universidad siguen teniendo un trabajo basado en una visualización icónica en un paradigma AG, sin proporcionar conocimientos, matemático o instrumental, mientras que otros, también muy numerosos, usan un conocimiento matemático, eventualmente con un cambio en el plano vertical en el ETM, inapropiado o incontrolado.

REFERENCIAS

Durand-Guerrier, V., Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2019). Real exponential in discreteness-density-completeness contexts, J. Monaghan, E. Nardi and T. Dreyfus (Eds.) (2019), *Calculus in upper secondary and beginning university mathematics – Conference proceedings*. Kristiansand, Norway: MatRIC, 87-90. Retrieved on [date] from https://matric-calculus.sciencesconf.org/

Durand-Guerrier, V. & Vivier, L. (2016). Densité de D, Complétude de R et analyse réelle Première approche, In C. Winslow et T. Hausberger Editeurs, *Actes de la Première Conférence INDRUM 2016, International Network for Didactic, Research in University Mathematics*, 31 mars - 02 avril 2016, Université de Montpellier, France, 143-152.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA*, *30*(54), 1-22.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak A., Montoya Delgadillo E., Vandebrouck F. & Vivier, L (2016). Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction, In Y. Matheron, G. Gueudet & al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*. *Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques, Brest, août 2015*, 47-66, La Pensée Sauvage.

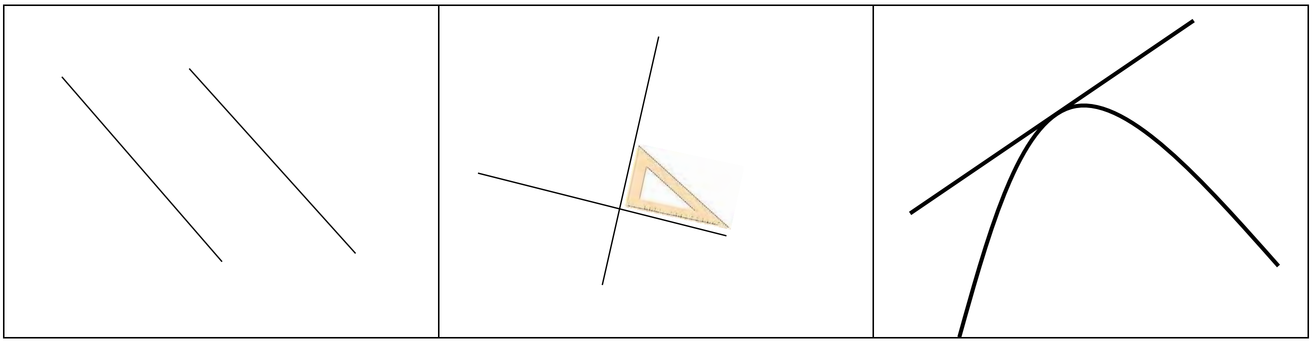
Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2018). La visualización en análisis, In Cuevas Vallejo, C. A., Martínez Reyes, M. Cruz Flores, R. G., Editores Académicos, *Tendencias actuales en enseñanza de las ciencias, una perspectiva para investigadores y docentes*, Pearson Educación de México, 1-18.

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, *RELIME*, *17*(4-I), 17-28.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM*, 48(6), 739-754.

APÉNDICE 1: EJEMPLOS PARA VISUALIZAR



$1/4 = 0.25$ $\pi = 3{,}14$ $x^2 + 2x + 1 = (x - 1)^2$ $3 \times 5 = 23$

$f(x)=x$^5−45.6 x^2−x+7/3 $g(x)=\sqrt{}(1-\sin x\ )$ $h(x)=\sqrt{}(|x-\sin x\ |\ )$

APÉNDICE 2: LOS PARADIGMAS DEL ANÁLISIS

El paradigma [Análisis Aritmético-Geométrico] (AG) que permite interpretaciones que provienen, implícitamente, de la geometría, del cálculo aritmético, pero también del mundo real. Muchos problemas del Análisis encuentran su fuente intuitiva en este paradigma: cálculo de longitud o áreas, continuidad y tangencia.... La aritmética y la geometría están íntimamente ligadas históricamente en el desarrollo de este paradigma al que hay que añadir todos los problemas cinemáticos cuyo papel en la elaboración del Análisis ha sido fundamental.

El paradigma [Análisis Calculatorio] (AC). En este hay un cálculo algebraico generalizado, las reglas de cálculo se definen, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de una reflexión sobre la existencia y naturaleza de los objetos introducidos. En este paradigma, las funciones se identificarán con su escritura, redescubriendo así el ideal perdido de asimilar todas las funciones a las funciones analíticas.

El paradigma [Análisis Real] (AR). En este hay un trabajo específico y formal que se basa en la aproximación y la localidad: límites, desigualdades, trabajo en la vecindad, lo despreciable.... La precisión de las definiciones asociadas al rigor del razonamiento, que ya no puede basarse simplemente en pruebas intuitivas, a menudo geométricas, marca una ruptura epistemológica con las dos anteriores.

(Kuzniak, Montoya Delgadillo, Vandebrouck y Vivier, 2016, p. 53)

SÍNTESIS DEL TEMA 1
EL TRABAJO MATEMÁTICO Y LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

Denis Tanguay[a], Elizabeth Montoya Delgadillo[b], Assia Nechache[c], Asuman Oktaç[d]

[a]Université du Québec à Montréal, Canadá, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, [c]Université de Cergy Pontoise (Francia),

[d]CINVESTAV, México

DESCRIPTOR INICIAL DEL TEMA

El objetivo de este tema es, de un lado, profundizar el modelo teórico definido por los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) y, por el otro lado, comprender mejor cómo este modelo teórico permite describir, analizar y caracterizar el trabajo matemático. Las contribuciones pueden apoyarse en estudios particulares, por ejemplo, completando los trabajos acerca de la geometría, del análisis y de la probabilidad, o incluso apegándose a dominios inexplorados como el álgebra, la cinemática, matemáticas discretas, entre otros. También, pueden ser consideradas reflexiones hechas a partir de temas transversales tales como la demostración, la modelización o la exploración-experimentación empírica en matemáticas.

Diversos aspectos del modelo teórico pueden profundizarse en las contribuciones al tema 1 :

- La cuestión de la interdependencia entre las tres génesis — semiótica, instrumental, discursiva — requiere de conocimiento sobre cómo describir cada una y cómo darse cuenta de su imbricación, especialmente apelando a los planos verticales [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis].
- Estos planos verticales permiten describir la circulación en el interior del modelo, con una interpretación amplia y abierta de estos planos y movimientos ascendentes y descendentes que aclaran algunos aspectos de las génesis (Kuzniak et al., 2016); también se puede pensar en recurrir a movimientos oblicuos.
- Es en este sentido que la noción de « fibración » (interna) ha sido propuesta para aprender mejor la circulación en el ETM y más precisamente, los cambios de activación de las génesis y los planos verticales, pero esta noción debe aún precisarse.
- Se ha avanzado también en cuanto a la palabra « fibración » (externa) para darse cuenta de las articulaciones entre diferentes ETM, cuando las tareas ponen en juego varios dominios o sub-dominios matemáticos, o cuando un cambio de dominio aparece durante el trabajo matemático.
- *La cuestión de los paradigmas*; los estudios recientes han permitido la identificación de paradigmas en análisis y probabilidad, análogos a GI, GII y GIII, ya clásicos, de la geometría. Mientras que según Kuhn los paradigmas enmarcan

el trabajo de una comunidad científica formada por expertos y estudiantes, los que se invocan en los ETM se inscriben, sin ser restringidos allí, en un contexto escolar, donde diferentes paradigmas no necesariamente entran en conflicto uno con el otro, y cuya articulación es importante para el trabajo matemático. ¿Se puede aclarar mejor los lugares relativos de los dominios y sub-dominios de las teorías y los paradigmas? Por ejemplo ¿cómo interpretar, en relación al modelo y al trabajo matemático, el análisis estándar y el análisis no estándar, la geometría euclidiana y las geometrías no euclidianas, la geometría sintética y la geometría analítica (de coordenadas), la estadística descriptiva y la estadística inferencial, etc.?

Se puede también apreciar, en los simposios anteriores, el interés de aclarar los estudios basados en el modelo de los ETM, conjuntamente con otros acercamientos teóricos (APOS, teoría de la actividad, modelo MTSK, etc.). Toda contribución que resalta este aspecto será bienvenida.

CONTENIDO DE LAS CONTRIBUCIONES

El tema 1 ha acogido 11 contribuciones, discutidas en el grupo de trabajo. Dos de ellas han sido igualmente presentadas en la sección de carteles. A continuación se muestra el programa de las presentaciones.

Fecha	Presentador(es)	Título
Viernes, 14 de diciembre	Alain Kuzniak y Assia Nechache	Sur quelques caractéristiques de la genèse discursive dans les Espaces de Travail Mathématique (plénière)
	Jannick Trunkenwald	L’espace de travail mathématique : une respiration pour analyser la simulation d’une fluctuation d’échantillonnage
	Assia Nechache	Le jeu des paradigmes dans l’ETM probabiliste
	Katherine Machuca Pérez	El trabajo matemático en modelización sobre probabilidades en la formación inicial docente en Chile (affiche)
Sábado, 15 de diciembre	Dominique Laval	L’activité algorithmique comme objet d’apprentissage dans le domaine des statistiques et des probabilités autour d’une simulation aléatoire : une « politique des naissances »
	Laurent Moutet	Le cadre théorique de l’ETM étendu : potentialités en physique et en chimie
	Laurent Vivier	Les trois ETM de la trigonométrie du secondaire français (affiche)

Lunes, 17 de diciembre	Flor Isabel Carrillo Lara	Función por tramos: representaciones, génesis instrumental y plano semiótico-instrumental
	Gisela Camacho Espinoza	Estudio de los procesos cognitivos que intervienen en la detección de subespacios invariantes en transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ mediante el uso del software GeoGebra
	Romina Menares Espinoza	Planos dirigidos en el ETM Personal de profesores
	Jorge Soto-Andrade	En amont de l'ETM : un regard métaphorique

Tabla 1. Presentaciones

LAS APORTACIONES DE LAS CONTRIBUCIONES A LA DISCUSIÓN DEL TEMA 1 Y LAS CUESTIONES PLANTEADAS

Las contribuciones se apoyan en estudios específicos en varios dominios, pero con una preponderancia clara de la probabilidad (Nechache y Parzysz, Laval, Trunkenwald, Menares Espinoza, Machuca Pérez). Además, éstas instalan aperturas sobre cuestiones transversales ligadas al marco de los ETM: los paradigmas, las circulaciones del trabajo matemático a través de los diferentes componentes del modelo, las interacciones entre diferentes ETM asociados a dominios o contenidos trabajados simultáneamente, o a dominios que intervienen como herramientas para la resolución de problemas planteados *a priori* en algún otro dominio, las relaciones entre los ETM de referencia, ETM idóneos (potencial o efectivo) y ETM personales, etc.

El asunto de las interacciones entre diferentes ETM asociados a dominios o contenidos trabajados simultáneamente volvió a aparecer en varias contribuciones : algorítmica y probabilidad (Laval), probabilidad y estadística descriptiva o inferencial (Trunkenwald, Nechache y Parzysz), matemáticas y física, matemáticas y química (Moutet). La dialéctica herramienta-objeto (Douady, 1986) permite a veces aclarar que un dominio (y sus ETM asociados) interviene(n) como *herramienta* en el trabajo cuyo conocimiento aspirado se sitúa en algún otro dominio. También ha sido cuestión de *modelización* en un sentido amplio (Menares Espinoza, quien propone la noción de *planos dirigidos*) cuando el trabajo matemático se proyecta de un dominio a otro, la circulación entre los dos dominios se acercan entonces, fenómeno que Doudy (1986) describe como *juego de marcos*.

Para destacar el desarrollo de un tal trabajo tanto en el tiempo como en el espacio, se ha recurrido a secuencias o fases (cf. por ejemplo Laval, infra), que describen la circulación de un ETM a otro y que pueden ponerse en evidencia por medio de esquemas de tipo «historietas» (ver Derouet, 2017). A veces algunas conexiones pueden formarse instantáneamente de un dominio a otro. En estos casos no se trata de circulaciones propiamente dicho, sino de vínculos; algunos participantes los han descrito como «rayos luminosos instantáneos». Desde el punto de vista del modelo ETM, ¿hay que ver estos vínculos como tomando lugar en un volumen más que en un plano?

¿Cómo se puede explicar la interdependencia entre las tres génesis, semiótica, instrumental, discursiva? Con ese fin, a menudo se ha recurrido a los planos verticales [Sem-Ins], [Sem-Dis] e [Ins-Dis] en las comunicaciones. ¿De la misma manera se puede invocar a modelos con tres planos horizontales, como aquellos propuestos por Moutet, con la noción de *ETM extendido*, o por Miranda, Pluvinage y Adjiage (2016) con su « plano fenomenológico » ? Una tensión entre las dos perspectivas se menifiesta : indudablemente se ve una representación diagramática más sutil, donde se añadirían ciertos elementos, pero ¿qué se puede hacer sin alterar el modelo teórico? ¿Practicar una « vigilancia diagramática », una « vigilancia metafórica » ?

¿Qué ocurre cuando el trabajo, como en el caso que Nechache y Kuzniak cualifican de *completo*, pasa por todos los polos, movilizando todas las génesis? En matemáticas más avanzadas, más teóricas, el polo instrumental tiende a ocupar menos lugar e incluso puede no ser solicitado. ¿Diríamos entonces que el trabajo es « incompleto » ? En Kuzniak et al. (2016), se propone interpretaciones relativamente amplias y abiertas de los tres planos verticales, así como movimientos ascendentes y descendentes que especifican ciertos aspectos de las génesis ; sin embargo también han estado involucrados movimientos oblicuos en el modelo diagramático, y más generalmente se ha tratado de circulaciones en el interior de este modelo.

Algunas de estas circulaciones se apoyan en las nociones de *fibraciones*, tanto « internos » a un ETM específico como « externos » entre ETM paralelos provenientes de dominios distintos (ver la contribución de Jannick Trunkenwald). ¿Cómo se puede circunscribir mejor esta noción de fibración ? ¿Para ello se puede recurrir a otras metáforas, tales como *cuerdas*, o *trenzas* ; o… ? La « visualización » de un experto ha sido invocada como ejemplo en las discusiones. Claramente ésta difiere a la de un novato, siendo mejor conectada al referencial teórico. Desde un punto de vista metacognitivo, se puede considerar (metafóricamente) que la visualización y el referencial en este caso se alinean verticalmente. ¿Se puede pensar que las génesis son entrelazadas, forman trenzas para el experto, y vínculos menos complicados en el caso del novato? Una posible conclusión es : el trabajo es completo cuando las génesis « giran » y forman más que articulaciones simples, como trenzas o lazos.

¿Cómo se puede recuperar el trabajo más o menos « rutinizado », por ejemplo los cálculos aritméticos o algebraicos cuando se dominan? : se trata al mismo tiempo de un trabajo (sintáctico) con signos, y de un trabajo instrumental con un artefacto (simbólico). ¿Estamos en la génesis semiótica o en la génesis instrumental? ¿O tal vez en el plan [Sem-Ins] ? La génesis discursiva también interviene, en la medida en que un tal trabajo se realiza buscando justificaciones (pruebas), o por la necesidad de controlar la validez del trabajo desde el punto de vista matemático.

¿Dónde se puede situar la metáfora, el razonamiento metafórico (Soto-Andrade & Yáñez-Aburto), en el modelo de los ETM ? Se trata de una forma de visualización ? Si la metáfora da lugar a argumentos demostrativos, ¿estará implicada la génesis discursiva ?

BIBLIOGRAFÍA

Derouet, C. (2017). Circulations entre trois domaines mathématiques : les probabilités, la statistique et l'analyse. En I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard & L. Vivier (éds), *Actes du 5e symposium Espaces de Travail Mathématique*, pp. 63-78. University of Western Macedonia, Florina, Grèce.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 7, n°2, pp. 5-31.

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 721-737.

Miranda, V. C., Pluvinage, F. & Adjiage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. En A. Kuzniak, D. Tanguay, D. & I. Elia (eds), Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 809-826.

SYNTHESE DU THEME 1
LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET LES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Denis Tanguay[a], Elizabeth Montoya Delgadillo[b], Assia Nechache[c], Asuman Oktaç[d]

[a]Université du Québec à Montréal, Canada, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, [c]Université de Cergy Pontoise, France,

[d]CINVESTAV, México

DESCRIPTEUR INITIAL DU THÈME

L'objet de ce thème est, d'une part, d'approfondir le modèle théorique défini par les Espaces de Travail Mathématique (ETM) et, d'autre part, de mieux comprendre comment ce modèle théorique permet de décrire, d'analyser et de caractériser le travail mathématique. Les contributions pourront s'appuyer sur des études particulières, par exemple en parachevant les travaux relatifs à la géométrie, à l'analyse ou aux probabilités, ou encore en s'attachant à des domaines « en friche » comme l'algèbre, la cinématique, les mathématiques discrètes... Des réflexions menées à partir de thèmes transversaux, comme la preuve, la modélisation ou l'exploration-expérimentation empirique en mathématiques, peuvent aussi être envisagées.

Plusieurs aspects du modèle théorique peuvent être approfondis dans les contributions au thème 1 :

- La question de l'interdépendance entre les trois genèses — sémiotique, instrumentale, discursive — nécessite de savoir comment décrire chacune et rendre compte de leur imbrication, notamment en faisant appel aux plans verticaux [Sém-Ins], [Sém-Dis] et [Ins-Dis].
- Ces plans verticaux permettent de décrire la circulation à l'intérieur du modèle avec, dans Kuzniak et coll. (2016), une interprétation large et ouverte de ces plans et des mouvements ascendants et descendants, qui précisent certains aspects des genèses ; on peut également penser aux recours à des mouvements obliques.
- C'est en ce sens que la notion de « fibration » (interne) a été proposée pour mieux appréhender la circulation dans l'ETM et plus précisément, les changements d'activation des genèses et des plans verticaux, mais cette notion reste à préciser.
- Le mot « fibration » (externe) a aussi été avancé pour rendre compte des articulations entre différents ETM, quand les tâches mettent en jeu plusieurs domaines ou sous-domaines mathématiques, ou lorsqu'un changement de domaines apparaît au cours du travail mathématique.
- *La question des paradigmes* ; des études récentes ont permis d'identifier, respectivement en analyse et en probabilités, des paradigmes analogues aux

désormais classiques GI, GII et GIII de la géométrie. Alors que chez Kuhn les paradigmes encadrent le travail d'une communauté scientifique constituée d'experts et d'étudiants, ceux qui sont invoqués dans les ETM s'inscrivent, sans y être restreints, dans un contexte scolaire, où différents paradigmes ne sont pas nécessairement en conflit et dont l'articulation est importante pour le travail mathématique. Peut-on mieux préciser les places relatives des domaines et sous-domaines, des théories et des paradigmes ? Par exemple, comment interpréter, par rapport au modèle et au travail mathématique, analyse standard et analyse non standard, géométrie d'Euclide et géométries non euclidiennes, géométries synthétique et analytique (en coordonnées), statistiques descriptives et inférentielles, etc. ?

On a pu également apprécier, dans les précédents symposiums, l'intérêt d'éclairer les études basées sur le modèle des ETM par le recours conjoint à d'autres approches théoriques (APOS, théorie de l'activité, modèle MTSK, etc.). Toute contribution mettant en avant cet aspect méthodologique sera bienvenue.

SUJETS DES CONTRIBUTIONS

Le thème 1 a fait l'objet de 11 contributions, discutées au sein du groupe de travail. Deux parmi celles-ci ont également été présentées dans la section des affiches. Voici le programme des présentations.

Date	Présentateur(s)	Titre
Vendredi 14 décembre	Alain Kuzniak et Assia Nechache	Sur quelques caractéristiques de la genèse discursive dans les Espaces de Travail Mathématique (plénière)
	Jannick Trunkenwald	L'espace de travail mathématique : une respiration pour analyser la simulation d'une fluctuation d'échantillonnage
	Assia Nechache	Le jeu des paradigmes dans l'ETM probabiliste
	Katherine Machuca Pérez	El trabajo matemático en modelización sobre probabilidades en la formación inicial docente en Chile (affiche)
Samedi 15 décembre	Dominique Laval	L'activité algorithmique comme objet d'apprentissage dans le domaine des statistiques et des probabilités autour d'une simulation aléatoire : une « politique des naissances »
	Laurent Moutet	Le cadre théorique de l'ETM étendu : potentialités en physique et en chimie
	Laurent Vivier	Les trois ETM de la trigonométrie du secondaire français (affiche)

Lundi 17 décembre	Flor Isabel Carrillo Lara	Función por tramos: representaciones, génesis instrumental y plano semiótico-instrumental
	Gisela Camacho Espinoza	Estudio de los procesos cognitivos que intervienen en la detección de subespacios invariantes en transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ mediante el uso del software GeoGebra
	Romina Menares Espinoza	Planos dirigidos en el ETM Personal de profesores
	Jorge Soto-Andrade	En amont de l'ETM : un regard métaphorique

Tableau 1. Présentations

LES APPORTS DES CONTRIBUTIONS À LA DISCUSSION DU THÈME 1 ET LES QUESTIONS SOULEVÉES

Les contributions s'appuient sur des études spécifiques dans des domaines variés, avec toutefois une nette prépondérance des probabilités (Nechache et Parzysz, Laval, Trunkenwald, Menares Espinoza, Machuca Pérez). Elles aménagent en outre des ouvertures sur des questions transversales liées au cadre des ETM : les paradigmes, les circulations du travail mathématique à travers les différentes composantes du modèle, les interactions entre différents ETM associés à des domaines ou sujets travaillés concurremment, ou à des domaines qui interviennent comme outils pour la résolution de problèmes posés *a priori* dans un autre domaine, les relations entre les ETM de référence, ETM idoines (visés ou atteints) et ETM personnels, etc.

La question des interactions entre différents ETM associés à des domaines ou sujets travaillés concurremment est revenue dans plusieurs des contributions : algorithmique et probabilités (Laval), probabilités et statistique descriptive ou inférentielle (Trunkenwald, Nechache et Parzysz), mathématiques et physique, mathématiques et chimie (Moutet). La dialectique outil-objet (Douady, 1986) permet parfois de clarifier qu'un domaine (et son ETM associé) intervient comme *outil* dans le travail dont la connaissance visée se situe dans un autre domaine. Il a aussi été question de *modélisation* dans un sens élargi (Menares Espinoza, qui propose la notion de *plans dirigés*) quand le travail mathématique est projeté d'un domaine vers un autre, la circulation entre les deux domaines se rapprochant alors de ce que Douady (1986) décrit comme des *jeux de cadres*.

Pour rendre compte du déroulement d'un tel travail aussi bien dans le temps que dans l'espace, on a recours à des séquences ou phases (cf. par exemple Laval, infra), qui décrivent la circulation d'un ETM à l'autre et qui peuvent être mises en évidence par des schémas de type « bandes-dessinées » (cf. Derouet (2017)). Des connexions peuvent parfois se former instantanément d'un domaine à l'autre. Il ne s'agit pas alors de circulations à proprement parler, mais plutôt de liens, des participants les ont décrits comme des « rayons lumineux instantanés ». Du point de vue du modèle ETM, faut-il voir ces liens comme vivant dans un volume plutôt que dans des plans ?

Comment rendre compte de l'interdépendance entre les trois genèses, sémiotique, instrumentale, discursive ? Les plans verticaux [Sem-Ins], [Sem-Dis] et [Ins-Dis] ont souvent été mis à contribution à cet effet dans les communications. Peut-on également invoquer des modèles à trois plans horizontaux, comme ceux proposés par Moutet, avec la notion d'*ETM étendu*, ou par Miranda, Pluvinage et Adjiage (2016) avec leur « plan phénoménologique » ? Une tension entre deux perspectives s'est manifestée : on veut certainement une représentation diagrammatique plus souple, où certains éléments s'ajouteraient, mais comment faire sans dénaturer le modèle théorique ? Pratiquer une « vigilance diagrammatique », une « vigilance métaphorique » ?

Qu'en est-il lorsque le travail, à l'instar de celui que Nechache et Kuzniak qualifient de *complet*, passe par tous les pôles, mobilise les trois genèses ? En mathématiques plus avancées, plus théoriques, le pôle instrumental a tendance à prendre moins de place et peut même ne pas être sollicité. Dira-t-on pour autant que le travail est « incomplet » ? Dans Kuzniak et coll. (2016), on propose des interprétations relativement larges et ouvertes des trois plans verticaux, et des mouvements ascendants et descendants qui spécifient certains aspects des genèses ; mais il a aussi été question de mouvements obliques dans le modèle diagrammatique, et plus généralement de circulations à l'intérieur de ce modèle.

Certaines de ces circulations se sont appuyées sur les notions de *fibrations*, tant « internes » à un ETM spécifique qu'« externes » entre des ETM parallèles issus de domaines distincts (cf. la contribution de Jannick Trunkenwald). Comment cette notion de fibration peut-elle mieux se circonscrire ? Peut-on pour cela avoir recours à d'autres métaphores, telles celles des *cordes*, ou des *tresses* ; ou… ? La « visualisation » d'un expert a été évoquée à titre d'exemple dans les discussions. Elle diffère certainement de celle d'un novice, étant mieux connectée au référentiel théorique. D'un point de vue métacognitif, on pourrait considérer (métaphoriquement) que la visualisation et le référentiel s'alignent alors à la verticale. Peut-on penser que les genèses sont entrelacées, forment des tresses pour l'expert, et des liens moins complexes chez le novice ? Une conclusion possible : le travail est complet quand les genèses « tournent » et forment plus que de simples articulations, à l'image de tresses ou d'entrelacs.

Comment rendre compte du travail plus ou moins « routinisé », par exemple les calculs arithmétiques ou algébriques quand ils sont maitrisés : ils relèvent à la fois d'un travail (syntaxique) avec les signes, mais on peut aussi considérer que c'est un travail instrumental avec un artéfact (symbolique). Sommes-nous dans la genèse sémiotique ou dans la genèse instrumentale ? Peut-être dans le plan [Sem-Ins] ? La genèse discursive n'intervient-elle pas aussi, dans la mesure où un tel travail est piloté par la recherche de justifications (probantes), ou par le besoin de contrôler la validité du travail du point de vue mathématique.

Où placer la métaphore, le raisonnement métaphorique (Soto-Andrade & Yáñez-Aburto), dans le modèle des ETM ? S'agit-il d'une forme de visualisation ? Si la métaphore donne accès à des arguments probants, relèvera-t-elle de la genèse discursive ?

BIBLIOGRAPHIE

Derouet, C. (2017). Circulations entre trois domaines mathématiques : les probabilités, la statistique et l'analyse. In I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard & L. Vivier (éds), *Actes du 5e symposium Espaces de Travail Mathématique*, pp. 63-78. University of Western Macedonia, Florina, Grèce.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 7, n°2, pp. 5-31.

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 721-737.

Miranda, V. C., Pluvinage, F. & Adjiage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. In A. Kuzniak, D. Tanguay, D. & I. Elia (eds), Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 809-826.

SUR QUELQUES CARACTERISTIQUES DE LA GENESE DISCURSIVE
DANS LES ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE

Alain Kuzniak[a] et Assia Nechache[b]

[a]Université Paris-Diderot et LDAR, France

[b]ESPE de Cergy (Université Cergy Pontoise) et LDAR, France

alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr, assia.nechache@u-cergy.fr

Dans cette contribution nous étudions la fonction exacte de la genèse discursive de la preuve dans le travail mathématique. Nous commençons par établir trois caractéristiques de cette genèse qui dépendent des démarches de la validation, des formes de discours de preuve, mais aussi du rôle du référentiel théorique. Ces caractéristiques sont utilisées comme outil méthodologique pour décrire la fonction de la genèse discursive de la preuve dans le travail mathématique produit par des étudiants confrontés à la réalisation d'une tâche géométrique faisant appel à la modélisation.

Mots clés *: genèse discursive de la preuve, travail mathématique personnel, ETM.*

INTRODUCTION

Dans la théorie des ETM, la genèse discursive occupe une fonction singulière et déterminante dans la réalisation du travail mathématique. En reliant preuve et référentiel théorique, sa fonction première est de garantir la conformité a priori du travail mathématique produit avec les exigences épistémologiques de la discipline. Dans le même temps, il est important de s'assurer de son bon usage et de sa maîtrise chez un sujet agissant. On retrouve ici l'articulation des deux points de vue fondamentaux de la théorie des ETM sur le travail mathématique : épistémologique, en relation avec la conception de la tâche, et cognitif en relation avec sa réalisation par un sujet.

Dans cette communication, nous souhaitons préciser la fonction exacte de la genèse discursive de preuve dans le travail mathématique et aussi expliciter certaines caractéristiques de cette genèse pour analyser plus finement le travail mathématique mis en œuvre dans différents contextes institutionnels et différents domaines mathématiques. Nous commençons par préciser la définition de la genèse discursive et les liens de cette genèse avec la notion de preuve telle qu'elle est présentée dans les différents travaux autour des ETM. Puis, nous utilisons ces éléments pour étudier l'activité d'étudiants confrontés à une tâche en géométrie, le terrain d'Alphonse, que nous avons développée et mise en œuvre dans la formation de futurs enseignants. L'analyse de cette tâche et de son implémentation nous permettra de dégager un certain nombre de caractéristiques de la genèse discursive.

RETOUR SUR LA DEFINITION DE LA GENESE DISCURSIVE DE LA PREUVE

Dans le cadre de la théorie des ETM, le travail mathématique développé par un sujet est analysé à travers les interactions existantes entre les genèses associées aux trois dimensions du modèle à savoir la dimension sémiotique, la dimension instrumentale et la dimension discursive de preuve. Les relations entre ces trois genèses déterminent la nature du travail mathématique. En particulier, le travail sera considéré comme complet lorsque les trois genèses interagissent dans la résolution d'un ensemble de tâches associé à un thème mathématique (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016). A contrario, ce travail peut se révéler confiné dans une seule ou deux dimensions et les notions de plans verticaux introduites par Coutat et Richard (2011) ont permis de décrire ces phénomènes liés à la circulation du travail mathématique au sein de l'ETM.

Le développement du diagramme des ETM comme support méthodologique de l'étude de l'activité de sujets résolvant des tâches mathématiques a conduit à préciser la genèse discursive de la preuve. Dans un premier article sur l'extension du cadre des Espaces de Travail Géométrique aux ETM (Kuzniak, 2011), trois types d'entrées dans le travail sont considérés : une entrée perceptive, une entrée expérimentale et enfin une entrée probatoire associée à la genèse discursive du raisonnement. Par la suite, dans Richard et Kuzniak (2014), celle-dernière est présentée comme un processus discursif qui produit des argumentations et des preuves. L'accent est mis sur la spécificité de la genèse discursive pour établir le lien entre le référentiel théorique dans le plan épistémologique et le processus de preuve dans le plan cognitif :

> La genèse discursive de la preuve utilise les propriétés réunies dans le référentiel théorique pour les mettre au service du raisonnement mathématique et d'une validation non exclusivement iconique, graphique ou instrumentée (Kuzniak et Richard, 2014, p. 4).

Dans leur bilan du symposium ETM4, Tanguay, Kuzniak et Gagatsis (2015) interrogent cette définition en retenant trois caractéristiques.

- Les formes de validation :

  > Le type de validation demandé influe sur la *genèse discursive de la preuve* dont on doit alors se demander où elle commence et finit. Comment considérer, dans le modèle, la simple justification ? (Ibidem, p. 36)

- Le rôle du référentiel et de la théorie en relation avec la cohérence du travail mathématique :

  > Un référentiel, et à terme une théorie ou même un paradigme, peuvent-ils être considérés comme le point d'appui à identifier pour assurer la cohérence, la validité et la vérité, ainsi que la reconnaissance de la généralité des énoncés ? (Ibidem, p. 36)

- Les relations avec les autres genèses et plus spécifiquement avec la genèse sémiotique avec la question du langage :

> Le « discursif » est impliqué dans la genèse sémiotique, avec entre autres les définitions basées sur des propriétés caractéristiques et des representamen chargés de théorie tels les dessins géométriques, considérés in fine comme représentants génériques dans un modèle ensembliste du plan. Comment s'opère alors le passage de la genèse sémiotique à la genèse discursive ? (Ibidem, p. 36)

Plus récemment, Kuzniak, Tanguay et Elia (2016) proposent de considérer que :

> La genèse discursive de la preuve est le processus par lequel les propriétés et les résultats organisés dans le système de référence théorique sont activés afin d'être disponibles pour le raisonnement mathématique et les validations discursives. Il s'agit ici de validations allant au-delà des vérifications graphiques, empiriques ou instrumentales, mais qui pourraient néanmoins être déclenchées par celles-ci. (Ibidem, p. 27, notre traduction)

Ils insistent sur les deux directions possibles de cette genèse entre les plans épistémologiques et cognitifs :

> L'objectif de cette genèse est d'engager un processus bidirectionnel : un discours déductif de preuve soutenu par des propriétés structurées dans le référentiel théorique, correspondant métaphoriquement à un mouvement ascendant le long de l'axe vertical de la genèse discursive; ou inversement, l'identification des propriétés et définitions à inclure dans le référentiel, éventuellement sous-tendue par des traitements instrumentaux, informatiques ou visuels, et ceci vu comme un mouvement descendant dans le modèle. (Ibidem, p. 27).

Cette fois, en plus de la genèse sémiotique, la genèse instrumentale est explicitement concernée. La forte interdépendance entre les trois genèses et la question du tissage des trois genèses pour parvenir à un travail mathématique non seulement complet mais également cohérent relativement aux règles qui fondent les mathématiques, ont conduit les chercheurs s'inscrivant dans le courant de recherche sur le travail mathématique à chercher à caractériser la notion de preuve à la lumière du modèle des ETM.

LA NOTION DE PREUVE DANS LE CADRE DES ETM

Dans Richard et al. (2018), les auteurs proposent d'introduire trois types de preuve, chacun privilégiant un travail dans l'un des plans du diagramme des ETM. C'est ainsi qu'ils associent la preuve mathématique classique, caractérisée comme discursivo-figurale, au plan (Sem-Dis); une preuve mécanique au plan (Sem-Ins) et enfin une preuve algorithmique au plan (Ins-Dis). Ce modèle de preuve est fortement influencé par la nature des artefacts étudiés par les auteurs qui sont souvent des logiciels de géométrie dynamique ou des tutoriels intelligents (QED-Tutrix). Dans le modèle des ETM, la genèse discursive de la preuve que nous souhaitons étudier est à la charnière des plans (Ins-Dis) et (Sem-Dis). Cela renvoie a priori à deux des types de preuve précédents : une preuve algorithmique où les algorithmes apparaissent comme autant d'outils technologiques (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016 ; Kuzniak, 2018) et une preuve discursivo-sémiotique qui va appuyer le discours sur des outils sémiotiques et théoriques.

Dans la suite, nous prendrons aussi appui sur les travaux de Balacheff et plus particulièrement, sur sa communication au séminaire de l'ARDM (Balacheff, 2017) où il revisitait ses travaux sur démonstration, preuve et argumentation. En particulier, nous retenons sa vision de « l'apprentissage de la preuve comme apprentissage d'une pratique discursive ». Cette conception qui place la pratique discursive au centre de l'apprentissage de la preuve entre en résonance avec l'insistance portée par le modèle des ETM sur la genèse discursive de la preuve.

Dans sa communication, Balacheff introduit deux distinctions qui nous semblent fertiles pour structurer les différents contextes du travail mathématique :

- La césure public/privé qui renvoie à la production de la preuve soumise dans un premier temps au seul pilotage de l'étudiant avant sa confrontation à un public extérieur. On retrouve ici la différenciation introduite par Duval, pour caractériser les fonctions d'objectivation (expression privée) et les fonctions de communication (expression pour autrui) associées aux représentations (Duval 1993).
- La césure oral/ écrit avec les possibilités de retour sur les premières affirmations avec un ensemble de, précision et d'ajustements qui participe de l'élaboration progressive d'un discours de preuve standard.

La pratique discursive se construit ainsi par une série d'ajustements et d'adaptations qui reposent sur divers types de contrôles associés à des signes et des référents dans le modèle de Balacheff. Chacun de ces contrôles peut être relié à l'une des composantes du plan épistémologique. Les contrôles sémiotiques sont associés aux signes mis en jeu, les contrôles instrumentaux sont associés aux différents outils technologiques (artefacts matériels ou digitaux, algorithmes) et enfin les contrôles théoriques sont liés au référentiel théorique et aux formes de raisonnement considérés comme valides dans le paradigme retenu dans l'ETM de référence.

LES ELEMENTS CARACTERISTIQUES DE LA GENESE DISCURSIVE DE LA PREUVE

De l'étude précédente (de la section 2), nous retenons trois caractéristiques de cette genèse qui dépendent des démarches de validation, des formes de discours pratiquées et du rôle du référentiel théorique. Ces caractéristiques vont nous servir d'appui pour l'analyse particulière de la genèse discursive de la preuve dans le travail mathématique d'un sujet confronté à des tâches mathématiques.

Démarches de validation et statut de la preuve

Dans le cours de la résolution d'un problème de mathématique, différentes démarches de validation peuvent apparaître : inférence à partir d'une expérience, affirmation à partir d'une identification visuelle, déduction à partir de prémisses bien établies ou non. Cela conduit à examiner si ces démarches ont le statut de preuve dans le travail mathématique attendu. C'est le discours public associé à ces preuves qui en précise le statut exact en assurant le contrôle de leur conformité avec les règles qui charpentent le travail mathématique au sein du paradigme choisi.

Les formes du discours de preuve

Le langage permet la communication publique du travail mathématique produit. Suivant les contextes — exploration, expérimentation, justification —, il peut s'agir de discours heuristique, explicatif, argumentatif, etc.

Il importe de distinguer le discours de preuve des nombreuses activités langagières qui participent du travail mathématique. En effet, tous les discours ne renvoient pas à la preuve et ne doivent pas nécessairement être liés à la genèse discursive (de la preuve). Par exemple, la description, la caractérisation ou la désignation d'un objet peuvent plutôt être comprises comme relevant de la genèse sémiotique, dans un système spécifique de signes appartenant au langage usuel. D'autre part, certains discours peuvent se rapporter à la genèse discursive de la preuve sans constituer un raisonnement organisé déductivement : ce sera le cas, par exemple, de la discussion d'une hypothèse, d'un contre-exemple ou d'une propriété conjecturée, pour autant que les déclarations concernées fassent l'objet de considérations théoriques (Kuzniak, Tanguay et Elia, 2016, §3.2).

Rôle du référentiel théorique

La démonstration privilégie l'appui sur des propriétés et des définitions que nous regroupons dans le référentiel théorique. Mais elle n'est pas la seule forme de preuve à prendre appui sur ce référentiel théorique, ce qui nous conduit à nous interroger sur le contenu effectif de ce référentiel, sur son organisation et aussi sur son usage différencié dans le travail mathématique. Les éléments du référentiel théorique peuvent être convoqués par le sujet pour décrire, caractériser ou désigner un objet mais cela ne signifie pas que le discours employé par le sujet soit celui d'une preuve. Il importe, en effet, de s'assurer non seulement du caractère valable du travail, assuré par la production d'un résultat, mais aussi de son caractère valide par rapport aux règles du paradigme retenu. De fait, la fonction et la nature du référentiel théorique aident à définir les enjeux épistémologiques autour de la preuve et permettent de distinguer ainsi les paradigmes en jeu dans le travail mathématique et de comprendre le rôle de la genèse discursive dans l'élaboration du travail mathématique.

Ces trois caractéristiques de la genèse discursive associées aux types de contrôles constituent les éléments méthodologiques de notre analyse de la fonction de la genèse dans le travail mathématique produit par un sujet. Nous proposons un exemple d'utilisation de ces éléments méthodologiques pour analyser la genèse discursive des étudiants de première année de master MEEF 1er degré[1].

---

1 MEEF 1er degré est un master qui prépare les étudiants au métier de l'enseignement au niveau primaire.

ANALYSE DE LA GENESE DISCURSIVE D'ETUDIANTS DE MASTER : ETUDE D'UN EXEMPLE

La mise en œuvre de la tâche « le terrain d'Alphonse » s'effectue en trois phases. Chacune des trois phases se termine par une mise en commun. Dans la première phase, l'énoncé de la tâche est donné aux étudiants sous la forme d'un texte à lire.

> Alphonse vient juste de revenir d'un voyage dans le Périgord où il a vu un terrain en forme de quadrilatère qui a intéressé sa famille. Il aimerait estimer son aire. Pour cela, durant son voyage, il a mesuré, successivement, les quatre côtés du champ et il a trouvé, approximativement, 300 m, 900 m, 610 m, 440 m. Il a beaucoup de mal à trouver l'aire. Pouvez-vous l'aider en lui indiquant la méthode à suivre ?

Le but de cette phase est de faire émerger le fait qu'il manque des données pour fixer la forme du quadrilatère dont Alphonse souhaite connaître l'aire. Dans une seconde phase, la longueur d'une diagonale (630 m), sans préciser laquelle, est donnée aux étudiants pour finaliser la discussion sur la forme du quadrilatère : convexe ou non convexe, croisé ou non. Enfin, une fois la forme du quadrilatère établie, la troisième phase est consacrée à la résolution complète de la tâche. En fonction de l'avancée des étudiants, le nombre de phases peut être modulé.

Plusieurs méthodes permettent de réaliser cette tâche et mettent en jeu des paradigmes géométriques différents qui dépendront à la fois des attentes institutionnelles et du travail personnel des étudiants. La résolution de cette tâche fait appel à une modélisation et elle nécessite notamment un travail sur les questions d'approximation liée à la mesure. Dans la suite, nous analysons trois productions qui vont nous permettre de préciser le travail mathématique réellement effectué en relation avec les questions de validation, plus particulièrement de comprendre le développement de la genèse discursive de la preuve chez ces étudiants.

Etude du travail géométrique effectif des étudiants

L'étude du travail géométrique des étudiants s'effectue à partir de l'analyse des productions écrites des étudiants récoltées à la fin de chacune des trois phases, mais aussi à partir des dialogues (lors des mises en commun) que nous avons enregistrés et transcrits intégralement. Cette analyse repose sur :

- l'étude de la circulation du travail mathématique au sein des différents plans verticaux ;
- la caractérisation de la fonction de la genèse discursive de la preuve d'un sujet par la mise en évidence : de la démarche de validation, de la forme du discours de preuve employée, de l'usage du référentiel théorique par le sujet ;
- l'identification du paradigme géométrique qui pilote le travail.

Pour comprendre le travail géométrique effectif des étudiants de master dans le contexte précis de la formation des enseignants en France, nous proposons tout d'abord d'étudier le travail géométrique attendu dans le cadre de ce master. Pour ce faire, nous analyserons le travail géométrique effectif d'un professeur intervenant à ce niveau de classe.

Production d'un professeur

Nous avons proposé à un professeur intervenant dans le master MEEF 1[er] degré de mettre en œuvre cette tâche dans sa classe. Ce professeur, que l'on appellera BS, a donc résolu la tâche « le terrain d'Alphonse » avant de la donner à ses étudiants. Ce professeur BS nous a donc communiqué sa production écrite, qui est ainsi un écrit privé. Dans un premier temps, nous avons proposé à ce professeur l'énoncé de la tâche sans l'information portant sur la longueur de l'une des diagonales du quadrilatère. Il constate immédiatement qu'il manque une donnée, celle d'une diagonale.

BS : Il manque la donnée supplémentaire d'une diagonale pour fixer le quadrilatère. Je pense qu'ils (les étudiants) la demanderont car on a fait des exercices semblables sur le parallélogramme.

Une fois en possession de cette longueur (630 m), il commence par construire à la règle et au compas (dimension instrumentale), le quadrilatère pour avoir une idée de sa forme (dimension sémiotique).

BS : Je vais commencer par faire une construction des figures pour voir leur forme. Holà attention, il faut prendre les côtés dans l'ordre successivement, je pense que cela va poser problème.

Il a choisi une échelle faisant correspondre 1 cm sur le dessin à 1 m sur le terrain. Ainsi, le travail du professeur BS commence dans le plan [Sem-Ins] avec l'idée d'avoir une configuration comme support du raisonnement. Le professeur en déduit deux formes possibles du quadrilatère, l'une convexe et l'autre concave (Figure 1). Signalons que le quadrilatère croisé est une forme possible du terrain au vu des données de l'énoncé. Ainsi nous obtenons un terrain ayant deux champs triangulaires. Au regard du contexte de cette tâche nous avons décidé de ne pas envisager cette forme du terrain. Par la suite, le professeur BS propose de commencer par déterminer l'aire du terrain ayant une forme convexe. Son choix s'appuie sur le fait que ses étudiants sauront le faire plus facilement.

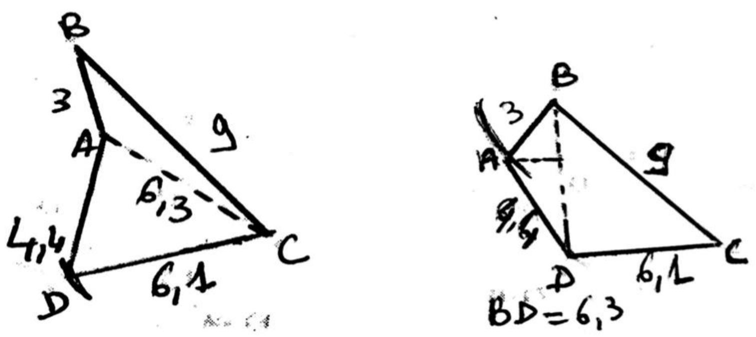


Figure 1 : Les deux formes possibles du quadrilatère

BS : Je vais commencer par calculer l'aire du quadrilatère convexe en utilisant Pythagore, ils (les étudiants) devraient savoir le faire.

Puis, il fait une figure à main levée qui lui sert de support visuel (dimension sémiotique) pour lancer les calculs algébriques.

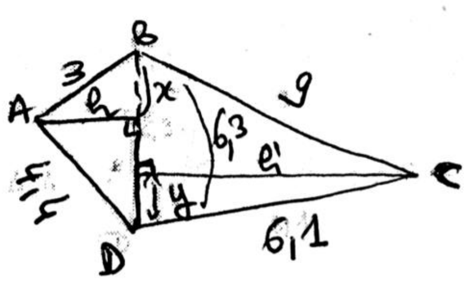


Figure 2 : Le tracé à main levée du professeur

Le travail mathématique de ce professeur est guidé par des propriétés (dimension discursive) qui ne sont pas explicitées ici dans cette version informelle et non publique de la preuve. Il utilise la méthode de triangulation, le calcul de l'aire d'un triangle. Le travail de preuve s'appuie alors sur le calcul algébrique mais avec une forte composante numérique (Figure 3). De plus, dans sa production écrite, on note que le professeur BS fait la différence entre la valeur exacte et la valeur approchée (Figure 3).

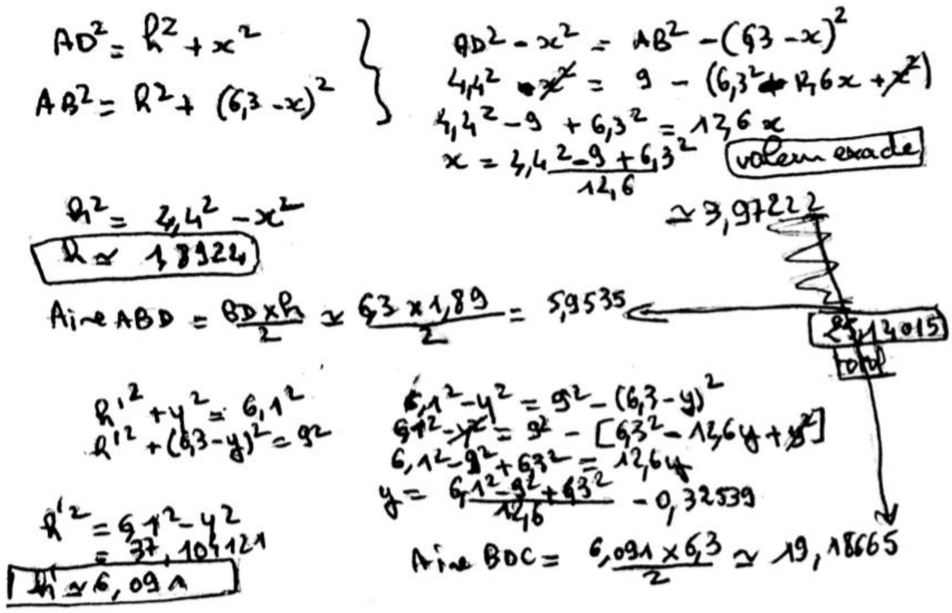


Figure 3 : Production écrite du professeur BS

Cette production nous permet de mieux connaître le travail mathématique attendu au niveau du master MEEF 1er degré et de le résumer.

1. Le travail est initié dans le plan [Sem-Ins] de façon à distinguer les différents cas qui peuvent exister. Ce travail est piloté par des éléments du référentiel

portant sur le quadrilatère : diverses formes du quadrilatère et importance de la diagonale pour fixer la forme du quadrilatère.

2. La technique de triangulation est totalement intégrée dans le travail (toujours dans le plan [Sem-Ins]) mais n'est pas explicitée. Peut-être que cela est dû au fait que le tracé de la diagonale fait apparaître directement les triangles.
3. Le travail bascule ensuite dans le plan [Sem-Dis] associé à un travail algébrique supporté par la figure à main levée (outil sémiotique) et par le théorème de Pythagore, utilisé comme un outil théorique. Cet outil fait basculer la démarche dans un travail de type algébrique faisant appel à des techniques routinisées chez ce professeur (outils technologiques). Le travail prend alors appui sur la dimension instrumentale avec des routines de calculs considérés comme des artefacts symboliques. Cette dimension assure l'avancée du travail en relation avec la dimension discursive (plan [Ins-Dis].

Ce travail, piloté par le fait qu'il s'adresse à des étudiants professeurs d'école, s'inscrit dans le paradigme attendu à ce niveau, qui est un paradigme articulant GI et GII dans la mesure où l'on raisonne sur une figure particulière sans généralisation et sur des valeurs approchées. Dans le même temps, on s'interdit toute mesure effective sur la figure dans ce raisonnement. Ainsi, la démarche de preuve prend appui sur des outils sémiotiques (ici le dessin à main levée) pour identifier perceptivement les propriétés nécessaires pour établir le bon résultat et le justifier. Cette démarche s'appuie également sur des outils technologiques (les techniques de calculs algébriques routinisées) nécessitant une bonne maîtrise. Le discours de preuve employé par ce professeur est valide par rapport aux règles sous-jacente au paradigme articulant GI et GII.

PRESENTATION DE PRODUCTIONS D'ETUDIANTS

La tâche a été donnée aux étudiants et contrairement aux attentes initiales, la phase 1 a suivi un déroulement inattendu du fait que la quasi-totalité des étudiants n'a pas relevé la nécessité d'obtenir des conditions supplémentaires et s'est engagé dans la recherche de l'aire en ajoutant spontanément certaines conditions supplémentaires : le quadrilatère était supposé nécessairement particulier, ou tous les quadrilatères avaient la même aire puisqu'ils avaient le même périmètre et il était donc possible de raisonner sur une figure particulière. Nous présentons ci-dessous le travail de deux étudiants (Ivana et Francis) produit lors de la première phase.

Production d'Ivana

L'étudiante effectue sa construction à l'aide d'une règle graduée et d'un compas en prenant une échelle (identique à celle du professeur BS). La figure obtenue est un quadrilatère (nommé ABCD) ayant un angle droit (en D) (Figure 4). Rappelons que dans l'énoncé de la tâche aucune indication n'est donnée sur les angles du quadrilatère.

Ivana : En fait j'ai construit la figure de manière à avoir un angle droit, et du coup, j'ai calculé l'aire du premier triangle en faisant, euh...

L'étudiante applique la méthode de la triangulation en traçant une des diagonales (ici [AC]) pour décomposer le quadrilatère ABCD en deux triangles ABC (quelconque) et ADC (rectangle en D). Elle calcule l'aire du triangle ADC rectangle en D. Ensuite, elle applique le théorème de Pythagore dans ce même triangle afin d'en déduire la longueur du côté [AC] (Figure 5).

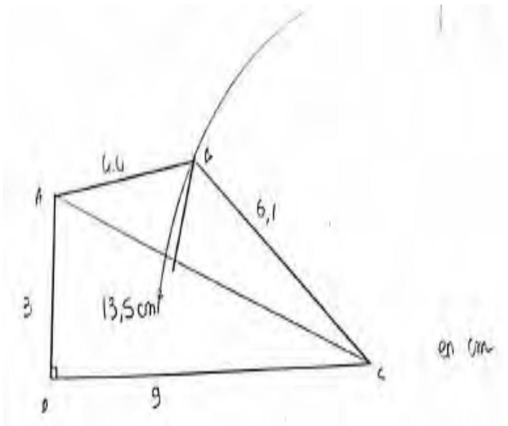


Figure 4 : La figure tracée par Ivana

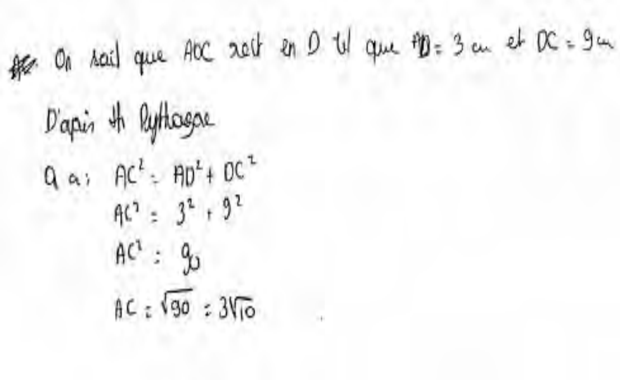


Figure 5 : Production écrite d'Ivana

Elle calcule enfin l'aire du triangle ABC en mesurant à l'aide d'une règle graduée la hauteur issue de B relativement au côté [AC].

L'étudiante explique ensuite oralement qu'elle n'a pas eu le temps d'achever son raisonnement et ainsi elle n'a pas pu déterminer la valeur de l'aire du terrain :

Professeur : Donc tu as trouvé l'aire du triangle rectangle ici ADC.

Ivana : Oui. Pour le deuxième triangle, J'ai calculé avec Pythagore pour avoir l'hypoténuse.

Professeur : Ivana comment as-tu trouvé la longueur AC ?

Ivana : J'ai fait Pythagore, parce que ADC est rectangle en D. Après je n'ai pas eu le temps de finir.

Le professeur questionne alors l'ensemble de la classe sur la légitimité de la méthode d'Ivana. Une étudiante affirme qu'Ivana a considéré que le triangle ADC était rectangle en D alors qu'il n'y a aucune indication dans l'énoncé de la tâche.

Le professeur poursuit le dialogue en se basant sur les différents quadrilatères produits par chacun des étudiants. Ce dialogue a permis de mettre évidence l'usage par Ivana d'un théorème en acte (« deux figures ayant le même périmètre ont également la même aire ») utilisé par Ivana pour élaborer le travail mathématique :

Professeur : Quand je regarde les différents quadrilatères que vous avez dessinés, je ne pense pas que vous ayez dessiné la même chose. Chacun d'entre vous a dessiné un quadrilatère différent des autres.

Ivana : Peu importe comment il est le terrain, l'aire c'est la même car on a les mêmes mesures.

Professeur : Êtes-vous d'accord ?

Certains étudiants : Non

Professeur : Marie pourquoi tu n'es pas d'accord ?

Marie : Parce que, par exemple ce que l'on a ici, on peut calculer le périmètre, par exemple on peut avoir un carré et un rectangle avec le même périmètre mais avec des aires qui diffèrent.

Professeur : Donc, deux figures ayant le même périmètre n'ont pas obligatoirement la même aire. Vous vous rappelez, on l'a vu au premier semestre. Donc Marie contredit ce que tu viens de dire, Ivana.

Le travail mathématique produit par Ivana a été initié dans le plan [Sem-Ins] pour construire un quadrilatère à l'aide des instruments de construction géométrique et en supposant que l'un des angles du quadrilatère est droit. Ensuite, elle décompose le quadrilatère en deux triangles afin de déterminer l'aire de celui-ci comme la somme des aires des deux triangles. Le théorème de Pythagore est par la suite utilisé pour déterminer la longueur d'un côté d'un des deux triangles. Ainsi, le travail mathématique est placé dans le plan [Sem-Dis]. Enfin, Ivana utilise la règle graduée pour mesurer une longueur (de la hauteur du triangle ABC issue de B) et elle applique la formule de l'aire d'un triangle pour déterminer l'aire du triangle ABC. Le travail mathématique s'achève ainsi dans le plan [Ins-Dis]. Par conséquent, le travail mathématique est complet et il est piloté par le paradigme GI. Cependant, ce travail n'est pas conforme « aux règles mathématiques » puisqu'aucun contrôle sur le résultat obtenu n'a été effectué par cette étudiante.

L'analyse du travail mathématique produit par cette étudiante met en évidence une démarche prenant appui sur la figure et les instruments de géométrie, et faisant intervenir la mesure. Cette analyse nous permet de repérer certains éléments caractéristiques de la genèse discursive de preuve de cette étudiante. Ces éléments portent sur un référentiel théorique alimenté de théorèmes en actes erronés tels que « deux figures ayant le même périmètre ont également la même aire ».

En choisissant une échelle, Francis construit à l'aide d'une règle graduée et d'un compas un quadrilatère convexe de sorte qu'il soit un trapèze (Figure 7).

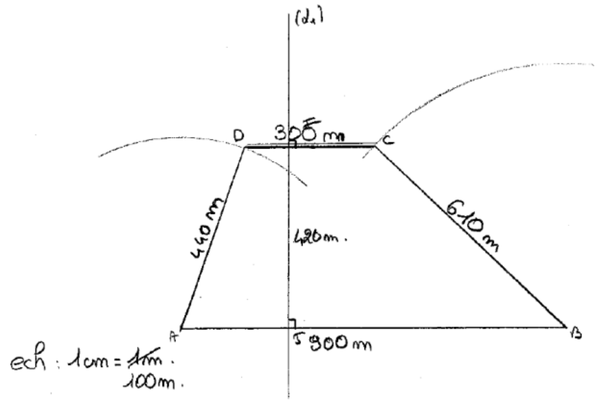


Figure 7 : Construction de Francis

Pour construire le trapèze, il procède par ajustements à l'aide des instruments de construction géométrique (outils technologiques) sur lesquels il exerce un contrôle visuel.

Francis : J'ai pris la grande base 900 m ensuite à partir des deux extrémités des 900 m avec le compas, j'ai fait 410 d'un côté et 610 de chaque côté et après avec la règle j'ai essayé de retrouver les 300 avec les deux arcs de cercle et puis j'ai tracé une perpendiculaire à la grande base.

Francis justifie ensuite à l'aide d'une propriété géométrique que le quadrilatère obtenu à l'issue de la construction est un trapèze.

Francis : Cette droite perpendiculaire à la grande base était aussi perpendiculaire à la petite de 300 m du coup comme deux droites sont perpendiculaires à la même droite, elles sont parallèles entre elles donc cela fait un trapèze.

Pour terminer, Francis mesure à l'aide de la règle graduée la longueur de l'une des hauteurs du trapèze (ici [IJ]) et applique la formule de calcul d'aire d'un trapèze (Figure 8) pour obtenir l'aire recherchée.

On mesure [I J] = 420 m. $I \in [DC]$ et $J \in [AB]$.

$$\mathcal{A} = \frac{300 + 900}{2} \times 420$$

$$\mathcal{A} = \frac{1200}{2} \times 420$$

$$\mathcal{A} = 600 \times 420.$$

Figure 8 : Calcul de l'aire du terrain

Le travail mathématique produit par Francis est initié dans le plan [Sem-Ins] pour construire à l'aide des instruments de construction géométrique (outil technologique) un quadrilatère convexe ayant la forme d'un trapèze. Cette construction est par la suite justifiée à l'aide de la propriété : « deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles » (outil théorique). La formule de calcul d'aire d'un trapèze (outil technologique) est appliquée pour produire le résultat (ici l'aire du terrain). Ainsi le travail mathématique s'achève dans le plan [Ins-Dis]. Ce travail mathématique repose sur des contrôles sémiotiques en relation avec les supports visuels, sur des contrôles instrumentaux associés aux outils technologiques mais aussi sur des formes de raisonnement valides dans le paradigme GI.

CONCLUSION

Dans notre étude sur le rôle de la genèse discursive, nous avons dégagé un certain nombre de caractéristiques utiles pour étudier la genèse discursive de la preuve dans le cadre de l'élaboration du travail mathématique par un sujet confronté à la réalisation d'une tâche. Nous avons établi trois caractéristiques qui dépendent : de la démarche de la validation du sujet, des formes de discours de preuve pratiquées par le sujet et de l'usage du référentiel théorique.

L'analyse de la circulation du travail mathématique de sujets (professeur et étudiants) à travers les plans verticaux a mis en évidence que les discours de preuves produits ne proviennent pas obligatoirement de la dimension discursive. En effet, on constate que ces discours peuvent être produits dans les différents plans verticaux mettant en jeu les outils du plan épistémologique (sémiotique, technologique et théorique). Nous avons donc des discours de preuve qui mettent en relation des outils sémiotiques ou bien des outils technologiques avec les outils théoriques. Mais il existe aussi des discours de preuves qui mettent en lien des outils technologiques (techniques routinisées par exemple) avec des outils sémiotiques sans se référer aux outils théoriques de la dimension discursive, ce type de discours de preuve est qualifié de mécanique par Richard et al. (2018).

Par ailleurs, l'analyse des types de contrôles (sémiotique, instrumentaux et théoriques) associés aux outils du plan épistémologique exercés par un sujet dans l'élaboration de son travail mathématique permet de rendre compte de la validité ou non du discours de preuve produit par rapport aux règles du paradigme retenu.

REFERENCES

Balacheff, N. (2017). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. *Séminaire national de didactique des mathématiques*, Paris, 18 novembre 2017.

Coutat, S. & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 16, 97-126.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 16, 9-24.

Kuzniak, A., Nechache, A. & Drouhard, J.P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. ZDM-Mathematics education, 48-6, 721-737.

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM-Mathematics education,* 48-6, 721-737.

Nechache, A. (2016). La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire. *Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot,* Paris, France.

Tanguay, D., Kuzniak, A. et Gagatsis, A. (2015). Synthèse du Thème 1 – Le travail mathématique et les espaces de travail mathématique. In A. Kuzniak et I. M. Gómez-Chacón, éds., *Actes du 4e symposium Espaces de Travail Mathématique* (ETM 4), pp. 20-38. Universidad Complutense de Madrid, Espagne.

LA SIMULATION D'ECHANTILLONNAGE : UNE SYNERGIE ENTRE LES DOMAINES PROBABILISTE ET STATISTIQUE

Jannick Trunkenwald

Laboratoire Didactique André Revuz, Université Paris-Diderot, France

jannick.trunkenwald@yahoo.fr

Cet article présente une analyse de la nature du travail mathématique attendu par l'institution scolaire dans le cadre de l'approche fréquentiste d'une fluctuation d'échantillonnage. L'attention est portée sur les aspects de découverte du lien entre probabilités et statistiques, tout en prenant en compte l'apport spécifique de l'outil informatique dans cette synergie. Le choix et l'analyse d'une tâche permettent d'enrichir la réflexion. L'outil méthodologique ETM est projeté dans chacun des domaines probabiliste et statistique pour analyser les dimensions instrumentales, sémiotiques et discursives du lien entre l'épistémologique et le cognitif. L'étude permet de mettre en évidence l'existence de fibrations et de cycles d'interactions entre les trois domaines en jeu.

Mots-clés *: Genèse, Simulation, Echantillonnage, Artefact.*

INTRODUCTION

Le programme d'enseignement français s'est enrichi en 2001 de l'approche fréquentiste de la notion de probabilité. Ce principe est désormais abordé au collège en l'absence de tout référentiel théorique… Reproduire à l'identique une grande quantité d'expériences, et exploiter empiriquement ces données, met en relation le domaine des probabilités avec celui des statistiques. La nature répétitive de ce travail coûteux en manipulations motive une automatisation des protocoles expérimentaux par des simulations informatiques. En classe de Seconde, le travail de simulation permettant d'observer la fluctuation d'échantillonnage se situe au cœur de cette problématique. Avec un enjeu lié à l'apprentissage ultérieur de la loi binomiale en classe de Première, puis de la loi normale en classe de Terminale.

Nous souhaitons donc approfondir notre compréhension du travail mathématique de référence attendu par l'institution scolaire du système français lors de l'introduction au niveau Seconde de la simulation d'une fluctuation d'échantillonnage. Nous jugeons pertinent d'exploiter pour cela une *tâche emblématique* (Kuzniak & Nechache, 2016). Le choix d'une telle tâche doit être adapté à notre questionnement portant sur l'approche fréquentiste de la notion de la notion de probabilité.

> En effet, la question du passage de l'observation de quelques cas à l'identification globale du travail mathématiques reste une question fondamentale de la didactique des mathématiques et le fait de bénéficier d'une base bien identifiée de tâches emblématiques permet de fonder plus scientifiquement cette généralisation à partir d'études partielles. (Kuzniak & Nechache, 2016, p. 147)

Notre idée est de mener une analyse a priori de l'ETM idoine potentiel associé à cette tâche emblématique, qui mette en évidence la répartition du travail mathématique au sein des deux domaines probabiliste et statistique, et ceci à travers les trois dimensions *sémiotique, instrumentale,* et *discursive*. Et nous interrogeons le rôle joué par l'informatique dans cette interaction entre les domaines probabiliste et statistique.

Après avoir explicité les attendus de l'institution, nous justifierons donc le choix de notre *tâche emblématique*. Puis nous observerons cette tâche à travers la théorie de l'ETM (Kuzniak, 2011) suivant une analyse double : d'abord en appui sur les travaux de Nechache (2016), puis en injectant notre méthodologie d'analyse de l'ETM décomposant le processus de résolution de la tâche du point de vue des changements successifs de domaines mathématiques.

L'OBJECTIF INITIAL DE L'INSTITUTION ET SON EVOLUTION

L'importance de la simulation d'une fluctuation d'échantillonnage avait été énoncée dans la rubrique « statistiques » du document d'accompagnement des nouveaux programmes de seconde paru en 2001 :

> […] en seconde, l'élève constatera expérimentalement qu'entre deux échantillons, de même taille ou non, les distributions de fréquences fluctuent […] On observera aussi que l'ampleur des fluctuations des distributions de fréquences calculées sur des échantillons de taille n diminue lorsque n augmente. » (Mathématiques classe de seconde applicable à la rentrée 2000, CNDP, 2001, p. 11)

La volonté initiale apparaît focalisée vers l'intervalle de fluctuation (dont l'amplitude diminue), plutôt que vers la mise en évidence prématurée d'une convergence de la fréquence vers la probabilité. Dans l'extrait ci-dessous la notion de probabilité émerge à l'issue d'un travail de simulation de plusieurs grands échantillons :

> Le choix pédagogique est ici d'aller de l'observation vers la conceptualisation et non d'introduire d'abord le langage probabiliste pour constater ensuite que tout se passe comme le prévoit cette théorie. […] Simuler une expérience consistera à produire une liste de résultats que l'on pourra assimiler à un échantillon de cette expérience (voir plus loin la fiche Liste de chiffres au hasard). […] La simulation permettra de disposer d'échantillons de grande taille et d'observer des phénomènes appelant une explication dans le champ des mathématiques. » (Mathématiques classe de seconde applicable à la rentrée 2000, CNDP, 2001, p. 12)

Concernant le travail de simulation nous devons cependant prendre en considération les attentes institutionnelles plus récentes qui ont été exprimées au niveau de la classe de Seconde : le recours mentionné ci-dessus à des tables de nombres aléatoires ayant progressivement été remplacé par un travail informatique sur tableur ou sur éditeur d'algorithme…

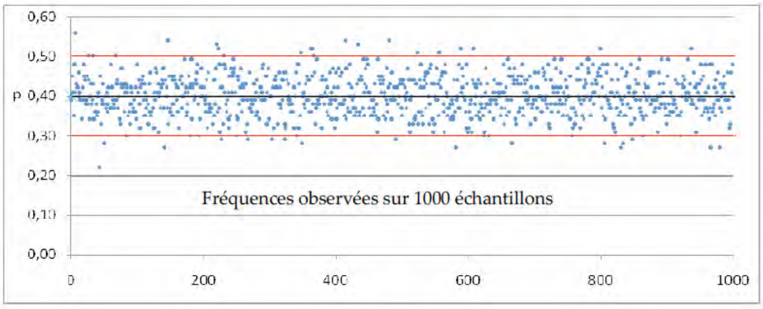


Figure 1 : 1000 échantillons de taille 100 d'un modèle de Bernoulli avec *p*=0,4 (Probabilités et statistiques, 2009, Eduscol, p. 15)

Le document ressource produit en 2009 par la DGESCO présente différents programmes de simulations reliant au niveau Seconde l'approche fréquentiste avec l'algorithmique (anniversaires, sauts de puces, nombre moyen de lancers pour faire apparaitre toutes les facs d'un dé). La question de l'échantillonnage y est explicitement traitée du point de vue simulatoire, à l'aide d'algorithmes, et ceci jusqu'à conjecturer la notion d'intervalle de fluctuation :

> On peut, par expérimentation et simulation, faire observer aux élèves que les échantillons de taille n obtenus à partir d'un modèle de Bernoulli ont, pour environ 95% d'entre eux, des fréquences d'apparition du nombre 1 qui fluctuent dans un intervalle centré en p et d'amplitude $2/\sqrt{n}$. […] Pour p donné, on peut faire calculer les bornes de cet intervalle pour quelques valeurs de n, et remarquer qu'il faut multiplier la taille de l'échantillon par k^2 pour diviser par k l'amplitude de l'intervalle. (Ressources pour la classe de seconde, Probabilités et statistiques, Juin 2009, Eduscol, p. 15-16)

Dans ce document de juin 2009, les recommandations liées au programme de seconde à l'intention des enseignants sont très explicites quant à l'attente d'une véritable démarche de conjecture menant à la formule de l'intervalle de fluctuation.

LE CHOIX D'UNE TACHE MATHEMATIQUE

Comme signalé en introduction, nous allons traiter notre idée générale à travers un exemple particulier de *tâche emblématique*.

> […] une tâche emblématique doit être reconnue dans les ETM de référence et utilisée dans les ETM idoines, mais ces deux conditions ne peuvent être considérées comme suffisantes, car ces tâches doivent aussi permettre de produire un travail mathématique complet et mathématiquement cohérent. (Kuzniak & Nechache, 2016, p. 147)

En plus d'être incitatrice pour la mise en œuvre d'un travail de simulation d'échantillonnage, et d'être potentiellement productrice d'un travail mathématique *complet*, cette tâche doit donc à la fois être reconnue par l'institution et exister dans les manuels ou la classe ordinaire. Enfin, notre objectif initial d'explorer « au mieux » le travail mathématique de référence associé à la simulation d'échantillonnage nous amène à préférer une *tâche emblématique* présentant potentiellement les caractéristiques d'une *tâche riche* (Nechache, 2016, p. 231).

Par ailleurs, une étude didactique portant sur la légitimité du lien attendu entre le modèle et sa simulation informatique a été menée par Parzysz (2011) :

> La simulation informatique peut jouer un rôle important dans l'acquisition de la notion de modèle probabiliste. En effet, la comparaison des procédures de simulation associées à diverses expériences aléatoires, ainsi que des tableaux qu'elles produisent, peut faire apparaître des similitudes conduisant à considérer comme légitime la substitution d'une expérience à une autre et à dégager l'idée d'un schéma d'expérience commun, sur lequel pourra s'élaborer la notion de modèle. (Parzysz, 2011, p.138)

L'informatique pourrait donc jouer un rôle positif sur le plan cognitif pour les modèles probabilistes. De plus, la capacité des machines à mener instantanément une grande quantité de calculs et de comparaisons, justifiait déjà leur emploi pour l'approche fréquentiste. Parzysz évoque cependant une difficulté de « sens » liée à la simulation. L'idée serait d'éviter d'abord l'outil informatique, puis de maintenir une congruence sémantique entre le modèle et sa simulation :

> A propos de simulation, le point essentiel est que ce qui est simulé est un modèle probabiliste, ce qui pose théoriquement problème au début de l'enseignement, avant la mise en place de cette notion. Cette difficulté peut néanmoins être contournée si l'on recourt à des simulations qui présentent une congruence sémantique avec l'expérience réelle et en explicitant les hypothèses probabilistes sous-jacentes. (Parzysz, 2011, p.137)

Nous préférerons donc une tâche pour laquelle le travail de simulation informatique se traduit directement à partir de la description de l'expérience aléatoire. À noter encore que le document ressource de 2009 pour la classe de seconde apporte un cadrage de progression pour l'éveil aux probabilités :

> Les premiers éléments de probabilités ont été abordé au collège essentiellement dans les situations de jeux […] cela a permis une première approche de quelques lois de probabilités qui seront progressivement décontextualisées au lycée en vue de fournir des modèles pour d'autres champs d'applications. (Ressources pour la classe de seconde, Probabilités et statistiques, Juin 2009, Eduscol, p. 4)

Un document de la DEGSCO en 2008 (Ressources pour les classes de 6^e,5^e,4^e, et 3^e du collège, Probabilités au collège, 2008) présentait les paragraphes « Probabilités définies à partir de considérations de symétrie ou de comparaisons » puis « Approche fréquentiste de la probabilité » en expliquant le choix de ce dernier :

> Les situations précédentes ne sont guère pertinentes pour aborder l'interprétation fréquentiste de la probabilité comme fréquence limite. Or cette interprétation est très importante pour les applications des probabilités dans la vie courante. (Ressources pour les classes de collège, Mathématiques, Probabilités, Mars 2008, Eduscol, p. 6)

Après un commentaire portant sur l'approche anglo-saxonne du lancer de punaises, cette partie décrit le jeu du franc-carreau ainsi qu'une situation basée sur le choix aléatoire de deux points sur un segment. Le succès associé à cette deuxième expérience aléatoire correspondant au choix de deux points distants d'au moins la moitié de la longueur du segment initial. Une approche exploitant le tableur y est décrite. La suite traite de la représentation par les arbres et du langage des évènements. En 2016 le nouveau programme a conforté ces orientations :

> Aborder les questions relatives au hasard à partir de problèmes simples […] Faire le lien entre fréquence et probabilités, en constatant matériellement le phénomène de stabilisation des fréquences ou en utilisant un tableur pour simuler une expérience aléatoire. (Maths Cycle 4 Bulletin Officiel Spécial 11, 26-11-2015, p. 8)

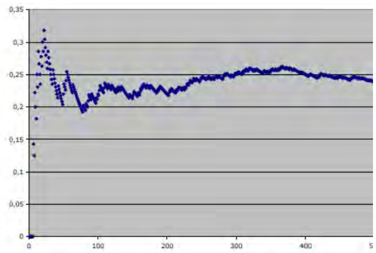
Les activités présentées pour les niveaux du collège dans le document de 2008 sont évidemment représentatives des attendus institutionnels du secondaire. Et notre focus situé au niveau de la classe de Seconde nous permet aussi d'envisager une approche algorithmique de la simulation d'échantillonnage. Nous décidons de porter notre choix sur un problème que nous nommerons « segment moitié » et qui a déjà été identifiée comme une *tâche emblématique* (Kuzniak & Nechache, 2016, p.148).

> Sur un segment S, on prend au hasard deux points A et B. On considère l'évènement " La longueur du segment [AB] est strictement supérieure à la moitié de celle du segment S ". Quelle est la probabilité de cet évènement ? (Ressources pour les classes de 6^{e},5^{e},4^{e}, et 3^{e} du collège, Probabilités au collège, 2008, p. 7)

Cette tâche nous semble en effet répondre à tous les critères attendus pour la présente étude.

UNE ANALYSE DU TRAVAIL MATHEMATIQUE DE REFERENCE

D'après le document ressource de 2008, l'activité du « segment moitié » permet de simuler rapidement un grand nombre de résultats interprétables graphiquement par rapport à l'expérience aléatoire. Les formules apparaissant ci-dessous sont utilisées sur le tableur pour simuler les expériences. La dernière colonne présente à chaque étape la fréquence des succès de l'évènement considéré parmi l'ensemble des expériences aléatoires qui ont précédé, ce qui met en évidence la loi des grands nombres.



	A	B	C	D	E	F
1	Expérience N°	Abscisse de A	Abscisse de B	Distance AB	AB > 0,5	Fréquences
2	1	=ALEA()	=ALEA()	=MAX(B2;C2)-MIN(B2;C2)	=SI(D2>0,5;1;0)	=E2/A2
3	=A2+1	=ALEA()	=ALEA()	=MAX(B3;C3)-MIN(B3;C3)	=SI(D3>0,5;1;0)	=SOMME(E$2:E3)/A3
4	=A3+1	=ALEA()	=ALEA()	=MAX(B4;C4)-MIN(B4;C4)	=SI(D4>0,5;1;0)	=SOMME(E$2:E4)/A4

Figure 2 : Exploitation du tableur avec 500 expériences (Ressources pour les classes de 6e,5e,4e, et 3e du collège, Probabilités au collège, 2008, p. 7)

Afin d'analyser le processus de résolution associé à la tâche choisie nous allons exploiter l'outil méthodologique des Espaces de Travail Mathématique (ETM). Une citation nous permet de repréciser à ce stade l'idée de travail mathématique de référence à l'éclairage de la notion de paradigme :

> Un paradigme s'institue quand une communauté d'individus s'accorde pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines formes de pensée. L'espace de travail "paradigmatique", tel qu'il est défini par cette communauté sera alors appelé ETM de reference. (Kuzniak, Richard, 2014 p. 33)

Et pour nous appuyer sur l'existant en matière didactique, nous allons exploiter l'analyse de Nechache (2016) présentée ci-dessous :

> La première étape requiert l'usage de la dimension discursive, en particulier les éléments du référentiel théorique, afin de construire le modèle numérique. Le travail de validation est placé dans la dimension discursive et est orienté par le paradigme P2. Dans la deuxième étape, le travail de validation est placé dans le plan [Sem-Ins] et orienté par le paradigme P1 afin d'effectuer la simulation, de calculer et de visualiser la fréquence de l'événement D. […] Dans la troisième étape, le travail de validation est placé dans le plan [Ins-Dis] et dirigé par le paradigme P2 afin de conclure sur la valeur de la probabilité en utilisant l'outil théorique la loi des grands nombres. (Nechache, 2016, p. 245)

Nechache (2016) complète une recherche de Parzysz (2011) transposant l'idée de *paradigme* géométrique dans le domaine des probabilités : un premier niveau (P1) pour décrire un protocole reproductible, émettre des hypothèses liées aux résultats, et utiliser des diagrammes, arbres, tableaux… Un second niveau (P2) donne un horizon théorique de type proto-axiomatique (expérience aléatoire, probabilité, évènements ensemblistes, et lois classiques) avec des techniques de calcul intégrées aux registres de représentation. Le dernier niveau (P3) est un système axiomatique et formel de propriétés hiérarchisées de type Kolmogorov.

Nechache a fait une analyse a priori à l'aide de la théorie des ETM, puis a étudié des ETM idoines proposés par les enseignants. Nous apportons ici un commentaire à l'analyse de Nechache pour l'activité du « segment moitié » : La première étape décrite est orientée par le *paradigme* P2 en raison de l'abstraction liée à la traduction de l'expérience aléatoire en termes de tableur, qui lui confère un caractère générique (lié à la loi uniforme). Comme Nechache a réalisé une analyse a priori qui reste focalisée sur l'$\mathrm{ETM}_{\mathrm{Proba}}$, cette restriction de son analyse au domaine des probabilités s'est naturellement traduite par une rupture de *circulation* au sein de l'ETM entre la $1^{\text{ère}}$ étape dans la dimension discursive liée à une modélisation formulée de l'expérience aléatoire, et la $2^{\text{ème}}$ étape dans le plan SEM-INS, liée à une lecture et interprétation graphique de la fluctuation des fréquences obtenues. Cette rupture est due à une *circulation* du travail mathématique qui se produit en dehors de l'$\mathrm{ETM}_{\mathrm{Proba}}$: en effet, le travail correspondant à l'emploi d'une procédure informatique sur tableur pourrait être analysé à partir d'un autre outil théorique nommé *Espace de Travail Algorithmique*, ou ETA (Laval, 2015). De même que pour l'ETM, les différentes dimensions *instrumentale, sémiotique,* et *discursive*, peuvent être activées au sein de l'ETA. Mais Nechache n'entre pas dans de telles considérations car son étude reste focalisée sur le travail proprement probabiliste. Ainsi il est naturel que l'aspect algorithmique du travail mené sur le tableur se ramène à l'usage d'un *artefact* « tableur » du point de vue de l'ETM_{Proba}. Et cela amène Nechache à situer directement la deuxième étape du travail probabiliste dans le plan SEM-INS. Nous l'assimilons à une visualisation de la première ligne sur tableur (liée au protocole et à l'expérience aléatoire), puis à une instrumentalisation de ce nouvel objet devenu outil technologique pour construire une simulation de 500 expériences, puis à une visualisation de la représentation graphique obtenue qui met en évidence un phénomène progressif de type fréquentiste, ce travail expérimental se limitant au niveau de *paradigme* P1. Enfin, la troisième étape décrite par Nechache se situe dans le plan INS-DIS. L'opération consistant à rafraichir de manière répétée les valeurs aléatoires générées par le tableur, fait apparaître autant de graphiques montrant le même phénomène de stabilisation des fréquences. Ce qui instrumentalise un nouvel outil technologique (de type « graphique automatique »). Cette genèse instrumentale permet de comprendre et formuler une conjecture de type « loi des grands nombres ». Ce qui permet d'enrichir le référentiel théorique de l'ETM_{Proba} dans sa dimension discursive et au niveau de paradigme (P2). A noter que Nechache considère en conclusion de son étude que le problème du « segment milieu » est une tâche riche :

> L'intérêt de proposer cette tâche dans un ETM_{Proba} idoine de la classe de 3e est d'observer la manière dont le professeur adapte cette tâche riche et les éventuelles transformations de cette tâche lors de sa mise en œuvre. (Nechache, 2016, p. 246)

En effet, étant donné que nous plaçons notre étude didactique en amont de la mise en place d'une propriété liée à l'intervalle de fluctuation, nous pouvons considérer que les élèves de Seconde disposent du même outillage théorique que les élèves de Troisième de Nechache pour traiter la situation du « segment moitié ». En appui sur les travaux cités de Nechache, et leurs résultats, nous concluons donc que nous avons bien affaire à une tâche riche, incitatrice à une approche de type fréquentiste, et aussi une tâche emblématique (suivant les trois critères attendus). Enfin, nous ajoutons que la situation du « segment moitié » met en œuvre, comme souhaité dans notre étude, une expérience aléatoire présentant une *congruence sémantique* (Parzysz, 2011) avec le travail de simulation informatique : la distance entre deux points choisis au hasard sur le segment [0 ;1] étant simulée avec une formule du type : $|Alea() - Alea()|$.

La recherche de Nechache portait sur la validation en probabilités, ce qui a orienté l'analyse de l'ETM au niveau du domaine probabiliste. Notre réflexion dans cet article se situe plutôt autours de la simulation d'échantillonnage, en prenant davantage en compte le travail mathématique spécifique aux probabilités d'une part, et aux statistiques descriptives d'autre part, avec aussi la question des changements de domaines, et le rôle particulier de l'informatique pour ces interactions.

UNE ETUDE DES FIBRATIONS DANS L'ESPACE DE TRAVAIL

La notion d'*Espace de Travail Mathématique* a été généralisée par Kuzniak (2011) à partir de la notion d'*Espace de Travail Géométrique*, ou ETG (Houdement & Kuzniak, 2006) :

> Aussi il faut bien comprendre que la proposition de structuration de l'ETM qui va suivre passe obligatoirement par une instanciation dans un domaine mathématique déterminé. Autrement dit, plus que la notion générale d'ETM, toute étude didactique suppose la description d'un Espace de Travail pour le domaine abordé. Le cadre des ETM se présente comme une coquille méthodologique sur laquelle il sera possible de s'appuyer pour développer de nouveaux Espaces de Travail spécifiques. (Kuzniak 2011, p. 19)

Cela nous amène à distinguer les domaines des probabilités et des statistiques descriptives, qui sont étudiés séparément tout au long des études secondaires malgré des ressemblances de forme quant aux outils calculatoires employés. Par ailleurs, la dimension instrumentale de l'ETM_{prob}, qui consiste principalement à réaliser et tester des expériences aléatoires, incite à automatiser des procédés permettant la répétition en grand nombre de ces expériences, d'où l'intérêt de la simulation informatique à l'aide d'un générateur pseudo-aléatoire… Ce rôle de l'informatique pour mener un travail de simulation se renforce encore au niveau Seconde où l'algorithmique gagne en importance dans le curriculum. Nous intégrons donc à notre méthodologie un troisième domaine qui est l'algorithmique. Kuzniak et Richard (2014) ont abordé cette question délicate des changements de domaines dans l'ETM :

> Pour harmoniser les notations, ces espaces de travail spécifiques, associés à des domaines d particuliers, seront notes ETM_d, c'est à dire des $ETM_{algebre}$, $ETM_{analyse}$, $ETM_{arithmetique}$,… L'Espace de Travail Mathématique peut être vu comme une mise en réseau des diverses fibres que constituent les ETM_d. La question se pose alors de savoir comment s'organisent la fibration entre espaces ou le feuilletage des plans. Ces interactions entre les domaines sont essentielles pour comprendre le fonctionnement global du travail mathématique et elles forcent en outre la consideration des processus de modélisation dans le cadre des ETM, au-delà des seules questions sémiotiques. (Kuzniak, Richard, 2014, p. 36)

Cette adaptation de l'outil ETM consiste donc à distinguer différentes fibres, où l'on observe les genèses et les circulations de l'ETM tout en se restreignant à ce qui se réalise dans un domaine particulier. Il s'agit d'une projection de l'ETM dans un certain domaine. Concernant les probabilités et les statistiques descriptives, nous notons donc ces deux fibres (ou projections) ETM_{prob} et ETM_{stat}. Et concernant le domaine algorithmique, nous faisons une référence à l'ETA de Laval (2015) :

> En reprenant la structure des *Espaces de Travail Géométrique* (ETG) (…) nous proposons de structurer les ETA à l'intérieur d'un réseau composé d'ensembles d'objets, d'artefacts programmables, et d'un ensemble d'idées théoriques permettant de créer et de justifier les algorithmes. (Laval, 2015, p. 104)

Nous précisons que notre étude n'ira pas jusqu'à décrire les genèses ou la circulation du travail mathématique au sein de l'ETA. Afin d'éviter de nous éloigner du sujet qui nous préoccupe, nous souhaitons en effet réserver un tel niveau de description aux deux domaines des probabilités (ETM_{prob}) et des statistiques (ETM_{stat}) à travers une analyse détaillée du travail mathématique. Cependant, l'ensemble des interactions (ou changements de domaines) entre l'ETM_{prob}, l'ETM_{stat}, et l'ETA nous intéresse. Nous chercherons à analyser le rôle de l'ETA en tant que fibre algorithmique de l'ETM : les algorithmes considérés étant chacun soit un objet d'étude en construction, soit un outil exploité par ailleurs (au sein d'une autre fibre probabiliste ou statistique). Enfin, nous précisons que nous qualifions de fibration le passage d'une fibre de l'ETM à une autre fibre sans changer de dimension. C'est-à-dire qu'une fibration correspond à un changement de domaine sans qu'il y ait circulation du travail mathématique dans un plan vertical de l'ETM. C'est pourquoi nous ne pourrons pas préciser la nature des interactions entre l'ETA et les autres espaces de travail mathématiques en jeu (à savoir s'il s'agit d'une circulation dans un plan vertical ou d'une fibration).

Concernant la tâche choisie, nous présentons donc ci-dessous notre analyse a priori de ce travail mathématique à l'aide d'un tel schéma éclaté de notre ETM suivant ses projections (ou fibres) dans les domaines en jeu pour la tâche considérée dans cet article. Afin d'éviter une surcharge visuelle, nous représentons les trois projections de l'ETM par une vue du dessus. Sachant que le passage à une figure en deux dimensions nous permettra encore de présenter à l'aide de points et de traits mis en gras les différentes genèses Discursive (D), Instrumentale (I), et Sémiotique (S) ainsi que les circulations dans les plans situés entre les axes de ces genèses.

1re conception/exploitation : modèle numérique simulant l'expérience aléatoire.

Genèse instrumentale dans l'ETM_{Prob} pour tester l'expérience aléatoire : L'ETM_{Prob} entre en interaction avec l'ETA pour simuler l'expérience aléatoire à l'aide du générateur pseudo-aléatoire. Pour placer un point au hasard sur [0 ;1] on le modélise par son abscisse avec le générateur *Alea*(). Puis on instrumentalise dans l'ETA l'artefact *Alea*() pour construire la distance entre deux points choisis au hasard sur le segment : |*Alea*() – *Alea*()|.

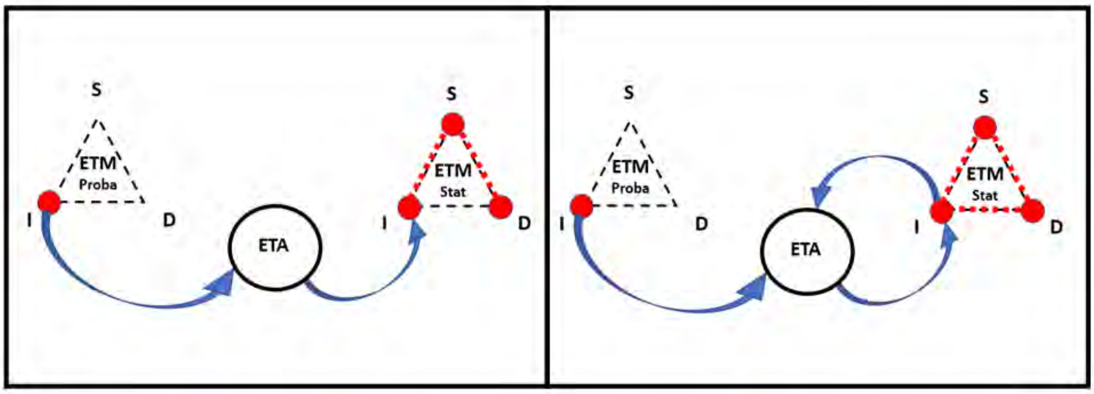


Figure 4 : Diagramme éclaté de l'ETM pour la 1ère conception/exploitation.

L'idée de répéter l'expérience aléatoire en relevant les résultats amène à exécuter plusieurs fois l'instruction |*Alea*() – *Alea*()|, ce qui engendre une interaction de l'ETA vers l'ETM_{Stat} . L'instruction sert d'outil technologique dans une genèse instrumentale de l'ETM_{Stat} pour construire une série de résultats.

Dans l'ETM_{Stat} la dimension sémiotique est activée pour l'idée d'organiser visuellement les données (à partir d'un representamen « dépouillement » et/ou « tableau »), puis la dimension discursive pour l'idée de mobiliser la notion de fréquence (à partir du référentiel) et d'en déduire la fréquence de succès obtenue à l'issue du protocole expérimental. Ces outils du référentiel statistiques sont mobilisés par le plan cognitif pour alimenter la genèse instrumentale (ils n'engendrent pas de nouveauté dans leurs dimensions respectives, donc pas de genèse dans les dimensions S et D de l'ETM_{Stat}).

L'idée algorithmique d'automatiser l'ensemble du processus statistique réactive toutes les dimensions de l'ETM_{Stat} (expérience répétée, gérer les données, notion de fréquence) et engendre une interaction en retour de l'ETM_S vers l'ETA.

2ème conception/exploitation : modèle numérique simulant une fréquence.

L'objet « protocole statistique de simulation d'une fréquence » est repris dans l'ETA en tant qu'outil puis traduit sous la forme d'un objet du type « algorithme / feuille de calcul » confectionné pour simuler le calcul d'une fréquence.

	A	B	C	D
1	Premier point	Deuxième point	Distance	Supérieure à 1/2
2	0,208735038	0,078092793	0,130642245	0
3	0,73001426	0,059318148	0,670696112	1
4	0,014553273	0,973227772	0,9586745	1
5	0,895090907	0,509455168	0,385635739	0
6	0,757449513	0,921324623	0,163875111	0
7	0,582026286	0,373742788	0,208283498	0
8	0,772322473	0,608934617	0,163387856	0
9	0,356394902	0,887696564	0,531301662	1
10	0,401050985	0,759381244	0,358330259	0
11	0,716303478	0,97221226	0,255908783	0
12	0,942323555	0,566686222	0,375637333	0
13	0,12115469	0,318208569	0,197053879	0
14	0,723069047	0,157181089	0,565887958	1
15	0,113045272	0,902286994	0,789241722	1
16	0,685361589	0,27421229	0,411149299	0
17	0,784117151	0,379348643	0,404768508	0
18	0,711982266	0,049246903	0,662735363	1
19	0,485925993	0,902264194	0,416338201	0
20	0,377150075	0,821379848	0,444229773	0
21	0,48132643	0,312372995	0,168953435	0
22			Nombre de succès :	6
23			Fréquence des succès :	0,3

Saisie dans C2 : =Abs(A2-B2)
Saisie dans D2 : =SI(C2>0,5 ;1 ;0)
Manipulation de la souris reproduisant 20 lignes.
Saisie dans D22 : = NB.SI(D2:D21 ;1)
Saisie dans E22 : = D22/20

ALGORITHME SUR ALGOBOX :

```
-n PREND_LA_VALEUR 0
 POUR i ALLANT_DE 1 A 400
   DEBUT_POUR
   SI (abs(random()-random())>0.5) ALORS
      DEBUT_SI
      n PREND_LA_VALEUR n+1
      FIN_SI
   FIN_POUR
-f PREND_LA_VALEUR n/400
```

Figure 5 : Modèle numérique simulant une fréquence au tableur et avec un algorithme (à gauche 20 tests sur Excel et à droite 400 tests sur Algobox)

L'exécution à plusieurs reprises de l'objet « algorithme / feuille de calcul » mène à l'idée « statistique » de collecter les différentes valeurs de fréquences obtenues. Cela engendre une nouvelle interaction de l'ETA vers l'ETM_{Stat}. L'objet « algorithme / feuille de calcul » devient un outil technologique qui engendre une nouvelle genèse instrumentale dans l'ETM_{Stat} pour construire un nouveau protocole expérimental.

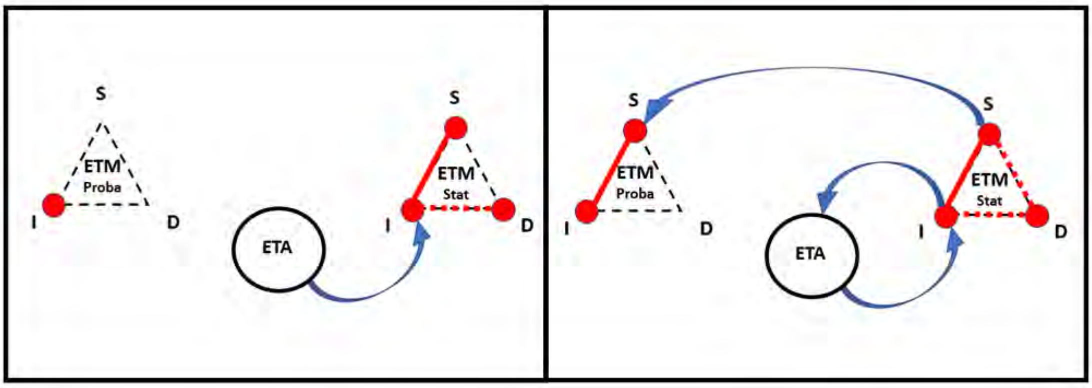


Figure 6 : Diagramme éclaté de l'ETM pour la 2ème conception/exploitation.

La nécessité d'observer les résultats de fréquences engendre un besoin de représenter visuellement ces résultats. La définition du repérage cartésien disponible dans le référentiel est mobilisée depuis du plan cognitif, activant la dimension discursive dans l'ETM_{Stat}.

Le representamen du graphique est exploité dans une genèse sémiotique de l'ETM_{Stat} pour visualiser un nuage des points pour les fréquences simulées. Le lien opéré avec les résultats obtenus renforce la genèse instrumentale et engendre donc alors une première circulation I-S dans l'ETM_{Stat}.

Cette première approche du type « papier » (ou ce qui est similaire par saisie directe de la liste des valeurs obtenues dans un éditeur de graphique), donne un aperçu du nuage de points et de la fluctuation d'échantillonnage. La visualisation statistique du phénomène va entrer en résonnance avec l'idée visualisée d'un phénomène lié au hasard. Ce qui engendre une interaction entre l'ETM_{Stat} et l'ETM_{Prob} du type fibration S-S.

Cette mise en résonnance des deux domaines entraîne un début de genèse sémiotique dans l'ETM_{Prob}. Un lien peut y être établi avec le début de genèse instrumentale lié à l'expérience aléatoire. Une circulation I-S est amorcée dans l'ETM_{Prob} créant un lien entre l'idée d'expérience aléatoire et l'idée de fluctuation d'échantillonnage, et finalisant une « grande boucle » qui valide ce premier niveau de modélisation probabiliste du type graphique pour l'intervalle de fluctuation.

L'idée algorithmique d'automatiser l'ensemble du processus statistique réactive toutes les dimensions de l'ETM_{Stat} (expérience répétée, visualiser les données, notion de repère cartésien) et engendre une interaction en retour de l'ETM_S vers l'ETA.

3ème conception/exploitation : modèle numérique simulant la fluctuation.

L'objet « protocole statistique de construction du nuage de points » est repris dans l'ETA en tant qu'outil puis traduit sous la forme d'un objet du type « algorithme / feuille de calcul » confectionné pour construire automatiquement un nuage de points représentants les fréquences simulées.

L'exécution de l'objet « algorithme/feuille de calcul » consolide les genèses instrumentales et sémiotiques et la circulation I-S qui restent actives dans l'ETM_{Proba}.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Distance	>1/2	Distance	>1/2	Distance	>1/2	Distance	>1/2	Distance	>1/2
2	0,51211143	1	0,25709193	0	0,29944848	0	0,01048671	0	0,42530763	0
3	0,13405479	0	0,04771116	0	0,09079839	0	0,23554753	0	0,19504677	0
4	0,13886784	0	0,49284742	0	0,4911005	0	0,54050838	1	0,46093184	0
5	0,22690971	0	0,08530797	0	0,2531011	0	0,18433491	0	0,16975288	0
6	0,71988493	1	0,70536943	1	0,23533981	0	0,3164412	0	0,39111895	0
7	0,28451633	0	0,13285892	0	0,84301412	1	0,44460198	0	0,09206928	0
8	0,15390678	0	0,50058597	1	0,10695765	0	0,21756739	0	0,48420237	0
9	0,42546995	0	0,09006054	0	0,68635528	1	0,85519483	1	0,40148311	0
10	0,48057345	0	0,27474114	0	0,45169643	0	0,07937586	0	0,37353797	0
11	0,40768676	0	0,84492537	1	0,0691507	0	0,0832931	0	0,09009232	0
12	0,12933542	0	0,22956432	0	0,26411776	0	0,20874249	0	0,69646577	1
13	0,61282426	1	0,14614335	0	0,13941917	0	0,23871152	0	0,53092432	1
14	0,14139885	0	0,31869759	0	0,36389749	0	0,28126304	0	0,54423939	1
15	0,34501509	0	0,58903816	1	0,12642583	0	0,6584547	1	0,10516786	0
16	0,32060273	0	0,93502787	1	0,15011165	0	0,65189501	1	0,48701613	0
17	0,09747428	0	0,6815059	1	0,62686008	1	0,64266412	1	0,7635539	1
18	0,26836883	0	0,78167406	1	0,08609878	0	0,16860636	0	0,71526356	1
19	0,29118337	0	0,33720179	0	0,12888791	0	0,65099025	1	0,09103373	0
20	0,29820522	0	0,09542265	0	0,68186754	1	0,79259376	1	0,73805338	1
21	0,24577506	0	0,53873812	1	0,07612875	0	0,06291268	0	0,15602601	0
22	0,31981463	0	0,01754369	0	0,01852103	0	0,3464028	0	0,0777697	0
23	0,31183502	0	0,21831861	0	0,88945413	1	0,75406364	1	0,52781333	1
24	0,43850649	0	0,65691631	1	0,00688123	0	0,33653346	0	0,30633002	0
25	0,25448835	0	0,47551415	0	0,09922113	0	0,89889202	1	0,44485212	0
26	Nb succès :	3	Nb succès :	9	Nb succès :	5	Nb succès :	9	Nb succès :	7
27	Fréquence :	0,12	Fréquence :	0,36	Fréquence :	0,2	Fréquence :	0,36	Fréquence :	0,28

FEUILLE DE CALCUL SUR EXCEL : Simple manipulation à la souris pour reproduire la feuille de calcul précédente vers la droite.

ALGORITHME SUR ALGOBOX :

```
POUR k ALLANT_DE 1 A 50
  DEBUT_POUR
  n PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A 400
    DEBUT_POUR
    SI (abs(random()-random())>0.5) ALORS
      DEBUT_SI
      n PREND_LA_VALEUR n+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  f PREND_LA_VALEUR n/400
  TRACER_POINT (k,f)
  FIN_POUR
```

Figure 7 : Modèles numériques simulant la fluctuation des fréquences (à gauche sur Excel 5 échantillons de 25 tests et à droite sur Algobox 50 échantillons de 400 tests).

L'exécution à plusieurs reprises de l'objet « algorithme / feuille de calcul » mène aussi à l'idée « statistique » d'observer une régularité dans l'amplitude du nuage de points. Cela engendre une nouvelle interaction de l'ETA vers l'ETM_{Stat} .

L'objet « algorithme / feuille de calcul » devient un outil technologique engendrant une genèse instrumentale dans l'ETM_{Stat} pour construire un nouveau protocole.

La nécessité d'observer l'amplitude globale du nuage engendre un besoin d'écarter des valeurs extrêmes. Le repérage cartésien est exploité en amorçant une genèse discursive de l'ETM_{Stat} pour des tracés horizontaux permettant de raisonner sur un travail d'élaguage. Le representamen du graphique est exploité dans une genèse sémiotique de l'ETM_{Stat} pour visualiser la tendance du nuage des points.

Enfin, des modifications successives dans l'objet-outil « algorithme/feuille de calcul » des paramètres « nombre de tests par échantillon » et « nombre d'échantillons » permettent des conjectures ayant trait à la formule de l'intervalle de fluctuation. Ce travail correspond à des cycles répétés d'interactions entre l'ETM_{Stat} et l'ETA, qui peuvent renforcer à chaque fois les genèses concernées, ainsi que la circulation complète du travail mathématique dans l'ETM_{Stat} : I-S, S-D, et D-I.

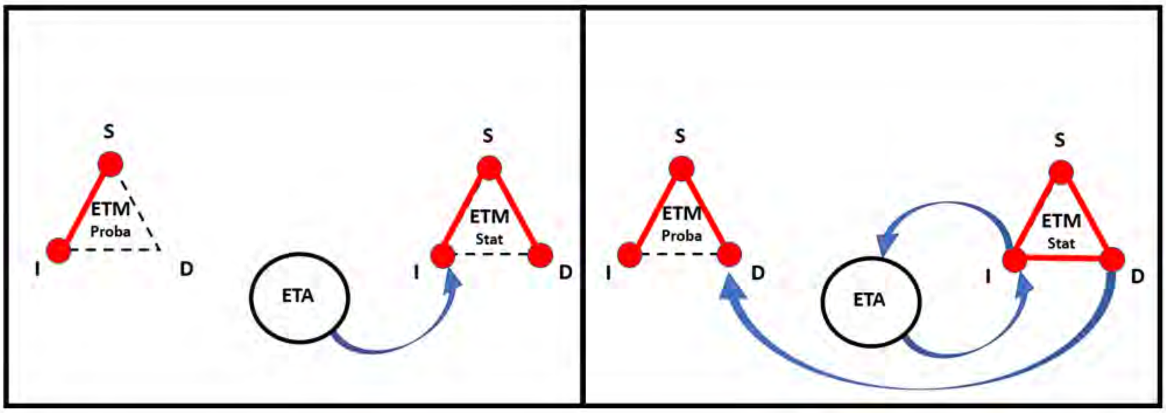


Figure 8 : Diagramme éclaté de l'ETM pour la 3ème conception/exploitation.

Pour ce travail de conjecture liées aux bornes de l'intervalle, le raisonnement inductif engendre une genèse discursive dans l'ETM$_{Stat}$ qui entre en résonnance avec l'idée d'intervalle de fluctuations en tant que phénomène lié au hasard. Cela engendre une interaction entre l'ETM$_{Stat}$ et l'ETM$_{Prob}$ du type fibration D-D.

Cette mise en résonnance des deux domaines entraîne une genèse discursive dans l'ETM$_{Prob}$. Un lien peut à nouveau y être établi avec la genèse sémiotique précédente. Une circulation S-D se produit dans l'ETM$_{Prob}$ créant un lien entre l'idée d'expérience aléatoire et la formule attendue, et finalisant une autre « grande boucle » qui valide ce deuxième niveau de modélisation probabiliste du type formel pour l'intervalle de fluctuation.

CONCLUSION

L'étude dans la partie précédente met en évidence une analyse éclatée par domaine mathématique, du travail de simulation d'un intervalle de fluctuation. Cette analyse met en évidence davantage de genèses, circulations, et interactions, au niveau de l'ETM$_{Stat}$ que pour l'ETM$_{Prob}$. De plus ces deux fibres interagissent avec une troisième qui est l'ETA. Celui-ci reste lié à la dimension instrumentale de l'ETM$_{prob}$ où le modèle numérique fourni joue un rôle d'artefact. Mais pour produire ce modèle numérique, l'ETA entre aussi en interaction avec l'ETM$_{Stat}$ suivant trois cycles au cours desquels l'objet « algorithme/feuille de calcul » réalisé dans l'ETA joue alternativement le rôle de trois artefacts successifs dans la dimension instrumentale de l'ETM$_{Stat}$. La nature de ce lien très fort apparaît à la fois de nature épistémologique (par le rôle « naturel » de l'algorithmique pour traiter des données statistiques) et cognitive par défaut (le référentiel probabiliste n'étant pas encore installé chez les sujets apprenants). Ces sollicitations multiples de l'ETM$_{Stat}$ activent à chaque fois ses trois dimensions (et même une circulation complète lors de son dernier cycle d'interaction avec l'ETA), ce qui apporte un éclairage statistique au phénomène de la fluctuation d'échantillonnage. Et du côté de l'ETM$_{Prob}$ le travail est donc linéaire et progressif : la genèse instrumentale initiée par l'expérience aléatoire, se renforce d'une genèse sémiotique en exploitant visuellement le nuage de points, et enfin se complète d'une genèse discursive lors du travail de conjecture de la formule de l'intervalle de fluctuation. Le travail mathématique n'est pas complet dans l'ETM_{Prob} car il faudrait exploiter la formule de l'intervalle de fluctuation dans une situation ultérieure, avec un travail probabiliste de prédiction ou d'estimation, pour finaliser une circulation D-I et finaliser la circulation dans tous les plans verticaux.

Ces deux niveaux de modélisation probabiliste aboutissent chacun à un phénomène de type fibration entre l'ETM_{Stat} et l'ETM_{Prob} : un passage direct va s'établir entre les deux domaines statistique et probabiliste, suivant une dimension spécifique, et sans circulation dans les plans verticaux de l'ETM. La première fibration de type sémiotique survient lorsqu'un nuage de point est réalisé et correctement interprété (en exploitant le modèle numérique « fréquence »). Cette interprétation étant réalisée dans le domaine statistique (exploitation du graphique pour déceler une amplitude des fluctuations et une tendance centrale) et dans le domaine probabiliste (mise en lien avec l'idée de fluctuation des fréquences autours d'une probabilité). La deuxième fibration de type discursif survient lorsque la conjecture de formule de l'intervalle de fluctuation est établie (en exploitant le modèle numérique « nuage »). Cette conjecture apparait à la fois dans le domaine statistique (propriété déduite du graphique) et dans le domaine probabiliste (signification probabiliste de cette propriété). Une troisième fibration survenant dès le début du travail mathématique entre l'ETM_{Prob} et l'ETA lors de la mise en place du modèle numérique « expérience aléatoire », pourrait être identifiée. Les principales interactions apparaissent entre les domaines en jeu pour simuler un intervalle de fluctuation sont : des fibrations sans circulation, et des interactions de type objet-outil entre l'ETA et l'ETM_{Stat}.

On peut poser l'hypothèse que les fibrations successives qui se produisent entre l'ETM_{Prob} et l'ETM_{Stat} permettent une forme de « transmission » du représentamen et du référentiel statistique vers le representamen et le référentiel probabiliste. Et nous pouvons alors supposer que le transfert cognitif provoqué par les fibrations se répercute sur le plan épistémologique, et que cet enrichissement élève le niveau de paradigme. Le travail complet provoqué dans l'ETM_{Stat} par la phase de conjecture de la formule de l'intervalle, qui permet cette fibration D-D, pourrait être à l'origine d'un accès au paradigme (P2) pour ce qui concerne l'interprétation du phénomène de fluctuation d'échantillonnage…

Enfin, il semblerait que l'ensemble des interactions, genèses, et circulations décrites ici ne sont pas affectées par le choix de l'environnement informatique (tableur ou éditeur d'algorithme). Cette description d'enjeux cognitifs et épistémologiques peut s'avérer utile dans le cadre d'une activité menée à l'aide d'un algorithme fourni ou d'une feuille de calcul préparée d'avance par l'enseignant, afin de repérer les passages délicats pour la compréhension des apprenants. Du point de vue de la théorie des Espaces de Travail Mathématiques, les importantes différences identifiables sur le plan didactique entre un usage du tableur et une saisie d'algorithme se concentrent dans la structure interne de l'ETA. L'étude présente s'est en effet focalisée sur la description du travail mathématique mené à l'interaction des domaines probabiliste et statistique, en analysant l'ETM_{Prob} et l'ETM_{Stat}. Et l'ETA n'a été pris en compte dans cette étude que du point de vue global de ses interactions avec les projections probabilistes et statistique de l'ETM. Une réflexion ou une recherche ultérieure pourrait apporter des précisions cruciales dans ce sens concernant l'ETA… Et une expérimentation adaptée à ces questionnements doit permettre de confronter cette étude à une analyse a posteriori.

REFERENCES

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 1, 175-193.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 16, 9-24.

Kuzniak, A. et Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoine et personnel : existences et usages. *Actes du Cinquième symposium international – ETM de juillet 2016,* 144-155. Florina, Grèce.

Kuzniak, A. et Richard, P. (2014). Espace de travail mathématique. Points de vues et perspectives. *Relime*, 17(4.1), 29-39.

Laval, D. (2015). L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar. *Actes du Quatrième symposium international – ETM de juillet 2014*, 103-115. Madrid, Espagne.

Nechache, A. (2016). La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire. *Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, Paris, France.*

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 16, 127-147.

LE JEU DES PARADIGMES DANS L'ETM PROBABILISTE

Assia Nechache[a] & Bernard Parzysz[b]

[a]Université de Cergy Pontoise, LDAR, France

[b]Université d'Orléans, LDAR, France

assia.nechache@u-cergy.fr, parzysz.bernard@wanadoo.fr

Dans cette communication, nous proposons à partir des travaux de Parzysz (2011) et Nechache (2016), de revisiter la notion de paradigme probabiliste en relation avec les nouveaux programmes du collège, ceux du cycle 4 (11-15 ans), et la question de la validation et de la modélisation. Il s'agit d'étudier plus précisément les validations associées et la place de la modélisation dans chacun des paradigmes. C'est à partir de deux exemples de tâches emblématiques que nous avons étudié les caractéristiques des paradigmes P1 et P2, mais également le jeu entre ces deux paradigmes dans le cadre de l'élaboration du travail mathématique. Cette étude a permis d'une part de redéfinir les paradigmes probabilistes, et d'autre part d'identifier le rôle joué par les outils de la statistique descriptive (SD) dans chacun des paradigmes.

Mots-clés : *Paradigmes probabilistes***,** *Modélisation, Validation.*

INTRODUCTION

Du point de vue épistémologique, l'émergence tardive du concept de probabilité dans l'enseignement est due essentiellement à la question de la validation qui n'est pas bâtie sur des raisonnements de type logico-déductif. Dans le travail de thèse de l'un de nous (Nechache, 2016) le statut de la validation dans l'enseignement secondaire a été particulièrement étudié et les formes de validation pratiquées ont été caractérisées du point de vue des ETM de référence et idoine relatifs au domaine des probabilités et selon l'institution scolaire (collège ou lycée) dans laquelle ces formes de validation sont enseignées. Or ces formes de validation sont très fortement liées aux paradigmes probabilistes privilégiés par l'institution scolaire. À partir des travaux de Houdement et Kuzniak (1999, 2006), Parzysz (2011) a entrepris un travail de transposition de l'idée de paradigme dans le domaine des probabilités qui a été complété (Nechache, 2016), notamment en précisant l'horizon du travail probabiliste :

- *Paradigme P1* : C'est une première modélisation du réel. Les artefacts associés à ce paradigme sont des diagrammes (arbres, tableaux à double entrée, et graphiques statistiques). Cette première notion de probabilité donne un horizon d'expériences et d'émission d'hypothèses concordant avec les résultats de l'expérience.
- *Paradigme P2* : On poursuit la modélisation en définissant l'expérience aléatoire générique et en précisant la notion de probabilité par l'étude de ses propriétés. Celles-ci mettent en jeu des notions et des propriétés ensemblistes mais aussi des modèles classiques (modèles d'urne) et les principales lois de probabilité (binomiale, exponentielle, géométrique, etc.). Les artefacts associés

à ce paradigme sont les techniques de calcul, intégrées dans les modèles ou propres aux divers registres de représentation. À ceux-ci s'ajoutent des outils de la statistique descriptive (SD) ou de la statistique inférentielle (SI). Cette probabilité donne un horizon théorique lié à l'expérience et à la modélisation dans un système proto-axiomatique.

– *Paradigme P3* : Il est fondé sur une axiomatique de type Kolmogorov avec hiérarchisation des propriétés. Il donne un horizon axiomatique et formel.

Dans chacun des paradigmes géométriques définis par Houdement et Kuzniak (1999, 2006), la validation associée est clairement explicitée. Par contre, la validation associée à chacun des paradigmes probabilistes demande à être précisée. Cela suppose d'interroger la manière dont la validation évolue dans ces différents paradigmes probabilistes. Quelles sont les validations associées à chacun des trois paradigmes (Q1) ?

L'un des aspects essentiels de l'enseignement des probabilités dans le secondaire est la place donnée à la modélisation. La mise en lien d'une expérience aléatoire réelle avec la théorie des probabilités conduit à interroger la modélisation en termes de processus. En outre, l'introduction d'outils technologiques (ordinateur, calculatrice) dans l'enseignement des mathématiques, conduit à aborder la question de la modélisation du réel *via* la simulation d'expériences aléatoires. Quelle est la place de la modélisation dans chacun des paradigmes probabilistes (Q2) ?

Un autre aspect du domaine des probabilités dans le secondaire est la place, dans l'ETM, des outils de la statistique descriptive (SD) et de certains registres de représentation (arbres, tableaux), comme outils de résolution de problèmes. Comment les outils de la statistique descriptive et les registres de représentations sont-ils pris en compte dans les paradigmes (Q3) ?

Nous nous proposons de reprendre et de préciser, en relation avec les nouveaux programmes de collège, du cycle 4 (11-15 ans), la notion de paradigme probabiliste (en particulier P1 et P2) et la question de la modélisation, dans le but d'apporter des éléments de réponses aux trois questions précédentes. Pour cela, nous étudions deux tâches emblématiques permettant de mettre en évidence des éléments caractéristiques de P1 et P2, ainsi que les jeux entre ces deux paradigmes dans le travail mathématique (comparables à ceux qui interviennent entre les paradigmes GI et GII, *via* la « figure », dans la résolution des problèmes de géométrie élémentaire). Ceci nous amène, d'une part à une redéfinition des paradigmes, et d'autre part à nous intéresser plus particulièrement au rôle joué par le domaine de la statistique descriptive (SD) dans la mise en place des paradigmes probabilistes (P1 et P2). Nous nous appuierons pour commencer sur deux exemples emblématiques au niveau du cycle 4 (section 1) afin de préciser les paradigmes P1 et P2 (section 2), puis nous envisagerons le cas du lycée (section 3).

ETUDE D'UN EXEMPLE AU CYCLE 4 : LANCER DE DE A SIX FACES

Cas du lancer d'un dé à six faces

C'est un des exemples classiques dans l'enseignement des probabilités, en particulier au début de l'apprentissage (cycle 4). On s'intéresse au point marqué à l'issue du lancer d'un dé cubique ordinaire. En général on s'appuie sur les connaissances extra-scolaires des élèves et on spécifie que le dé est « équilibré », terme par lequel on signifie que les six faces ont la même « chance » d'apparaître (le mot « chance » étant ici pris au sens de « hasard »). À ce stade, on se situe dans P1. Cette hypothèse de « bon sens » peut cependant être en contradiction avec le vécu de l'élève. On constate en effet régulièrement, dans les classes de collège, que certains élèves sont loin d'en être convaincus. À l'appui de leur opinion, certains font intervenir la notion de « chance », pris ici au sens de « hasard *heureux* » (« *ça dépend si on a de la chance ou pas* »), par exemple en évoquant le jeu des petits chevaux, où ils ont parfois attendu longtemps avant d'obtenir le 6 qui leur permettait de démarrer, alors que les chevaux des autres joueurs étaient déjà en train de tourner autour de la piste… Il est par conséquent nécessaire de faire réellement procéder les élèves à des lancers d'un dé, afin de faire évoluer leurs conceptions initiales et valider empiriquement le modèle équiprobable. Il s'agit donc ici d'aborder la notion de probabilité selon une approche de type fréquentiste, consistant à réaliser un grand nombre de lancers et à constater que les six faces ont « à peu près » la même fréquence d'apparition, avec le triple but de valider la procédure instrumentale, de mettre en évidence l'intérêt de la notion de fréquence par rapport à celle d'effectif et de fonder l'opinion des élèves sur une base objective.

Cette approche fréquentiste est un passage sans doute fastidieux (et un peu bruyant !) à mettre en œuvre dans les classes, mais elle s'avère nécessaire à la mise en place d'une modélisation s'appuyant sur le réel et non pas imposée de l'extérieur. Voici – parmi d'autres − une démarche possible à mettre en œuvre lors d'une séance de classe au niveau du cycle 4 :

Dans un premier temps, les élèves travaillent en binômes, l'un(e) lançant le dé à six faces (numérotées de 1 à 6), et l'autre notant le résultat sur une feuille formatée en colonnes par exemple, éventuellement une feuille de tableur, qui déchargera les élèves des calculs d'effectifs et de fréquences (Table1).

Faces / Lancer	1	2	3	4	5	6
1er		X				
2e					X	
3e			X			
4e		X				

Table 1 : un exemple de résultat de quatre lancers

Notons qu'il est souhaitable de s'entourer de précautions, comme le recours à des gobelets en carton comme cornets à dés, non seulement pour éviter d'éventuels litiges entre les élèves, mais aussi pour installer la notion de protocole d'expérience[1] assurant, d'une part qu'à l'intérieur d'un binôme c'est bien la même expérience qui est répétée, et d'autre part que tous les binômes opèrent « dans les mêmes conditions »[2]. Le travail mathématique dans cette première étape est placé dans le plan [Sem-Ins] où il s'agit d'explorer l'expérience aléatoire et d'identifier le protocole expérimental. L'identification de ce protocole est, selon nous, l'un des éléments qui, avec celle des issues de l'expérience, conditionnent le passage de l'expérience réelle à une expérience modélisée située dans le paradigme P1.

Cette expérimentation permettra de constater un certain nombre de faits liés à une expérience aléatoire, comme :

- le fait que l'issue d'une épreuve particulière ne peut être prévue,
- le fait que les issues apparaissent de façon irrégulière (phénomène par ailleurs bien perçu par les élèves),
- le fait qu'un nombre important de répétitions est nécessaire pour pouvoir « dire quelque chose » sur l'expérience.

Cette dernière constatation conduit dans une deuxième étape, à rassembler les résultats obtenus par toute la classe et à totaliser le nombre d'apparitions de chaque chiffre permettant ainsi de constater que, si ces nombres sont différents, les fréquences sont voisines d'une chance sur 6 pour chacun, récusant ainsi l'idée que certains chiffres sont plus difficiles à obtenir que d'autres.

À l'issue de cette deuxième étape, on pourra préciser un certain nombre de conditions nécessaires, faisant ainsi accéder au paradigme P1 :

(1) définir un protocole d'expérience, condition nécessaire pour assurer que celle-ci pourra se répéter dans les mêmes conditions (ici, l'usage d'un gobelet),
(2) identifier les issues qui seront retenues pour être comptabilisées (ici, les chiffres de 1 à 6),
(3) affecter à chacune des issues une « chance » d'apparition (ici, la même pour chacune des issues, c'est-à-dire une chance sur 6).

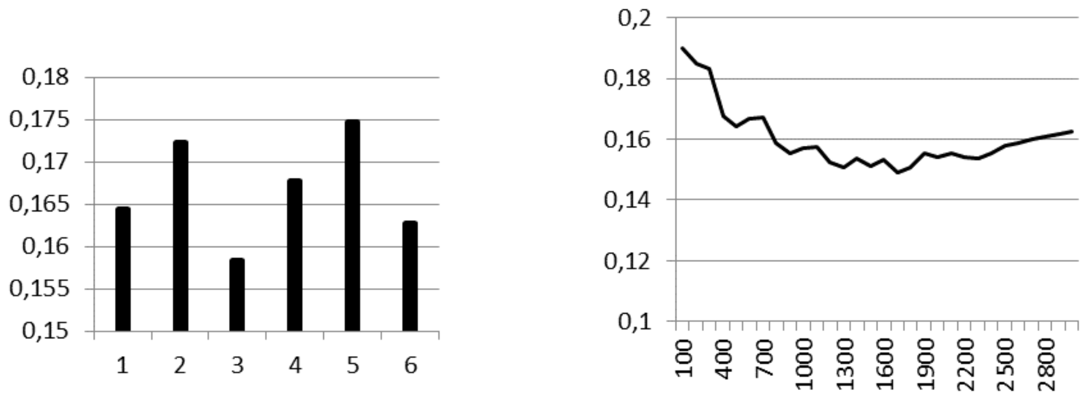
Dans le cas du lancer d'un dé cette dernière condition, qui constitue une première approche de la notion de probabilité, est basée sur les résultats statistiques de l'expérimentation, mais elle ne s'y réduit pas, puisque élèves et enseignants *décident* collectivement, sur la base de l'expérimentation, que toutes les issues ont la même chance de se produire. On aurait pu tout aussi bien décider que les chances

1 En l'occurrence, le protocole d'expérience peut consister à préciser sur quoi doit tomber le dé, comment on le lance (hauteur, utilisation d'un cornet…), dans quels cas le lancer ne sera pas compté comme « bon », etc.
2 On pourra à ce propos évoquer la turricula romaine (Parzysz, 2014).

d'apparition étaient égales aux résultats de l'expérimentation (c'est-à-dire décider de prendre, pour chaque face, sa fréquence d'apparition comme chance de l'obtenir) ; c'est d'ailleurs ce qu'on fait avec des expériences aléatoires pour lesquelles on ne peut recourir à un modèle *a priori*, comme c'est par exemple le cas avec les cauris (Parzysz, 2011). On dispose maintenant d'un premier modèle (modèle « pseudo-concret » (Henry,1999) de l'expérience aléatoire de lancer d'un dé, caractérisé par un protocole d'expérience, une liste d'issues possibles et un résultat consensuel concernant la chance d'apparition de chacune d'entre elles (en l'occurrence, la même pour toutes), résultat d'une décision collective. C'est ce modèle qui constitue le paradigme P1. Il permet de donner une réponse à des questions simples, du type : A-t-on plus de chance d'obtenir un nombre pair ou un nombre impair ? Quelle chance a-t-on d'obtenir plus de 4 ? On manipule ainsi, en tant qu'outils, des « règles » qui deviendront des théorèmes plus tard, lorsqu'on se placera dans un modèle plus sophistiqué (en l'occurrence le paradigme P2). Par exemple, la règle « on obtient la chance d'obtenir plus de 4 en additionnant la chance d'obtenir 5 et la chance d'obtenir 6 » deviendra le théorème « la probabilité de la réunion de deux événements incompatibles est la somme de leurs probabilités », basé sur un résultat de théorie des ensembles.

L'expérimentation a permis de constater qu'un *grand* nombre de répétitions de l'expérience (au moins plusieurs centaines, voire plusieurs milliers) est nécessaire pour se faire une idée de la répartition des fréquences des issues. Des moyens plus efficaces existent pour les obtenir : la fonction *random* de la calculatrice et la fonction *aléa* du tableur de l'ordinateur. Les élèves vont alors être amenés à produire des algorithmes variés, constituant une nouvelle formalisation de l'expérience, issue du protocole expérimental. Notons à ce sujet que la question de la congruence sémantique entre le protocole et l'algorithme, qui peut paraître anecdotique pour l'expert, et en particulier pour l'enseignant, risque de créer un obstacle chez certains élèves ; pour ceux-ci, par exemple, lancer deux dés simultanément et lancer deux fois de suite un même dé ne sont pas la même expérience.

On passe ainsi de l'expérience réelle à l'expérience simulée, et on prend conscience du fait qu'il est nécessaire de disposer d'un modèle de l'expérience pour la simuler. Ainsi, dans cette deuxième étape, le travail mathématique est placé dans le plan [Sem-Ins] pour mettre en œuvre une simulation de l'expérience afin de visualiser et de synthétiser rapidement les observations statistiques sous forme graphique (Figure 1).



A - Répartition des fréquences **B - Evolution de la fréquence de « 6 »**

Figure 1 : Simulation de 3000 lancers d'un dé équilibré

Ceci permet alors de faire les mêmes observations que pour l'expérimentation réelle relativement à l'imprévisibilité, à l'irrégularité et à la stabilisation des fréquences, et contribue ainsi à installer une certaine confiance en l'outil technologique. Il permet aussi de voir que :

- des séries d'épreuves différentes (soit successives, soit réalisées par différents élèves) fournissent des résultats différents ; la simulation se situe donc du côté de la statistique, et non d'une théorie, qui fournirait un résultat unique, indépendant du temps et du lieu ;
- même un très grand nombre de répétitions ne fournit pas *une* réponse, mais on est toujours obligé de *décider*, la différence essentielle étant qu'ici on a recours à une méthode expérimentale et qu'on ne décide qu'*après* avoir observé le phénomène : « ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables » (Bernoulli, 1713). La démarche de modélisation est ainsi clairement apparente, alors que dans l'enseignement des mathématiques elle est le plus souvent occultée, le modèle étant donné *a priori*.

On est alors en mesure de définir « officiellement » le modèle de l'*expérience aléatoire* en tant que triplet constitué d'un *protocole* expérimental et d'une *liste d'issues* auxquelles sont attribuées des *nombres* compris entre 0 et 1 (qu'on peut désormais nommer « probabilités »). En font également partie des règles de calcul qui relèvent du bon sens (voir plus haut), dont la formule de Laplace. C'est sur cette base qu'on va pouvoir plus tard construire un nouveau paradigme, P2, en y incluant notamment des éléments d'une théorie élémentaire des ensembles.

En résumé, faire l'hypothèse d'équiprobabilité consiste de fait à *choisir* un modèle, qu'il est nécessaire de valider. Au niveau du cycle 4, cette validation ne peut être qu'empirique, réalisée *via* une étude statistique (donc dans le paradigme SD).

Le cas de la somme de deux dés à six faces

L'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés cubiques « équilibrés »[3] et à s'intéresser à un type d'événements associés à ce lancer (le plus souvent la somme des points marqués, éventuellement leur produit) est fréquente dans les manuels du cycle 4.

Dans cette expérience, la détermination d'un protocole et la liste des issues ne sont pas difficiles à trouver, le seul problème étant d'associer une probabilité à ces issues, et c'est à lui que nous allons nous intéresser.

Le plus souvent, notamment dans les manuels scolaires (c'est le cas pour Deltamaths, Transmath, lelivrescolaire), on demande à l'élève de remplir un tableau à double entrée (qui est donné) en indiquant dans chacune des 36 cases l'issue correspondante.

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Table 2 : Exemple d'un tableau proposé dans des manuels du cycle 4

La suite immédiate de l'activité ne soulève jamais la question de l'équiprobabilité de ces 36 cases, qui reste totalement implicite :

Quelle chance a-t-il d'obtenir 12 ? un nombre pair ? un multiple de 3 ? (Deltamath, p. 144)
b) Combien y a-t-il d'issues possibles ? c) Quelle est la probabilité que la somme fasse 10 ? (lelivrescolaire, p. 203)

La raison en est, bien sûr, la difficulté de justifier l'équiprobabilité sur l'univers des possibles constitué par les couples de points. Une telle justification n'est possible que dans le paradigme P2, où l'on dispose de la notion d'indépendance stochastique : on a ici deux variables aléatoires X et Y indépendantes, équiréparties sur $[\![1,6]\!]$, et donc $P((X,Y)=(a,b))=P(X=a)\times P(Y=b)$ pour tous a et b de $[\![1,6]\!]$. Mais, au niveau du cycle 4 on est tout juste en train de mettre en place le paradigme P1, et la notion de variable aléatoire n'est pas abordée (elle ne le sera que dans P2).

La démarche de substitution mise en œuvre par l'enseignant suppose, plus ou moins implicitement, que les dés sont discernables, ce qui ne correspond pas à la pratique usuelle : lorsqu'on lance deux dés et qu'on fait la somme des points, on ne s'intéresse pas au point marqué par chacun d'eux. Il s'agit là, en fait, d'un artifice pédagogique

3 Les qualificatifs « bien équilibré », « non pipé », « non truqué », etc. présents dans un énoncé constituent en fait un code indiquant de prendre le modèle équiprobable.

destiné à imposer le modèle classique, à savoir deux dés dont les issues sont équiprobables, et des lancers indépendants. La preuve en est que l'on indique parfois : « *on dispose de deux dés équilibrés, l'un rouge, l'autre vert* » (Transmath, p. 245), ce qui est un peu étrange (ne peut-on pas jouer à ce jeu avec des dés blancs ?) mais présente au moins le mérite de poser le problème[4]. Il en résulte que le travail sur la loi de probabilité des variables X et Y se réduit à la détermination des issues réalisant les événements étudiés (« obtenir la somme de 10 », etc.). Il s'agit de mener des calculs non pas sur l'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, mais sur l'ensemble des valeurs prises par la variable X (i.e $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$). Pour ce faire, il est proposé aux élèves de cycle 4 de construire ou de remplir un tableau (*Cf.* Table 2), de repérer dans le tableau les issues qui réalisent l'événement étudié et de calculer la probabilité de cet événement en utilisant la formule de Laplace.

L'idée de base est, comme l'écrit Laplace, de se ramener à un cas où les événements élémentaires sont équiprobables :

> La théorie des probabilités consiste à réduire tous les événements qui peuvent avoir lieu dans une circonstance donnée, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer parmi ces cas, le nombre de ceux qui sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. (Laplace, 1812, p 178).

Toute la question est donc de déterminer ce que sont ces « cas également possibles ». Pour le lancer de deux dés cubiques, certains élèves pensent que les 11 sommes possibles sont équiprobables, au prétexte qu'on ne peut pas savoir (c'est le « biais d'équiprobabilité » (Gauvrit, 2013). La probabilité d'obtenir une somme de 6, par exemple, est alors de 1/11 (≈ 0,909). Pour évaluer cette solution la simulation sur tableur s'avère utile. Notons qu'elle introduit l'individualisation des dés de façon naturelle, par le fait qu'elle nécessite de « fabriquer » (à l'aide de la fonction *alea* du tableur) le point qui apparaît ; il y a donc congruence sémantique (Parzysz, 2009) entre l'expérience aléatoire et sa simulation.

N° lancer	dé A	dé B	somme
1	6	5	11
2	6	1	7
3	2	2	4
4	5	6	11
5	3	2	5
6	3	5	8

Table 3 : Résultats de la somme des faces supérieurs de dés

La solution d'égale répartition des 11 sommes peut alors être facilement contredite par la mise en évidence de la distribution « triangulaire » (Figure 2)

4 C'est ce que fait le sujet de probabilités du Brevet 2010 pour la Polynésie.

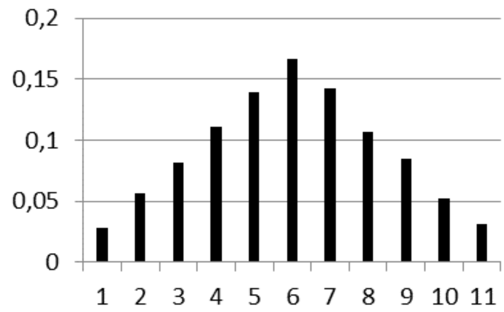


Figure 2 : Distribution de fréquences de la somme sur 5000 lancers

Certains autres élèves tiennent le raisonnement suivant : la somme « 6 » peut s'obtenir de trois façons différentes, par 1 et 5, 2 et 4 ou 3 et 3, et il y a au total 21 cas (qui sont les paires de chiffres) possibles, implicitement supposés équiprobables ; par conséquent, la probabilité d'obtenir un total de 6 est égale à 3/21, soit 1/7 (≈ 0,143).

Au contraire, le fait d'identifier les deux dés (par exemple par leur couleur) conduit à considérer les couples de faces, et non plus les paires ; il y a alors 5 façons d'obtenir la somme 6 (1-5, 2-4, 3-3, 4-2, 5-1) sur 36 couples possibles (supposés équiprobables), d'où la probabilité 5/36 (≈ 0,139).

Les deux modèles conduisent donc à des résultats numériquement proches, et difficilement discriminés par une simulation sur tableur (Figure 3).

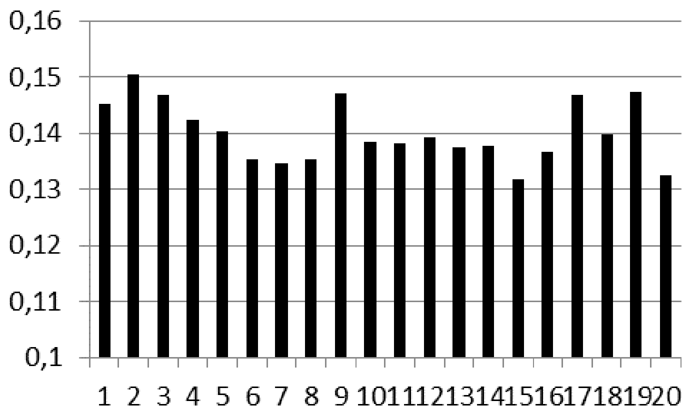


Figure 3 : Fréquence de la somme « 6 » sur 20 simulations de 5000 lancers de deux dés

Un autre moyen que la couleur utilisée par les manuels pour différencier les deux dés est leur forme, en prenant par exemple un dé octaédrique et un dé dodécaédrique (Sésamath, p 169). Dans ce cas, la notion de couple s'introduit naturellement. Il semble donc que cette situation soit plus favorable que celle des dés de même forme pour introduire le modèle de l'espace produit[5]. Le tableau à double entrée différencie les deux dés (table 4, dans le cas d'un dé cubique C et d'un dé tétraédrique T) et les couples s'introduisent naturellement : par exemple, la somme 8 peut s'obtenir par 6 C et 2 T, ou par 5 C et 3 T, ou encore par 4 C et 4 T.

[5] Le même problème apparaît avec le lancer de deux pièces de monnaie, mais dans ce cas l'invalidation des solutions proposées par les élèves est plus facile.

Cube / Tétraèdre	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Table 4 : Résultats de la somme des faces supérieurs de deux dés de différentes formes

L'usage de cet exemple en classe permet de faire prendre conscience aux élèves des issues de l'expérience aléatoire et favorise l'introduction du modèle mathématique (espace produit). Cela facilite alors le passage entre P1 et P2 (chez les élèves et même chez professeur) sans que cela reste implicite. Ce passage entre ces deux paradigmes marque alors le passage du premier niveau de modélisation au deuxième.

VERS UNE PRECISION DES PARADIGMES

L'apprentissage des probabilités évolue à travers plusieurs niveaux de modélisation (qui caractérisent chacun des paradigmes probabilistes), articulés les uns avec les autres. Ainsi, les paradigmes P1 et P2 sont caractérisés comme suit.

Dans le **paradigme P1** : comme nous l'avons vu, on part d'expériences réelles reproductibles, sur lesquelles on opère une première abstraction par rapport à la réalité en précisant :

→ les conditions de la reproductibilité (protocole expérimental),

→ les issues (en nombre fini) qui seront prises en compte,

→ les « chances » qu'elles ont d'apparaître (qui seront finalement formalisées sous le nom de probabilités).

On est également en mesure d'opérer des calculs élémentaires sur ces probabilités, en utilisant quelques règles de bon sens.

On se situe donc, au départ de la démarche, dans le paradigme SD de la statistique descriptive, en s'appuyant sur la notion de fréquence et sur les artefacts graphiques usuels. C'est donc sur le plan [Sem-Ins] qu'on s'appuie pour mettre en place P1. Nous avons donc ici un premier niveau de modélisation, qui est selon nous suffisant pour aborder la simulation d'expériences « simples », c'est-à-dire pour lesquelles les élèves peuvent imaginer un modèle canonique : partant de l'expérience pseudo-concrète (dans P1), on implémente son modèle dans la machine et on fait fonctionner la simulation pour en étudier les effets (dans SD). À ce stade, la validation du modèle s'appuie, soit sur l'expérimentation (réelle ou simulée), soit sur des outils graphiques (tableau, arbre) de P1.

Dans **le paradigme P2** : <u>partant de P1</u>, on <u>définit</u> plus précisément diverses notions (algèbre des événements, variable aléatoire...), on utilise la <u>théorie ensembliste</u> pour étudier les propriétés de la probabilité et on énonce des théorèmes. Comme dans GII, on utilise encore des registres graphiques, mais seulement comme supports du raisonnement. C'est maintenant sur ces théorèmes que s'appuie la recherche de la solution du problème, et la simulation se cantonne à un rôle heuristique ou de contrôle, à l'instar des figures de géométrie élémentaire.

On voit donc qu'il y a un changement de statut des outils de SD et des registres sémiotiques entre P1 et P2 : dans P1, les outils de SD et/ou les registres sémiotiques sont sources de validation alors que, dans P2, ils ne le sont pas car on dispose de validations internes liées aux lois de probabilités. En revanche, en probabilités les programmes précisent que les arbres peuvent être des sources de validation, ce qui s'explique par leur articulation forte dans le plan [Ins-Dis] ou dans le plan [Sem-Dis] de l'ETM, comme c'est le cas dans la résolution de problèmes « concrets » par des méthodes algébriques. En effet, une fois opérée la conversion du registre de la langue naturelle (l'énoncé) à celui de l'arbre pondéré (dans la dimension sémiotique), la résolution consistera en un traitement dans ce dernier registre (dans la dimension instrumentale) ; elle ne peut se réduire à une simple application de règles et nécessite des retours au sens lorsque surgit une difficulté − notamment lors du retournement de l'arbre – pour pouvoir être menée à bien, en revenant à l'expérience aléatoire par la réinterprétation d'éléments spécifiques de l'arbre (plan [Sem-Dis]). En outre, la solution trouvée doit être convertie dans le registre initial (ici, la langue naturelle ici), pour pouvoir être acceptée. Le rôle de l'enseignant est important, tout au moins dans les débuts, pour valoriser, voire solliciter, ces retours au sens.

L'articulation entre les différents paradigmes s'opère donc en prenant appui sur des plans particuliers de l'ETM. Dans le plan [Sem-Ins], le travail de l'exploration de l'expérience aléatoire et la mise en œuvre des expériences (réelles ou simulées) est piloté par le paradigme P1. Dans les plans [Sem-Dis] et [Ins-Dis] où il est question d'interprétation et de valider les résultats. La validation peut prendre appui sur les registres sémiotiques articulés avec des outils théoriques (référentiel théorique). Dans ce cas, les validations sont soumises aux règles d'un paradigme articulant P1 et P2. Dans le cas où ces validations sont basées sur des outils théoriques, alors celles-ci sont soumises aux règles du paradigme P2.

ETUDE DES PARADIGMES PRIVILEGIES DANS LE CURRICULUM AU CYCLE 4 ET AU LYCEE.

Le nouveau programme[6] du cycle 4 (11-15 ans) demande tout d'abord de « faire le lien entre fréquence et probabilité » et précise deux moyens possibles pour y parvenir :

- constater matériellement le phénomène de stabilisation des fréquences,
- utiliser un tableur pour simuler une expérience aléatoire.

6 B.O. spécial n° 11 du 26 novembre 2015.

Ces deux moyens, relevant d'une approche fréquentiste, sont destinés à faire le lien entre SD et P1, en opérant un saut conceptuel entre l'observé et le théorique. Mais ils ne sont pas équivalents, car dans la répétition d'une expérience aléatoire réelle, la notion de probabilité est le point d'arrivée de la démarche, tandis que dans la simulation elle est au départ de la démarche. La simulation ne peut donc intervenir que dans un second temps, lorsque la notion de probabilité a été dégagée expérimentalement ; si elle est utilisée trop tôt, on risque d'escamoter le fait que c'est un modèle d'expérience – et non l'expérience elle-même − qu'on introduit dans la machine. Mais elle permet, une fois qu'un modèle a été décidé, de le tester.

En outre, le cycle 4 amorce le passage vers P2 en demandant d'expliciter certaines propriétés de la probabilité : « la probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1 ; probabilité d'événements certains, impossibles, incompatibles, contraires. »

La place de certains registres sémiotiques, tels que l'arbre pondéré, évolue tout au long du lycée, passant d'un outil sémiotique (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016) à un outil théorique et acquérant le statut de preuve en classe de Terminale, donnant lieu à des « jeux de paradigmes » entre P1 et P2, comme par exemple dans le cas du problème des tests médicaux, où l'on s'intéresse aux « faux positifs » à l'issue d'un test relatif à une maladie peu répandue. La solution au niveau du lycée, encouragée par le programme (« un arbre de probabilité correctement construit et utilisé constitue une preuve ») passe par la construction et le « retournement » d'un arbre. La construction de l'arbre, le traitement de celui-ci et la formulation de la réponse nécessitent des conversions de registres, et impliquent donc une utilisation correcte des définitions et théorèmes de P2.

Au lycée, on se place résolument dans P2, puisqu'en seconde on étudie la « probabilité sur un ensemble fini »[7]. On s'y tiendra tout au long du lycée, en enrichissant l'ETM, notamment en étudiant les lois de probabilité à densité. Ce paradigme permettra l'introduction d'un autre paradigme : celui de la statistique inférentielle (SI).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi*, 4e partie. Traduit du latin par N. Meusnier dans *Jacques Bernoulli et l'Ars conjectandi*. IREM de Rouen (1987).

Gauvrit, N. (2013). A propos du « biais d'équiprobabilité ». *Recherches en Didactique des mathématiques,* 33(2), 163-182.

Henry, M (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM,* (36), 15-34.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

7 B.O. n°30, 23 juillet 2009.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie, de l'école primaire à la formation des maîtres. *Petit x*, 51, 5-21.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J.-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 861-874.

Laplace, P. S. (1812). *Théorie analytique des probabilités*. Courcier, Paris. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8625611h/f7.image

Nechache, A. (2016). La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire. *Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot*, Paris, France.

Parzysz, B. (2014). Comment lancer un dé ? Une réponse antique, la *turricula*. En ligne sur le site Images des Mathématiques SMF/CNRS : http://images.math.cnrs.fr/Comment-lancer-un-de-Une-reponse-antique-la-turricula.html

Parzysz B. (2011). Une générateur aléatoire de pile ou face venu d'ailleurs. *Bulletin de l'APMEP*, 494, 309-314.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* 16, 127-147.

Parzysz, B. 2009. De l'expérience aléatoire au modèle, *via* la simulation. *Repères-IREM*, 74, 91-103.

Parzysz, B. (1997). L'articulation des cadres et des registres en probabilités : le cas des arbres et des tableaux. *Enseigner les probabilités au lycée* (M. Henry, éd.), 225-238, APMEP / ADIREM.

Manuels scolaires du cycle 4 (programme 2016) consultés

Deltamaths 5^{e}. Andrieu et al. Ed. Magnard, Paris.

Dimensions. R. Dos Santos & O. Lassalle, dir. Ed. Hatier, Paris.

lelivrescolaire. M. Solmon, dir. Ed. lelivrescolaire, Lyon.

Sésamath. Ed. Magnard, Paris.

Transmath. J. Malaval, dir. Ed. Nathan, Paris.

L'ACTIVITE ALGORITHMIQUE COMME OBJET D'APPRENTISSAGE DANS LE DOMAINE DES STATISTIQUES ET DES PROBABILITES AUTOUR D'UNE SIMULATION ALEATOIRE : UNE « *POLITIQUE DES NAISSANCES* »

Dominique Laval

LDAR, Université Cergy-Pontoise, ESPE, France

dominique.laval@u-cergy.fr

Poursuivant la spécification d'un cadre théorique sur les Espaces de Travail Algorithmique (ETA), nous présentons une ingénierie didactique sur l'introduction de la loi géométrique tronquée, expérimentée au cours des deux premières années des lycées français. Dans le domaine des probabilités et de l'algorithmique, nous étudions quels espaces personnels se construisent chez l'élève selon son niveau scolaire, ainsi que les articulations entre Espaces de Travail Algorithmique et Espaces de Travail Mathématique spécifique.

Mots-clés : *Algorithme, structure alternative, structure répétitive, variable informatique, loi géométrique tronquée, moyenne, espérance, variable aléatoire, fréquence, Espace de Travail Algorithmique, Espace de Travail Mathématique spécifique, cycle de modélisation.*

INTRODUCTION

Cet article s'appuie sur une étude de recherche doctorale réalisée par Laval (2018). Nous nous interrogeons sur le développement d'une ingénierie didactique qui impliquerait la programmation informatique, nommée aussi codage ou algorithmique, dans les domaines des probabilités et des statistiques enseignés dans les lycées français.

Les programmes scolaires des trois années scolaires (Grades 10 à 12) des lycées français insistent sur une contribution potentielle de travaux sur les algorithmes à la compréhension mathématique, soulevant la question des articulations entre domaines distincts dans l'activité des élèves. Pour nous, une ingénierie de ce type, en lien avec la conception et l'utilisation d'algorithmes implémentables dans un environnement algorithmique, conduit les élèves à conceptualiser de nouvelles notions mathématiques. En tant que chercheur, notre motivation est qu'un cadre théorique approprié est nécessaire pour mener les analyses des travaux effectués par les élèves.

Enseignement de l'algorithmique au lycée et choix des domaines mathématiques

Depuis 2009, un enseignement transversal de l'algorithmique est introduit au lycée, avec l'objectif de fournir les compétences de base dans ce domaine aux élèves, quel que soit le domaine mathématique dans lequel il est utilisé. Dans le cadre de cet article, nous faisons le choix de prendre le domaine des probabilités-statistiques. Les probabilités enseignées au lycée, associées aux statistiques, constituent un domaine où les phénomènes aléatoires issus de situations extra-mathématiques jouent un rôle fondamental. Pour cela, les programmes scolaires des lycées français insistent sur une approche fréquentiste basée sur l'observation de fréquences relatives de caractères représentatifs de ces phénomènes. L'hypothèse est que cela peut aider l'élève à la compréhension de la notion de probabilité d'un événement, ainsi qu'à l'observation de moyennes statistiques préparant l'introduction de la notion d'espérance d'une variable aléatoire (Parzysz, 2009). Par ailleurs, la simulation d'un phénomène aléatoire issu de situations extra-mathématiques suppose une modélisation de cette situation. Le modèle ainsi obtenu peut alors être mis à profit pour fonder le calcul de probabilités (Kiet, 2015).

Présentation de la tâche demandée aux élèves

Nous expérimentons dans une classe de Seconde (Grade 10) et une classe de Première Scientifique (Grade 11) une **politique des naissances** (Figure 1) permettant d'introduire la **loi géométrique tronquée**.

Afin de limiter le nombre de garçons, les dirigeants d'un pays imaginaire décident de la politique nataliste suivante :

- *Chaque famille a au maximum 4 enfants ;*
- *Chaque famille arrête d'avoir des enfants après la naissance d'un garçon.*

On considère que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille ou un garçon et que, pour chaque couple de parents, le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents. On se demande si ce dispositif a une incidence sur la proportion de garçons dans la population.

Figure 1 : Politique des naissances (Laval, 2018)

Nous rappelons que la loi géométrique tronquée de paramètres n et p, où n est un nombre entier naturel non nul et p un nombre réel compris entre 0 et 1, est la loi de probabilité donnant le nombre d'épreuves indépendantes de Bernoulli nécessaires à la réalisation d'un premier succès. De même, nous avons les égalités suivantes : $p(\{0\})=(1-p)^n$ et $p(\{k\})=p\times(1-p)^{k-1}$, pour $k \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$.

DEVELOPPEMENTS THEORIQUES ET QUESTIONS

Classiquement, les tâches mathématiques associées à plusieurs domaines sont analysées en considérant que les entités engagées dans ces tâches, apparaissent sous différents registres sémiotique, instrumental, et discursif (Lagrange et Laval, 2018). Dans le cas du registre sémiotique, nous nous référons aux travaux de Duval (1993) sur les *multi-représentations*. Selon Duval (1993),

> there is no other way of gaining access to the mathematical objects but to produce some semiotic presentations. [...] There is no true understanding in mathematics for students

> who do not incorporate into their cognitive architecture the various registers of semiotic representations used to do mathematics.

D'autres travaux de recherches axés sur certains de ces registres ont été proposés, notamment ceux de Douady (1996) sur les *jeux de cadres* et la *dialectique outil-objet*, où l'objectif est de donner du sens aux activités de coordination dans différents domaines mathématiques. De même, à travers la mise à disposition de l'élève d'artefacts technologiques, il est important de comprendre le processus d'appropriation de ces artefacts et les usages pédagogiques qui en résultent. Pour cela, l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), développée et mobilisée dans le champ de l'ergonomie, aide à décrire finement les usages et le processus d'appropriation de ces artefacts pour enseigner et apprendre des mathématiques dans la durée.

Cependant, certains chercheurs, comme Lagrange (2005) ou Laval (2018), insistent sur le développement indissociable des connaissances liées à l'instrument et des connaissances en mathématiques dans une genèse instrumentale. Ceci est important, sinon une approche instrumentale ne serait qu'un cadre psychologique avec peu d'apports pour l'enseignement des mathématiques en classe.

Forts de ces constats, nous partons de l'hypothèse que le croisement des connaissances liées à l'instrumentalisation et celles liées aux mathématiques, ainsi que la relation entre les signes induits par l'instrument et les signes mathématiques, peuvent être obtenus en coordonnant l'activité dans plusieurs domaines. Nous nous posons alors la question du choix d'un cadre théorique qui donnerait du sens au travail de l'élève lors d'une activité impliquant plusieurs domaines, en tenant compte de la dimension sémiotique mais aussi de l'utilisation des instruments et des contenus, et des dimensions discursives propres à chaque domaine. Pour cela, nous partons de l'hypothèse qu'un cadre théorique travaillant sur les articulations entre *Espaces de Travail Mathématique spécifique* (ETM_s) (Kuzniak et Richard, 2014 et Tanguay, 2015) et *Espaces de Travail Algorithmique* (ETA) (Laval, 2018) permet d'étudier les différentes genèses des representamen et des processus, du point de vue des ETM_s et des ETA personnels de l'élève, et d'aborder les articulations entre des domaines mathématiques et le domaine de l'algorithmique en lien avec la modélisation. Nous présentons brièvement ce cadre théorique dans la section suivante, en tenant compte que des étapes de modélisation peuvent être nécessaires de la part de l'élève. Pour cela, nous nous appuyons sur les *cycles de modélisation* (Blum & Leiss, 2005).

Ainsi, la question de recherche est de savoir comment ce cadre peut nous être utile pour analyser le travail effectué par l'élève dans les domaines algorithmique et mathématique. En effet, lors de la mise en place du travail sur la **politique des naissances**, l'élève peut, à l'aide d'une approche fréquentiste d'une simulation aléatoire associée à la conception d'algorithmes implémentables dans un environnement algorithmique, approcher la notion d'espérance ou de moyenne théorique sans pour autant en comprendre le réel sens, qui est abordé lors de l'approche probabiliste.

LES ESPACES DE TRAVAIL ALGORITHMIQUE

Nous situant dans la continuité des travaux de Houdement et Kuzniak (2006) sur les *Espaces de Travail Géométrique*, et de Kuzniak et Richard (2014) sur les *Espaces de Travail Mathématique* (ETM), nous construisons les ETA (Laval, 2018), composés de deux organisations.

Une première organisation est constituée d'un plan épistémologique constitué d'un « ensemble d'objets » associé au support matériel, d'un *ensemble d'artefacts programmables* et d'un *ensemble d'idées théoriques*. Cela permet,

> de créer et de justifier les algorithmes comme objets pour l'exécution par des artefacts programmable (Laval, 2018, p. 87)

Une seconde organisation résulte du fait que l'ouverture sur le plan cognitif des ETA se construit en interaction avec le niveau épistémologique et ses composantes (Figure 2). Ce second niveau des ETA est *centré sur le sujet vu comme un sujet cognitif* (Laval, 2018). Cette ouverture sur le champ cognitif existe

> en étroite relation avec les composantes du niveau épistémologique et, pour rester dans un cadre didactique, il est possible d'adapter l'approche sémiotique de Duval. (Laval, 2018, p. 87)

De Duval (2006), nous adoptons pour l'activité algorithmique l'idée de trois processus cognitifs. Un *processus de visualisation* (Kuzniak & Richard, 2014) qui est en relation avec la représentation de l'algorithme et le support matériel, un *processus de construction* (Kuzniak & Richard, 2014) qui est déterminé par les langages et les instruments utilisés comme les organigrammes, le langage « naturel », un langage « pseudo-code », un langage de programmation, des environnements algorithmiques, … et un *processus discursif* (Kuzniak & Richard, 2014) qui

> permet d'étudier la terminaison, la correction, l'efficacité et la complexité de l'algorithme, mais aussi produit des argumentations ainsi que des preuves. (Laval, 2018, p. 90)

De plus, afin d'établir le lien entre une mathématisation de situations épurées et précisées, issues du monde réel, et l'élaboration de modèles algorithmiques associés à ces situations, nous choisissons le *cycle de modélisation* (Blum & Leiss, 2005) qui prend la forme d'un cercle de résolution de problèmes (Figure 3). Ainsi, en partant d'une situation du monde réel, épurée et précisée, il est possible de formuler un modèle construit à l'aide d'algorithme, qui passerait par l'élaboration d'un modèle mathématique, afin d'effectuer un traitement mathématique avec production de résultats. Les résultats obtenus sont alors suivis d'une interprétation en fonction de la situation réelle d'origine et enfin, d'une validation du modèle en fonction de la pertinence des résultats.

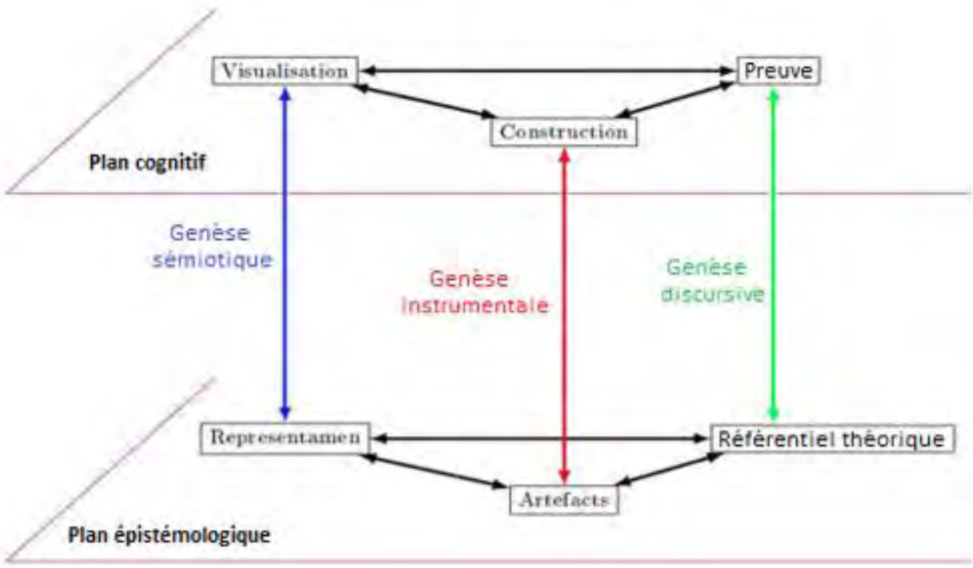


Figure 2 : Espace de Travail Algorithmique (Laval, 2018)

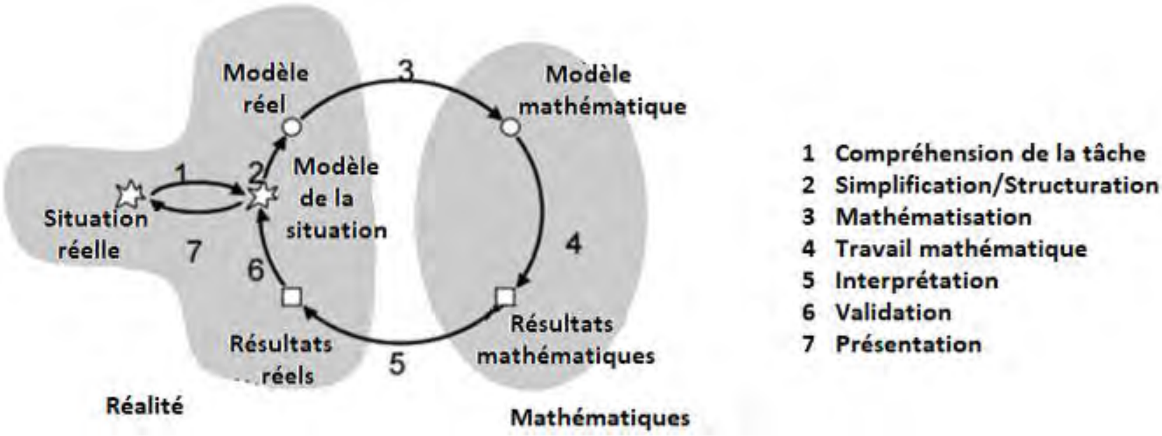


Figure 3 : Cycle de modélisation d'après Blum et Leiss

UNE INGENIERIE AUTOUR D'UNE POLITIQUE DES NAISSANCES

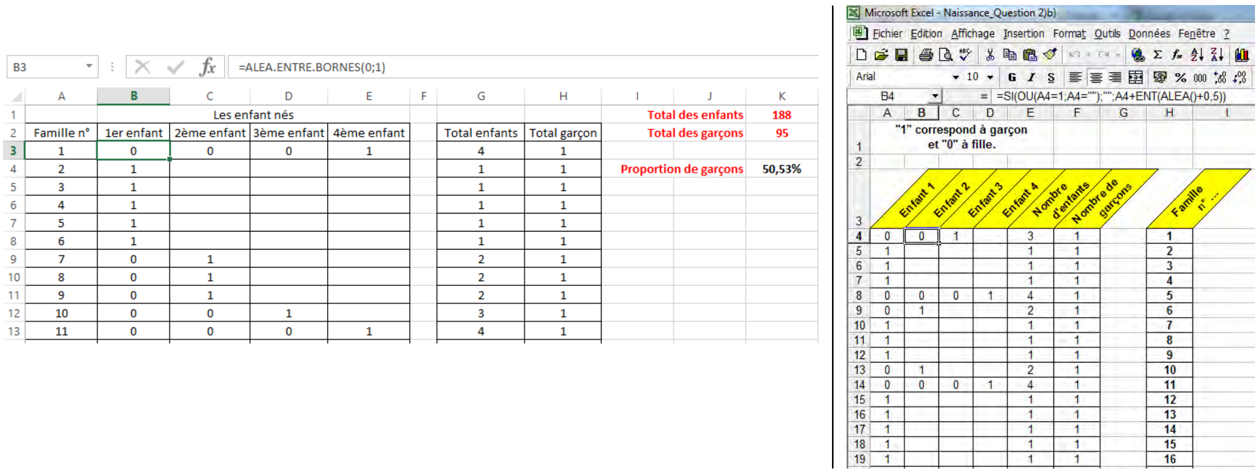
Nous faisons le choix de construire une ingénierie sur une tâche intitulée *politique des naissances* (Figure 1). Pour les élèves de Seconde (Grade 10), le programme indique qu'une étude théorique de la loi de probabilité discrète associée à cette politique n'est pas envisageable, mais qu'elle peut être approchée en utilisant des considérations algorithmiques. Pour les élèves de Première Scientifique (Grade 11), nous faisons l'hypothèse que cette loi, inscrite au programme de Première, ne soit pas connue des élèves au moment de l'expérimentation.

D'un point de vue mathématique, cette politique peut être modélisée par la loi géométrique tronquée. Elle mobilise certains savoirs issus des probabilités et met aussi en jeu des savoirs issus aussi du domaine des statistiques. Les simulations du processus aléatoire sont associées à une approche algorithmique de modèles mathématiques de la situation.

Notre objectif

Il s'inscrit dans une démarche de modélisation. En effet, la tâche consiste à interpréter une problématique présentée sous la forme d'une question : **la mise en place de cette politique aura-t-elle la conséquence attendue par les dirigeants du pays imaginaire, à savoir de diminuer le nombre de filles dans la population ?**

Pour cela, quel que soit le niveau scolaire, les élèves conduisent deux approches. Une première de type fréquentiste, où ils déterminent les moyennes du nombre d'enfants par famille et du nombre total de garçons, afin de conjecturer les conséquences d'une telle politique. Ils utilisent dans un premier temps le tableur (Figure 4), puis créent un modèle algorithmique représenté par un algorithme (Figure 5) implémentable dans un environnement algorithmique (autre que le tableur) afin de le tester pour déterminer une valeur approchée de la proportion de garçons parmi le nombre d'enfants pouvant naître.



B3 =ALEA.ENTRE.BORNES(0;1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Les enfant nés								Total des enfants	188
2	Famille n°	1er enfant	2ème enfant	3ème enfant	4ème enfant		Total enfants	Total garçon		Total des garçons	95
3	1	0	0	0	1		4	1			
4	2	1					1	1		Proportion de garçons	50,53%
5	3	1					1	1			
6	4	1					1	1			
7	5	1					1	1			
8	6	1					1	1			
9	7	0	1				2	1			
10	8	0	1				2	1			
11	9	0	1				2	1			
12	10	0	0	1			3	1			
13	11	0	0	0	1		4	1			

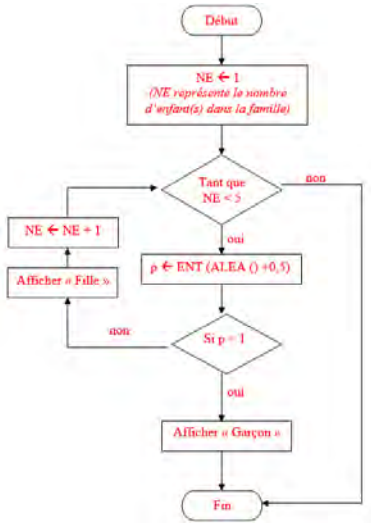
Microsoft Excel - Naissance_Question 2)b)

B4 =SI(OU(A4=1;A4="");"";A4+ENT(ALEA()+0,5))

"1" correspond à garçon et "0" à fille.

	A	B	C	D	E	F	G	H
3	Enfant 1	Enfant 2	Enfant 3	Enfant 4	Nombre d'enfants	Nombre de garçons		Famille n° ...
4	0	0	1		3	1		1
5	1				1	1		2
6	1				1	1		3
7	1				1	1		4
8	0	0	0	1	4	1		5
9	0	1			2	1		6
10	1				1	1		7
11	1				1	1		8
12	1				1	1		9
13	0	1			2	1		10
14	0	0	0	1	4	1		11
15	1				1	1		12
16	1				1	1		13
17	1				1	1		14
18	1				1	1		15
19	1				1	1		16

Figure 4 : Le tableur pour représenter les naissances des enfants, le nombre d'enfants par famille et le nombre de garçons par famille (Laval, 2018, p. 519)




```
VARIABLES
    enfants_famille EST_DU_TYPE NOMBRE
    p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
    enfants_famille PREND_LA_VALEUR 1
    TANT_QUE (enfants_famille<5) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
        p PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(0,1)
        SI (p==1) ALORS
            DEBUT_SI
            AFFICHER "Garçon"
            enfants_famille PREND_LA_VALEUR 5
            FIN_SI
            SINON
                DEBUT_SINON
                AFFICHER "Fille"
                enfants_famille PREND_LA_VALEUR enfants_famille+1
                FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

Figure 5 : Extraits de copies d'élèves de Seconde présentant des algorithmes de la politique des naissances (Laval, 2018, p. 524)

La seconde approche est de type probabiliste. Les élèves mettent en place un modèle mathématique permettant de déterminer les lois de probabilité de deux variables aléatoires (nombre total d'enfants et nombre de garçons), afin de calculer leurs espérances respectives pour obtenir la proportion de garçons par rapport au nombre total de naissances. Ainsi, lors de l'approche probabiliste, nous avons pour les différentes familles possibles à 4 enfants, l'arbre pondéré de probabilités ci-après (Figure 6), où nous supposons que la probabilité de naissance d'un garçon lors d'une grossesse est p. Nous rappelons qu'à partir du premier garçon, la famille arrête d'avoir des enfants.

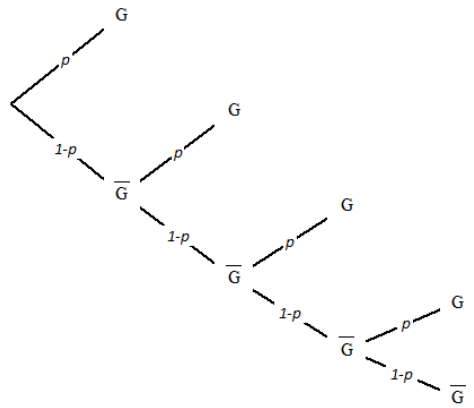


Figure 6 : Arbre pondéré représentant les différents types possibles de familles à 4 enfants

Nous en déduisons ainsi les lois de probabilités respectives des variables N (Nombre total d'enfants) et G (Nombre total de garçons) présentées dans le tableau ci-dessous (figure 7) :

Nombre total d'enfants (N)	Nombre total de garçons (G)	Probabilités
4 (quatre filles)	0	$(1-p)^4$
4 (trois filles et un garçon)	1	$(1-p)^3\,p$
3 (deux filles et un garçon)	1	$(1-p)^2\,p$
2 (une fille et un garçon)	1	$(1-p)\,p$
1 (un garçon)	1	p

Figure 7 : Lois de probabilités respectives des variables N et G

On en déduit alors que les espérances mathématiques respectives du nombre total d'enfants et du nombre total de garçons sont données par :

$$E(N) = (2-p)\,(p^2 - 2p + 2) \text{ et } E(G) = p\,(2-p)\,(p^2 - 2p + 2).$$

D'où, la proportion de garçon est $E(G)/E(N) = p$.

Les phases et nos attentes

L'ingénierie se découpe en quatre phases réparties sur une séance de deux heures, avec une pause de dix minutes entre les deux heures. Au cours de la première phase (20 min), les élèves émettent des hypothèses sur l'évolution démographique de la population. Cette phase est suivie d'une deuxième (30 min), où ils utilisent un tableur pour simuler la politique sur des nombres donnés de familles, afin de travailler sur des calculs de moyennes permettant d'évaluer la proportion du nombre total de garçons par rapport au nombre total d'enfants. Lors de la troisième phase (50 min), ils élaborent un modèle mathématique basé sur des lancers d'une pièce (Figures 8a et 8b) simulant cette politique. Puis, ils construisent un algorithme correspondant soit au modèle mathématique, soit à la politique définie au départ. Cet algorithme est ensuite implémenté dans un environnement numérique, pour le tester sur un nombre de familles donné, une probabilité de naissance d'un garçon donnée et le choix du nombre maximal d'enfants pour une famille. L'objectif est de déterminer une estimation de la proportion moyenne du nombre total de garçons par rapport au nombre total d'enfants par famille. Lors de la quatrième phase (20 min), les élèves valident les conjectures obtenues avec l'approche fréquentiste, en mettant en place une approche probabiliste du problème, basée sur des calculs d'espérances.

```
Début de l'algorithme
    Lire nbrepartie
    Partie ← 1
    Compteur ← 0
    TantQue Partie≤nbrepartie Faire
        Face=1
        TantQue Face≤4 Faire
            Dé ← Aléatoire(0,1)
            Si Dé=0 Alors
                Afficher « face »
                Compteur=Compteur+1
                Face ← Face+1
            Sinon
                Afficher « pile »
                Compteur=Compteur-1
                Face ← 10
            FinSi
        FinTantQue
        Afficher « »
        Partie=Partie+1
    FinTantQue
    Afficher « Nombre de points »
Fin de l'algorithme
```

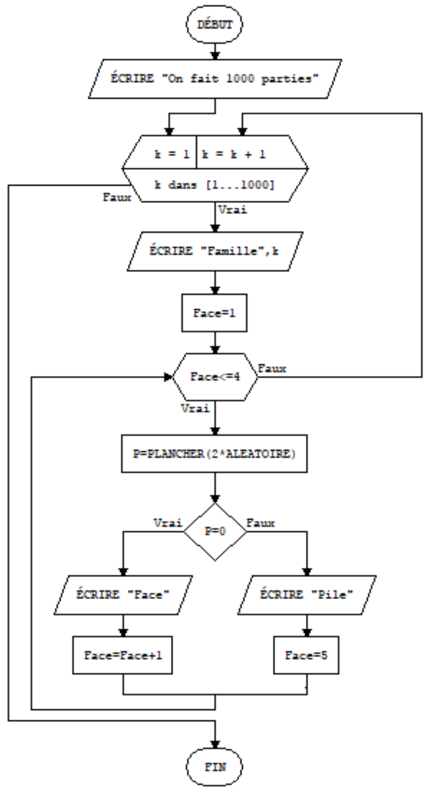


Figure 8a : Extraits de copies de Première Scientifique représentant un algorithme au format « textuel » du jeu de lancers successifs d'une pièce de monnaie modélisant la politique des naissances (Laval, 2018, p. 530)

Figure 8b : Extraits de copies de Première Scientifique représentant un algorithme au format « spatial » de la politique des naissances

Choix de mise en place de l'expérimentation

Choix des classes et des modalités de travail :

- Les deux classes (une Seconde de 30 élèves et une Première Scientifique de 32 élèves) participant à cette expérimentation, ont déjà participé à deux autres ingénieries associées à d'autres domaines mathématiques : *théorie élémentaire des nombres*, *analyse* (Laval, 2015, 2017, 2018). Les élèves sont répartis en binômes. Chaque binôme a un ordinateur équipé de plusieurs environnements numériques, *LARP*[1] et *ALGOBOX*[2] , ainsi que d'un tableur

Compétences attendues des élèves :

- Les compétences attendues des élèves pour répondre à la problématique de l'expérimentation se situent dans deux domaines. En effet, dans le domaine de l'algorithmique, les élèves vont travailler les simulations, la modélisation, les structures de boucles, les variables informatiques. Dans le domaine des mathématiques, le travail que les élèves vont mettre en place, se fait sur les variables aléatoires discrètes (VAD), le calcul de probabilités, la construction d'un arbre de probabilité, le calcul d'espérances, de proportions, de fréquences, de moyennes, d'un modèle de répétition d'expériences identiques et indépendantes.

Prérequis attendues des élèves :

- **Dans le domaine des probabilités** : Les élèves de Première connaissent les notions de VAD, de loi de probabilité associée à une VAD, de l'espérance d'une VAD, d'épreuve de Bernoulli. En Seconde, ces compétences n'étant pas inscrites au programme, l'enseignant à pour consigne d'introduire ces notions à partir d'exemples, sans pratiquer de théories, et de travailler quelques situations aléatoires se ramenant à une épreuve de Bernoulli. Les élèves n'ont aucune connaissance sur les lois binomiale et géométrique tronquée.
- **Dans le domaine de l'informatique** : L'ensemble des élèves a la pratique des formules mathématiques du tableur et maitrise les différentes fonctions utiles à la conception d'un algorithme. Ils savent construire des algorithmes sous forme « textuelle », en langage « naturel » ou « pseudo-code », et sous forme « spatiale » avec le tracé d'organigrammes. Nous faisons le choix qu'ils n'utilisent que le tableur pour la phase 2, et les environnements algorithmiques *LARP* et *ALGOBOX*, dont ils ont déjà la pratique, pour les phases 3 et 4. Nous partons de l'hypothèse qu'une entrée dans la simulation par le tableur peut aider l'élève débutant en informatique à aller vers une approche algorithmique de la simulation de la politique.

Les déroulements pour chacune des phases et le mode de travail

Lors de la phase 1, nous attendons que les binômes comprennent la « portée » de la **politique des naissances**. Ils ont pour tâche de répondre à une série de questions sur l'évolution de la population à l'aide du « papier-crayon » et en engageant un débat sur les hypothèses qu'ils émettent. Ils travaillent en autonomie. L'enseignant joue un rôle de modérateur. Lors de la phase 2, ils ont pour tâche de simuler, à l'aide du tableur, un grand nombre de familles pour calculer des fréquences statistiques sur le

---

1 LARP est un logiciel canadien, libre et gratuit, qui facilite la réalisation d'organigrammes et d'algorithmes.

2 ALGOBOX est un logiciel français, libre et gratuit, multiplateforme, d'aide à la construction et à l'exécution d'algorithmes.

nombre de naissances de garçons, avec l'hypothèse d'équiprobabilité que pour chaque naissance un enfant soit un garçon ou une fille. L'enseignant reste observateur. Cette approche fréquentiste est cohérente avec les pratiques sur la simulation au lycée. Lors de la phase 3, les élèves considèrent la simulation comme un traitement algorithmique, en mettant en œuvre des structures informatiques adéquates. Ils construisent des modèles représentatifs de la politique et simulent ces modèles à partir d'algorithmes écrits aux formats « spatial » ou « textuel ». Au cours de la phase 4, suite aux résultats obtenus lors de l'approche fréquentiste, nous attendons que les élèves reviennent sur les hypothèses émises lors de la phase 1, en déterminant, lors d'une approche probabiliste, les lois de probabilités associées respectivement aux nombres de garçons et au nombre total d'enfants suivant les différents types de familles possibles, afin d'en déduire des espérances et la proportion de garçons dans le nombre total d'enfants.

Les analyses des phases

Les analyses des phases permettent de répertorier les articulations entre ETA et ETM$_S$. Par exemple, dans le cas des phases 2 et 3, nous observons que les deux Espaces de Travail sont porteurs d'idées intéressantes. Ainsi, les gestes de construction et de visualisation d'un algorithme au format « textuel » à mettre en place, sont familiers pour des élèves de Seconde et de Première Scientifique. Les constructions « spatiales » ou « textuelles » sont complémentaires afin de mieux comprendre les différentes étapes d'un algorithme. L'environnement *LARP* permet à des élèves débutants de mieux voir la transcription d'une représentation spatiale sous forme d'organigramme à une représentation « textuelle » sous forme de langage « pseudo-code ». Ainsi, le travail algorithmique de l'élève peut être envisagé dans des ETA spécifiques environnements algorithmiques. De même, nous observons que le recours à un arbre de probabilité lors de la première phase peut générer des difficultés lors du passage à un ETA environnement algorithmique. En effet, certains élèves utilisent des alternatives imbriquées se ramenant à transposer l'arbre de probabilité à l'organigramme. Nous pouvons interpréter cela comme une réduction à un « copier-coller » renvoyant à un ETA de type « tableur » (situation de la phase 2) ou à une transcription d'un raisonnement issu d'un ETM de probabilité avec la représentation d'une situation donnée, à l'aide d'un arbre. Nous constatons aussi que des élèves ont conscience qu'une structure de type « TantQue » est plus favorable pour l'organigramme en particulier dans le cas où le nombre maximal d'enfants dans une famille serait important. Nous faisons l'hypothèse que ceci serait dû en partie à une mauvaise interprétation d'une compétence venant d'un ETM de probabilité avec le concept d'*événement contraire*. Nous observons aussi que l'aspect ETA autour de l'approche fréquentiste peut donner du sens à des élèves qui n'ont pas la connaissance de la loi géométrique tronquée et, par conséquent, donner du sens à l'approche probabiliste du problème. De plus, les ETA permettent aux élèves de proposer plusieurs modèles algorithmiques permettant de simuler le processus aléatoire.

L'aspect modélisation

Nous complétons ces analyses en fonction des niveaux de compétences en modélisation des élèves. Lors des phases 2 à 4, les références aux ETM$_s$ et ETA mis en place peuvent être schématisées par la figure qui suit (Figure 9). Nous observons ainsi une circulation complète à travers les trois plans verticaux des modèles des ETM$_S$ et ETA conduisant à ce que Kuzniak et Nechache (2014) identifient comme un travail complet dans un domaine des mathématiques (ici : probabilités/statistiques) et dans le domaine de l'algorithmique.

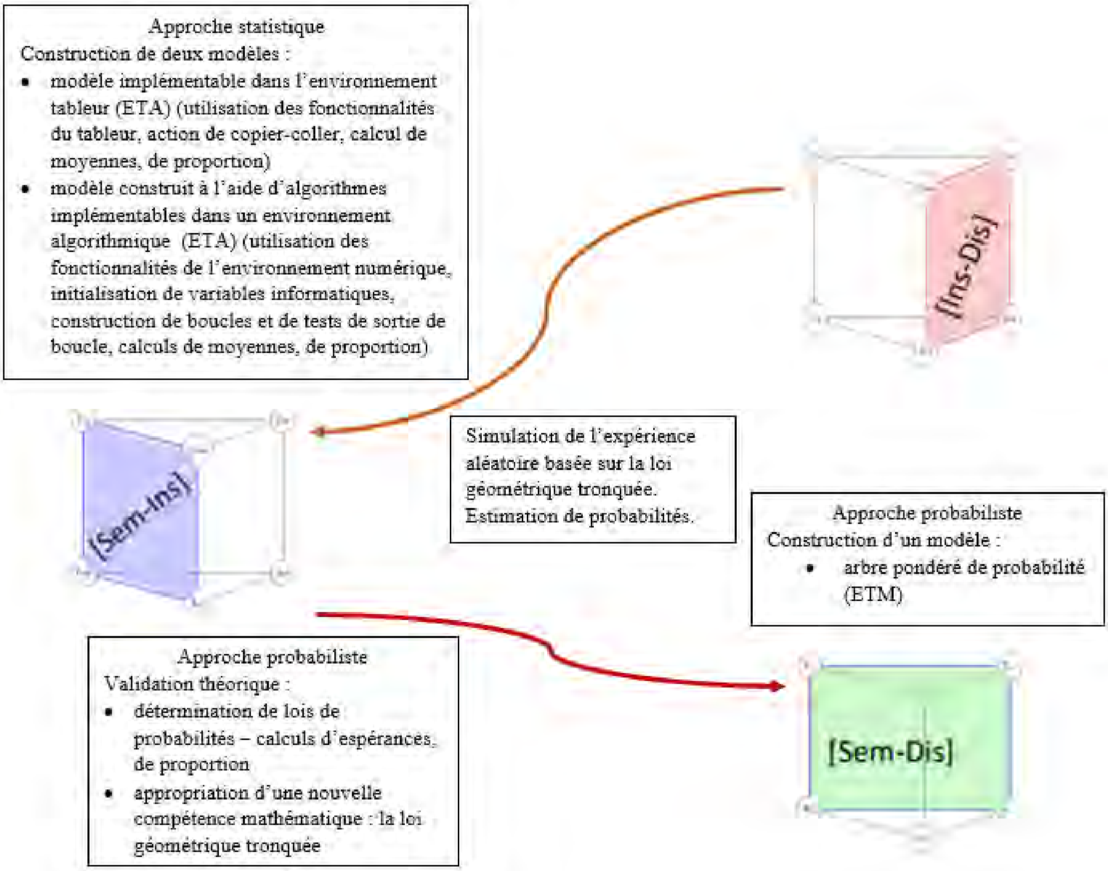


Figure 9 : Référencez aux ETM$_{\text{probabilité}}$, ETM$_{\text{statistique}}$, ETA$_{\text{tableur}}$, ETA$_{\text{Algobox}}$ (phases 2, 3 et 4) (Laval, 2018, p. 542)

CONCLUSION

Cet article questionne l'utilité d'un cadre théorique basé sur des articulations entre ETA et ETM$_s$ pour relever les nouveaux défis posés par l'introduction d'activités impliquant l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques. Nous avons utilisé ce cadre pour concevoir une expérience en classe afin de tester l'hypothèse que, pour un sujet particulier impliquant à la fois une dimension algorithmique et une dimension mathématique, il est possible de caractériser un ETA et un ETM$_s$ et de créer des situations impliquant les trois genèses : sémiotique, instrumentale et discursive. Nous avons observé une variété d'articulations possibles validant cette hypothèse.

Dans le travail de thèse, Laval (2018) a observé que,

> pour des élèves de ces niveaux scolaires et motivés par un travail de nature algorithmique en lien avec un domaine mathématique spécifique (probabilités), les apprentissages de nouvelles compétences mathématiques à travers l'algorithmique se font de façon plus aisée que si ces compétences attendues restent cloisonnées au domaine mathématique spécifique. […] Les élèves du lycée semblent donner plus facilement du sens aux objets algorithmiques que mathématiques.

Des études antérieures liées aux probabilités et aux statistiques, et à la modélisation (Kiet, 2015), avaient permis de mieux comprendre le potentiel de générer des activités mathématiques dans des domaines distincts. Cependant, cet article prend en compte l'algorithmique dans l'enseignement des probabilités et des statistiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Blum, W. & Leiss, D. (2005), « Filling Up » - The problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. *In Proceedings for the CERME4, WG 13 Modeling and Applications*, 1623-1633.

Douady, R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des Mathématiques*, Vol 7.2, 5-31. Editions La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 5, 37-65.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 11, 175-193.

Kiet, B.A. (2015), Apports de la simulation et de l'utilisation de logiciels pour l'enseignement/apprentissage des probabilités et des statistiques en première année d'Université au Viêtnam dans un cursus non mathématique. *Thèse de doctorat*. Université Paris-Diderot.

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2014), Penser une progression en géométrie en formation des enseignants. *In Acte du* 41^{e} *Colloque COPIRELEM*, Mont de Marsan.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014), Espace de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives. *Relime, Numero extraordinario 1*.

Lagrange, J. B. (2005), Curriculum, classroom practices and tool design in the learning of functions through technology-aided experimental approaches. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 10, 143–189.

Lagrange, J.B. (2014), Algotithmics. In S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, DOI 10.1007/978-94-007-4978-8, Springer Science+Businees Media Dordrecht 2014, 32-35.

Lagrange, J. B. & Laval, D. (2018), Connected working spaces: The case of computer programming in mathematics education. New Submission CERME 11.

Laval, D. (2015), L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar. *Actes du Quatrième symposium international – Espace de Travail Mathématique* de juillet 2014, pp. 103-115. Madrid, Espagne.

Laval, D. (2017), L'algorithme de dichotomie « discret » : une stratégie « rapide » et « gagnante ». In Gómez-Chacón, Kuzniak, Richard & Vivier (Eds.), *Mathematical Working Space, Proceedings Fifth ETM Symposium*, pp. 267-279. University of Western Macedonia, Florina, Greece.

Laval, D. (2018). L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques. *Thèse de doctorat*. Université Paris-Diderot. Paris, France.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *In Annales de didactique et de sciences cognitives*, volume 16, 127–147.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Tanguay, D. (2015). Circulation et coordination dans les espaces de travail, pour une activité articulant géométrie et arithmétique. *Actes du Quatrième symposium international – Espace de Travail Mathématique* de juillet 2014, pp. 69-85. Madrid, Espagne.

LE CADRE THEORIQUE DE L'ETM ETENDU : POTENTIALITES EN PHYSIQUE ET EN CHIMIE

Laurent Moutet

Université Paris-Diderot, LDAR, France

laurent.moutet@ac-amiens.fr

Le cadre théorique de l'ETM étendu permet d'analyser les tâches mises en œuvre lors de quelques étapes d'un cycle de modélisation en physique ou en chimie. Une séquence d'enseignement de relativité restreinte utilisant une approche diagrammatique en terminale S en France (Grade 12) est tout d'abord étudiée. L'analyse utilisant le cadre théorique de l'ETM étendu permet de mettre en valeur les avantages sur les apprentissages de cette approche diagrammatique lors d'une ingénierie didactique complète. Le cadre théorique de l'ETM étendu est également utilisé lors d'une analyse a priori de tâches mises en œuvre en chimie lors de la réalisation d'un dosage en chimie des solutions dans l'enseignement secondaire. L'analyse a priori utilisant le cadre théorique de l'ETM étendu permet de proposer de nouvelles stratégies d'apprentissage. La notion d'ETP personnel de l'enseignant est également introduite dans cet article.

Mots-clés *: Modélisation, Interdisciplinarité, Physique, Chimie, ETM étendu, Géométrie dynamique.*

PRESENTATION DU CADRE THEORIQUE DE L'ETM ETENDU.

La théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM) a été développée afin de mieux comprendre les enjeux didactiques autour du travail mathématique dans un cadre scolaire par Kuzniak (2011). Le diagramme des ETM a été transformé par Moutet (2018) en rajoutant un plan épistémologique correspondant au cadre de rationalité de la physique (Figure 1).

Il a été choisi de ne garder qu'un seul plan cognitif car nous faisons l'hypothèse que ce plan est indépendant du plan épistémologique qui lui est associé. Nous avons fait également l'hypothèse que les conceptions des élèves en mathématiques et en physique peuvent être mises en évidence à l'aide d'un ETM étendu personnel de l'élève. Le fonctionnement des schèmes (Vergnaud, 2013) propre à ces conceptions pourraient apparaître lors de l'activation, plus ou moins efficace, des différentes genèses. Les conceptions en mathématiques seraient mises en évidence par l'activation de genèses, opératoires ou non, entre le plan cognitif et le plan épistémologique de mathématiques, celles en physique seraient mises en évidence par le même type d'activation de genèses entre le même plan cognitif et le plan épistémologique de physique. Un seul plan cognitif serait suffisant pour décrire les conceptions en mathématiques et en physique ainsi que pour analyser les tâches dévolues aux élèves tant du point de vue des mathématiques que de celui de la physique sans pour autant privilégier l'une ou l'autre des disciplines. Le terme

« preuve » est conservé, mais il prendra dans le cas de l'ETM étendu un sens différent avec plutôt l'idée d'une justification ou d'un raisonnement. Le cadre de l'ETM étendu permet d'analyser finement les interactions entre les différents plans épistémologiques et le plan cognitif de l'élève puis de qualifier la nature de son travail ou celui qui lui est demandé. L'ordre des plans n'a pas d'importance, ce sont les relations entre les plans épistémologiques et le plan cognitif, au travers des genèses, qui sont utilisées ici. La relation entre les deux plans épistémologiques n'est pas étudiée dans cet article. Il est probable qu'un seul plan épistémologique « mathématico-physique » soit suffisant pour décrire des tâches scolaires relevant de l'école primaire ou du secondaire. La présence des deux plans épistémologiques devient pertinente en fin d'études secondaire ou dans le supérieur avec des tâches pour lesquelles les deux référentiels des plans épistémologiques arrivent à être clairement identifiés.

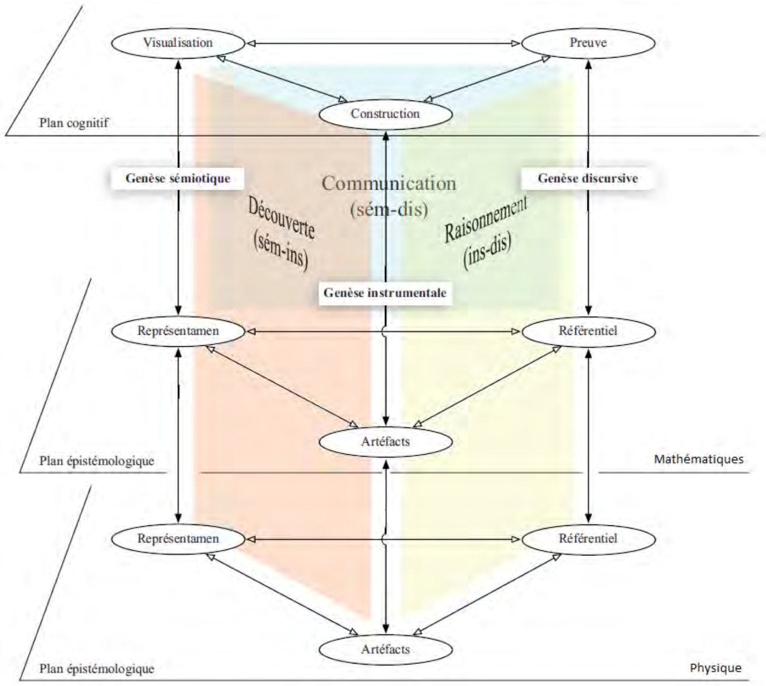


Figure 1 : Modèle de l'ETM étendu

DE LA « SITUATION MODELE » AUX « RESULTATS REELS » LORS D'UNE MODELISATION EN RELATIVITE RESTREINTE.

Nous nous sommes basés sur le cycle de modélisation proposé par Blum et Leiss (2005) pour analyser une séquence d'enseignement développée par Moutet (2018). Elle est destinée à des élèves de Terminale S (Grade 12) sur le thème de la relativité restreinte à la suite des travaux de de Hosson (2010). Elle suit l'apprentissage du cours et la correction d'exercices du manuel et participe à la conceptualisation des notions de relativité restreinte (événement, référentiel, relation de dilatation de durées, postulats d'Einstein) en permettant de les réinvestir dans un contexte différent et inconnu (Vergnaud, 1990).

Deux questions de recherche ont guidé ce travail : comment le cadre de l'ETM étendu permet d'analyser les jeux de cadres de rationalité entre les mathématiques et la physique lors d'une séquence traitant de la relativité restreinte avec des élèves de Terminale S via une approche géométrique ? Dans quelle mesure l'analyse de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par le cadre de l'ETM étendu permet de montrer qu'il favorise une conceptualisation chez les élèves ?

La séquence d'enseignement peut être décrite avec le contexte ci-après : Armineh conduit une voiture se déplaçant à une vitesse proche de la vitesse de la lumière par rapport à Daniel. Ce dernier se trouve sur le bord de la route à côté de trois flashs lumineux S_1, S_2 et S_3 associés à trois événements particuliers, et initialement connus dans le référentiel de Daniel (Figure 2). Le diagramme de Minkowski est un diagramme d'espace-temps permettant de connaitre les coordonnées spatio-temporelles d'un événement dans un repère du référentiel d'Armineh ou de Daniel. Dans le diagramme de Minkowski, la droite $x = 0$ est décrite par l'axe $(Oc.t)$ dans le repère du référentiel de Daniel.

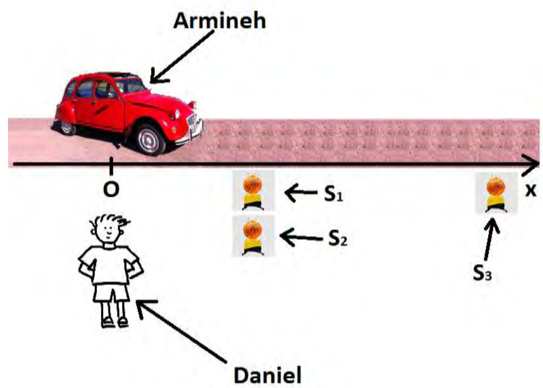


Figure 2 : Le « modèle réel » de la situation

De même la droite $x' = 0$ est décrite par l'axe $(Oc.t')$ dans le repère du référentiel d'Armineh. Les projections sur ce type de diagramme se font parallèlement aux axes. L'axe (Ox') est le symétrique de l'axe $(Oc.t')$ par rapport à la droite $x = c.t$. C'est la même chose pour les axes (Ox) et $(Oc.t)$. Le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra et le diagramme d'espace-temps de Minkowski ont été utilisés par les étudiants. Il permet de représenter le repère $(xOc.t)$ relatif au référentiel de Daniel et le repère $(x'Oc.t')$ relatif au référentiel d'Armineh. Cette dernière se déplace, par exemple, à la vitesse v de 0,8 fois la vitesse de la lumière dans le vide par rapport à Daniel suivant un axe (Ox). Les droites (Ox) ou (Ox') correspondent à la route dans les référentiels de Daniel ou d'Armineh (Figure 3).

Par rapport à Daniel, l'ordre chronologique de production des trois événements est E_1, E_2 et E_3 alors que par rapport à Armineh l'ordre est E_1, E_3 et E_2. Le curseur de GeoGebra permet de modifier les conditions expérimentales en changeant la vitesse v et ainsi observer un changement d'ordre chronologique de production des événements dans le référentiel d'Armineh. Le fichier corrigé de l'activité avec le diagramme de Minkowski est disponible en cliquant sur le lien hypertexte suivant : https://drive.google.com/open?id=0B_f8SgBLz2P0N0xfazFCSmU3MHM

Le plan épistémologique des mathématiques et le plan cognitif sont mobilisés lors de la construction du curseur car il faut savoir comment les axes Ox' et O$c.t'$ sont modifiés en fonction de la vitesse v. Le plan épistémologique de la physique est également mobilisé lorsque les élèves concluent sur l'ordre chronologique des événements suivant les deux référentiels (Figure 4).

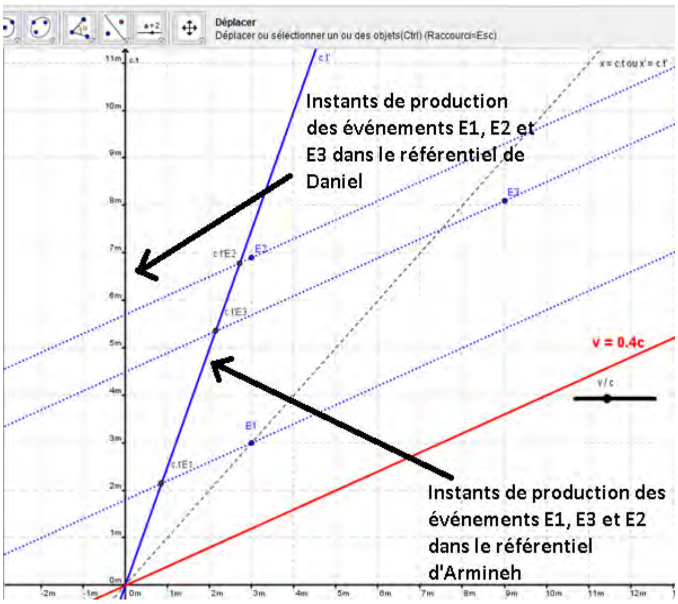


Figure 3 : Le modèle mathématique de la situation

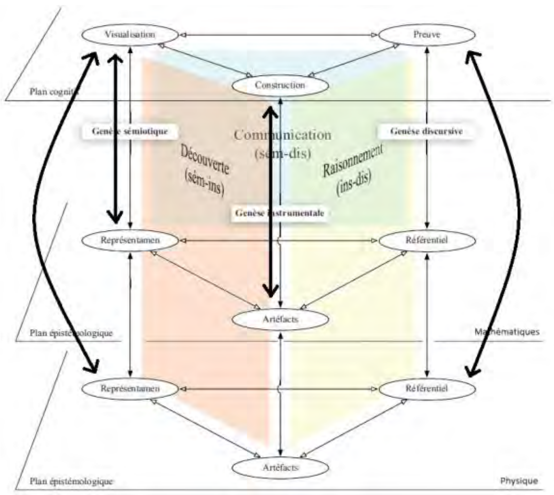


Figure 4 : Analyse a priori de l'utilisation du curseur avec GeoGebra

Une classe de 34 élèves de Terminale S d'un lycée de Picardie maritime a participé à l'expérimentation. Une première séance papier – crayon a été effectuée afin de construire et d'utiliser le diagramme de Minkowski avec un guidage fort de l'enseignant. Des vidéos et des enregistrements audios ont été recueillis à cette occasion. L'activité, correspondant à la seconde séance, a été ensuite donnée à des binômes comme devoir à réaliser à la maison. Les conditions de vitesses étaient différentes d'un groupe à l'autre. La très grande majorité des élèves n'avait jamais utilisé le logiciel GeoGebra au lycée. Les élèves ont rendu une première version de leur devoir maison puis ils ont travaillé deux heures en demi-classe en salle informatique afin de finaliser leur fichier GeoGebra. Chaque élève a réalisé également un enregistrement audio permettant de résumer la totalité de la séquence qui aura duré cinq heures en tout. Le travail de quatre élèves a été analysé (enregistrement audio ainsi que les deux versions de leur fichier GeoGebra). Ils ont été choisis en tenant compte de leurs résultats scolaires (élèves en réussite et élèves en difficulté).

Grâce au modèle de l'ETM étendu nous pouvons réaliser l'analyse *a priori* de chacune des tâches à effectuer par les élèves. Le niveau de difficulté de chaque tâche peut être apprécié en regardant le nombre de genèses instrumentale-discursive (Ins-Dis) ou sémiotique-discursive (Sem-Dis), plus difficiles, par rapport aux genèses sémiotique-instrumentale (Sem-Ins). Les analyses *a posteriori* permettent d'étudier les tâches dévolues aux élèves et réellement réalisées par eux en tenant compte des cadres de rationalité des mathématiques et de la physique. Cette étude s'est focalisée sur les liens entre les plans épistémologiques et le plan cognitif. Elle a conduit à la mise en évidence des jeux de cadres de rationalité lors de la résolution de ce problème de relativité restreinte traité par une approche diagrammatique. Il s'agit des interactions plan épistémologique de la physique – plan cognitif et plan épistémologique des mathématiques – plan cognitif. Le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra permet de mettre en œuvre ici une genèse sémiotique supplémentaire avec son aspect dynamique. Le curseur facilite le changement des conditions de vitesses d'un référentiel par rapport à un autre et l'élève voit le résultat directement sur l'écran. Une genèse instrumentale différente de l'activité papier – crayon (manipulation d'un logiciel, utilisation de nouvelles fonctionnalités telles que le curseur) est également mise en jeu lors de la construction du diagramme de Minkowski. Enfin nous pensons que GeoGebra, en permettant de tirer plus facilement des conclusions sur l'ordre chronologique relatif des événements, conduit à l'activation d'une genèse discursive originale. L'enregistrement audio, que les élèves ont effectué pour résumer l'ensemble des tâches effectuées lors de cette séquence, leur permet de communiquer sur le diagramme de Minkowski sans le mettre en œuvre directement. C'est le signe d'interactions sémiotiques et discursives favorisant une conceptualisation des notions de relativité restreinte car les élèves émettent des conclusions sans manipuler le diagramme de Minkowski directement.

Dans cet article, c'est le travail de l'**élève B** qui est présenté. Le diagramme de Minkowski comporte les trois événements, les axes O*x*, O*c.t*, O*c.t'*, la droite $x = c.t$, et des projections parallèlement à l'axe O*c.t'* coupant un axe O*x'* qui n'est pas correctement placé. De plus, le curseur n'apparait pas. La notion d'événement, prise au sens de point d'espace-temps, semble mobilisée ainsi que celle de référentiel puisque les deux repères apparaissent explicitement même si cela demeure imparfait. La notion d'ordre chronologique relatif ne semble pas acquise.

La seconde version retravaillée en classe (aide personnalisée de l'enseignant pour amener des informations techniques sur le curseur et sur la signification des droites $x = c.t$ ou $x' = c.t'$) comporte les différents éléments qui manquaient dans la première version. L'axe Ox' est bien placé, le curseur permettant de changer la valeur de v/c apparaît et les ordonnées $c.t'$ des différents événements également. Des parallèles à l'axe O$c.t'$ ou à l'axe Ox' passant par les différents événements sont aussi représentées.

Ce travail met en évidence des tâches décrites par des interactions de type sémiotiques – instrumentales correctement réalisées par l'**élève B** et de façon plus marginale des tâches décrites par des interactions instrumentales – discursives. Des confusions importantes sont mises en évidences dans l'enregistrement audio (Moutet, 2016) sur la construction de la droite O.$c.t'$ avec un coefficient directeur incorrect (coefficient directeur de 0,8 au lieu de 1/0,8). Cet enregistrement montre également que l'**élève B** énonce des résultats sans utiliser véritablement le diagramme de Minkowski ou alors de façon élémentaire. Des confusions subsistent sur le but de l'activité (consistant à comparer des vitesses d'après l'**élève B**) ou sur la notion de vitesse d'un système dans un référentiel donné (l'**élève B** parle plutôt de la vitesse d'un référentiel). Les explications du tracé de la droite $x = c.t$ sont vagues ainsi que les positions des ordonnées $c.t'$ des différents événements (Figure 5). Les flèches noires décrivent une genèse sur l'ETM étendu correspondent à une tâche correctement réalisée, les flèches noires barrées une tâche incorrectement réalisée et les flèches en pointillé, une tâche partiellement réussie.

Le modèle de l'ETM étendu permet l'analyse des tâches scolaires. Il n'est pas forcément adapté pour décrire les tâches effectuées habituellement par un expert en sciences physiques. Nous avons voulu proposer une analyse métacognitive de la transposition didactique effectuée par tel expert développant une séquence d'enseignement. Il a été nécessaire de postuler pour cela une transformation du modèle de l'ETM étendu en un ETP personnel (espace de travail en sciences physiques personnel) de l'enseignant car le modèle initial des ETM était trop dénaturé. Les plans cognitifs et épistémologiques des mathématiques seraient inchangés, conservant ainsi la structure initiale de l'ETM, tandis que le plan épistémologique de la physique subirait une rotation de 120° par rapport aux autres plans (Figure 6).

L'ETP personnel permettrait d'illustrer visuellement les tâches effectuées par un expert devant résoudre ou proposer une séquence de résolution d'un problème complexe en sciences physiques. Une genèse sémiotique différente associerait la *visualisation* du plan cognitif au *référentiel* du plan épistémologique de la physique. L'expert ne « voit » pas la même chose que le novice, ce qui pourrait être illustré ici par un lien direct entre le processus de visualisation et le référentiel théorique. La séquence d'enseignement proposée ici doit permettre de visualiser une inversion chronologique d'événements. Une genèse instrumentale différente correspondrait, suivant le même principe, à l'association du *representamen* et du processus de *construction*. Ici elle devait permettre l'utilisation des coordonnées spatiales et temporelles x, t, x', t' dans la séquence d'enseignement. C'est plus une stratégie mettant en œuvre des *moyens potentiels* (langage naturel, coordonnées d'événements,…) choisis par l'expert qu'une réelle genèse instrumentale opérationnelle. Enfin une genèse discursive différente correspondrait à l'association de l'*artefact* et du processus de *preuve*. L'expert possède plusieurs stratégies à sa disposition afin de mettre en œuvre un mécanisme de preuve. Ici la séquence d'enseignement utilise une démonstration graphique à l'aide du diagramme de Minkowski et de GeoGebra. On aurait pu également imaginer par exemple l'utilisation de la transformée de Lorentz avec une approche algébrique mais ce choix dépasserait largement le programme de physique du Grade 12.

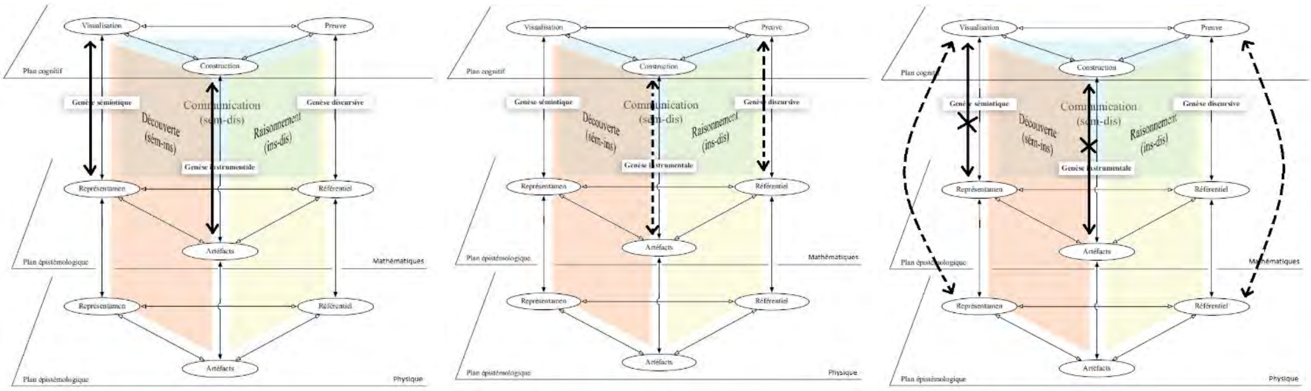


Figure 5 : Analyse a posteriori des tâches effectuées par l'élève B

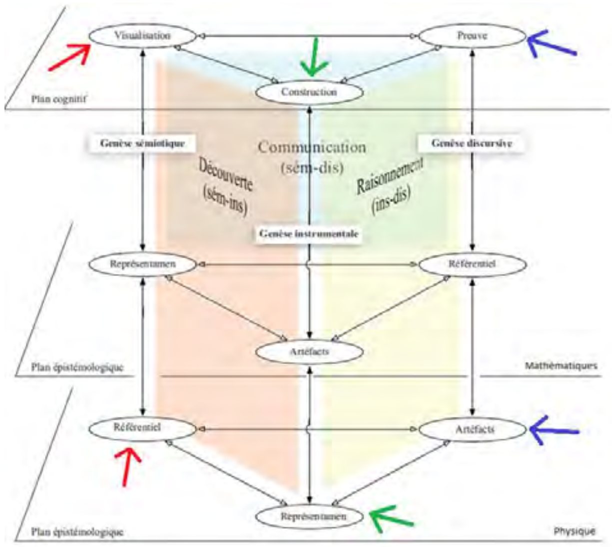


Figure 6 : Modèle de l'ETP personnel

UTILISATION DU CADRE THEORIQUE DE L'ETM ETENDU AVEC LE CADRE DE RATIONALITE DE LA CHIMIE

Un ETM étendu possédant un plan épistémologique de la chimie est cette fois-ci proposé. L'ETP personnel correspondant permettrait de clarifier la stratégie mise en place lors du développement de la séquence d'enseignement faisant intervenir la chimie. Nous faisons l'hypothèse qu'un expert visualise l'équivalence d'un dosage en l'associant intimement à la notion de stœchiométrie à l'aide d'une genèse sémiotique différente. Il pourrait donc être pertinent d'utiliser dans ce cas l'avancement et les nombres stœchiométriques lors d'un processus de construction afin de se servir des graphiques $x(t)$ et de GeoGebra lors d'une démarche de raisonnement et de preuve.

Une séance de travaux pratiques réalisée en classe de Terminale S (Grade 12) en France (Gauchon, 2008) est étudiée. La notion de relation stœchiométrique correspond au travail disciplinaire visé ici. Il s'agit du dosage du diiode par une solution de thiosulfate de sodium en présence d'un indicateur coloré. L'expérience est facilement accessible, nous pouvons l'illustrer, par exemple, par une vidéo disponible sur le site YouTube : https://www.youtube.com/watch?v=l7pdbIXMJXY

Une solution aqueuse contenant du diiode est disposée dans un erlenmeyer, une solution contenant du thiosulfate de sodium est disposée dans une burette graduée (Figure 7). Une transformation chimique a lieu entre ces deux espèces chimiques. L'équivalence correspond au moment où la totalité des deux espèces a réagi. Elle est mise en évidence expérimentalement par le changement de la couleur de la solution contenant un indicateur coloré, préalablement introduit dans le mélange réactionnel, lorsque l'équivalence est atteinte. Connaissant la quantité de thiosulfate de sodium introduite à l'équivalence, il est possible d'en déduire à l'aide d'une relation algébrique, la concentration en diiode initialement présente. C'est le but du dosage.

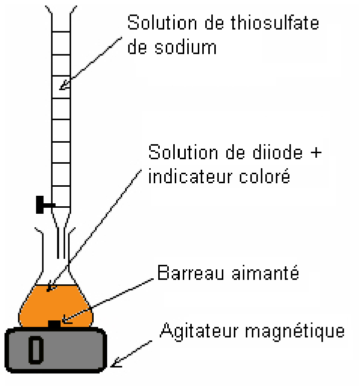


Figure 7 : Schéma de principe du dosage

Ici les plans épistémologiques à prendre habituellement en compte sont ceux de la chimie des solutions et celui des mathématiques dans le domaine de l'algèbre. Dans la vidéo, il s'agit exclusivement d'une manipulation. Les calculs ne sont pas présentés, le plan épistémologique des mathématiques n'est pas directement mobilisé ici mais il le sera lorsque les calculs seront effectués.

Il est possible d'analyser les tâches à effectuer pour mener à bien le dosage en tenant compte des genèses entre le plan cognitif et le plan épistémologique de la chimie des solutions. En se basant uniquement sur la genèse sémiotique, un observateur voit un changement de couleur (ici de marron à jaune puis noir et enfin incolore), il est conscient qu'il se passe quelque chose mais il ne peut pas l'expliquer. La genèse instrumentale d'un novice est associée à la manipulation du matériel (plusieurs artéfacts expérimentaux). L'expérimentateur suit un protocole conduisant au changement de couleur. La seule activation de cette genèse ne permet pas la compréhension des gestes qu'il est amené à réaliser.

Nous voyons que la genèse instrumentale est intimement associée aux genèses sémiotiques ou discursives lorsqu'un élève effectue un dosage, sans doute avec des contributions différentes en fonction du niveau de l'élève (une genèse discursive plus importante est la marque d'une expertise améliorée). La notion d'équivalence est difficile à leur faire comprendre (les deux espèces chimiques ont réagi complètement à l'équivalence, il ne s'agit pas forcément d'une simple égalité entre les quantités de chaque espèce chimique). Plusieurs registres sémiotiques peuvent être mobilisés pour appréhender plus facilement cette notion : des tableaux, des graphiques, des relations algébriques, le langage naturel ou alors ici une expérience qui est beaucoup plus « visuelle » pour les élèves.

Lorsqu'ils réalisent les premières fois un dosage, tout se passe sur un plan sémiotique-instrumental. L'équivalence est associée à un changement de couleur et à un geste expérimental. Le discours enseignant se place au contraire dans le plan sémiotique-discursif (Figure 8) qui est d'un niveau de difficulté plus élevé. Le travail mathématique se déroule dans un registre algébrique, les élèves devant correctement isoler la variable inconnue. Le registre de la chimie est mobilisé à travers la connaissance des relations des concentrations molaires et de l'écriture algébrique de la notion d'équivalence. Il peut donc se produire un malentendu entre l'enseignant et ses élèves.

Des calculs (non montrés dans la vidéo) sont réalisés en relation avec l'expérimentation pour déterminer la concentration de diiode à l'aide de la lecture du volume équivalent de thiosulfate ajouté. L'équation de la réaction du dosage du diiode ainsi que les calculs algébriques nécessaires pour trouver la concentration en diiode C_{I2} sont présentés ci-après (Figure 9). C_{S2O32-} correspond à la concentration en ion thiosulfate qui est initialement connue, V_{I2} correspond au volume de solution de diiode initialement introduite et V_{S2O32-} correspond au volume équivalent trouvé lors du dosage. La seule inconnue est C_{I2}.

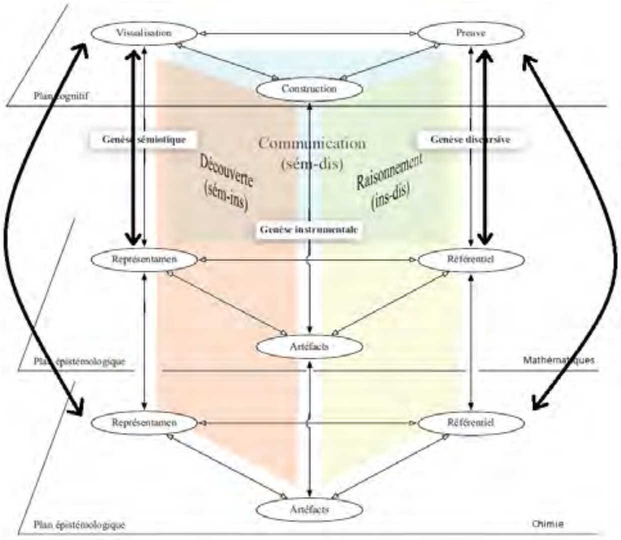


Figure 8 : Analyse a priori de la tâche permettant de trouver la concentration inconnue

$$I_2 + 2\ S_2O_3^{2-} \rightarrow 2\ I^- + S_4O_6^{2-}$$

$$n_{I2} = \frac{n_{S_2O_3{}^{2-}}}{2}$$

$$n_{I_2} = C_{I_2} \times V_{I_2} \ \text{ et } \ n_{S_2O_3{}^{2-}} = C_{S_2O_3{}^{2-}} \times V_{S_2O_3{}^{2-}}$$

$$C_{I_2} \times V_{I_2} = \frac{C_{S_2O_3{}^{2-}} \times V_{S_2O_3{}^{2-}}}{2} \text{ et } C_{I_2} = \frac{C_{S_2O_3{}^{2-}} \times V_{S_2O_3{}^{2-}}}{2 \times V_{I_2}}$$

Figure 9 : Equation de la réaction et calculs algébriques associés au dosage du diiode

En utilisant le cycle de modélisation proposé par Blum et Leiss (2005), la situation réelle correspondrait au dosage expérimental avec le changement de couleur observé. La situation modèle serait associée à la compréhension de l'existence d'une réaction chimique lors de ce dosage. Le modèle réel serait associé à la compréhension de l'équation chimique du dosage, aux espèces chimiques qui réagissent et aux paramètres pertinents à prendre en compte. C'est l'étape de mathématisation faisant intervenir habituellement un registre algébrique que nous proposons de modifier en faisant intervenir un registre géométrique.

Nous émettons l'idée que la tâche à effectuer par les élèves pour trouver la concentration inconnue pourrait être facilitée au début des apprentissages à l'aide d'une genèse instrumentale de nature différente à celle du dispositif expérimental en utilisant un logiciel de géométrie dynamique tel que GeoGebra. Le fichier GeoGebra de l'activité est disponible en cliquant sur le lien suivant : https://drive.google.com/file/d/1Wu5XiNoYn4jq1xEHgoOyhcArMXNHZxgt/view?usp=sharing

L'étape de mathématisation permet de décrire les différentes quantités de matière des espèces chimiques avec ici une approche géométrique. La droite d'équation $y = 2.x$ est associée à la quantité de matière d'ion thiosulfate $S_2O_3^{2-}$ et la droite d'équation $y = x$ est associée à la quantité de matière de diiode I_2. Des curseurs permettent de repérer, sur le graphique à l'aide d'une droite horizontale, la quantité de matière d'ion thiosulfate versée à l'équivalence et d'en déduire par la suite la concentration inconnue de diiode. Les tâches à effectuer par les élèves pourraient ainsi être décrites par un plan sémiotique-instrumental et instrumental-discursif et faire intervenir un autre registre de représentation sémiotique avec la géométrie.

Une question de recherche guide ce travail : Dans quelle mesure l'analyse de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par le cadre de l'ETM étendu permet de montrer qu'il favorise le traitement théorique des dosages chez les élèves ? L'expérimentation et l'analyse *a posteriori* sont en cours de réalisation.

CONCLUSION

Le cadre de l'ETM étendu nous a permis d'analyser les tâches associées à certaines étapes du cycle de modélisation lors d'un problème faisant intervenir la relativité restreinte. Il prend en compte la mobilisation des plans épistémologiques des mathématiques et / ou de la physique pour chacune des tâches demandées. Le cadre de l'ETM étendu nous a également amené à montrer que le logiciel GeoGebra est un nouvel artefact qui permet d'enrichir et de développer des genèses mises en évidence lors de l'activité papier - crayon. Une genèse sémiotique supplémentaire conduit à une visualisation du changement des coordonnées temporelles des événements en fonction de la vitesse v d'Armineh par rapport à Daniel. Une genèse instrumentale supplémentaire correspond à la manipulation du logiciel de géométrie dynamique avec la fonctionnalité curseur permettant de changer simplement les conditions expérimentales. Enfin une genèse discursive supplémentaire permet de conclure sur l'ordre chronologique des événements en fonction du référentiel d'étude et de la vitesse v. Le modèle de l'ETM étendu conduit à la réalisation de l'analyse *a priori* de chacune des tâches à effectuer par les élèves et à tester avec succès l'analyse *a posteriori* du travail effectué par eux. Nous envisageons, par la suite, d'analyser grâce au modèle de l'ETM étendu ou à une de ses évolutions, les tâches mises en œuvre à chacune des étapes du cycle global de modélisation lors d'autres séquences utilisant ou pas la relativité restreinte. Des résultats préliminaires tendent à montrer que les genèses ainsi que les plans épistémologiques des mathématiques et de la physique ne sont pas mobilisés de la même façon en fonction de l'étape du cycle de modélisation. L'enseignant prend souvent en charge de façon implicite une part importante des étapes du cycle de modélisation (nous supposons une prise en charge importante des étapes allant de la situation réelle au modèle réel), ce qui n'aide pas, selon nous, les élèves à la compréhension des problèmes qui leur sont donnés. Des exercices de type résolution de problèmes permettent une meilleure compréhension mais elles prennent du temps lors de leur mise en œuvre. La notion d'ETP personnel nous a ensuite permis de réaliser une analyse métacognitive de la transposition didactique effectuée par un expert en sciences physiques proposant une séquence d'enseignement en relativité restreinte puis de la tester dans le cadre de la chimie. La prise en compte du plan épistémologique de la chimie, du plan cognitif et des trois types de genèses décrites dans le modèle des ETM est transposable à la description des tâches que les élèves sont amenées à réaliser en chimie des solutions. L'interprétation théorique du dosage faisant intervenir des relations algébriques entre les différentes quantités d'espèces chimiques qui réagissent est une étape qui pose généralement un problème majeur aux élèves. GeoGebra permet la mise en place d'une nouvelle stratégie utilisant un autre registre de représentation sémiotique. Le modèle de l'ETM étendu associé à la chimie pourrait ainsi conduire à une analyse fine du travail des élèves. La dénomination ETM étendu est valable tant que la modification du modèle initial des ETM reste minime, c'est-à-dire avec des interactions entre un plan cognitif et un plan épistémologique. Lorsque, à l'avenir, nous serons amenés à considérer des interactions entre les deux plans épistémologiques, il sera plus judicieux de parler d'ETP à la place d'ETM étendu.

REFERENCES

Blum, W., Leiss, D. (2005). « Filling up » - the problem of independance-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. In M. Bosch (Ed.) *Proceedings for the CERME 4*, Spain. 1623–1633.

de Hosson, C., Kermen, I., & Parizot, E. (2010). Exploring students'understanding of reference frames and time in Galilean and special relativity. *Eur. J. Phy.*, *31*, 1527–1538.

Gauchon, L. (2008). Comprendre les titrages – Représentations d'élèves de première et terminale scientifiques et effets de quelques variables, Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, France.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM mathematics Education*, *48*, 721–737.

Moutet, L. (2016). Diagrammes et théorie de la relativité restreinte : une ingénierie didactique, Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, France, p 193-196 et 437-440. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01611332

Moutet, L. (2018). Analyse d'une séquence d'enseignement de la relativité restreinte : l'apport du modèle de l'ETM étendu. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *23*, 107–136.

Vergnaud, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels ? *Infancia y aprendizaje*, *36*(2), 131–161.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10.2*, 133–170.

FUNCIÓN DEFINIDA POR TRAMOS: ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO Y SU RELACIÓN CON LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Jesús Victoria Flores Salazar, Flor Isabel Carrillo Lara

Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

jvflores@pucp.pe, f.carrillo@pucp.edu.pe

El presente artículo es parte de una investigación en proceso que tiene como interés analizar cómo se dan las génesis semiótica, instrumental y discursiva cuando docentes de matemática en formación continua cuando realizan un trabajo matemático sobre la función definida por tramos. El estudio se realizó con diez profesores de matemática en formación continua en una universidad particular de Lima-Perú. Como base teórica se utilizan la teoría del espacio de Trabajo Matemático-ETM y aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Como resultado del trabajo matemático realizado por los docentes se evidencia que la tarea facilita la activación de los planos [Sem-Ins] e [Sem-Dis]. Además, de la articulación de por lo menos dos dominios matemáticos.

Palabras clave: *función por tramos, trabajo matemático, activación de planos.*

This paper is part of a research in process that aims at analyzing how semiotic, instrumental and discursive genesis occur when mathematics teachers in ongoing training do mathematical work on function defined by sections. The study was carried out with ten mathematics teachers in ongoing training in a specific university of Lima, Peru. The theoretical basis used is the theory of Mathematical Working Space and aspects from the Theory of Registers of Semiotic Representation. The mathematical work done by the teachers evidences that the task facilitates the activation of the [Sem-Ins] and [Sem-Dis] planes, besides the articulation of at least two mathematical domains.

Key words*: Function by sections, Mathematical work, Activation of planes.*

INTRODUCCIÓN

Estamos interesados en analizar cómo se dan las *génesis semiótica, instrumental* y *discursiva* de docentes de matemática en formación continua, cuando realizan un trabajo matemático sobre la función definida por tramos.

En cuanto a la función definida por tramos, investigaciones como las de Chumpitaz (2013), Xavier (2015) y Nascimento (2017) analizan, desde diferentes perspectivas teóricas y por medio de secuencias didácticas aplicadas a estudiantes de nivel secundario y superior, como estos movilizan la noción de función definida por tramos.

Sin embargo, aún son escasas las investigaciones en las que se estudie este objeto matemático pues, en el levantamiento realizado no hemos encontrado trabajos sobre la función por tramos en los que se utilicen las herramientas teóricas del Espacio de Trabajo Matemático-ETM y sus relaciones con la teoría de Registros de Representación Semiótica.

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

En relación a los aspectos teóricos presentamos, el Espacio de Trabajo Matemático-ETM específicamente nos centramos en las *génesis instrumental* y *discursiva* que favorecen la activación de los planos *semiótico-instrumental* e *instrumental-discursivo*.

En cuanto al Espacio de Trabajo Matemático, Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) consideran que el trabajo matemático que realiza el estudiante le permite la construcción de su propio conocimiento sobre la matemática. Sin embargo, afirman que este proceso es gradual, interactivo y complejo, asimismo sostienen que la evolución de los conocimientos matemáticos dependerá de la(s) tarea(s) propuesta(s) y de las actividades que el estudiante realice para revolverla.

Es por ello que, en esta investigación de acuerdo al ETM se identificará y analizará las génesis y la activación de los planos antes mencionados cuando docentes de matemática de nivel secundario resuelven una tarea sobre función definida por tramos.

En relación a la *tarea,* en el ETM Kuzniak, Tanguay y Elia (2016) explican que, de acuerdo a Sierpinska (citada en Kuzniak et al., 2016), es considerada como cualquier tipo de problema matemático, con preguntas establecidas de manera explícita y clara, que requiere un tiempo predecible para su resolución.

Por otro lado, explican que, en el sentido de Chevallard, una tarea está organizada en tipos de tareas y, posee un conjunto de técnicas y conocimientos matemáticos que la respalda.

También, los investigadores indican que en el ETM se articulan los planos epistemológico y cognitivo, a través de las génesis originadas por el trabajo matemático. Estas génesis son la *génesis semiótica*, la *génesis instrumental* y la *génesis discursiva*, que son detalladas a continuación:

- *Génesis semiótica*: basada en los registros de representación semiótica, “es el proceso asociado a los signos y representamen (o significantes), y que representa la relación dialéctica entre la sintáctica y las perspectivas semánticas sobre los objetos matemáticos, desarrollado y organizado mediante sistemas semióticos de representación” (Kuzniak, et al., 2016, p.726).
  Esto implica que, la génesis semiótica permite, además de exteriorizar las representaciones mentales del individuo, deducir significados mediante el descifrado e interpretación de signos o representamen. Ello, en su conjunto, favorece la actividad cognitiva del individuo.

- *Génesis instrumental:* “permite hacer a los artefactos operativos mediante los procesos de construcción que contribuyen a alcanzar el trabajo matemático” (Kuzniak, et al., 2016, p.726).
  Los investigadores se fundamentan en Rabardel, quien distingue dos componentes en la conformación de un instrumento: una parte artefacto, material o simbólico y, los esquemas de uso asociados a este artefacto. Por ello, señalan que el instrumento tiene un valor cognoscitivo ya que un artefacto se transforma en instrumento cuando el individuo construye una serie de esquemas para su uso.
- *Génesis discursiva*: “utiliza las propiedades del sistema de referencia teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y para una validación no solamente icónica, gráfica o instrumental. En la génesis discursiva de la prueba, las propiedades utilizadas en el razonamiento matemático dan el significado” (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016, p. 10).
  Los investigadores señalan que el objeto de esta génesis es la validación en sentido bidireccional, por un lado, un razonamiento discursivo apoyado en las propiedades del referencial teórico y, por el otro, la caracterización de propiedades y definiciones que se deben incluir en el marco de referencia posteriormente a un tratamiento instrumental o semiótico.

Además, Kuzniak y Richard (2014) identifican tres planos verticales en el ETM (ver figura 1) cada uno de los cuales está definido por la interrelación de dos génesis: semiótica instrumental [Sem-Ins]; instrumental discursivo [Ins-Dis] y; semiótica discursiva [Sem-Dis].

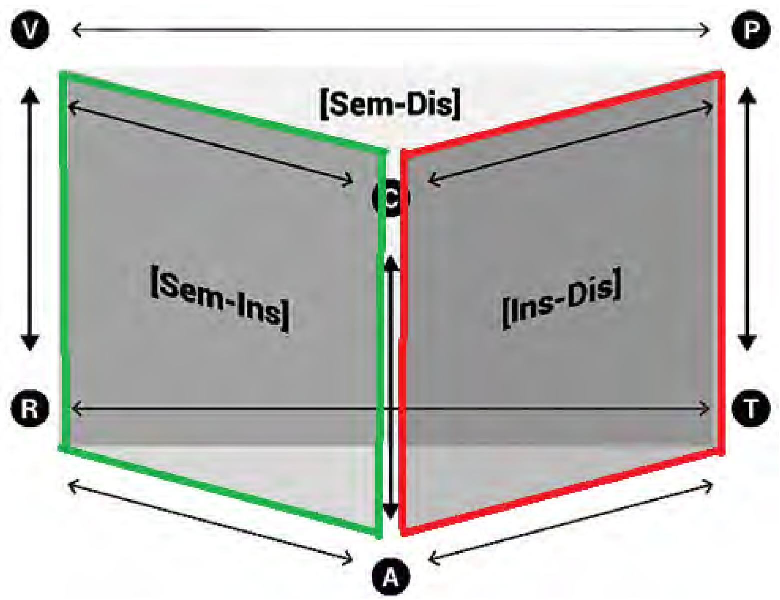


Figura 1. Los planos verticales (Kuzniak y Richard, 2014)

Como en el presente artículo centramos nuestra atención en los planos *semiótico instrumental* e *instrumental discursivo* los definimos a continuación:

- [Sem-Ins] asociado a una génesis semiótica y a la génesis instrumental. Se observan dos formas de trabajo, una orientada hacia la construcción de los resultados (figuras, gráficos) que cumplen algunas condiciones y la otra hacia la interpretación de los datos brindados por los artefactos.
- [Ins-Dis] asociado a una génesis discursiva de la prueba y a la génesis instrumental. En este plano, el punto crucial es la prueba que se basa en experimentos o en la argumentación deductiva pura.

Por otro lado, según Kuzniak y Richard (2014), en el ETM los planos verticales definidos se podrían conectar con las diferentes fases del trabajo matemático realizado en la realización de una tarea: descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación.

Así mismo, Kuzniak et al. (2016) explican que, para el trabajo matemático en el contexto escolar se tiene que tomar en cuenta las orientaciones curriculares que las instituciones educativas siguen y, que los profesores son los que concretizan en su trabajo en el aula. Por otro lado, según las funciones de la institución, el profesor y el estudiante, en el ETM se distinguen tres espacios de trabajo matemático, que son llamados: de referencia, idóneo y personal.

> De esta manera, el trabajo matemático en un marco escolar se puede describir gracias a estos tres niveles de ETM: la matemática considerada por la institución que se describe en el ETM de referencia, éste es desarrollado por el profesor hasta alcanzar un ETM idóneo que permita un establecimiento efectivo en clase, donde cada alumno trabaja en su ETM personal (Gómez-Chacón et al., 2016, p. 12).

Por otro lado, consideramos necesario para el análisis de la tarea sobre función definida por tramos además del ETM, considerar aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004, 2011), ya que afirma que aprender matemática involucra actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas. El autor explica que un objeto matemático no es factible de ser manipulado directamente, sino a través de sus representaciones las cuales corresponden a registros de representación semiótica (lengua natural, figural, algebraico y gráfico).

Asimismo, el autor define que los *tratamientos,* transformación interna, obedecen a reglas propias de cada representación como, por ejemplo, operaciones algebraicas (registro algebraico), traslación y rotación de figuras (registro figural), aproximación gráfica de la recta secante a la tangente de una curva (registro gráfico) entre otros. Mientras que la *conversión*, transformación externa, se realiza al cambiar una representación de un registro a otro. Del mismo modo, destaca la necesidad de coordinar diferentes registros y de articular las aprehensiones del registro figural (perceptiva, secuencial, operatoria y mereológica) pues es fundamental para una aprehensión conceptual de cualquier objeto matemático.

Siguiendo esa línea de pensamiento, como la función definida por tramos puede ser representada utilizando tecnología digital, como es el GeoGebra, consideramos necesario también incorporar a nuestro estudio las conexiones realizadas por Trouche (2016), Salazar (2018) y Peñaloza y Salazar (2018) sobre la pertinencia de la mediación de la tecnología.

En relación a los aspectos metodológicos, el estudio que se presenta es de corte cualitativo, pues de acuerdo con Borba (2010) toda investigación cualitativa tiene la fuente directa de los datos en el medio natural, es descriptiva y los investigadores cualitativos tienen más interés por el proceso que a los resultados o productos. También, la investigación cualitativa parte de una realidad específica, particular, e inmersa en un entorno social. Desde esa realidad, el investigador busca analizar e interpretar los comportamientos de los sujetos.

En cuanto al escenario de la investigación, esta se desarrolló en el marco de un seminario-taller realizado en mayo del 2018 en una universidad particular de Lima-Perú. Constó de dos sesiones de 90 min. cada una, en el que participaron diez docentes de matemática de nivel secundario.

En cuanto a las sesiones del seminario-taller, tuvieron lugar dos sábados consecutivos en un laboratorio de informática en el que está instalado el ambiente de representaciones dinámicas GeoGebra.

A continuación, presentamos la definición del objeto matemático del estudio.

FUNCIÓN DEFINIDA POR TRAMOS

Chumpitaz (2013), propone una definición a partir de un conjunto de funciones base.

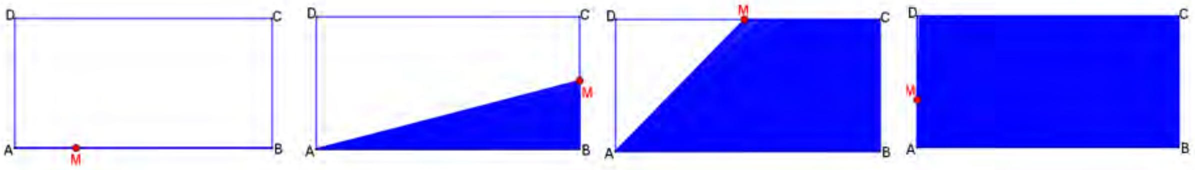
> Inicialmente fijamos una familia de funciones $F \subset \{f : R \to R\}$, que denominamos funciones básicas, y una familia Y de subconjuntos de R, $Y \subset P(R)$. Ejemplo, para $(F,Y): F$: Funciones polinomiales Y : Uniones a lo más numerables de intervalos
>
> *Definición*: Una función $f : A \to R$, donde $A \subseteq R$ es una función definida por tramos, si existe una colección o familia de funciones $\{f_i : A_i \to R\}_{i \in I}$ de la forma $f_i = f\,|_{A_i}$, donde $f \in F$ y $A_i \in Y$, $i \in I$, donde I es un conjunto de índices a lo más contable, de modo que:
>
> I. $f(x) = f_i(x)$ si $x \in A_i$, $i \in I$. (Propiedad de la regla por tramos)
>
> II. $A_i = \bigcup_{i \in I} A_i$. (Propiedad del dominio)
>
> III. $A_i \cap A_j = \phi$ para $i, j \in I$, $i \neq j$. (Propiedad del no solapamiento)
>
> Dados $i, j \in I$, $i \neq j$, $f_i = f\,|_{A_i}$, $f_j = g\,|_{A_j}$ con $f, g \in F$, se tiene que $f \neq g$. (Propiedad de la no redundancia). (Chumpitaz, 2013, p. 45).

LA TAREA Y SU ANALISIS

Sobre la tarea presentada en este artículo, es una adaptación de Xavier (2015). En realidad, es la segunda de una secuencia de tres tareas, que se desarrolló en un seminario-taller de formación continua de profesores de matemática realizado en mayo del 2018 en el marco de un proyecto de investigación del grupo de Tecnologías de la PUCP. Cabe resaltar que los diez profesores tienen experiencia docente entre 4 y 7 años y enseñan en instituciones educativas nacionales y particulares de Lima-Perú.

En la figura 2, a seguir, se presenta la tarea:

Como se muestra en la figura, un punto M se desplaza sobre el lado de un rectángulo $ABCD$ de 4 u.m. de largo y 2 u.m. de ancho. Llamamos "x" a la longitud del desplazamiento de A a M.



En base a esta información:

Exprese la medida del área de la parte sombreada de azul, con respecto al desplazamiento del punto M y represéntelo gráficamente.

Figura 2. Tarea (adaptada de Xavier, 2015, p.96)

Trabajo matemático esperado

En la figura 3, a seguir, presenta el desarrollo esperado de la tarea en cuatro etapas.

Por el trabajo matemático anterior se concluye que la medida del área de la parte sombreada de azul en relación al desplazamiento del punto M define a una función por tramos $f(x)$ cuya regla de correspondencia es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , & si \;\; 0 \leq x \leq 4 \\ 2x - 8\,, & si \; 4 < x \leq 6 \\ x - 2\,, & si \; 6 < x < 10 \\ 8 \quad , & si \; 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

La representación gráfica de *f(x)* puede ser realizada con lápiz y papel o con el uso del ambiente de representaciones dinámicas GeoGebra. Por ejemplo, en la figura 4 presentamos la representación de la función por tramos paso a paso usando el GeoGebra.

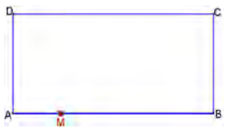
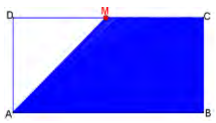
Etapas	Desplazamiento del punto M	Trabajo matemático esperado para cada tramo de la función
(1)		Cuando el punto M pertenece al lado AB del rectángulo, la medida del área es: $f(x) = (x)(0) = 0$
(2)		Cuando el punto M pertenece al lado BC del rectángulo, la medida del área $a(x)$ será dada por la medida del área del triángulo rectángulo ABM. $f(x) = \frac{(4)(x-4)}{2} = 2(x-4) = (2x-8)u^2$
(3)		Si el punto M pertenece al lado CD del rectángulo, la medida del área $a(x)$ será dada por la medida del área del trapecio rectángulo $ABCM$. $f(x) = \frac{(4+x-6)(2)}{2} = \frac{(x-2)(2)}{2} = (x-2)\ u^2$
(4)		Finalmente, cuando el punto M pertenece al lado AD del rectángulo, la medida del área $f(x)$ será dada por la medida del área del rectángulo $ABCD$: $f(x) = (4)(2) = 8u^2$

Figura 3. Trabajo matemático esperado

Como se muestra en la figura 4, las dos ventanas del GeoGebra (geométrica y grafica) permite coordinar las representaciones, figural y grafica de la función definida por tramos.

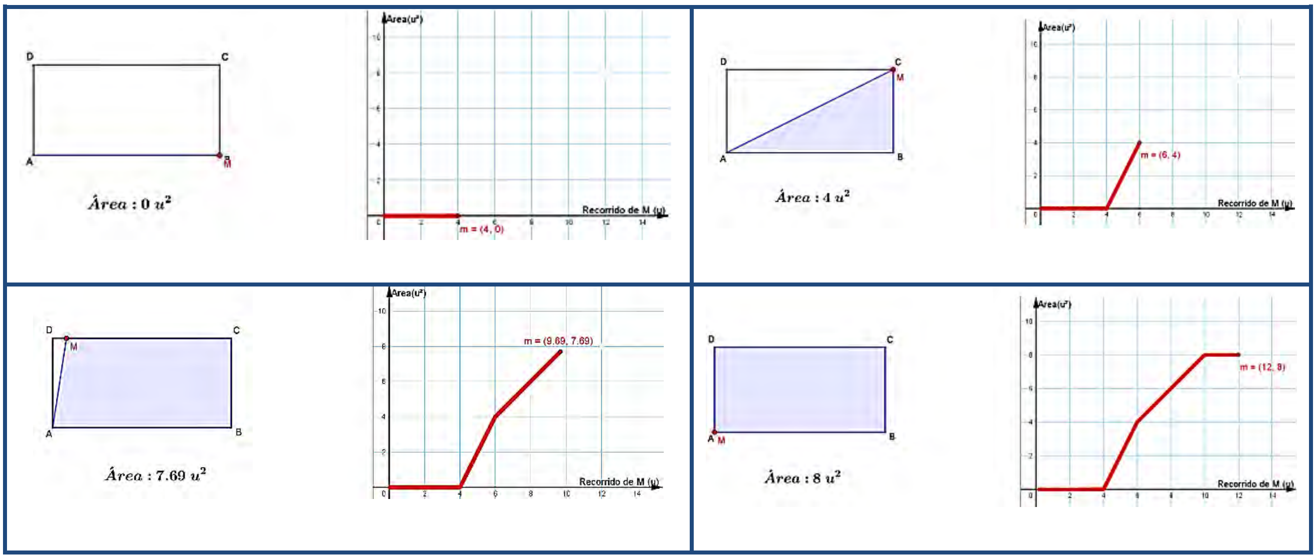


Figura 4. Representación gráfica_ GeoGebra

Trabajo matemático efectivo

En esta parte del análisis presentamos el trabajo matemático realizado por dos profesores participantes a los que llamaremos profesor A y profesor B. El profesor A utilizó el GeoGebra como medio para resolver la tarea, mientras que le profesor B lo hizo con lápiz y papel.

Profesor A

El profesor A identifica la trayectoria del punto M presentada en la representación figural resaltándola de color rojo luego, halla la medida de área de los polígonos (triángulo y trapecio) formados según cada trayecto recorrido por el punto M.

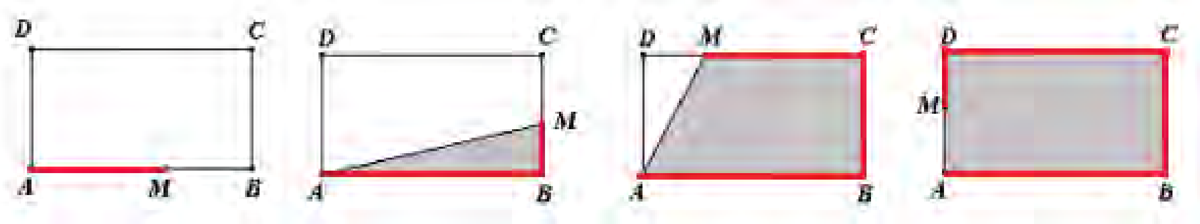


Figura 5. Identificación de trayectoria del punto *M* del Profesor A

Después de ello, calcula la medida del área de los diferentes polígonos.

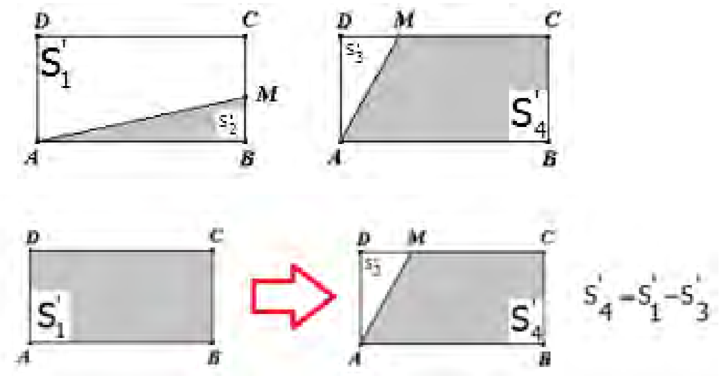


Figura 6. Cálculo del área del Profesor A

Y luego, asocia la noción de función definida por tramos, al trabajo realizado en el dominio de la geometría y para ello efectúa conversiones y tratamientos algebraicos los que le permiten obtener el resultado deseado.

En cuanto al trabajo matemático, este es semejante al esperado (cuatro pasos) y determina la regla de correspondencia de la función:

$$a(x) = \begin{cases} 0 \quad , & 0 \leq x \leq 4 \\ 2x - 8\,, & 4 < x \leq 6 \\ x - 2\,, & 6 < x < 10 \\ 8 \quad , & 10 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

Sin embargo, a diferencia de lo que esperamos (ver figura 4) para la representación gráfica de la función, el profesor A no asocia cada tramo de *a(x)* con la figura geométrica correspondiente. Lo que hace es tabular para construir la grafica de la función por tramos.

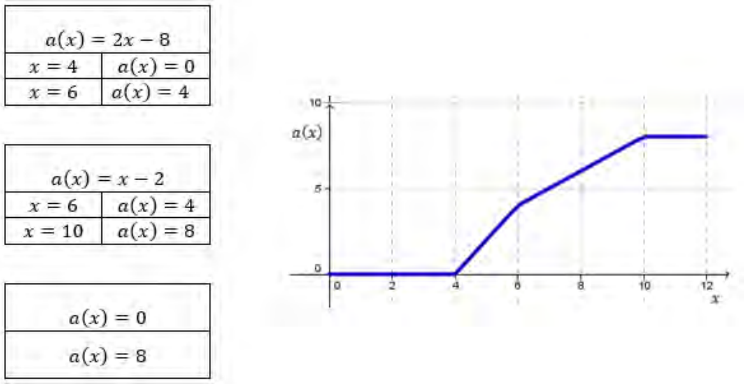


Figura 7. Representación tabular y gráfica del Profesor A

Análisis del trabajo matemático efectivo del profesor A

Presentamos en la tabla 1 el trabajo matemático del profesor A en relación con las diferentes génesis y la activación de los planos del ETM.

Trabajo matemático	Tipo de génesis	Planos activados
Identifica el desplazamiento del punto M presentado en la representación figural resaltándola de color rojo. Calcula la medida de área de los polígonos (triángulo y trapecio) formados según cada trayecto recorrido por el punto M.	Génesis semiótica: Emplea la representación figural para explicar el recorrido del punto M. Génesis instrumental: Identifica y emplea las definiciones de áreas de polígonos (artefacto simbólico).	**[Sem-Ins]**
Utiliza la fórmula de la medida de áreas de polígonos.	Génesis instrumental: Uso de herramientas algebraicas como artefacto simbólico.	
Determina la medida del área de los polígonos como una función, según cada tramo.	Génesis semiótica: Realiza conversiones y tratamientos algebraicos (figural y algebraica) que le permite obtener el resultado deseado. Génesis instrumental: Moviliza la definición de función definida por tramos (permite que el artefacto sea operatorio).	**[Ins-Dis]**
Representa gráficamente la función por tramos $a(x)$ empleando el ambiente de representaciones dinámicas GeoGebra.	Génesis semiótica: Coordina el registro algebraico y gráfico para representar la función por tramos.	**[Sem-Ins]**

Tabla 1. Análisis del trabajo matemático del profesor A

Profesor B

Con respecto al trabajo matemático, observamos que el profesor define la variable x, para cada tramo que recorre el punto M. Luego, utiliza la representación tabular para determinar la medida del área de cada polígono formado según el recorrido del punto M.

Valor de x	Valor del área *g(x)*
0	0
4	0
5	2
7	5
9	7
11	8

Tabla 2. Representación tabular del Profesor B

Posteriormente, el profesor B realiza varios tratamientos como: operaciones aritméticas, cálculos algebraicos, cambio de variable, etc. para determinar la regla de correspondencia de la función *g(x)*:

$$g(x)=\begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 2x-8 & , \quad 4 < x \leq 6 \\ x-2 & , \quad 6 < x \leq 10 \\ 8 & , \quad 10 < x \leq 12 \end{cases}$$

En cuanto a la representación gráfica de la función, no es posible observar los procedimientos realizados por el profesor B, pues grafica la función por tramos, sin ninguna explicación. Las acciones del profesor, podrían evidenciar que coordinó los registros algebraico y gráfico.

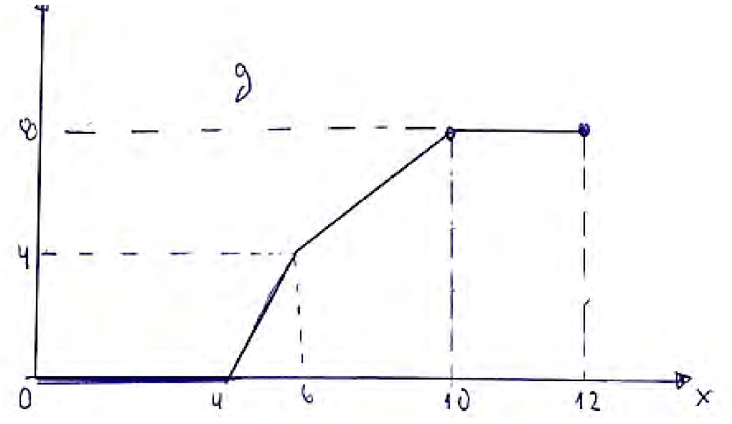


Figura 8. Representación gráfica del Profesor B

Las acciones del profesor, podrían evidenciar que coordinó los registros algebraico y gráfico.

Análisis del trabajo matemático efectivo del profesor B

En la tabla 3 presentamos el trabajo matemático del profesor B en relación con las diferentes génesis y la activación de los planos del ETM.

Trabajo matemático	Tipo de génesis	Planos activados
Identifica el recorrido del punto M y a dicha longitud la denomina con la variable x. Relaciona el recorrido del punto M con la medida de las áreas formadas por cada tramo.	Génesis semiótica: Usa representaciones para definir la variable x. Génesis instrumental: Emplea las definiciones de áreas de polígonos (artefacto simbólico).	**[Sem-Ins]**
Utiliza las fórmulas de la medida de las áreas de los polígonos.	Génesis instrumental: Utiliza las fórmulas como artefacto simbólico.	
Construye tablas y realiza operaciones algebraicas para obtener la función *g(x)* con su respectivo dominio.	Génesis semiótica: Emplea el registro tabular y algebraico. (tratamientos y conversiones) como función por tramos.	**[Ins-Dis]**
Determina la regla de correspondencia de la función definida por tramos.	Génesis semiótica: En el registro tabular calcula la longitud "x" (recorrido según el punto M).	**[Sem-Ins]**
Representa gráficamente la función por tramos $g(x)$ empleando lápiz y papel.	Génesis instrumental: Moviliza la definición de función por tramos (instrumento semiótico).	**[Ins-Dis]**

Tabla 3. Análisis del trabajo matemático del profesor B

Finalmente, podemos observar que la tarea presentada en el dominio de la geometría obliga a realizar un cambio de dominio al del análisis para este cambio, es necesario realizar tratamientos algebraicos.

CONCLUSIONES

Con respecto a los paradigmas del dominio de la geometría del ETM, en esta tarea se privilegia el paradigma GI porque se identifican polígonos asociados a la medida de su respectiva área.

En cuanto al dominio del análisis, al resolver la tarea se transita entre los paradigmas geométrico/aritmético (AG) y análisis calculatorio (AC) ya que se parte de una representación geométrica y se utilizan definiciones como la de función por tramos, dominio, variable independiente, etc.

En base a lo anterior, podemos afirmar que esta tarea permite que se den las génesis instrumental, semiótica y discursiva y la activación de los planos [Sem-Ins] y [Ins-Dis].

Como resultado del trabajo matemático realizado por los profesores A y B se pone en evidencia que la tarea favorece la activación de los planos [Sem-Ins] e [Sem-Dis]. Es decir, que la tarea ayuda en la articulación de dominios de la matemática como la geometría (registro figural) y el análisis (función por tramos en su representación algebraica y gráfica).

Por otro lado, en cuanto a la representación gráfica de la función definida por tramos realizada por los docentes participantes predomina el uso del GeoGebra ya que, por ejemplo, siete de los diez profesores participantes lo utilizaron para representar la función definida por tramos.

En cuanto al artefacto se evidencia que emerge el artefacto simbólico (herramientas algebraicas, etc.).

AGRADECIMIENTOS

A la Dirección de Gestión de la Investigación-DGI de la Pontificia Universidad Católica del Perú-PUCP, por el apoyo brindado en el marco del proyecto ID-575/2018, PUCP.

REFERENCIAS

Borba, M. (2010). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. São Paulo: Autentica.

Chumpitaz, L. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería* (Tesis de maestría PUCP).

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* (Myriam Vega, trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. (Obra original publicada en 1995).

Duval, R. (2011). *Ver y ensinar a matematica de outra forma: entrar no odo matemático de pensar: os registros de representa*çõe semióticas. Sau Paulo, Brasil: PROEM editora.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 30*(54), 1-22.

Kuzniak, A. y Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME, 17*(4-I), 17-28.

Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: An introduction. *ZDM, 48*(6), 721-737.

Nascimento, H. (2017). *Estudo de função: Uma proposta de reconstrução de atividades do Imagiciel mediadas pelo GeoGebra* (Tesis de maestria PUC-SP).

Peñaloza, T. N. y Salazar, J.V.F. (2018). Aprehensiones y modificaciones del registro gráfico-dinámico del paraboloide elíptico. *Educação Matemática Pesquisa, 20* (1), 61-83.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies : une approche cognitive des instruments contemporains*. Université Paris. Armand Colin.

Salazar, J.V.F. (2018). Semiotic representations: a study of dynamic figural register. In: *Signs of signification. Semiotics in Mathematics Education Research.* (pp. 217-233) Berlin: Springer International Publishing.

Trouche, L. (2016). Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. *I LADIMA,* Bonito, Brasil.

Xavier, A. (2015). *Um estudo da gênese instrumental para função de uma variável real com várias sentenças* (Tesis de maestría PUC-SP), Brasil.

ESTUDIO DE LOS PROCESOS COGNITIVOS PRESENTES EN LA DETECCIÓN DE SUBESPACIOS INVARIANTES EN TRANSFORMACIONES LINEALES DE R^2 EN R^2

Gisela Camacho Espinoza, Asuman Oktaç

CINVESTAV-IPN, México

gcamacho@cinvestav.mx, oktac@cinvestav.mx

Uno de los aspectos más ricos del Álgebra Lineal, y una fuente de dificultades en su aprendizaje, son las relaciones entre sus conceptos. En el marco de una investigación doctoral en curso sobre el aprendizaje de los conceptos vector y valor propio por medio de la detección de subespacios invariantes, nos referimos a las relaciones entre conceptos como subespacio vectorial, transformación lineal, sistema de ecuaciones y subespacio invariante y a las posibilidades de reestructuración de estas relaciones, en la mente de un individuo, con la intervención del ambiente digital GeoGebra. Para ello mostraremos el análisis del trabajo matemático de un profesor universitario, desde las perspectivas teóricas APOE y ETM.

***Palabras clave**: Álgebra Lineal, Subespacio invariante, Transformación lineal, ETM, APOE, Planos activos.*

INTRODUCCIÓN

Durante los cursos de Álgebra Lineal, las nociones que se estudian se vuelven cada vez más abstractas y sus relaciones con otros conceptos son menos evidentes para los estudiantes o más difíciles de comprender. Como ejemplo podemos mencionar las relaciones entre espacio vectorial, operación binaria y dependencia lineal (Parraguez y Oktaç, 2010); o las relaciones entre transformación lineal, base de un espacio vectorial e imagen de los elementos de una base bajo una transformación lineal (Uicab y Oktaç, 2006). En nuestra investigación doctoral en curso diseñaremos un modelo cognitivo para el aprendizaje de los conceptos vector y valor propio de una transformación lineal en R^2 por medio de la detección de subespacios invariantes.

Reportamos aquí algunos resultados sobre el trabajo matemático de un profesor en torno a la detección de subespacios invariantes bajo una transformación lineal, con el uso y sin el uso del software GeoGebra. Analizamos los datos desde las perspectivas teóricas APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y ETM (Espacios de Trabajo Matemático).

JUSTIFICACIÓN, ASPECTOS METODOLÓGICOS Y OBJETIVO DE LA COMUNICACIÓN

Nuestra investigación doctoral tiene como objetivo el diseño de un modelo cognitivo para la comprensión de los conceptos vector propio y valor propio de una transformación lineal en el espacio vectorial R^2. Planteamos la construcción de los conceptos vector y valor propio a partir de la identificación de relaciones entre los conceptos transformación lineal, subespacio vectorial de R^2, subespacio invariante, base de un subespacio vectorial e imagen de una base de un subespacio vectorial.

La detección de los subespacios invariantes en un medio dinámico como GeoGebra, para la posterior identificación de los vectores y los valores propios, puede ayudar en la comprensión del significado de los símbolos algebraicos que intervienen en la definición de esos conceptos. En GeoGebra se puede observar que la imagen de cualquier vector de un subespacio invariante es él mismo, o un alargamiento del vector original o un acortamiento del vector (en ambos casos puede ser en la misma dirección o en dirección contraria), o su reflexión respecto al origen, es decir el vector cero.

A partir de esto es posible vincular el estudio de los vectores propios y de los subespacios invariantes en el espacio R^2. Notar que la longitud de todos los vectores de la imagen de un subespacio invariante tiene el mismo factor de homotecia respecto a sus preimágenes ayuda a reflexionar sobre el concepto valor propio.

Este acercamiento permite visualizar que hay una infinidad de vectores propios asociados a un valor propio. Caglayan (2015) reportó que comprender esta propiedad es difícil para algunos estudiantes quienes asocian solo un vector propio a un valor propio. Nuestro acercamiento también permite pensar sobre los subespacios invariantes de transformaciones lineales singulares; esto lleva a comprender qué significa que el cero sea un valor propio y a reconocer la infinidad de vectores propios asociados, cuestiones que según Soto y García (2002) son difíciles de entender para los estudiantes.

No localizamos trabajos previos que involucren la detección de subespacios invariantes de manera explícita y el uso de tecnología, ni que propongan la construcción de los conceptos vector propio y valor propio a partir del estudio explícito de invariantes. Con el fin de informar nuestro análisis teórico, entrevistamos a 4 profesores universitarios mientras trabajaban en una actividad relacionada con vectores y valores propios y videograbamos las sesiones. A partir de la información obtenida al entrevistar a personas con mayor experiencia que un aprendiz, pretendemos obtener elementos para el diseño de nuestro modelo cognitivo.

En este artículo mostraremos el análisis de las respuestas de un profesor a tres preguntas del cuestionario que guio la entrevista. Nuestro objetivo es identificar elementos cognitivos relacionados con su comprensión del concepto de subespacio invariante, mismos que formarán parte del modelo para vectores y valores propios.

PERSPECTIVAS TEÓRICAS

Nuestra investigación —que es de corte cognitivo— usa dos perspectivas teóricas: la teoría APOE, acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema, y la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). La primera está inspirada en la noción de abstracción reflexiva de Piaget y plantea la elaboración de modelos cognitivos, llamados descomposiciones genéticas (DG). Una DG consiste en la descripción de las estructuras y mecanismos mentales que podrían intervenir en el aprendizaje de algún concepto matemático (Arnon, et al., 2014). La segunda perspectiva estudia el trabajo matemático de profesores y/o estudiantes; analiza la vinculación entre un plano epistemológico asociado a los contenidos matemáticos que se estudian o enseñan y un plano cognitivo asociado con un individuo involucrado en una actividad matemática de enseñanza o aprendizaje (Kuzniak et al., 2016).

La teoría APOE considera 4 tipos de estructuras mentales o concepciones: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas; y 6 mecanismos que permiten pasar de una estructura a otra: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión, desencapsulación y tematización; aclaramos que la construcción del conocimiento no necesariamente ocurre de manera lineal.

Se dice que un individuo cuenta con una concepción Acción de un concepto si puede transformar o actuar sobre un Objeto cognitivo particular existente para él, usando una sucesión ordenada de pasos y a través de un estímulo externo. Se utiliza el mecanismo de interiorización cuando una Acción se convierte en un Proceso como resultado de una repetición reflexiva, sin depender de estímulos externos. El Proceso es interno y está bajo el control del individuo (Asiala et al., 1996) quien puede transformar Objetos genéricos en su mente; un Proceso es una estructura dinámica. Un Proceso también puede construirse mediante la coordinación de por lo menos dos Procesos existentes. Se utiliza el mecanismo de encapsulación cuando surge la necesidad de concebir el dinamismo del Proceso como una totalidad que también puede transformarse (Dubinsky et al., 2005); como resultado el Proceso se convierte en Objeto. Es posible recuperar un Proceso que generó un Objeto, por medio del mecanismo de desencapsulación.

La teoría ETM concibe una estructura abstracta con un plano epistemológico y uno cognitivo. Explica cómo la demostración y la argumentación, el uso de herramientas tecnológicas y las aproximaciones semióticas intervienen en la realización de tareas matemáticas desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje (Kuzniak et al., 2016). El plano epistemológico está integrado por los representámenes en el sentido de Peirce (1931, citado en Kuzniak et al., 2016) y Duval (1993); los artefactos materiales y simbólicos de Rabardel (1995, citado en Kuzniak et al. 2016) y el marco teórico de referencia integrado por propiedades, teoremas y axiomas.

El plano cognitivo está formado por la visualización, relacionada con la codificación y la interpretación de signos; la construcción, vinculada con las acciones y los resultados obtenidos tras el uso de artefactos; y la prueba relacionada con los procesos de validación y argumentación. Los planos se conectan por medio de la génesis semiótica, la génesis instrumental y la génesis discursiva. Es posible analizar las circulaciones de conocimiento en los planos semiótico-discursivo, semiótico-instrumental e instrumental-discursivo atendiendo a las génesis respectivas.

En la teoría APOE no es explícito el rol de las génesis que involucran representámenes y artefactos en la construcción de conocimiento y por consecuencia en la construcción de estructuras mentales. Sin embargo, la teoría APOE puede proporcionar elementos para la elaboración de actividades de intervención en el aula para potenciar las construcciones o visualizaciones surgidas de esas génesis fomentando mecanismos mentales aplicables a las estructuras detectadas en esos procesos de ETM.

ANÁLISIS DE ALGUNOS EXTRACTOS DE ENTREVISTA

El profesor entrevistado es matemático de formación, docente e investigador; imparte con regularidad las materias Álgebra Lineal I y II en una universidad pública de la Ciudad de México. Fue entrevistado y videograbado mientras resolvía la actividad que se le presentó. En las transcripciones se denotará con PB al profesor y con E a la entrevistadora. Las expresiones textuales del profesor que no aparecen como extracto de entrevista aparecerán entre comillas.

Episodio 1. Los subespacios vectoriales de R^2

Al inicio de la entrevista el profesor explicó la definición de subespacio invariante utilizando un diagrama conmutativo con elementos teóricos compartidos entre el Álgebra Lineal y la Teoría de Conjuntos. Después trabajó en la pregunta: *Considera la transformación lineal* $T: R^2 \to R^2$ *tal que* $T(x, y) = (-x + y,\ \frac{1}{2}y)$*, ¿cómo determinarías los subespacios invariantes de* T*?* El profesor explicó que buscaría el subespacio H tal que la imagen de cada uno de sus elementos permaneciera en H. Al intentar precisar la respuesta dijo:

PB: Creo que en este caso sería más fácil decidir si me das un subespacio arbitrario, el que tú quieras, decidir si es T-invariante. Es más fácil en este caso... Porque describir todos los subespacios es un problema de hasta dónde llego, hasta qué descripción quieres.

No hay un algoritmo preestablecido que permita obtener los subespacios T-invariantes de un espacio vectorial bajo una transformación lineal. El profesor tenía que movilizar su Esquema de transformación lineal para precisar su respuesta. Observamos que no se enfocaba en R^2; él estaba pensando en una situación problemática más general.

Para impulsar la reflexión le preguntamos por los subespacios de R^2. El profesor dijo que los subespacios no triviales son las rectas que pasan por el origen y utilizó la ecuación $y = kx$ para algún k en R. Pensar gráficamente le permitió realizar tratamientos en el registro algebraico y avanzar hacia la solución del problema (Figura 1).

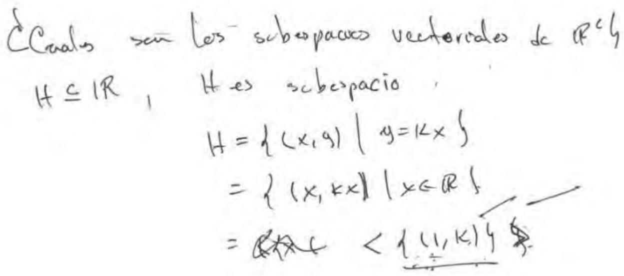


Figura 1. Descripción de los subespacios vectoriales elaborada por el profesor

Desde la perspectiva de la teoría APOE podemos decir que el profesor muestra una concepción Objeto del concepto subespacio vectorial porque es consciente de que puede Actuar sobre él, al aplicarle la transformación lineal. El profesor desencapsuló el Objeto en el Proceso que lo generó y lo representó de 2 maneras, como se ilustra en la Figura 2. Según la teoría APOE, para pasar de una representación a otra, el individuo primero tiene que regresar al Proceso del concepto. En este caso, el profesor pensó el Proceso con la representación $\{(x, kx)|x \in \mathbb{R}\}$, regresó al Proceso que subyace esa representación y enseguida tomó otra representación que consideró más útil, en este caso $\langle\{(1, k)\}\rangle$. La teoría ETM hace visible el trabajo necesario para esto y aspectos cognitivos que lo hacen posible.

En el trabajo del profesor está involucrado un tránsito entre dos dominios: el dominio de la Geometría Analítica y el del Álgebra Lineal. Cuando se enfocó en R^2, recurrió al plano cartesiano como representación. Utilizó la pendiente del objeto recta que pasa por el origen, de la geometría analítica, para identificar los subespacios vectoriales no triviales; usó la ecuación $y = mx$ y la transformó.

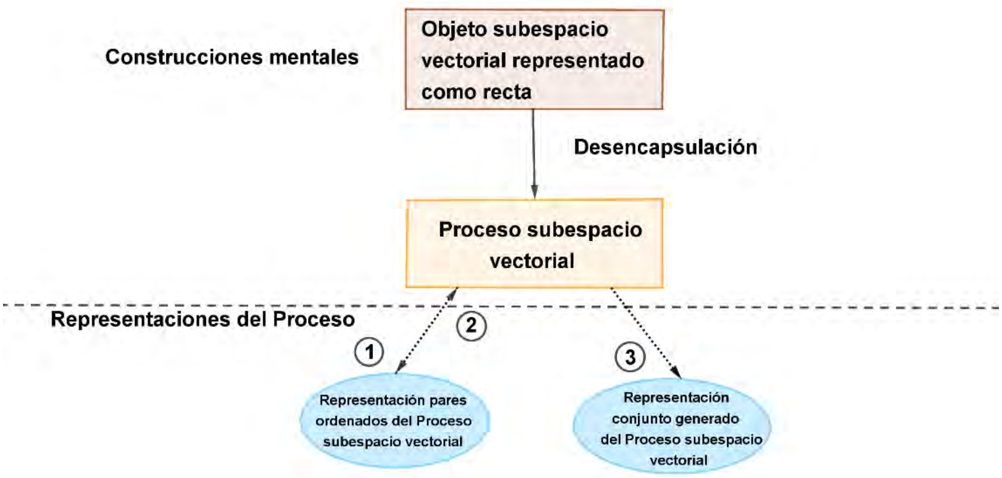


Figura 2. El profesor desencapsuló el Objeto subespacio vectorial

Por lo anterior consideramos que existe un cambio de dominio y no solo de registro, pues la pendiente del objeto geométrico le da información para pensar en el vector generador del objeto del Álgebra Lineal. Los tratamientos en la expresión de la Geometría Analítica le permitieron justificar por qué esas rectas representan subespacios generados por $(1, k)$.

El trabajo matemático del profesor se sitúa en el plano Semiótico-Discursivo (véase la Figura 8 al final del artículo). Se activó la génesis discursiva cuando llamó elementos de su referencial de Geometría Analítica y Álgebra Lineal para establecer conexiones entre las rectas que pasan por el origen en el plano cartesiano y los subespacios vectoriales en R^2. Después se activó la génesis semiótica, codificando por medio del registro algebraico-analítico, las características gráfico-cartesianas de un subespacio vectorial. Por medio de tratamientos visualizó características del subespacio que no había considerado cuando pensaba de manera general. De este modo, podemos observar que las representaciones del Proceso están ligadas a cambios de dominio y tratamientos en el registro algebraico-analítico.

Episodio 2. La determinación de subespacios invariantes usando lápiz y papel

Para encontrar los subespacios invariantes bajo T el profesor obtuvo la imagen de un elemento genérico del subespacio, $T(x,kx) = \left((k-1)x, \frac{1}{2}kx\right)$, y propuso la igualdad $\left((k-1)x,\ \frac{1}{2}kx\right) = (y, ky)$. Después obtuvo un sistema de ecuaciones y realizó tratamientos como se ve en la Figura 3.

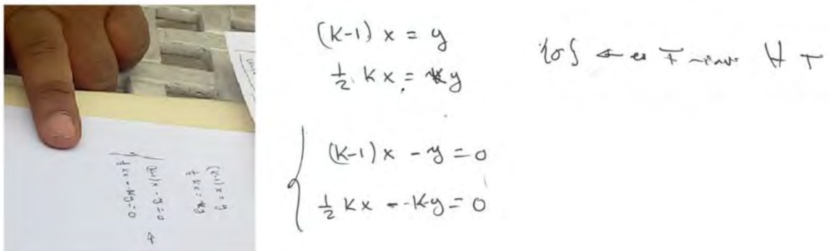


Figura 3. Sistema de ecuaciones obtenido por el profesor

El profesor buscó la solución del sistema para las variables x y y, perdiendo el objetivo de identificar un vector generador del subespacio por medio del parámetro k. Construyó la matriz asociada al sistema homogéneo, como se señala con el óvalo rojo en la Figura 4. Escalonó la matriz como se señala en verde y obtuvo un sistema de ecuaciones equivalente, encerrado en azul. El profesor intentó resolverlo y obtuvo soluciones equivocadas. No logró obtener los subespacios invariantes. En este episodio el profesor comenzó a trabajar en el dominio del Álgebra Lineal, pues se refirió explícitamente a la noción de subespacio vectorial. El registro de representación que utilizó fue el algebraico.

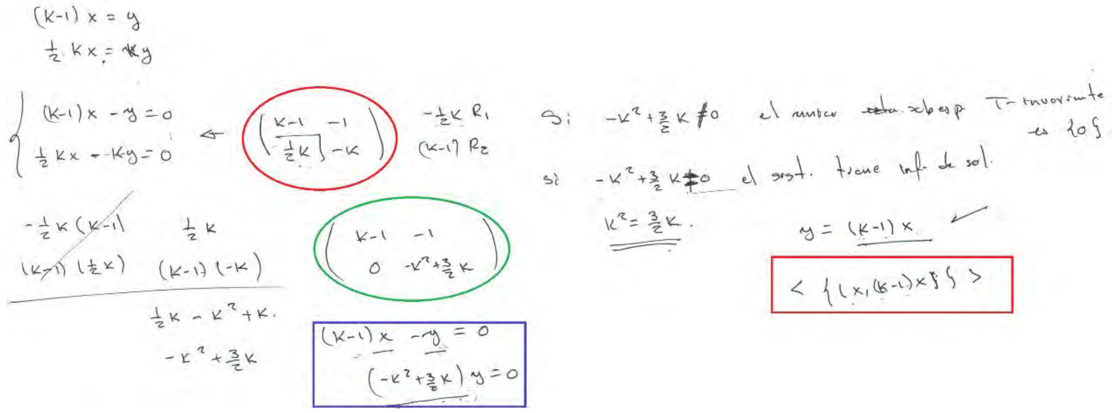


Figura 4. Sistema de ecuaciones presentado por el profesor

El profesor trabajó en el plano Semiótico-Discursivo. Activó la génesis discursiva al relacionar la estructura de un vector genérico de un subespacio genérico con la estructura de su imagen. Por medio de la génesis semiótica codificó sus ideas provenientes de la génesis discursiva para expresar la igualdad de pares ordenados; por medio de tratamientos obtuvo el sistema de ecuaciones de la Figura 4. Después el trabajo matemático se ubicó en el plano Semiótico-Instrumental, con un cambio al subdominio del Álgebra Superior.

El profesor transformó el artefacto simbólico sistema de ecuaciones, por medio de una matriz asociada, en un instrumento para obtener lo que él consideró una solución. El trabajo se realizó en el subdominio del Álgebra Superior mediante la manipulación matricial de manera algorítmica y el profesor no pudo dar sentido a la construcción surgida del instrumento. Observamos que el profesor no distinguió la incógnita del sistema entre las variables y el parámetro; así la génesis instrumental falló. Esta circulación puede verse en la Figura 8.

Desde la teoría APOE observamos que, para determinar la imagen de un elemento genérico de un subespacio genérico, el profesor aplicó la Acción transformación lineal al Objeto subespacio vectorial; esto también puede pensarse como la aplicación del Proceso transformación lineal a los elementos vectores, vistos como Objetos. Luego, intentó coordinar el Proceso de transformación lineal con el Proceso sistema de ecuaciones mediante la igualdad de las entradas del vector genérico de la imagen y el vector genérico del subespacio. Sin embargo, el profesor no tiene el Proceso parámetro en sus construcciones mentales, lo que le impide interpretar adecuadamente el sistema de ecuaciones y el significado de su solución y, como consecuencia, no se logró esa coordinación (Ver la figura 5). El Profesor utilizó la representación matricial del sistema de ecuaciones, para realizar Acciones propias del Álgebra de matrices, y obtuvo soluciones incorrectas.

La falla del trabajo matemático del profesor en el plano semiótico-instrumental surge de la ausencia del Proceso parámetro. Este Proceso se encuentra en las entrañas de la génesis semiótica activada por el profesor, así como en la génesis instrumental.

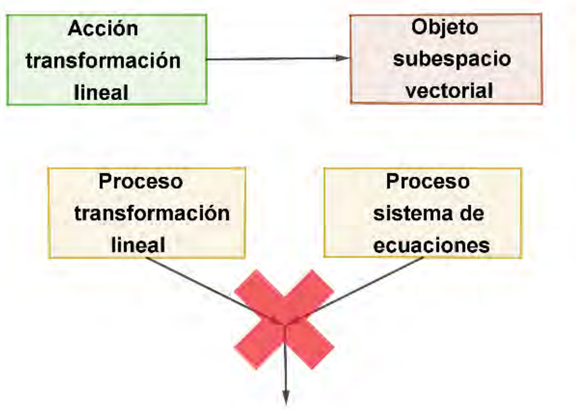


Figura 5. El profesor no logró coordinar los Procesos transformación lineal y sistema de ecuaciones.

Episodio 3. Determinación de los subespacios invariantes con GeoGebra

En una segunda sesión de entrevista presentamos al profesor un ambiente dinámico prediseñado con GeoGebra para explorar la transformación lineal $T(x,y) = (-x + y, \frac{1}{2})$. La pantalla presenta un vector móvil y varias casillas que pueden activarse (Figura 6). El usuario puede deslizar el punto final del vector móvil a lo largo de una recta roja que pasa por el origen, o de una recta roja que no pase por él (Recta libre) activando la casilla correspondiente; puede ver la imagen de dicho vector, el Rastro del vector imagen, o la Imagen de la recta. Las rectas móviles pueden cambiar de posición y pendiente por medio de arrastre. Algo similar sucede con la casilla Circunferencia. Siempre es posible para el usuario del ambiente ver al mismo tiempo un vector y su imagen en la pantalla. Esto permite analizar los efectos de la transformación en subconjuntos del plano como rectas o circunferencias.

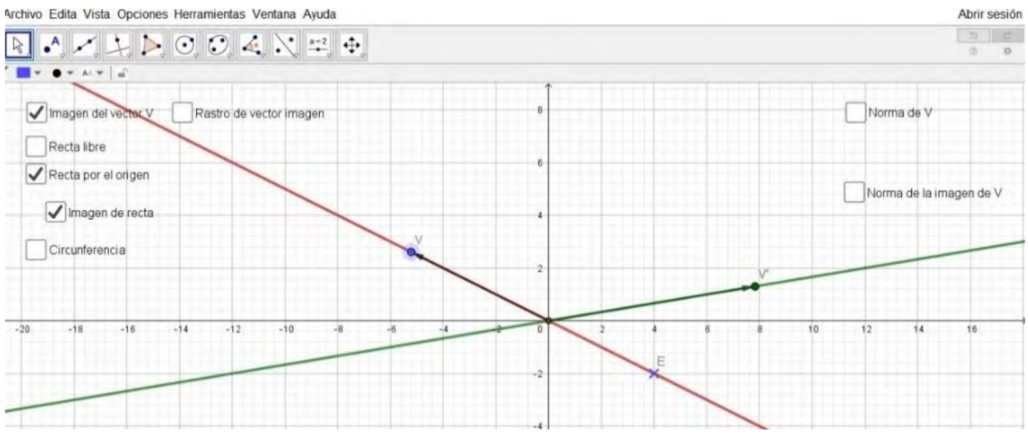


Figura 6. Pantalla del ambiente dinámico presentado al profesor

Cuestionamos al profesor sobre cómo podría encontrar los subespacios invariantes de T utilizando el ambiente dinámico. Explicó nuevamente que los subespacios de R^2 son las rectas que pasan por el origen, y dijo que un subespacio es invariante si la transformación "manda la recta en sí misma". El profesor activó las casillas "Recta que pasa por V" e "Imagen de la recta" (recta en color verde). El profesor comenzó a arrastrar la recta móvil girándola en el sentido de las manecillas del reloj hasta que coincidió con su imagen mientras explicaba: "Nada más sería recorrer y ver dónde se empatan" (véase la Figura 7).

Después de realizar los cálculos, el profesor afirmó que la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ es un subespacio T-invariante. Continuó girando la recta y ubicó la recta $y = 0$ como un segundo subespacio invariante. El profesor planteó una conjetura para transformaciones de R^2 en R^2: los subespacios "son T-invariantes si y solamente si son característicos"; dijo que podría generalizarse a R^n. Sin embargo, reflexionó en momentos posteriores de la entrevista y dijo estar casi seguro de que su conjetura no era correcta para $n \geq 3$.

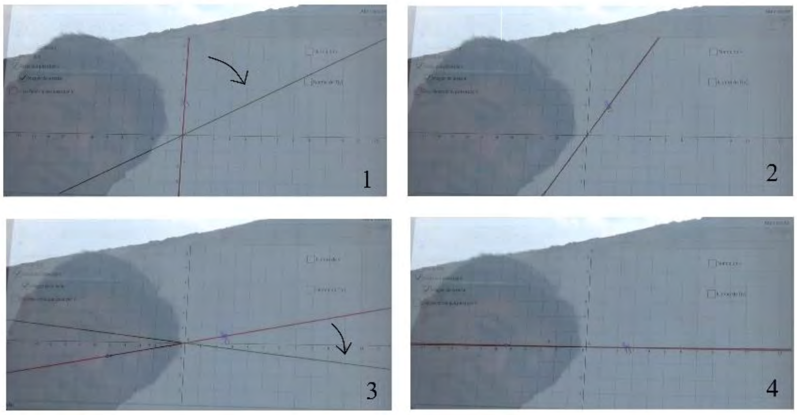


Figura 7. El profesor arrastró la recta móvil de manera circular.

El inicio de la actividad se ubicó en el plano semiótico-discursivo. El profesor usó la génesis discursiva, cuando razonó sobre los subespacios vectoriales de R^2 y lo que debe suceder para que un subespacio sea invariante. Casi simultáneamente regresó a la génesis semiótica; asoció el representamen recta ofrecido por el medio digital, al concepto subespacio vectorial de R^2 y visualizó todos los posibles subespacios distintos de $\{0\}$. Este trabajo se realizó en el dominio del Álgebra Lineal; los representámenes utilizados son compartidos con el dominio de la Geometría Analítica, pero son utilizados como representámenes de conceptos propios del Álgebra Lineal.

Después el trabajo matemático se ubicó en el plano semiótico-instrumental; el profesor generó esquemas de uso en el ambiente digital. Comenzó un proceso de instrumentación para identificar los subespacios invariantes al rotar la recta móvil hasta hacerla coincidir con su imagen. Cuando el profesor se preguntó por la pendiente de esa recta, recurrió a su referencial teórico de Geometría Analítica y se activó la génesis discursiva en el plano instrumental-discursivo; el profesor dedujo los subespacios invariantes de manera precisa teniendo en cuenta la información obtenida por medio del instrumento.

Desde la teoría APOE, detectamos que el profesor utilizó su Objeto subespacio vectorial al pensar las rectas por el origen como subespacios que pueden ser evaluados en la transformación. En el ambiente dinámico el profesor realizó una Acción al manipular el subespacio, lo rotó para poder observar su imagen y así buscar las rectas que son su propia imagen bajo T. La Acción se realizó de manera explícita: el profesor arrastró la recta utilizando el mouse en el ambiente dinámico; esto equivale a aplicar T al subespacio móvil. Aunque en el ambiente se está realizando una Acción externa sobre la representación perceptible del Objeto subespacio vectorial, los argumentos del profesor demuestran que en realidad está utilizando un Proceso. El ambiente dinámico permite trabajar con muchos subespacios de R^2 y el profesor es consciente de ello; sabe que cuando la recta cambia de posición está representando subespacios diferentes. Puede considerar todos los subespacios posibles, teniendo en cuenta las limitaciones propias de GeoGebra. Por ejemplo, es posible activar el rastro de la recta que pasa por V mientras el usuario realiza el arrastre y observar que hay lugares del plano que quedan sin huella del rastro del arrastre de la recta.

Este Proceso de transformación lineal se coordinó en la mente del profesor con el Esquema de conjuntos que incluye la contención, cuando el profesor comparaba la imagen del subespacio móvil con el subespacio móvil; de este modo, cuando percibió que la recta y su imagen coinciden logró reconocer los subespacios invariantes. Para obtener la representación algebraica del subespacio el profesor realizó la Acción de calcular la pendiente de la recta que reconoció como invariante. Esta circulación se observa en la Figura 8.

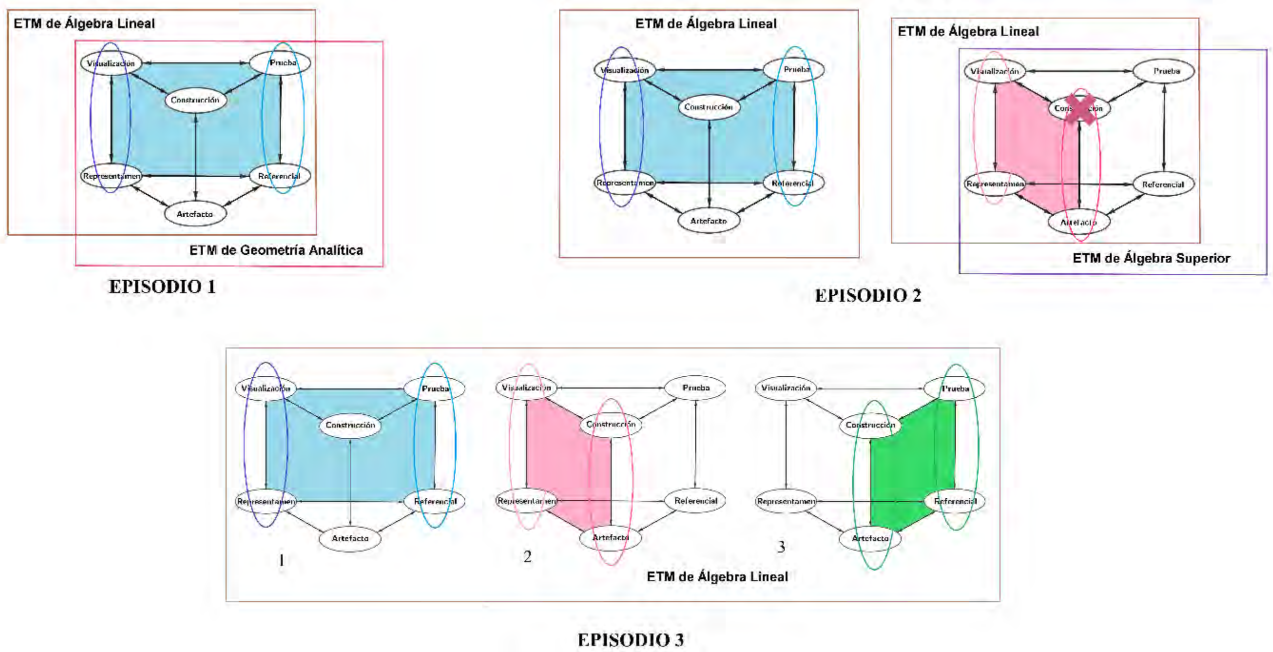


Figura 8. Circulaciones de conocimiento en el trabajo matemático del profesor

CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de la actividad propuesta al profesor destacamos la importancia de las características de su concepción Proceso de subespacio vectorial. Observamos que, aunque un individuo cuente con estructuras cognitivas diversas de diferentes conceptos, esto no implica que su Esquema de transformación lineal, concepto central en el Álgebra Lineal, sea lo suficientemente coherente para enfrentar tareas poco convencionales. El uso del software mostró que la génesis instrumental puede favorecer coordinaciones entre Procesos y Esquemas que son difíciles de lograr en lápiz y papel, así como el tránsito con consciencia cognitiva entre los dominios del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica, útiles en la determinación de subespacios invariantes.

Como producto de esta experiencia, para el diseño del modelo cognitivo de la investigación doctoral, desde la teoría APOE proponemos que el Objeto subespacio vectorial sea construido a partir de la encapsulación de un Proceso que permita su representación gráfica y algebraica como conjunto de pares ordenados y como conjunto generado. En el modelo consideraremos coordinaciones entre Procesos por medio de la activación de génesis semiótica e instrumental, principalmente, mediante el uso de GeoGebra que en este caso mostró ser útil en la extensión del Esquema de transformación lineal del profesor, quien gracias al desencadenamiento de dichas génesis pudo determinar los subespacios buscados. En nuestro análisis observamos que es posible promover mecanismos mentales y en consecuencia relaciones entre estructuras mentales a partir de las génesis de ETM y de manera recíproca considerar mecanismos y estructuras para favorecer las génesis que conectan los planos del ETM.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York, NY: Springer.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education, II CBMS Issues in Mathematics Education,* Vol. 6 (pp. 1-32). Providence, RI: American Mathematical Society.

Caglayan, G. (2015). Making sense of eigenvalue-eigenvector relationships: Math majors' linear algebra – Geometry connections in a dynamic environment. *The Journal of Mathematical Behavior, 40*(B), 131-153.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335-359.

Duval. R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10,* 5-53.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 721-737.

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, *432*(8), 2112-2124.

Soto, J. L., & García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in R^2 y R^3. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level.* University of Crete. Recuperado de: http://users.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap370.pdf

Uicab, R., & Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(3), 459-490.

PLANOS DIRIGIDOS EN EL ETM PERSONAL DE PROFESORES EN FORMACIÓN: UNA HERRAMIENTA METODOLÓGICA

Romina Menares Espinoza

Universidad de Valparaíso, Chile

romina.menares@uv.cl

El presente trabajo se enmarca en la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en el dominio del Análisis (ETM_{An}), centrado en el objeto función continua. Presentamos evidencias en el ETM_{An} personal de profesores en formación inicial, sobre la eventual diferenciación de los trabajos matemáticos que privilegian un mismo plano vertical, como resultado del liderazgo de una de sus génesis. Denominamos "plano dirigido" a aquel que se conforma por la coordinación de dos génesis pero donde una de ellas es quien dirige el trabajo en el plano. Lo anterior abre una perspectiva de análisis, que se presenta como una herramienta metodológica, y nos conduce a una mayor especificidad en el estudio de los ETM.

***Palabras clave**: Espacio de Trabajo Matemático, planos verticales, planos dirigidos.*

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentamos algunos resultados de una investigación que pone en su centro al profesor de secundaria, y su trabajo con las funciones continuas. En particular, nos interesa mostrar evidencias sobre el estudio del ETM_{An} *personal* de profesores en formación inicial, y cómo la búsqueda de una caracterización del trabajo nos abre una perspectiva para la diferenciación de la actividad matemática relacionada con la presencia de una génesis del ETM que actúa como *directora*.

Asumimos la idea de que en un proceso donde se ve activado un ETM, las génesis que se desencadenan no aparecen de manera aislada. Se trata más bien de una articulación y una interdependencia entre ellas. Aquellos vínculos entre una génesis y otra son lo que se han definido como *planos verticales* del ETM, formulados en sus comienzos por Coutat y Richard (2011), en el dominio particular de la geometría, y adaptado al espacio de trabajo matemático en general por Richard y Kuzniak (2014).

La idea de planos verticales ([sem-ins], [ins-dis] y [sem-dis]) recoge el sentido de diferentes fases del trabajo matemático implementado en la ejecución de una tarea. "La ejecución efectiva de estas fases definirá un cierto número de competencias matemáticas cognitivas fundamentadas en la coordinación de las génesis en sus relaciones con el plano epistemológico" (Richard y Kuzniak, 2014, p. 5).

En nuestra investigación, además de identificar fases donde se activan planos verticales en el desarrollo de una tarea, pudimos observar, dentro de un plano vertical, la presencia de una génesis que dirige el trabajo y que se distingue como responsable de motivar y desencadenar el proceso en la otra génesis. En este trabajo mostraremos algunas producciones de profesores en formación inicial que evidencian estos resultados.

Lo que presentamos como *plano vertical dirigido* nos permite indagar sobre dónde radica la diferenciación entre dos trabajos que activan el mismo plano vertical y que se reconocen como trabajos distintos. Esta idea constituye para nosotros una herramienta metodológica para hacer más profundos y exhaustivos los análisis de las producciones que se ubican dentro de un plano vertical.

Las conclusiones apuntan a las posibilidades que entrega este estudio para una mayor especificidad en la descripción del ETM *personal* de profesores, así como a una comprensión más profunda sobre la razón de ser de la activación de las génesis en una actividad matemática.

ESTUDIO DE LOS PLANOS DIRIGIDOS EN EL *ETM PERSONAL* DE PROFESORES EN FORMACIÓN INICIAL

Analizar la actividad matemática basándose en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático implica, por un lado, cuestionarse acerca de las génesis que se activan y cómo ellas se coordinan. Bajo una necesidad surgida en nuestro estudio de diferenciar dos trabajos que activan las mismas génesis y que sin embargo son notoriamente distintos, es que proponemos los *Planos Dirigidos* como una forma de dar mayor especificidad a los análisis. Básicamente, se trata de identificar, en la activación de un plano vertical, una génesis que además de predominar en el trabajo, lo dirige, es decir, la actividad matemática que se desarrolla en esta fase de trabajo, se realiza con el fin dotar a la génesis *directora* de elementos. Naturalmente, existirá dentro del plano otra génesis que actuará como *empleada*, sin descartar la posibilidad de que las génesis cambien de roles dentro del mismo trabajo matemático. Si esto último sucede, identificamos una nueva fase, y decimos que en ella se activa otro plano vertical dirigido (el que va en el sentido opuesto).

Cabe notar que, aunque no tenemos evidencia de ello, es posible que en un trabajo matemático no exista tal génesis *directora* dentro de un plano vertical y que ambas génesis tengan el mismo rol. En este sentido, hasta ahora solo hemos hallado en nuestros análisis, trabajos en donde solo una génesis se activa, y en tal caso decimos que el plano vertical no se activa.

Estudio del ETM personal de profesores en formación inicial

A continuación, mostramos aspectos específicos del análisis del ETM_{An} *personal* de profesores en formación inicial, a saber, aquellos que guardan relación con la activación de un plano vertical y el liderazgo de una génesis que llamamos directora. Para presentar ejemplos de planos verticales dirigidos y la diferenciación en los trabajos matemáticos, nos basamos en distintas resoluciones de una tarea determinada, donde se puede evidenciar un plano vertical activado y, lo que es esencial para nosotros, el liderazgo de dos génesis distintas. Seleccionamos 4 de un total de 31 producciones de profesores en formación inicial que respondieron a esta tarea, los cuales, en el momento de la aplicación, cursaban la asignatura de *Cálculo I* en una universidad chilena.

La tarea planteada a los profesores en formación no es original de este trabajo; ha sido adaptada de un problema propuesto por Carlson y Bloom (2005), y que se ha utilizado en diferentes contextos en Francia y México (Kuzniak, Parzysz, Santos-Trigo y Vivier, 2011), y reformulado por Kuzniak, Parzysz y Vivier (2013). La tarea que nosotros hemos considerado es la siguiente:

Tarea: Un cuadrado de papel que tiene las caras de distinto color, es doblado formando un triángulo cuyo vértice pertenece a la diagonal de dicho cuadrado. ¿Existe alguna forma de doblar el cuadrado de manera que las áreas visibles de diferente color tengan igual medida? Explique su respuesta.

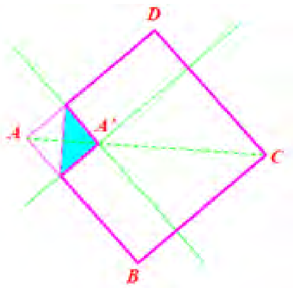


Tabla 1: Tarea planteada en nuestro estudio para explorar el ETM personal del profesor en formación inicial.

El enunciado que los autores Kuzniak, Parzysz y Vivier (Ibíd) plantean, demanda determinar el punto del vértice A' (el que se ha doblado) de manera de obtener el área total visible "mitad de color y mitad blanca" (p.415). Cabe señalar que la tarea original de Carlson y Bloom (2005) hace lo mismo, pero para un área específica dada (3 in^2). Kuzniak et al. (2013) proponen dos grandes tipos de razonamientos esperados para la resolución: el primer tipo de razonamiento tendrá relación con el planteamiento de expresiones algebraicas para las áreas y la formulación de una ecuación cuadrática cuya solución será el punto requerido; el segundo tipo de razonamiento se enmarca en el registro figural y tiene que ver con identificar tres áreas (la de color, la blanca, y una que no existe en el plegado real y que completa al área de color para formar el cuadrado original), así, se plantea y se resuelve una ecuación que suma las tres áreas (iguales) y la iguala al área del cuadrado original.

De manera de llevar el problema al dominio del cálculo, hicimos modificaciones para que la tarea admita ser abordada utilizando funciones continuas y el Teorema del Valor Intermedio (TVI). Con nuestro nuevo enunciado abrimos esa posibilidad, pues ahora la demanda es otra: en efecto, no solicitamos encontrar el punto A', sino mostrar argumentos que aseguren su existencia, lo que amplía el espectro de posibles resoluciones, en particular aquellas que reconocen la propiedad de continuidad en la situación planteada.

Aspectos metodológicos: Planos verticales dirigidos como unidad de análisis

La investigación corresponde a un estudio cualitativo de casos (Simons, 2011; Yin, 2009). Como se dijo, la tarea fue planteada a 31 profesores de secundaria en formación inicial, considerados en esta investigación como un caso múltiple (Yin, 2009). El caso es escogido de manera intencional opinático (Ruiz, 2003), pues se trata de estudiantes que de manera voluntaria acceden a responder al cuestionario. De los 31 profesores en formación, en el momento de la implementación, 19 cursaban *Cálculo I* por primera vez (donde ya habían tratado función continua y Teorema del Valor Intermedio); los 12 restantes cursaban *Cálculo I* por segunda vez, es decir, habían tenido contacto con las funciones continuas formalmente en más de una oportunidad, y de estos últimos, 11 lo habían cursado en otra institución. Para la resolución de la tarea, los profesores en formación inicial disponen de una hoja donde aparece el enunciado, papel lustre, regla, tijeras, y el software geométrico *Geogebra*.

Los análisis de las producciones se basaron, en primer lugar, en identificar las génesis que se ponen en juego, y cuáles de ellas aparecen articuladas. Dentro de la dinámica de las génesis en los planos verticales, se identificó aquella génesis que dirige el trabajo (dirección del plano vertical o plano vertical dirigido).

A continuación proponemos una caracterización de cada plano vertical dirigido. Esta caracterización se convierte en una herramienta metodológica para describir de manera más exhaustiva el trabajo matemático impulsado por una tarea que entrega posibilidades de ser resuelta en el dominio del cálculo.

Plano semiótico-discursivo dirigido por la génesis semiótica **([Sem-**dis**]):** En un trabajo matemático, consideramos la presencia del plano vertical *semiótico-discursivo* dirigido por la génesis semiótica cuando el discurso construido proviene de la dinámica producida por los procesos semióticos y de visualización. No es la razón de ser de este trabajo el obtener proposiciones que se puedan articular utilizando conectivos lógicos dentro del discurso (como *si* o *entonces*). Un ejemplo de ello es cuando se representa en el plano alguna ecuación algebraica con dos variables y se concluye acerca de su comportamiento o propiedades a partir de lo que se visualiza.

Plano semiótico-discursivo dirigido por la génesis discursiva **([Dis-**sem**]):** El plano vertical *semiótico-discursivo* tendrá dirección desde lo discursivo a lo semiótico cuando se trata de trabajos cuyos procesos de visualización, de tratamiento y de conversión en uno o más registros, o de usos de distintos signos y significados, se realizan motivados por el afán de dotar al referencial teórico (y con ello a la génesis discursiva) de elementos que pueden constituir, por ejemplo, una hipótesis, definiciones o teoremas, que se puedan articular en un discurso.

Plano instrumental-discursivo dirigido por la génesis instrumental **([Ins-**dis**]):** Consideramos el plano vertical *instrumental-discursivo* dirigido por la génesis instrumental cuando son los artefactos y sus usos los que dirigen el trabajo. Todo el discurso proviene de los resultados que los procesos de instrumentalización y construcción entregan. Un ejemplo de ello es cuando se obtienen conclusiones respecto a objetos teóricos a partir de un proceso algorítmico, pero en su inicio los argumentos no son visibles.

Plano instrumental-discursivo dirigido por la génesis discursiva (**[Dis-**ins**]):** Hablamos de plano vertical *instrumental-discursivo* dirigido por la génesis discursiva, cuando la dinámica de instrumentalización y los procesos de construcción se realizan con el afán de dotar al discurso de elementos teóricos. En este trabajo es posible distinguir pasos en los procesos de construcción que van acompañados de argumentos observables. Un ejemplo de ello es cuando se requiere realizar una prueba y para ello se necesita de un cálculo algorítmico que entregue mayor información sobre los objetos teóricos. En este caso se tiene a priori claridad sobre los argumentos que se utilizarán en la prueba.

Plano semiótico-instrumental dirigido por la génesis semiótica (**[Sem-**ins**]):** Se identifica la activación del plano vertical *semiótico-instrumental* dirigido por la génesis semiótica cuando, con el afán de visualizar objetos matemáticos, ya sea para una comprensión propia del individuo o para ser mostrado a alguien más utilizando procesos semióticos, se hace uso de instrumentos como un medio que permite representar. Por ejemplo, cuando se quiere representar una ecuación de dos variables en el plano y, con tal de encontrar elementos claves, como identificar los ceros de la función (puntos donde corta al eje X) o identificar dónde corta al eje Y, se realizan utilizan algoritmos conocidos.

Plano semiótico-instrumental dirigido por la génesis instrumental (**[Ins-**sem**]):** Consideramos el plano vertical *semiótico-instrumental* dirigido por la génesis instrumental cuando, con el afán de instrumentalizar un artefacto y construir, se realizan procesos semióticos que entregan la posibilidad de uso. Generalmente se identifica este plano dirigido cuando los signos no permiten en primera instancia la utilización de un artefacto con un uso determinado, y se debe adecuar el signo para que resulte apto para ser utilizado. Un ejemplo de ello es cuando, con el fin de aplicar el método de resolución de un sistema de ecuaciones "*de igualación*", antes se realizan procesos semióticos de tratamiento en cada ecuación para adecuarla, dejando las expresiones dependiendo de una única variable.

La caracterización de los planos dirigidos -que presentamos como pieza esencial de este estudio- nos permite, como investigadores, tomar decisiones acerca de la dinámica entre génesis en fases del trabajo matemático. Suponemos que las definiciones entregadas sobre cada plano vertical son perfectibles y además pueden depender del dominio de la matemática donde se enmarca la resolución de la tarea. Consideramos que nuevos estudios donde se identifican génesis directoras y planos verticales dirigidos nos pueden llevar a una caracterización más efectiva para los análisis del ETM.

ANÁLISIS Y RESULTADOS SOBRE PLANOS DIRIGIDOS EN EL ETM PERSONAL DE PROFESORES EN FORMACIÓN INICIAL

Para la tarea presentada (Tabla 1) es principalmente relevante para nosotros si el profesor utiliza o no el objeto función, pues no existe una función que se pueda reconocer de manera inmediata o explícita en el enunciado. Además, la pregunta se plantea en el dominio de la geometría (se utiliza un cuadrado, un triángulo, y el objeto área), por lo que es parte de nuestros análisis identificar si el profesor en formación permanece en un dominio geométrico, o realiza un cambio de dominio y resuelve el problema desde una perspectiva analítica o algebraica.

De los 31 profesores en formación a los que se le presenta la tarea, 27 la resuelven, llegando a una respuesta (correcta o incorrecta). Presentamos a continuación dos estrategias distintas que adoptan los profesores para responder a la tarea.

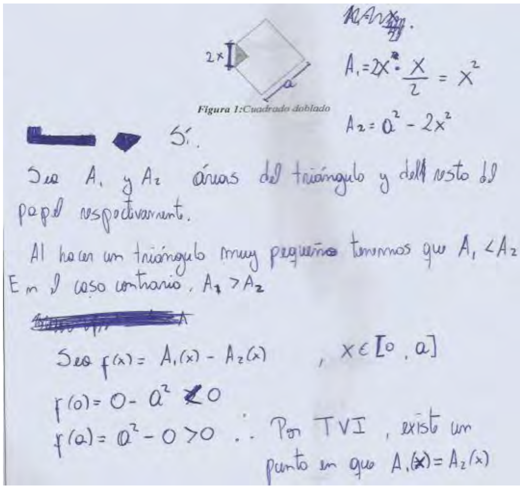
Primera estrategia

Una de las estrategias encontradas (adoptada por 4 profesores en formación) considera dos funciones, expresadas algebraicamente, que modelan las áreas (Figura 1 A y B) a partir de la figura.

En ambas producciones podemos identificar claramente el uso de funciones. De manera conveniente, E1 considera la hipotenusa (o la base) del triángulo de color como $2x$, y concluye que la altura es x. No tenemos evidencia sobre cómo se obtuvo la conclusión de esto último, pero una posibilidad es que haya considerado las diagonales del cuadrado que se forma completando el triángulo de color. Con lo anterior, E1 obtiene expresiones algebraicas para las áreas de color y blanca (A_1 y A_2 respectivamente). Más adelante, E1 formula una función, que llama f, y está dada por la diferencia de áreas en el punto x.

Un asunto que nos parece interesante de destacar en la producción de E1 es que antes de expresar la función f, entrega una idea que nos indica la presencia de elementos de *visualización* que, es posible, les hayan sido útiles para saber cuáles elementos serán necesarios para construir su prueba. Nos referimos a la frase: "*al hacer un triángulo muy pequeño temenos que* $A_1 < A_2$. *En el caso contrario* $A_1 > A_2$". También está la posibilidad de que la frase aparezca en la producción de E1 solo con fines explicativos, de manera de convencer a quien lee su trabajo sobre la necesidad de considerar la función f.

A



Sí.
Sea A_1 y A_2 áreas del triángulo y del resto del papel respectivamente.
(En la parte superior derecha de la imagen:

$A_1 = 2x \cdot \frac{x}{2} = x^2$

$A_2 = a^2 - 2x^2$)

Al hacer un triángulo muy pequeño temenos que $A_1 < A_2$. En el caso contrario $A_1 > A_2$

(borra)

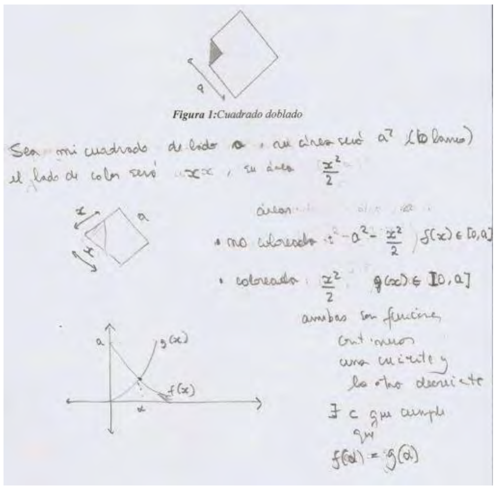
Sea $f(x) = A_1(x) - A_2(x) \quad , x \in [0, a]$

$f(0) = 0 - a^2 < 0$

$f(a) = a^2 - 0 > 0$

$\therefore$ Por TVI, existe un punto en que $A_1(x) = A_2(x)$

B



Sea mi cuadrado de lado a, su área será a^2 (blanco)
el lado de color será x, su área será $\frac{x^2}{2}$
(dibujo de un cuadrado)
áreas

- No coloreada: $a^2 - \frac{x^2}{2} \quad f(x) \in [0, a]$
- Coloreada: $\frac{x^2}{2} \quad g(x) \in [0, a]$

(gráfica)
Ambas son funciones continuas
una creciente y la otra decreciente
$\exists c$ que cumple que $f(\alpha) = g(\alpha)$

Figura 1 A y B: Estrategias de los profesores en formación E1 y E12 respectivamente

Por último, E1 muestra que f cumple las hipótesis de desigualdad, requeridas para finalizar su discurso utilizando el TVI, concluyendo finalmente que existe un punto donde las áreas A_1 y A_2 son iguales. E1 no menciona la propiedad de continuidad de la función f que construye, por lo que su prueba, si bien tiene la estructura de demostración, falla en la hipótesis de continuidad para poder concluir con el Teorema del Valor Intermedio. Lo anterior puede ser explicado con la idea de “continuidad natural” desarrollada por Durand-Guerrier y Vivier (2016), pues los estudiantes acostumbran a tratar en sus cursos funciones que son efectivamente continuas, lo que los lleva a obviar esta propiedad. También es posible que E1 sí haya reflexionado sobre la continuidad de f, pero no haya visto la importacia de explicitar la propiedad en sus hipótesis por considerarlo como un hecho evidente. Sobre esto último, no contamos con las evidencias suficientes para concluir de manera certera.

Para el caso de la producción de E12, se pueden identificar varios errores en sus argumentos. En primer lugar, E12 construye dos funciones (para las áreas visibles “*no coloreada*” y “*coloreada*”) y las llama f y g respectivamente, que dependen del cateto del triángulo isósceles coloreado. El cálculo del área “*no coloreada*” no es correcto. E12 denomina por a (fijo) al lado del cuadrado y decide, sin entregar argumentos, que "$f(x) \in [0,a]$" y que "$g(x) \in [0,a]$". Cabe destacar que ambas afirmaciones son falsas, pues al reemplazar la función f en 0 y g en a, según las expresiones algebraicas que E12 determina, se tiene que: $f(0) = \frac{a^2}{2} = g(a)$, lo que puede no pertenecer al intervalo cerrado $[0,a]$ para ciertos a.

E12 declara que "*ambas funciones son continuas, una creciente y la otra decreciente*", lo cual es verdadero, y a partir de ello concluye la existencia del punto donde ambas funciones toman el mismo valor (aunque no lo escribe de manera correcta). Debemos destacar que esta última implicancia no es correcta, pues no están las hipótesis suficientes para que las funciones se encuentren en un punto (no es suficiente que las imágenes de las funciones f y g pertenezcan al intervalo cerrado $[0,a]$).

Como conclusión podemos decir que ambas producciones fallan en las hipótesis para concluir con el TVI; en efecto, E1 no explicita que la función construida es continua (aunque no podemos concluir que no pensó en la propiedad de continuidad), y E12 entrega una expresión incorrecta del área y una hipótesis que no es suficiente, aunque sí explicita la continuidad de las funciones. Además, E12 no menciona explícitamente el TVI, pero es posible que haya pensado en ese teorema para concluir.

Teóricamente, interpretamos las producciones de E1 y E12 bajo dos miradas posibles que pueden ser complementadas: en primer lugar, podemos asumir que la(s) función(es) que se formulan para modelar la situación constituyen -en ambas producciones- elementos con un uso específico: obtener las hipótesis para concluir utilizando el TVI. Así, podemos identificar procesos de construcción y artefactos simbólicos (la función) instrumentalizados bajo una acción específica. Esta postura se puede ver incluso afianzada indagando en el ETM-*idóneo*, pues es posible que los estudiantes acostumbren (o no) en clases a resolver estos tipos de problemas de existencia, formulando una función (continua) con el fin de aplicar el TVI, por lo que además la formulación de la función puede ser un proceso algoritmizado en la sala de clases.

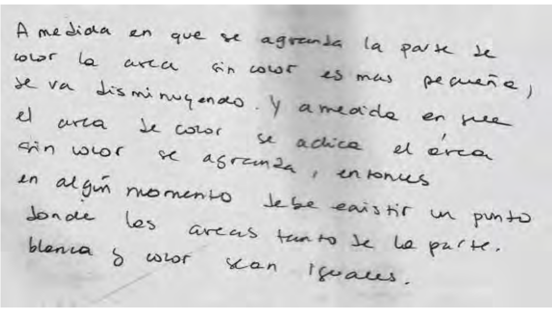
Por otro lado, podemos identificar procesos semióticos de conversión, pues la tarea está planteada en lenguaje natural y además en un contexto geométrico, donde la figura es crucial. En ambas producciones hay usos de signos distintos dentro del lenguaje algebraico, a saber: expresiones algebraicas, cuyos significados guardan relación con las áreas, y signos como $f(x)$ y $g(x)$ que se relacionan con reglas que definen funciones. El tratamiento en el lenguaje algebraico de la expresión algebraica a la función, lleva consigo un cambio de significados, lo que nos indica movimientos en la génesis semiótica del ETM.

Concluyendo nuestro estudio de las producciones de E1 y E12, podemos decir que en ambos trabajos se identifica la activación de la génesis instrumental y de la génesis semiótica, donde se reconoce una complementariedad entre una y otra. Sin embargo, lo que realmente queremos hacer notar en las resoluciones de la tarea, es la intención de construir funciones que van a satisfacer las hipótesis del TVI (en E1 la utilización del teorema es explícito mientras que en E12 es implícito) y con ello dotar al referencial teórico de elementos para construir una prueba. Esto último es la razón de ser de la activación de las génesis semiótica e instrumental. Por lo tanto, identificamos a la **génesis discursiva** como aquella que dirige el trabajo. Concluimos que en este trabajo predominan los *planos verticales dirigidos* **[Dis-**sem**]** y **[Dis-**ins**]**, y que además ambos planos se ven complementados.

Segunda estrategia

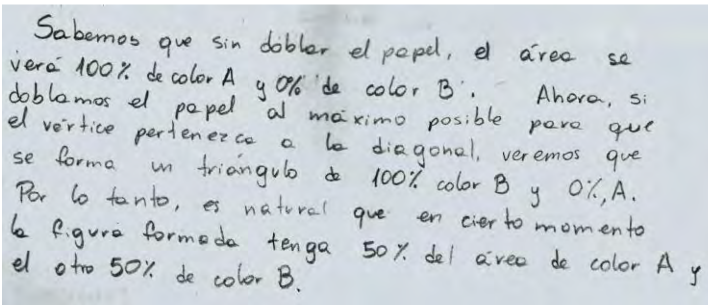
Otra estrategia encontrada (adoptada por otros 7 profesores en formación) considera la idea de que *como una medida se agranda y la otra se achica, existe necesariamente un punto en el que las medidas coinciden* (Figura 2).

A



Transliteración: A medida en que se agranda la parte de color la area sin color es mas pequeña, se va disminuyendo y a medida en que el area de color se achica el área sin color se agranda, entonces en algún momento debe existir un punto donde las areas tanto de la parte blanca y color sean iguales.

B



Transliteración: Sabemos que sin doblar el papel, el área se verá 100% de color A y 0% de color B. Ahora, si doblamos el papel al máximo posible para que el vértice pertenezca a la diagonal, veremos que se forma un triángulo de 100% color B y 0%, A. Por lo tanto, es natural que en cierto momento la figura formada tenga 50% del área de color A y el otro 50% de color B.

Figura 2 A y B: Estrategias de los profesores en formación E2 y E6 respectivamente

Ninguno de los estudiantes (Figura 2 A y B) explicita la característica de "continuidad del movimiento", ni la presencia de funciones continuas en su trabajo matemático. Sin embargo, en ambas producciones podemos encontrar evidencias de que el movimiento continuo es un elemento que les permite obtener conclusiones (E2 dice: "*entonces en algún momento debe existir un punto…*" y E6 dice: "*es natural que en cierto momento…*") Nuevamente existe la posibilidad de explicar este fenómeno con la idea de "continuidad natural" de Durand-Guerrier y Vivier (Ibíd). En efecto, en este caso los datos nos muestran respuestas basadas en la experiencia en el mundo real, donde es posible que no se asuma la necesidad de explicar o explicitar el movimiento continuo o la variación continua de los tamaños.

Ambas respuestas (Figura 2 A y B) tienen un sentido físico, y el Teorema del Valor Intermedio está presente de manera implícita e intuitiva. Podemos entonces observar que, en la formulación de argumentos, aparecen elementos de la componente referencial teórico del ETM articulados con la visualización, pero esta última tiene un rol preponderante para hallar conclusiones al respecto.

Notemos que ni en la producción de E2 ni en la de E6 es visible el referencial teórico, y que no es la razón de ser del trabajo dotar a esta componente de elementos (como del TVI o de sus hipótesis), sino más bien explicar de manera real y perceptiva lo que ocurre en el papel.

Concluimos entonces que la génesis que dirige el trabajo es la **génesis semiótica**, quien es apoyada por el discurso, el cual permite explicar lo que sucede de acuerdo al movimiento continuo del papel, por lo que identificamos al *plano vertical dirigido* **[Sem-**dis**]** como el que se ve activado de manera principal en este trabajo.

Otro asunto que destacamos, es que en esta estrategia pueden aparecer artefactos de tipo material -como papel lustre- que se utiliza para hacer los dobleces (y que por lo tanto articula a la génesis instrumental). Es decir, la preponderancia de uno de los planos verticales dirigidos no descarta la presencia de alguna otra génesis, en este caso, la génesis instrumental.

Por último, nos parece importante resaltar que, en la investigación donde se enmarca este trabajo, el análisis de las producciones de los profesores en formación fue complementado con el estudio sobre los paradigmas del análisis, descrito en Montoya Delgadillo y Vivier (2016). Esto permitió una mayor profundización en la caracterización del trabajo matemático de los profesores en formación inicial.

En el sentido de los paradigmas, y de manera general, caracterizamos los trabajos de E1 y E12 principalmente en el paradigma *AC*, pues existen reglas del cálculo que se aplican directamente y sin mayor reflexión sobre la naturaleza de los objetos que se introducen (como en el caso de E1 cuando no explicita la continuidad de la función). Ahora bien, en la misma producción de E1 podemos identificar la presencia de elementos que sugieren un tránsito al paradigma *AR* (E1 dice: "*Al hacer un triángulo muy pequeño temenos que* $A_1 < A_2$. *En el caso contrario* $A_1 > A_2$"), pues existe una reflexión previa sobre lo que sucede analíticamente en el plano en cuanto a las desigualdades.

Los trabajos de E2 y E6, en cambio, los identificamos en el paradigm *AG*, por tratarse de argumentos no completamente formales del dominio del análisis, con elementos del dominio que están implícitos y resultados que son apoyados en lo que se percibe del mundo real.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los principales resultados se refieren a la posibilidad de diferenciar dos trabajos que activan los mismos planos verticales, pero que involucran una demanda cognitiva distinta. El horizonte de trabajo también se diferencia al liderar una u otra génesis, por lo que destacamos el rol de cada una de ellas (rol de *directora* o rol de *empleada*). Lo anterior nos entregó mayor información sobre las distintas dinámicas que pueden darse dentro de un mismo plano vertical, más allá de cuál es la génesis de partida o la génesis predominante, y constituyó una herramienta metodológica para analizar las producciones con una mayor precisión.

Además de las oportunidades en investigación que nos entrega el identificar la génesis *directora* en el plano vertical, otra posibilidad tiene relación con la toma de decisiones sobre, por un lado, la forma en cómo se enuncia la tarea de manera de provocar el liderazgo de una u otra génesis, y por otro lado, la manera de organizar un ETM *idóneo* en un ambiente de aula, que transite de un plano dirigido a otro (que involucre las mismas génesis) y así dar un giro en el trabajo de los estudiantes. Consideramos que esto último entregaría más riqueza al trabajo, pues consideraría distintos enfoques para resolver tareas, que pueden incluso ser complementados. Un trabajo con liderazgo de génesis distintas puede tanto cambiar el objetivo de la clase para el profesor, como concebir y manipular los objetos desde distintas perspectivas por parte de los estudiantes.

En cuanto a las distintas producciones mostradas para la tarea *del cuadrado de papel*, podemos decir que, en un contexto de enseñanza, es posible fomentar la transición de respuestas como las de E2 y E6 a otras como las de E1 y E12. En efecto, aquellas producciones que tienen que ver con un sentido físico y experiencial de la continuidad y del TVI, pueden significar el punto de partida para comenzar a trabajar objetos del análisis y avanzar a su forma más abstracta, o también puede significar dar un sentido real a los objetos abstractos estudiados en cursos de análisis.

En cuanto a la tarea propuesta, esta entrega distintas posibilidades de resolución, lo que la transforma en una tarea potencialmente rica en cuanto a ser desarrollada con estrategias variadas y en distintos niveles de enseñanza. En efecto, por un lado la tarea está planteada en un contexto geométrico, además puede ser resuelta utilizando elementos del álgebra, o bien, pueden darse respuestas en un contexto analítico, como se mostró en este trabajo.

Dado lo anterior, lo propuesto en esta investigación podría contribuir a estudios que buscan mermar la brecha que existe en el pasaje del profesor desde su formación universitaria hacia el liceo, lo que se identifica como una parte de la *doble discontinuidad de Klein* (Winslow y Groenbaek, 2014). Formular en la formación inicial tareas que se enmarcan en el dominio del análisis, pero que pueden ser tratadas en otros dominios o, más aún, desde lo que se percibe en la vida real, podría ser un paso.

El análisis de los planos verticales dirigidos nos entrega una posibilidad para profundizar en el trabajo del profesor en formación. Es posible que nuevas investigaciones nos entreguen evidencias sobre la relación entre el trabajo en un paradigma y el liderazgo de alguna génesis en el plano, sin embargo, este es un cuestionamiento que se está iniciando y sobre el cual aún no se han encontrado resultados.

REFERENCIAS

Carlson, M. & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving:an emergent multidimensional problem solving framework. *Educational Studies in Mathe*matics, 58, 45-75.

Coutat, S. & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 97-126.

Durand-Guerrier & Vivier (2016). Densité de D, Complétude de R et analyse réelle. Première approche, Proceedings in INDRUM 2016 (pp. 143–152)

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A. Parzysz, B. & Vivier, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training, *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1 y 2), 407-440.

Kuzniak, A., Parzysz, B., Santos-Trigo, M. & Vivier, L. (2011). Problem solving and open problem in teachers' training in the French and Mexican modes, Proceedings of CERME 7, 9-13/02/2011 Rzeszów, Poland (pp. 1594–1604).

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM*, *48*(6), 739-754.

Richard, P.R. & Kuzniak, A. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3) (número especial).

Ruiz, J. (2003). *Metodología de la investigación cualitativa*. 3era edición. Bilbao: Universidad de Deusto.

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: teoría y práctica*. Madrid: Ediciones MORATA.

Winslow, C. & Gronbaek, N. (2014). Klein's doublé discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *RDM Newsletters, 34 (1)*, 59-86.

Yin, R. K. (2009). *Case study research. Desing and methods* (4th ed). Thousand Oaks: SAGE Publications INC.

EN AMONT DE L'ETM : UN REGARD MÉTAPHORIQUE

Jorge Soto-Andrade et Alexandra Yáñez-Aburto

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et CIAE, Université du Chili

sotoandrade@uchile.cl, alexandra.yanez@ug.uchile.cl

Nous nous proposons de regarder « en amont » de l'ETM, du point de vue de la métaphorisation et réciproquement, d'essayer de cerner les processus de métaphorisation dans le cadre de l'ETM. Nous cherchons aussi à illustrer les convergences et écarts entre l'ETM et notre approche métaphorique, en croisant leurs lectures avec des exemples de problèmes et de situations a-didactiques concrètes, mises en œuvre principalement avec des professeurs en formation et en service et des étudiants en sciences humaines de première année universitaire.

Palabras clave *: Métaphorisation, Bayes, Arbres.*

INTRODUCTION

Nous nous proposons de regarder « en amont » de l'ETM, du point de vue de la métaphorisation en tant que mécanisme cognitif fondamental de notre espèce (Johnson & Lakoff, 2003 ; Lakoff & Núñez, 2000) et réciproquement, d'essayer de débusquer la métaphorisation « tapie » dans le cadre ETM. Nous disons métaphoriquement « en amont » de l'ETM car ce cadre est à présent une théorie fort élaborée en didactique des mathématiques (Kuzniak et al., 2016b), dont il pourrait être intéressant d'explorer les métaphores génératrices. Plus concrètement, nous discutons quelques exemples didactiques paradigmatiques, du point de vue de l'ETM et de l'approche métaphorique, dans le but d'illustrer les convergences et divergences des analyses suggérées par ces deux approches. Nos exemples correspondent, d'une part, à des situations a-didactiques, souvent approchées de manière énactiviste (Proulx & Maheux, 2017), mises en œuvre avec des apprenants divers à l'Université du Chili, à savoir : professeurs de mathématiques des niveaux primaires et secondaires, en service ou en formation, ainsi que des étudiants en sciences humaines de première année ; et d'autre part à des situations-problèmes analysées dans le cadre de l'ETM (Kuzniak et al., 2016a).

LA METAPHORISATION EN SCIENCES COGNITIVES ET DIDACTIQUE

Métaphoriser, c'est regarder une chose et y voir une autre, dirions-nous aujourd'hui (au lieu de dire, comme Aristote, que c'est donner à une chose le nom d'une autre). Bien sûr, notre description est elle-même métaphorique et essaie de laisser la porte ouverte aux métaphores non verbales. À présent, la métaphorisation, regardée auparavant comme un simple recours rhétorique, est reconnue et appréciée comme un outil cognitif puissant (English, 1997 ; Gibbs, 2008 ; Ortony, 1993 ; Ricoeur, 1975). Notre cognition est de fait fondée sur la métaphorisation (Johnson & Lakoff, 2003). Celle-ci, basée sur notre système sensori-moteur, nous permet de comprendre et même de *construire* des concepts mathématiques nouveaux et de résoudre des problèmes de manière amicale et efficace (Lakoff & Núñez, 2000 ; Manin, 2007 ; Sfard, 2009 ; Soto-Andrade, 2006, 2014, 2015, 2018 ; Thurston, 1994 ; Thom, 1974, 1994).

Un exemple paradigmatique de métaphorisation, fort pertinent pour ce qui suit, émerge quand l'on regarde une marche aléatoire, disons la promenade d'une grenouille sur une rangée de pierres — peut-être un polygone régulier ? — dans une lagune. La grenouille n'a pas de parti pris politique, au sens qu'elle choisit de sauter à droite ou à gauche comme si elle lançait une pièce. La « question impossible » émerge : où sera la grenouille après un certain nombre de sauts ? Ou encore, où sera-t-elle à la fin des temps ?

Les apprenants qui abordent cette question à partir de rien, sans disposer d'une notion préalable de probabilité, et qui ont été invités à voir cela autrement de façon à rendre la question plus accessible, voient éventuellement la grenouille se *scinder* en deux parties égales, au lieu de sauter à droite ou à gauche (Soto-Andrade, 2015). D'autres encore (parmi des professeurs en formation) voient apparaître un sosie à chaque fois, c'est-à-dire qu'ils voient la grenouille se dédoubler à chaque pas. Une métaphore digne de Borges, où l'on verrait en même temps les deux univers parallèles qui émergent au moment où la grenouille saute. Ces métaphores leur permettent de calculer alors sans peine les états successifs de la grenouille, et prédire correctement son destin ultime. Ils métaphorisent ainsi une marche *aléatoire* comme un processus *déterministe* de fission, dont l'évolution est aisément calculable pas à pas, et *construisent* en passant, la notion de probabilité ! Nous reviendrons sur ce tour de passe-passe métaphorique lors de la discussion des exemples didactiques ci-dessous.

D'un point de vue épistémologique, la métaphorisation a aussi un rôle *poïétique* (*génétique*, disait Piaget) de théories : on peut prétendre qu'une théorie après tout n'est que l'épanouissement d'une métaphore. Nous avons alors des métaphores génératrices de théories ; par exemple, « l'arbre de la vie » pour la théorie de l'évolution, ou « multiplier, c'est enchaîner » pour la théorie des catégories (Soto-Andrade, 2014), ou encore « l'émergence des notions mathématiques, en situation » (au lieu d'être « parachutées de l'Olympe ») pour la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998). Nous ferons usage dans la suite de cette capacité poïetique de la métaphorisation pour décrire des théories pertinentes pour notre étude. À noter enfin qu'en plus des métaphores verbales, il en existe aussi des visuelles, sans discours ; particulièrement, des métaphores *énactives* (Gallagher & Lindgren, 2015 ; Soto-Andrade, 2018), où le sujet cognitif (l'apprenant, par exemple) devient vraiment un *agent* cognitif. Précisons, en passant, que dans le cadre de cet article, le terme « énactif » est pris dans le sens de Bruner (1966), signifiant « qui agit, qui met en acte », plutôt que dans le sens plus radical de Varela (Varela, 1989 ; Varela et al., 1991). Ce dernier propose en effet que *la cognition est énaction*, avec une posture épistémologique anti-représentationaliste, fort bien exprimée par le poème célèbre d'Antonio Machado (1988) : "Caminante, son tus huellas el camino, y nada más; caminante, no hay camino*,* se hace camino al andar" [« Marcheur, ce sont tes empreintes, le chemin, rien d'autre ; il n'y a pas de chemin, on trace un chemin en marchant »]. Ce poème joue donc le rôle d'une métaphore poïétique pour l'énaction de Varela, utilisée explicitement en fait par lui-même (Varela, 1987, p. 63). Bruner (1966), pour sa part inspiré par le slogan "apprendre en faisant" de Dewey (1910), a proposé et décrit trois modes fondamentaux de représentation du monde : énactif, iconique et symbolique (Principe **EIS**), qu'on peut d'ailleurs rapprocher des genèses instrumentale, sémiotique et discursive de l'ETM.

EN AMONT DE L'ETM : REGARDS METAPHORIQUES

L'ETM s'appuie fondamentalement sur la métaphore de deux niveaux ou plans, le plan *épistémologique* et le plan *cognitif*, le second vu au-dessus du premier, avec trois genèses qui relient l'un à l'autre. Un prisme droit de base triangulaire émerge alors, dont les sommets, arêtes et faces, métaphorisent (certains diraient « représentent ») des aspects clés du travail mathématique. Nous trouvons ainsi comme sommets (appelés pôles dans l'ETM) le *representamen*, les *artefacts* et le *référentiel* au niveau épistémologique, et la v*isualisation*, la *construction* et la *preuve* au niveau cognitif. À noter que le plan épistémologique apparaît plutôt comme un réservoir d'objets (au sens large) et le plan cognitif plutôt comme un réservoir de processus. Le premier est essentiellement statique et le second plus dynamique.

Les genèses sémiotiques, instrumentales et discursives apparaissent alors comme les arêtes verticales dudit prisme, munies de flèches montantes et descendantes. Kuzniak et al. (2016b) suggèrent des métaphorisations pour ces flèches dynamiques, respectivement, le *décodage-interprétation* (des signes) et le *codage-instanciation*, dans le cas de la genèse sémiotique, l'*instrumentation* (l'artefact devient un instrument pour le sujet connaissant) et l'*instrumentalisation* (choix intentionné d'un outil par ledit sujet) dans le cas de la genèse instrumentale, et le *raisonnement déductif* porté par le référentiel ainsi que *l'identification des préalables* à ce raisonnement dans le référentiel, dans le cas de la genèse discursive.

En plus, un rôle opérationnel clé est joué dans l'ETM par les *circulations,* qui ont lieu dans les trois plans verticaux du prisme. On a ainsi, par exemple, une circulation possible dans le plan sémiotique-discursif, correspondant à un raisonnement mathématique qui tire parti aussi de métaphores ou analogies, ou est même déclenché par celles-ci (Kuzniak et al., 2016b ; Thom, 1974, 1994 ; Thurston, 1994).

En regardant en amont l'ETM d'un point de vue métaphorique, on peut remarquer que, si l'on voulait distinguer entre les processus cognitifs et les processus épistémologiques, on aurait pu métaphoriser leur relation autrement que par l'image de deux plans parallèles horizontaux (avec le plan épistémologique au-dessous du plan cognitif, peut-être pour indiquer son rôle fondationnel), qui porte fortement l'empreinte des géométrie et culture grecques. On aurait pu voir, à la place, un entrelacement, comme un nœud celtique, ou celui des serpents cai-cai et tren-tren de la mythologie mapuche. Bien sûr, ce sont là des visions du monde étrangères, transversales même — pour utiliser une métaphore empruntant aux théories géométrico-topologiques de Thom (1994) — oserions-nous dire, à la pensée des géomètres grecs. Dans l'ETM, on a par contre recours à une métaphore plus statique que dynamique, pour le moment.

On aurait aussi pu évoquer les dimensions cognitive et épistémologique comme des axes de coordonnées dans l'espace. D'ailleurs, le cognitif suggère un processus, la cognition, ce qui n'est pas le cas pour l'épistémologique.

D'autre part, métaphoriser les trois genèses épistémo-cognitives comme les arêtes parallèles d'un prisme est bien différent de les voir comme des brins entrelacés formant une corde, par exemple. Il est à craindre que cette relation d'entrelacement, d'enchevêtrement, que la métaphore prismatique chasse par la porte, ne rentre par la fenêtre (cf. les exemples ci-dessous).

Au lieu de circulations ou cheminements, on pourrait peut-être mieux métaphoriser ces processus cognitifs et épistémologiques par des flots, ou des flux, qui se propagent dans le prisme, inondant éventuellement deux plans verticaux à la fois, ou même tous les trois en même temps.

Regardons maintenant de plus près les trois genèses proposées par l'ETM.

La genèse sémiotique

Le sommet *visualisation*, provenant historiquement de l'ETM de la géométrie, aurait pu être nommé plus généralement *métaphorisation,* dans le cadre d'un ETM quelconque. La notion de *representamen* devient dans ce cadre un peu floue, couvrant toute sorte de signes, aussi bien des images géométriques que des symboles algébriques, des graphes, etc. (Kuzniak et al., 2016b) et elle est porteuse d'une posture épistémologique représentationaliste lourde de sens (cf. Proulx et Maheux, 2017). En tout cas, il s'agit là d'objets, en général. Or, en métaphorisant nous avons aussi affaire à des processus, comme dans le cas de la marche aléatoire de la grenouille, évoquée plus haut. Le representamen serait alors le processus de fission correspondant, engendré par une « métaphore salomonique » (Soto-Andrade, Diaz-Rojas & Reyes-Santander, 2018). On voit alors mal ce processus de fission comme un codage ou une instanciation de la marche aléatoire ou réciproquement : à comparer avec le diagramme de la figure 0, qui métaphorise spatialement la relation entre métaphores, représentations et analogies (Soto-Andrade, 2014).

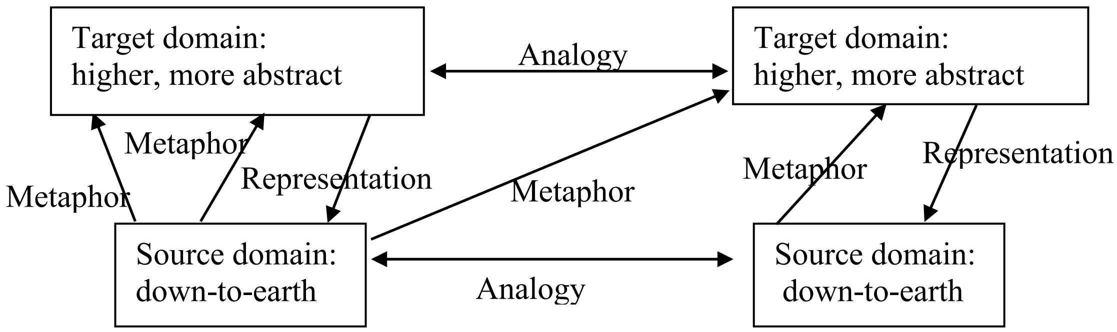


Figure 0. Une carte métaphorique des métaphores, représentations et analogies

Dans ce schéma, la métaphore « une marche aléatoire est un processus de fission » apparaît comme une flèche montant d'un domaine plus concret (où l'on partage) à un domaine plus abstrait (où l'on marche aléatoirement), à l'inverse de l'ETM où cette flèche se verrait comme un décodage, ou interprétation, du processus de fission, décodage qui a perdu le pouvoir poïétique de notre métaphore. En effet, celle-ci permet de construire, en passant, la notion de probabilité : la probabilité de trouver la grenouille à une certaine pierre, après n sauts, devient la portion de grenouille qu'on y trouve après n sauts !

Un autre exemple de métaphorisation, récurrent dans nos cours de théorie des nombres aux étudiants futurs professeurs de mathématiques au secondaire, est celui où la relation de congruence modulo un entier m se voit comme un enroulement hélicoïdal de la droite des entiers au-dessus d'un polygone régulier à m cotés.

Cette métaphorisation en cache une autre d'ailleurs — destinée aux mêmes étudiants — qu'on a du mal à voir comme une genèse sémiotique dans le cadre d'un ETM classique. À savoir : en partant de l'analogie de structure (comme anneaux euclidiens) entre polynômes et entiers relatifs, on regarde le problème de trouver un entier x qui satisfasse un système de n congruences par rapport à des modules $m_1, \ldots, m_n$ (relativement premiers) et on le voit comme la recherche d'un entier x qui « passe » par les n classes de congruence données modulo $m_1, \ldots, m_n$. Ici, associer à un entier x sa classe modulo m se voit métaphoriquement comme « évaluer l'entier x au point m ». Cette métaphorisation fait alors voir la recherche de x comme la recherche d'un polynôme interpolateur à la Lagrange. On trouve alors *mutatis mutandis* la formule explicite du théorème chinois des restes, en regardant le problème d'interpolation avec des « yeux linéaires », comme on l'a fait dans le cas des polynômes.

La genèse instrumentale

L'ETM propose ici (Kuzniak et al., 2016b) une flèche montante (appelée *instrumentation*) allant d'un artefact aux actions promues par lui, qui devient un outil, en fait un instrument, pour le sujet connaissant. La flèche descendante (nommée *instrumentalisation*, plus signifiante pour la pensée mathématique que la première (loc. cit.) va de l'achèvement visé par le sujet connaissant à son choix d'outil propice dans le plan épistémologique.

Métaphoriquement, nous verrions ici plutôt un Ouroboros[1], c'est-à-dire un processus circulaire, où un problème devient une situation poïetique d'instruments. Il s'agit donc de créer ou construire des instruments au lieu de les choisir dans une boite à outils (métaphore du plombier). L'instrument agit ensuite en retour sur la compréhension du problème.

1 Le serpent qui dévore sa propre queue, métaphore de choix pour l'auto-référence et la circularité (Soto-Andrade et al., 2011).

La question se pose alors : dans quelle mesure une métaphore peut devenir un outil, et puis un instrument pour l'apprenant, au sens large ? Peut-on voir la fission de la grenouille, ou son dédoublement, comme une instrumentalisation ? La métaphorisation apparaitrait ainsi comme une instrumentalisation, dans la genèse instrumentale.

Réciproquement, un instrument peut-il devenir une métaphore ? Dans l'exemple précédent, le processus de fission devient de fait un outil efficace pour résoudre la marche aléatoire.

La question se pose souvent : qu'est-ce une bonne métaphore, ou une métaphore idoine ? Notre discussion suggère une réponse : c'en est une qui peut devenir un instrument fiable !

On entrevoit donc la métaphorisation apparaître comme étant liée aussi bien à la genèse sémiotique qu'à la genèse instrumentale dans l'ETM.

La genèse discursive

Dans l'ETM cette genèse apparaît aussi comme un processus bidirectionnel, bien que non proprement circulaire, comportant un discours déductif, métaphorisé comme une flèche montant du sommet désigné comme référentiel, et aussi une identification des définitions et propriétés nécessaires dans le référentiel, suggérées éventuellement par les autres genèses, métaphorisée comme une flèche descendant depuis le sommet identifié comme « preuve ». Il est admis (loc. cit.) qu'il peut être délicat de cerner les aspects analogiques ou métaphoriques de certains raisonnements discursifs. Nous retrouvons donc aussi de la métaphorisation dans cette genèse (cf. plus bas).

La métaphore de la circulation dans les plans verticaux de l'ETM

Cette métaphore joue un rôle clé dans l'ETM (Kuzniak et al., 2016b). Nos exemples concernant les métaphorisations montrent néanmoins des cas où souvent plutôt qu'une circulation, c'est-à-dire un parcours ou un cheminement, nous trouvons une présence simultanée, comme un flot, un front d'onde, ou un cheminement quantique ; une situation peut être analogue à la dualité onde-particule en physique quantique.

Exemple de circulation : Les angles extérieurs et intérieurs d'un polygone

Nous proposons aux professeurs en formation un germe de situation où l'on voit une étoile irrégulière, à sept pointes, qui peut être tracée de manière analogue à l'ubiquiste étoile régulière à cinq pointes. Que peut-on dire des angles intérieurs aigus de l'étoile ?

Après quelque expérimentation, les étudiants conjecturent que la somme de tous les angles intérieurs aux pointes est constante. Dans Hosomizu (2008), ce problème est proposé pour l'étoile régulière à cinq pointes et il est abordé et résolu par un « yoga angulaire » astucieux, qui marche aussi bien dans le cas non régulier. Nous nous sommes intéressés par contre à faciliter chez les étudiants une approche qui tire parti d'une métaphorisation énactive.

Tout d’abord, les étudiants ont déjà métaphorisé des polygones (convexes) de maintes manières. Par exemple : « un polygone est un parcours clos, formé de segments droits ». En d’autres mots, « on trace un polygone en marchant… » (cf. Varela, 1987). Ils ont alors vu — sans calculer — que la somme des angles extérieurs d’un polygone vaut un tour complet, en faisant simplement le tour du polygone (Soto-Andrade, 2018). Ils découvrent ensuite que l’on peut aussi trouver directement, sans calculer, la valeur de la somme des angles *intérieurs* du polygone, en le parcourant en avançant et en reculant alternativement, tel un colibri qui partirait d’un sommet donné, volerait au-dessus du polygone en avançant jusqu’au prochain sommet, où il balaierait l’angle intérieur correspondant avec sa queue, pour voler en reculant ensuite jusqu’au prochain sommet, où il balaierait l’angle intérieur correspondant, cette fois-ci avec son bec, et ainsi de suite… À noter que cette métaphorisation fournit une preuve métaphorique énactive (Gallagher & Lindgren, 2015 ; Soto-Andrade, 2018) — dont la formalisation est un exercice intéressant — du fait que la somme des angles intérieurs d’un triangle vaut un demi-tour (le colibri revient en effet au sommet de départ en regardant dans l’autre sens) et qu’elle marche aussi bien dans le cas de notre étoile à pointes irrégulière.

On pourrait argumenter dans ce cas que le vol métaphorique du colibri appartient à la genèse sémiotique, avec le vol (plutôt que le colibri lui-même) jouant le rôle d’un representamen ; mais en même temps ce vol devient un instrument (Rabardel, 2008) qui permet de résoudre le problème (genèse instrumentale), tout en fournissant une preuve (métaphorique et énactive) de la valeur de la somme des angles intérieurs (genèse discursive). Autrement dit, notre colibri vole dans le plan sémiotique-instrumental mais aussi dans le plan sémiotique-discursif, puisque son vol constitue une preuve, formalisable au besoin. On peut y voir une construction métaphorique (de la version discrète) d’une intégrale de contour sur un graphe, qui est bien de fait généralisable. Comme l’on peut voir son vol aussi comme un instrument, le plan instrumental-discursif est aussi mis à profit. Plus concrètement, on pourrait voir le colibri comme un robot (qui peut être construit et programmé) ou une tortue logo, donc comme un artefact devenu instrument. Du point de vue de l’ETM, on aurait donc dans ce cas une circulation complète ; de notre point de vue, un flot qui inonde tout le prisme.

Notre point de vue métaphorique énactif nous suggère donc en fait des mouvements ou circulations 3D à l’intérieur du prisme de l’ETM. Ces circulations faciliteraient un apprentissage réel mieux que les parcours didactiques habituels, qui sont 2D ou 1D la plupart du temps. Bien sûr, ce type de circulation totale est plutôt rare en salle de cours, surtout dans les écoles chiliennes obsédées par les épreuves nationales standardisées.

Il est à remarquer que ce type de problèmes peut déclencher chez les apprenants des activités qui partent dans des directions fort divergentes. Nos (futurs) professeurs du secondaire notamment, partent très souvent vers le symbolique, en essayant de tout calculer algébriquement, et restent cloisonnés dans ce registre.

La métaphore de fibration dans l'ETM

Cette métaphore, récemment introduite (Tanguay, Kuzniak & Gagatsis, 2015) n'est peut-être pas très heureuse, car le terme *fibration* a un sens très précis en mathématiques (cf. les *fibrés vectoriels*, ou la fameuse *fibration de Hopf*). Cette métaphore, qui est tout de même suggestive, semblerait inspirée de travaux de Lévy-Leblond, pour qui le temps individuel…

> … a aussi une « épaisseur » : plutôt que par un mince filament, il serait mieux décrit par l'image d'un cordage tressé. Nous vivons dans plusieurs temporalités enchevêtrées, tant par leur nature (le temps de nos sensations, celui de nos idées, celui de nos rapports sociaux, etc.) que par leurs échelles (de la milliseconde au siècle) – tout comme une corde est faite de multiples brins, eux-mêmes composés de fines et courtes fibres. (Lévy-Leblond, 2013, p. 279).

Peut-être *tressage* serait une meilleure métaphore, ou bien un éclatement, ou un « zoom-in », sous lequel les arêtes verticales du prisme deviennent des cordes tressées, à brins multiples…

Exemples paradigmatiques : Les arbres en probabilités

Pour montrer encore les convergences et divergences opérationnelles entre l'ETM et l'approche métaphorique (souvent aussi énactive), nous discutons ci-dessous, de notre point de vue, de deux exemples illustratifs de l'usage des arbres pondérés en tant qu'outils en probabilités, étudiés du point de vue de l'ETM dans Kuzniak et al. (2016a). Notre première remarque est que dans ce contexte, les arbres jouent juste le rôle d'une scéne, telle la planche de Galton. Dans notre perspective, nous essayons cependant de métaphoriser le problème de départ lui-même, donc le representamen ne seraient pas les arbres, mais plutôt les *marches aléatoires sur les arbres*, un point de vue dynamique au lieu de statique.

Problème d'urnes Bayésien (Kuzniak et al., 2016a, p. 865)

> *On choisit en lançant un dé, entre les urnes U1 et U2, dont la première U1 contient 1/4 de boules blanches et la seconde U2 en contient 5/6. Si le dé montre 1 ou 2, on choisit U1. Autrement on choisit U2. On tire au hasard une boule de l'urne choisie. On demande alors la probabilité qu'une boule tirée au hasard de l'urne choisie soit blanche et ensuite, la probabilité que si la boule tirée est blanche, elle provienne de l'urne U1.*

Les figures 1 et 2 ci-dessous, empruntées à Kuzniak et al. (2016) et où B = Black et W = White, montrent les arbres préconisés par les programmes d'études français pour aborder ce genre de problèmes Bayésiens.

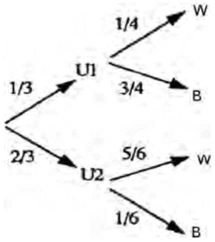


Figure 1

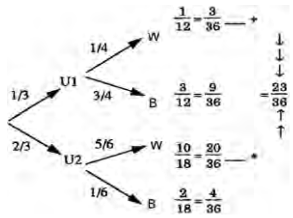
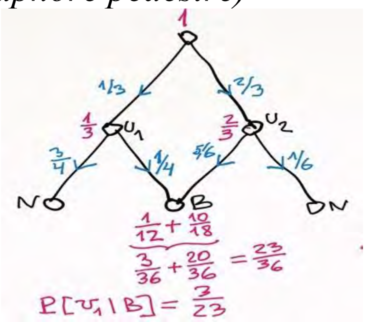


Figure 2

Un élève qui aurait joué avec des marches aléatoires simples depuis l'école élémentaire, et les aurait métaphorisées de manière hydraulique ou pédestre (Soto-Andrade et al., 2018), dessinerait plutôt les réseaux des Figures 3 et 4 (où B = Blanc, N = Noir), plus « amicaux » pour l'apprenant que l'arbre de la Figure 2, et qui correspondent à la circulation cognitive :

Problème original (à 2 choix successifs) = promenade aléatoire à deux étapes = drainage d'un fluide (métaphore hydraulique) = promenade piétonnière (métaphore pédestre)



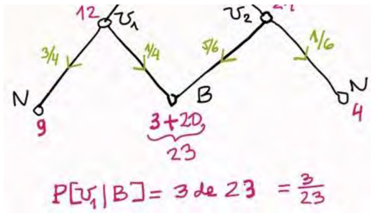
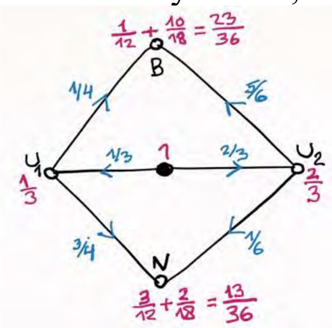
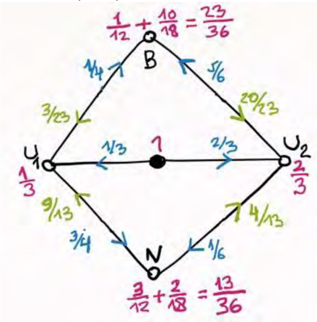


Figure 3

Figure 4

À noter que le graphe pondéré de la Figure 3 correspond à une métaphorisation hydraulique (où un litre de fluide s'écoule vers le bas en se partageant), qui nécessite une certaine pratique du « yoga fractionnaire », tandis que celui de la Figure 4 correspond à une métaphorisation pédestre (où l'on voit des piétons se répandre sur un réseau de chemins), plus « amicale » envers l'apprenant dans la mesure où elle permet de travailler avec des entiers plutôt qu'avec des fractions. Cette métaphorisation suggère des jeux et même des chorégraphies à être explorés et pratiqués par les élèves dès le premier cycle de l'école primaire : un investissement cognitif fort rentable à moyen et long termes. En allant plus loin, dans cet exemple, les élèves, pourraient aussi explorer des manières plus symétriques de visualiser ces problèmes Bayésiens ; voir Figures 5, 6, 7.





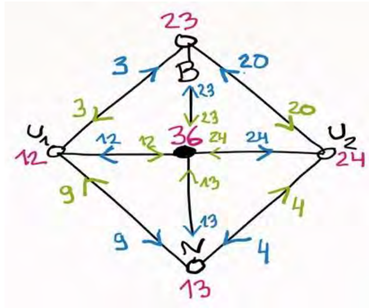


Figure 5

Figure 6

Figure 7

Ici, on a indiqué en bleu les probabilités « directes » et en vert les probabilités « à rebours » (les « probabilités des causes », à la Bayes). Notons que la question Bayésienne sur la probabilité conditionnelle de l'urne U_1 devient fort simple avec la métaphore pédestre (Figures 4 ou 7) : parmi les 23 piétons sur 36 qui arrivent à bon port, en B, combien sont passés par la porte U1 ? Autrement dit, la question Bayésienne célèbre et délicate se ramène à demander : parmi tous les pèlerins arrivés à Rome, combien sont passés par cette porte ? Pour répondre, il suffit de regarder, pas besoin de « formule de Bayes » ! On peut d'ailleurs s'amuser à expliciter tout un flux probabiliste dans un réseau ainsi que son contre-flux Bayésien, qui sont en équilibre, comme dans la Figure 7, ce qui apporte un nouveau point de vue sur ces problèmes et suggère aussi des jeux à proposer à l'école élémentaire.

Tâche probabiliste basée sur les arbres (Kuzniak et al., 2016a, p. 867)

> *On a deux portefeuilles, le premier contenant 3 coupures des 10 euros et 5 de 20 euros, le second, 2 coupures de 10 euros et 4 de 20 euros. On choisit un portefeuille au hasard et on en tire une coupure au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit de 10 euros ?*

L'étudiant observé dessine un arbre de possibilités détaillé à trois niveaux (il choisit l'urne, le montant 10 ou 20, et ensuite la coupure de ce montant !), avec 14 bouts en tout, il décompte tout simplement 5 bouts correspondant aux 3+2 coupures à 10 euros et répond « 5/14 ». Il montre ainsi une connaissance précaire de l'outil employé, dont l'usage est préconisé cependant à l'école française.

Dans notre perspective, « un outil sans support métaphorique est un outil aveugle ». Nous prétendons que la métaphorisation (ne serait-ce qu'inconsciente) devrait précéder le choix de l'outil. Nous montrons ci-dessous (Figures 8 et 9), les graphes (qui ne sont plus des arbres) que nos étudiants dessinent en suivant un parcours du type :

> *choix successifs = processus = marche aléatoire = métaphorisation hydraulique ou pédestre.*

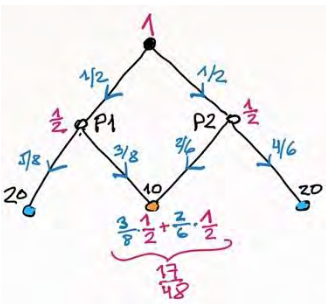


Figure 8

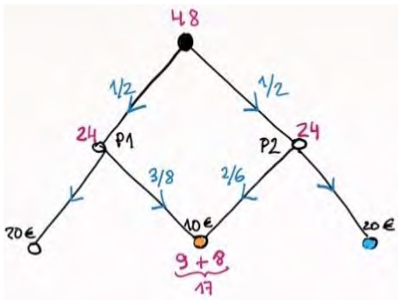


Figure 9

DISCUSSION

Le cadre de l'ETM nous a aidé à mettre en relief le caractère multiforme de la métaphore, qui telle une hydre cognitive, aurait une tête sémiotique, une tête instrumentale, une tête discursive, et peut-être bien d'autres… On voit que la métaphore n'est pas que rhétorique, elle devient aussi outil et preuve, sous la forme d'un arbre ou d'un réseau hydraulique, ou d'un réseau routier, etc. Ceci apporte en plus de l'eau au moulin de la métaphore qui verrait les trois genèses de l'ETM comme les brins d'une même corde tressée, plutôt que les trois arêtes d'un prisme droit à base triangulaire.

Les déboires de l'usage « mécanique » des arbres en probabilités à l'école montrent à notre avis qu'un « outil sans support métaphorique est un outil aveugle ». Les arbres ont été introduits aux programmes d'études secondaires en France, mais aussi au Chili plus tardivement qu'en France, et c'est selon nous une bonne idée. Les arbres sont fort importants en mathématiques, même en recherche de pointe : en physique par exemple, les théoriciens jonglent avec des séries qui ont des arbres pour coefficients.

Nous voyons cependant les arbres plutôt comme des scènes de métaphorisations dynamiques (comme les promenades aléatoires), pas comme un simple outil à manier suivant certaines règles énoncées d'emblée. Dans notre perspective, ces règles découlent naturellement des métaphores sous-jacentes. Aussi, il ne faudrait pas rester cantonné aux arbres. Il peut arriver qu'ils ne constituent pas la meilleure visualisation, ni la plus « amicale » pour les apprenants, comme dans le cas des probabilités conditionnelles. Dans ce cas, les promenades aléatoires sur les réseaux fournissent une alternative métaphorique bien plus commode et efficace pour résoudre, même de tête, des problèmes Bayésiens, grâce à une métaphorisation pédestre, comme c'est le cas des fameux problèmes des « faux positifs » (Soto-Andrade, 2015). À noter que souvent, la métaphorisation hydraulique d'un problème probabiliste un peu complexe plonge l'apprenant dans un « yoga fractionnaire », plutôt rébarbatif pour la plupart des élèves. Néanmoins, ce fait pourrait servir, à rebours, à *motiver* le calcul des fractions, puisqu'il apparaît alors dans des contextes de la vie réelle qui peuvent avoir un sens pour les élèves, contrairement aux calculs gratuits et décontextualisés trop fréquents dans nos salles de cours.

Nous avons aussi élargi notre vision de l'arête (plutôt la corde tressée ou « fibration ») sémiotique de l'ETM, porteuse des flèches de codage et de décodage : on représente et on communique par des signes, au sens large ; on évacue cependant le rôle poïetique de la métaphorisation, qui n'est pas un simple décodage ou interprétation. On a ainsi tendance à s'en tenir à une vision des arbres comme des signes, comme des representamen de situations probabilistes. On risque de perdre de vue les processus — peut-être par un certain manque de vision systémique — dont le développement pourrait suggérer maints jeux coopératifs, et même des *chorégraphies*, à l'école. Par exemple, on pourrait inviter un groupe de 8 élèves à mettre au point une chorégraphie où chacun jouerait en simultané l'un des 8 chemins possibles que peut suivre une grenouille. Il s'agirait d'une grenouille « symétrique », qui sauterait 3 fois à droite ou à gauche sur une rangée de pierres dans une lagune. À noter que la mise en scène la plus efficace est a-hiérarchique, sans besoin d'un Magister Ludi…

Les exemples que nous avons commentés montrent que cela n'a pas beaucoup de sens de se demander quelle est la bonne manière d'aborder un problème, dans l'abstrait. En effet, c'est un sujet connaissant qui interagit avec le problème et l'aborde avec toute une histoire préalable d'interactions avec son milieu – accouplement structurel, au sens de Maturana et Varela (1992). Il n'a peut-être jamais métaphorisé où il a été otage d'un contrat didactique (Brousseau, 1998) oppressant…

On a vu que l'ETM peut être fort efficace pour déceler les manques de circulation didactique, les circulations didactiquement incomplètes, et il en fournit des exemples intéressants et quelques pistes de « complétion » ; mais il peut être moins suggestif à ce sujet que l'approche métaphorique, qui risquerait à son tour de devenir trop prescriptive (« métaphoriser d'abord ! ») si elle n'était pas couplée avec une posture énactiviste (Soto-Andrade, 2018).

REMERCIEMENTS

Cette recherche a été subventionnée par le Fonds Basal PIA-CONICYT pour des centres d'excellence, Project FB0003, et par le Projet DAAD 573 35022 D.

RÉFÉRENCES

Bachelard, G. (1938). *La Formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La pensée sauvage.

Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Harvard, MA: Harvard University Press.

Dewey, J. (1997). *How we think*. Mineola NY: Dover. (Original work published 1910)

Díaz-Rojas, D., & Soto-Andrade, J. (2015). Enactive Metaphoric Approaches to Randomness. In K. Krainer, & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings CERME 9*, 629-636. Prague: Charles University & ERME.

English, L. (Ed.) (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Gallagher, S., & Lindgren, R. (2015). Enactive metaphors: learning through full body engagement, *Educational Psychology Review, 27*, 391-404.

Gibbs, R. W. (Ed.) (2008). *The Cambridge handbook of metaphor and thought*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gonseth, F. (1945-1952). *La géométrie ou le problème de l'espace*. Neuchatel : Éditions du Griffon.

Hosomizu, Y. (2008). *Entrenando el pensamiento matemático. Edición Roja*. Tsukuba: Tsukuba Incubation Lab.

Johnson, M., & Lakoff, G. (2003). *Metaphors we live by.* New York NY: The University of Chicago Press.

Kuzniak, A. (2011a). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 19-24.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J.-P. (2016a). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education*, *48* (6), 861-874.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016b). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction, *ZDM Mathematics Education*, *48* (6), 721-737.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics comes from*. NewYork NY: Basic Books.

Lévy-Leblond, J.-M. (2013). Quel temps fait-on ? Dans E. Klein & M. Spiro (Eds), *Le temps et sa flèche* (271-281). Paris : Flammarion.

Machado, A. (1988). *Selected poems.* Cambridge MA: Harvard University Press.

Manin, Yu. (2007). *Mathematics as metaphor*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Maturana, H. R. & Varela, F. J. (1992). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding.* Boston MA: Shambhala.

Ortony, A. (Ed.) *Metaphor and thought* (2nd ed.). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Proulx, J. & Maheux, J.-F. (2017). From problem solving to problem posing, and from strategies to laying down a path in solving: taking Varela's ideas to Mathematics Education Research. *Constructivistic Foundations*, *13* (1), 161-167.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Ricoeur, P. (1975). *La Métaphore Vive*. Paris : Éditions du Seuil

Sfard, A. (2009). Metaphors in education. In H. Daniels, H. Lauder & J. Porter (Eds.), *Educational theories, cultures and learning : a critical perspective* (39-50). New York NY: Routledge.

Soto-Andrade, J. (2006). Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des maths. *Annales de Didactique et de Sciences Cogn*itives, *11*, 123-147.

Soto-Andrade, J. (2007). Metaphors and cognitive styles in the teaching-learning of mathematics. In D. Pitta-Pantazi, & J. Philippou (Eds.), *Proceedings CERME* 5 (191-200). Larnaca: University of Cyprus.

Soto-Andrade, J. (2014). Metaphors in Mathematics Education. In: Lerman S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (447-453). Berlin: Springer-Verlag.

Soto-Andrade, J. (2015). Une voie royale vers la pensée stochastique : les marches aléatoires comme pousses d'apprentissage. *Statistique et Enseignement 6* (2), 3-24.

Soto-Andrade, J. (2018). Enactive metaphorising in the learning of mathematics. In G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (Eds.). *Invited Lectures from the 13th Int. Congress on Math. Education* (pp. 619-638). Cham: Springer.

Soto-Andrade, J., Diaz-Rojas, D., & Reyes-Santander, P. (2018). Random walks in the didactics of probability: Enactive metaphoric learning sprouts. In C. Batanero & E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics*, *Advances in Probability Education Research, ICME 13 Monographs* (125-143). Cham, Switzerland: Springer.

Soto-Andrade, J., Jaramillo, S., Gutiérrez, C., & Letelier, J.-C. (2011). Ouroboros avatars: a mathematical exploration of self-reference and metabolic closure. In T. Lenaerts, M. Giacobini, H. Bersini, P. Bourgine, M. Dorigo & R. Doursat (Eds.), *Advances in Artificial Life, ECAL 2011: Proc. 11th European Conference on the Synthesis and Simulation of Living Systems* (763-770). Cambridge MA: The MIT Press.

Tanguay, D., Kuzniak, A. & Gagatsis, A. (2015). Synthèse du Thème 1 – Le travail mathématique et les espaces de travail mathématique. In A. Kuzniak et I. M. Gómez-Chacón (Éds.), *Actes du 4e symposium Espaces de Travail Mathématique (ETM 4)* (20-38). Madrid : Universidad Complutense de Madrid.

Thom, R. (1974). Mathématiques modernes et mathématiques de toujours, suivi de Les mathématiques « modernes » , une erreur pédagogique et philosophique ? In R. Jaulin (Ed.), *Pourquoi la mathématique ?* (39-88). Paris: Éditions 10/18.

Thom R (1994). Spectre, bord d'un centre obscure. In: M. Porte (Ed.), *Passion des Formes* (13-24). Fontenay-St Cloud : ENS Éditions.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc. 30*(2), 161-177

Varela, F. J. (1987). Lying down a path in walking. In W.I. Thompson (Ed.). *Gaia: A Way of Knowing* (48-64). Hudson, NY: Lindisfarne Press.

Varela, F. J. (1999). *Ethical know-how: action, wisdom, and cognition*. Stanford: Stanford University Press.

Varela, F., Thompson, E. & Rosch, E. (1999). *L'inscription corporelle de l'esprit : Sciences cognitives et expérience humaine*. Paris : Seuil.

EL TRABAJO MATEMÁTICO EN MODELIZACIÓN SOBRE PROBABILIDADES EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE EN CHILE

Katherine Machuca Pérez

Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

katherine.machucaperez@gmail.com

La enseñanza de la probabilidad ha sufrido un gran desarrollo desde finales del siglo XIX, el uso creciente de tecnologías, la variedad que se presenta cierta información a través de distintos medios de comunicación y la omnipresencia de la aleatoriedad –el gran descubrimiento de la física del siglo XX (Hacking, 1990)–, configuran parte de esta evolución.

En Chile, como en varios otros países, existe un interés por desarrollar la educación probabilística en los ciudadanos desde los primeros niveles educativos, debido a la necesidad de comprender los fenómenos aleatorios y para la consecuente toma de decisiones (Batanero, Chernoff, Engel, Lee, & Sánchez, 2016). Sin embargo, la inclusión en el currículo de matemáticas no asegura una transferencia automática para su enseñanza y aprendizaje (Batanero et al., 2016).

Dada esta evolución y la gran demanda en los planes de estudios, la Comisión Internacional en Instrucción Matemática y la Asociación Internacional para la Educación Estadística, reconocen la necesidad de una formación específica del profesor para enseñar estadística y probabilidad, pues no se ha prestado la atención adecuada a la preparación de los profesores de matemáticas, quienes son los encargados de enseñar estos temas en el sistema escolar (Batanero, Burrill, & Chris, 2011). Diversas investigaciones en esta área (por ejemplo, (Batanero et al., 2011; Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M., & Paparistodemou, 2018; Vivier, 2018), han evidenciado el interés y una preocupación a nivel internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad.

Así, hemos realizado un estudio a las mallas curriculares en la formación inicial de profesores en matemáticas de secundaria en Chile, identificando el número de cursos relacionados con la enseñanza de la estadística y probabilidad. De un total de veinte y cinco universidades adjuntas al consejo de rectores, se estudiaron veinte y dos, de las cuales, doce incorporan cursos relacionados con este tema, situación que plasma una necesidad país al respecto.

Por otra parte, la modelación matemática es un tema establecido a nivel internacional, el cual requiere de una alta demanda cognitiva, dada la gran cantidad de conexiones y relaciones que son necesarias establecer. Por lo tanto, resulta una actividad importante y exigente tanto para profesores y estudiantes, y en consecuencia la práctica en el aula es mucho menor de lo esperado (Blum, 2015).

En Chile, en el nivel de secundaria, el Ministerio de Educación Chileno (MINEDUC), espera que los estudiantes determinen la probabilidad de ocurrencia de eventos de manera intuitiva, experimental y teórica, y que construyan modelos probabilísticos basados en situaciones aleatorias, además de desarrollar cuatro habilidades, poniendo especial énfasis en la modelación matemática (MINEDUC, 2016). En particular, las distribuciones de probabilidad se introdujeron en el 2009, y en la actualidad ocupan un lugar importante en los planes de estudio que propone el MINEDUC.

El objetivo del poster es estudiar cómo se aborda la función de densidad de variables aleatorias continuas en el último año escolar obligatorio de secundaria (nivel 12), saber si hay relaciones con la modelización matemática y así caracterizar aquellas *tareas emblemáticas*, es decir, aquellas tareas que están disponibles en el sistema educativo. Para ello estudiaremos textos oficiales (Muñoz, Gutiérrez, & Muñoz, 2016) distribuidos por el MINEDUC, y programas de estudio.

El marco teórico que usamos es el Espacio de Trabajo Matemático propuesto por Kuzniak (2011), cuyo objetivo es describir el trabajo que realizan los sujetos cuando resuelven tareas matemáticas con componentes de un plano epistemológico y cognitivo. Así las nociones matemáticas son estudiadas bajo una dimensión semiótica, instrumental y discursiva (Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016). Con estos elementos teóricos analizamos el proceso de matematización del modelo de (Blum & Leiß, 2007) para dar cuenta de aquellas tareas matemáticas potenciales a ser enseñadas.

Resultados preliminares nos permiten señalar que las tareas emblemáticas están relacionadas a problemas extra matemáticos, sin embargo, no hay una necesidad de modelización, son más cercanas a la resolución de un problema. También se puede decir, que son habituales o clásicas y están normalizadas por la institución escolar. En cuanto al proceso de matematización propiamente tal, en las tareas se privilegian dos registros, lenguaje natural y registro gráfico, los cuales son coordinados mediante el proceso de conversión. Activándose elementos semióticos y discursivos, donde la visualización que proviene de gráficas permite dar resultados y uso de definiciones. Por último, del estudio se desprende que el trabajo matemático realizado para la función de densidad de las tareas asociadas no proviene de un experimento aleatorio.

REFERENCIAS

Batanero, C., Burrill, G., & Chris, R. (2011). *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A joint ICMI/IASE study: the 18th ICMI study*. Springer .

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S., & Sánchez, E. (2016). Research on Teaching and Learning Probability. In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1–33). Springer, Cham.

Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and attitudinal challenges* (pp. 73–96). Springer, Cham.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In S. Haines, C ., Galbraith, P., Blum, W., y Khan (Ed.), *Mathematical Modelling* (pp. 222–231). Woodhead Publishing.

Hacking, I. (1990). *The taming of chanche*. Cambridge University Press.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, (16), 9–24.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM -Mathematics Education*, *48*(6), 721–737.

Leavy, A., Meletiou-Mavrotheris, M., & Paparistodemou, E. (2018). *Statistics in Early Childhood and Primary Education: Supporting Early Statistical and Probabilistic Thinking*. Springer.

MINEDUC. (2016). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*.

Muñoz, G., Gutiérrez, V., & Muñoz, S. (2016). *Matemática 4 medio: texto del estudiante* (4th ed.). Santiago, Chile: Santillana.

Vivier, L. (2018). *Les probabilités et la statistique au lycée: pour un enseignement et une formation sans alea...ou presque.* Presses universitaires de Franche-Comté.

LES TROIS ETM DE LA TRIGONOMETRIE DU SECONDAIRE FRANÇAIS

Ratha Loeng & Laurent Vivier

Université Paris Diderot, LDAR, France

loengratha@hotmail.com, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

INTRODUCTION : LES TROIS ETM DE LA TRIGONOMETRIE

L'enseignement de la trigonométrie en France, comme dans d'autres pays[1], s'étend sur plusieurs niveaux scolaires du secondaire. Il s'agit du travail doctoral en cours de Loeng (2017) que nous présentons dans ce poster à partir de la théorie des ETM :

- L'étude débute en géométrie, en classe de Quatrième et Troisième (grades 8 et 9) en France, avec le cosinus puis le sinus[2] d'un angle aigu dans un triangle rectangle (donc à valeur dans]0,1[), ce qui correspond à un premier ETM_{T1}. Cet ETM_{T1} fait l'objet d'une extension en classe de Première scientifique (grade 11) dans un triangle quelconque où l'on considère les cosinus des angles obtus (à valeurs dans]-1,1[).
- La trigonométrie continue au début du lycée, en Seconde (grade 10), avec l'étude dans le cercle trigonométrique ce qui constitue un deuxième ETM_{T2}. Même si le travail est toujours en géométrie, il est à signaler plusieurs différences importantes avec l'ETM_{T1} : il s'agit de la géométrie repérée ; le travail géométrique ne s'appuie plus sur le même objet (cercle unité et non plus un triangle rectangle) ; les valeurs des cosinus et sinus sont désormais compris dans l'intervalle [-1,1] ; enfin, et surtout, on ne parle plus de cosinus et de sinus d'un angle mais du cosinus et du sinus d'un nombre réel en s'appuyant sur les sinus et cosinus de la longueur algébrique d'un arc de cercle unité. Ce dernier point est obtenu par « l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique ». C'est en Première scientifique (grade 11) que cette longueur algébrique est interprétée comme une mesure d'angle par l'introduction du radian. On renoue donc explicitement avec les cosinus et sinus d'un angle.
- Enfin, en classe de Terminale scientifique (grade 12), l'étude des fonctions en analyse s'enrichie des fonctions trigonométriques et notamment avec la nouvelle propriété[3] de périodicité. Les cosinus et sinus sont alors des fonctions d'une variable réelle. Il n'est plus question d'angle même si des liens mathématiques forts existent avec la notion de radian et d'abscisse sur le cercle (cf. l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique). Cela constitue le troisième ETM_{T3}

1 Comme le Cambodge dont la comparaison avec la France fait l'objet de la thèse de doctorat de Loeng (soutenue le 19/09/2019 sous la direction de Corine Castela et Laurent Vivier).

2 Nous faisons le choix ici de ne pas parler de la tangente qui est marginale en France.

3 En classe de mathématiques, car les élèves ont rencontré la périodicité en classe de sciences physiques, grade 10.

Ces trois ETM sont bien distincts et reflètent des aspects différents des sinus et cosinus (voir également Winslow, 2016). Même si on pourrait penser avancer d'une année certaines notions comme le radian en seconde ou les fonctions sinus et cosinus en première, l'ordre d'enseignement des notions relatives aux sinus et cosinus est cohérent. L'ETM de référence, au niveau des programmes, nous paraît adéquat.

L'objet de ce poster est de discuter de l'articulation et la connexion de ces trois ETM et des conséquences supposées sur les connaissances des élèves.

QUELLE(S) ARTICLUATION(S) DES TROIS ETM DANS LES MANUELS ?

Si les programmes français avancent convenablement l'ordre d'enseignement des notions de la trigonométrie, ils ne disent rien sur les liens et la cohésion à trouver entre ces trois ETM, même si l'on trouve une volonté de les articuler comme à travers la notion d'enroulement de **R** sur le cercle trigonométrique. Cette nécessaire articulation est donc laissée aux manuels et aux enseignants, dans l'élaboration des ETM idoines. Néanmoins, le fait que chaque niveau d'enseignement ne prenne en compte, pour l'essentiel[4], qu'un seul de ces trois ETM, ne favorise sans doute pas les articulations entre les ETM.

Pourtant, ces articulations sont nécessaires si l'on vise un ETM plus global de la trigonométrie dont les ETM_{Ti} seraient des ETM partiels. Le premier objectif du poster est de montrer les lacunes dans la cohésion entre ces ETM_{Ti}, à partir d'étude de manuels.

Il nous semble que, pour bien comprendre la différence et l'articulation entre ces trois ETM, il faille bien distinguer les objets en jeu et on peut par exemple s'intéresser :

- aux arguments des cosinus et sinus : angle aigu mesuré en degré ou en radian, longueur algébrique sur un cercle, nombre réel. Certains sont mêmes notés de la même manière : x désigne une longueur algébrique en 2$^{\text{nde}}$, une mesure d'angle en radian en 1$^{\text{ère}}$ S puis un nombre réel en Terminale S.
- aux signes « cos » et « sin » qui sont utilisés pendant les 5 ans d'enseignement. Mais sont-ils des représentations des mêmes objets mathématiques ?

Nous nous focalisons également sur les traces graphiques : quels sont les liens entre les triangles, rectangles ou non, les cercles, avec en premier lieu le cercle trigonométrique, et les courbes représentatives des fonctions ?

QUELQUES DIFFICULTES DES ELEVES

L'étude des manuels laisse la possibilité d'une grande confusion chez les élèves. L'usage dans les manuels des mêmes signes pour désigner des objets différents n'est pas de nature à éclaircir ce thème mathématique.

4 On peut remarquer qu'en 1ère S on revient à ETMT1 avec la formule d'Al-Kashi.

C’est ainsi que nous avons soulevé certaines difficultés d’élèves en fin de cursus secondaire, à partir d’un questionnaire proposé à 40 élèves. On peut par exemple noter (voir le poster pour des productions effectives), pour des élèves de Terminale scientifique (grade 12) :

- *l’oubli* (?) des valeurs de cosinus et sinus d’un angle droit dans une question sur un triangle rectangle (qui nécessite une flexibilité entre ETM_{T1} et ETM_{T2}) ;
- Les calculs du type sin(côté opposé/hypoténuse), en mode radian ou degré ;
- L’impossibilité pour 1/4 des élèves de donner les cosinus et sinus de l’angle orienté (i,OM) sur le cercle trigonométrique avec les coordonnées du point M ;
- Le placement, par plusieurs élèves, sur la courbe du cosinus du point d’abscisse 11π/6 au point d’abscisse -π/6 (nombre réel différent à 2π près).

CONCLUSION

Même s’il est important d’unifier ces objets, il nous semble essentiel de travailler les différences pour mieux distinguer ces objets, pour savoir ce que recouvre ces identifications. C’est ainsi que nous avons proposé une situation didactique, en Terminale S (grade 12), qui débute dans un cercle de rayon R. Outre que c’est ainsi que les notions ont d’abord été travaillées dans l’histoire, cela permet surtout de distinguer longueur sur le cercle et angle. A partir du cercle trigonométrique vu en 2nde et 1ère S (grades 10 et 11), les élèves travaillent sur les fonctions a et b définies par les coordonnées d’un point sur le cercle (sans rappeler qu’il s’agit des cosinus et sinus) en complétant un tableau de valeur sur trois tours (pour faire apparaître la notion de périodicité) et un tableau de variation. La suite du travail se poursuit sur un logiciel de géométrie dynamique afin de mettre en évidence le lien entre le repérage sur le cercle trigonométrique et les courbes des fonctions cosinus et sinus. L’intérêt de restreindre l’étude aux cercles de rayon 1, R=1, est mise en évidence. Les analyses des données relatives à cette situation sont en cours.

REFERENCES

Loeng, R. (2017). Learning sine and cosine in French secondary schools. *CERME* 10, Feb 2017, Dublin, Ireland.

Winslow, C. (2016). Angles, trigonometric functions, and university level Analysis, In E. Nardi, C. Winslow et T. Hausberger Editeurs, *actes de la première conférence INDRUM 2016, International Network for Didactic, Research in University Mathematics*, 31 mars - 02 avril 2016, Université de Montpellier, France.

SÍNTESIS DEL TEMA 2

ESPECIFICIDAD DE LAS HERRAMIENTAS, LOS SIGNOS Y EL DISCURSO EN EL TRABAJO MATEMÁTICO

Michela Maschietto[a], Konstantinos Nikolantonakis[b], Philippe R. Richard[c], Fabienne Venant[d]

[a]Università di Modena e Reggio Emilia, Italia; [b]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας (Universidad de Macedonia Occidental), Grecia; [c]Université de Montréal, Québec, [d]Université du Québec à Montréal, Canadá

michela.maschietto@unimore.it, knikolantonakis@uowm.gr, philippe.r.richard@umontreal.ca, venant.fabienne@uqam.ca

DESCRIPCIÓN DEL TEMA Y CONTINUIDAD TEMÁTICA

En continuidad con los simposios anteriores, el tema 2 está dedicado al estudio de las herramientas del trabajo matemático y los signos considerados tanto como un vehículo de conocimientos como de apoyo para sus transformaciones, y a sus relaciones con el discurso cuando se trata de la articulación de signos y herramientas en la actividad matemática. Teniendo en cuenta la teoría de los espacios de trabajo matemático (TeETM), si la profundización de las cuestiones relacionadas con la coordinación de la génesis llama la atención, la cuestión específica del papel de la génesis discursiva en relación con otras génesis (semiótica e instrumental) se vuelve más visible aquí. Varias preguntas sobre el impacto o los efectos de las herramientas, los signos y el discurso en el trabajo matemático, se consideran:

- Interacciones y situaciones didácticas. Primero podemos explorar el potencial ofrecido conjuntamente por los entornos tecnológicos y los sistemas de signos para hacer evolucionar el trabajo matemático del estudiante, ya sea pensando en el *medio* (semiótico, tecnológico o epistemológico), en el *sujeto* (alumno o docente), o en la *actividad* (interacciones entre el alumno, el docente y el medio). Como interacciones claves en la TeETM, el planteamiento puede explorar cómo las herramientas, los sistemas de signos y el discurso afectan la construcción e implementación del conocimiento del alumno, guiando su trabajo matemático.
- Control mutuo de signos, herramientas y discurso. Como expresión verbal del pensamiento, el discurso suele reconocerse como un modo de expresión (función discursiva) y de control sobre la representación, la transformación y la comunicación de los conocimientos (función metadiscursiva). Sin embargo, en el aprendizaje del análisis o de la geometría, por ejemplo, mediante un dispositivo tecnológico, se sabe que la interacción entre el alumno y el medio implica una coordinación signo-herramienta que renueva la función tradicional del discurso en el control de los conocimientos. Dependiendo de la tarea en cuestión, la interrogación puede enfocarse en interacciones sujeto-medio finalizadas, ya sea para descubrir, modelizar, o validar una propiedad matemática.

- Fibraciones. Mientras que la génesis discursiva se activa a menudo para el control de la génesis semiótica e instrumental, se sabe que son las funciones de herramienta (medios de tipo operativo), representación y control las que permiten el desarrollo del conocimiento durante la resolución de problemas. Por lo tanto, en la interacción entre el plano cognitivo y el plano epistemológico, es posible asociar las fibraciones con el proceso de conceptualización, ya sea para la formación de una concepción matemática o para su implementación. La cuestión de fibración se refiere tanto al proceso de conceptualización en el alumno como a los vínculos entre los espacios de trabajo (modelización intra o extra matemática), empezando por la coordinación de las génesis.
- Pruebas y razonamiento. Cuando se trata de matemáticas, las nociones de prueba y razonamiento están connotadas desde un principio. Sin embargo, el trabajo matemático es históricamente muy rico, y las nuevas posibilidades tecnológicas invitan a repensar la definición misma de marcos de referencia. La pregunta aquí se refiere a los tipos de pruebas y de razonamiento que participan en el trabajo matemático, especialmente en las instituciones educativas.
- Diseño de artefactos. Desde el punto de vista del usuario, las máquinas matemáticas o los programas informáticos formulan, cada uno en su lógica, problemas que pueden contribuir a la realización del trabajo matemático. Además, algunas situaciones didácticas con guiones implementados en dispositivos informáticos renuevan la misma idea de las interacciones que pueden guiar el trabajo matemático. Sin embargo, el diseño de artefactos puede integrar también a los usuarios, de forma muy temprana en el proceso como tal, al cuestionar el papel de la génesis en una perspectiva de trabajo matemático.

TEMAS DE LAS CONTRIBUCIONES

El tema tuvo 9 contribuciones discutidas en el grupo de trabajo, algunas de las cuales también fueron presentadas en la sección de pósters. Este es el calendario de trabajo del grupo.

Fecha	Presentador	Título
Viernes 14 de diciembre	Apostolos Popotis	Carried and borrowing number in the light of the mathematical working space (sesión plenaria)
	Apostolos Popotis	Carried and borrowing number in the light of the mathematical working space (discusión)
	Rosa Elvira Páez Murillo	Exploración guiada en un ambiente con tecnología interactiva, para el estudio de ramas infinitas de una función
	Kostas Nikolantonakis	The mathematical working space in teaching of logarithms in upper secondary school
Sábado 15 de diciembre	Ludovic Font	Enrichissement du tuteur QED-Tutrix par la génération automatique de preuves de problèmes
	Sandrine Michot	Analyse dans le cadre des ETM d'une tâche de géométrie au 2^{e} cycle du primaire au Québec
	Horacio Solar	La importancia de la refutación en la argumentación colectiva para las oportunidades de aprendizaje matemático
	Fabienne Venant	Simulation de travail mathématique dans un système tuteur intelligent : enjeux sémiotiques (sesión plenaria)
Lunes 17 de diciembre	Fabienne Venant	Simulation de travail mathématique dans un système tuteur intelligent : enjeux sémiotiques (discusión)
	Soledad López	Análisis con el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático, de las curvas parametrizadas: una sesión de clase
	Matthieu Anastassiadis	Processus de visualisation dans des tâches de comparaison d'aire

Tabla 1. Presentaciones

LOS APORTES DE LAS CONTRIBUCIONES A LA DISCUSIÓN DEL TEMA 2 Y LOS PROBLEMAS PLANTEADOS Y TRATADOS

En esta sección se incluirán contribuciones en relación con los temas o aspectos que surgieron en sus debates.

El uso de artefactos materiales y su análisis en el ETM fue abordado en la discusión sobre la experimentación didáctica con el ábaco chino en la escuela primaria por Popotis y Nikolantonakis (*Carried and borrowed number in the light of the mathematical working space*). El objetivo de la investigación es estudiar cómo el gráfico puede ser una herramienta para la mediación de contenido como la retención en el cálculo de columnas y en la escritura de números. Esta contribución se caracteriza también por el uso de otros marcos teóricos, como el enfoque instrumental y la teoría de la mediación semiótica.

Las preguntas se desarrollaron en torno a tres puntos, que parecen importantes de estudiar en la escuela primaria debido a la presencia de muchos artefactos y a la propuesta de actividades de manipulación:

1) Los aspectos semióticos ya presentes en el artefacto: ¿qué o cúal articulación semiótica-instrumental a nivel de génesis? ¿Qué control mutuo entre los signos?
2) La transición del instrumento físico al instrumento mental: ¿cuál es el rol del ábaco gráfico, entre el ábaco gráfico como instrumento y una ilustración del ábaco físico?
3) Los gestos de uso establecidos por la interacción con el ábaco material: ¿qué continuidad, o no, en la transición al ábaco mental en el plano [Ins-Dis] para desarrollar la componente discursiva? Por ejemplo, ¿qué continuidad entre los gestos para significar “la llevada” (del francés “la retenue”) con el ábaco material y la escritura simbólica de los números? ¿Y con el cálculo en columnas?

Las siguientes contribuciones se refieren principalmente al uso y diseño de software a nivel secundario y universitario en los campos del análisis matemático y la geometría.

Páez Murillo y Pluvinage (*Exploración guiada en un ambiente con tecnología interactiva, caso de las ramas infinitas de una función*) ofrecen tareas de estudio de funciones, en particular asíntotas, utilizando comandos específicos de GeoGebra (límite, asíntota, zoom). Las instrucciones contienen preguntas sobre las funciones dadas, pero también sobre los resultados mostrados por el software. El análisis de las resoluciones de los estudiantes de ingeniería muestra que las tres génesis del modelo ETM se activan, pero solo en dos planos verticales: el plano [Sem-Ins] y el plano [Ins-Dis]. Los estudiantes tienden a confiar mucho en lo que ven y en lo que muestra el software, sin cuestionar los objetos percibidos. El control del zoom del software permitiría tanto una visualización hacia el infinito como una lectura local. Sin embargo, la génesis instrumental requiere pruebas discursivo-gráficas para controlar el conocimiento involucrado. La discusión se centra en cómo apoyar esta génesis, dado que la cuestión de la representación discreta del infinito o de lo continuo en la pantalla permanece mientras los estudiantes puedan encontrar resultados que no se muestren como se espera, se desean o no se muestran correctamente.

El aporte de López (*Análisis con el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático, de las curvas parametrizadas: una sesión de clase*) cuestiona sobre qué génesis debe de privilegiarse, qué registros y qué procesos cognitivos deben ser tomados en consideración para el estudio de las curvas en los cursos universitarios. La contribución al debate es de dos maneras. La primera se refiere a un cuestionamiento sobre el ETM idóneo. La segunda, y de acuerdo con los resultados de la investigación de Páez y Pluvinage, se refiere al papel y lugar de la visualización en el trabajo matemático. En particular, existe preocupación acerca de si la herramienta informática puede cambiar la naturaleza de la tarea para los estudiantes y de qué manera. Por ejemplo, cómo cambia lo que significa estudiar una curva cuando se utilizan las posibilidades de visualización y exploración dinámica de representaciones gráficas (el control de zoom para un estudio local). También se cuestiona el lugar del cálculo algebraico y su implicación en la validación teórica de las observaciones realizadas.

Las contribuciones de Font et al. (*Enrichissement du tuteur QED-Tutrix par la génération automatique de preuves de problèmes*) y Venant et al. (*Simulation de travail mathématique dans un système tuteur intelligent : enjeux sémiotiques*) se refieren al diseño y uso de un sistema de tutoría inteligente (QED-Tutrix) para ayudar al alumno a resolver problemas de demostración de geometría. El marco de los ETM se utiliza para analizar el trabajo matemático simulado por el sistema informático.

La primera contribución está más bien en el lado del diseño de artefactos y su efecto en el aprendizaje. Una característica fundamental del sistema QED-Tutrix es su capacidad de memorizar y explorar un gráfico de todas las posibles soluciones a un problema dado. Se trata de la generación automática de soluciones a problemas de prueba (demostración en geometría euclidiana) a partir de referenciales de propiedades y definiciones matemáticas procedentes de varias clases (contratos didácticos observados en relación con la elección de las definiciones o propiedades realmente utilizadas, el tipo de atajos inferenciales permitidos o la necesidad del currículo). En consecuencia, surgen dificultades en varios niveles, por ejemplo: la necesidad de proporcionar explícitamente al ordenador supuestos que son obvios para el estudiante; la multiplicidad de los nombres de los objetos utilizados en las clases, mientras que el ordenador trabaja con un solo nombre; o el tipo de razonamiento implementado en relación con el nivel académico de los estudiantes, aunque solo sea en relación con el paradigma geométrico asumido.

La segunda contribución trata más precisamente de la cuestión de la construcción de la figura a partir de la información extraída del enunciado del problema. Los ejemplos discutidos reflejan la complejidad de la simulación de procesos cognitivos y la traducción informática de propiedades e hipótesis, así como la consideración de la génesis discursiva.

La contribución de Lappa y Nikolantonakis (*The mathematical working space in teaching of logarithms in upper secondary school*) se centra en el uso de un texto histórico (en particular, el de Euler sobre logaritmos) en la definición de un ETM idóneo, y tiene por objeto estudiar el trabajo matemático de los estudiantes de secundaria con las tareas de lectura e interpretación de este texto.

La contribución de Solar y Goizueta (*La importancia de la refutación en la argumentación colectiva para las oportunidades de aprendizaje matemático*) plantea varias cuestiones, como el lugar del trabajo matemático en la argumentación y la refutación, el papel que juega la figura, y sobre cómo encontrar el lugar que le corresponde a los gestos. En primera instancia, se hace hincapié en la importancia de la refutación, incluido el vínculo entre la justificación y la refutación en relación con el ETM. En segundo lugar, se centra en las herramientas que emergen del marco de los ETM para analizar los tipos de justificaciones dadas por los estudiantes y las interacciones en el aula, así como la orquestación "argumentativa" del profesor.

El análisis de las tareas de descripción y reproducción de figuras es el objetivo de la investigación de Michot y Poacher-Michoux (*Analyse dans le cadre des ETM d'une tâche de géométrie au 2e cycle du primaire au Québec*). En esta contribución, se enfoca en la articulación de la génesis en el plano semiótico-instrumental [Sem-Ins], para determinar cómo es posible organizar una tarea de descripción y reproducción de figuras geométricas para que sea una fuente de aprendizaje para los alumnos.

Durante la discusión, se plantearon preguntas sobre la génesis discursiva. En particular, se cuestionó si, desde la perspectiva de un análisis global de la tarea, el plano [Sem-Ins] estaría "regido" por una génesis discursiva, esto para el caso de alumnos que fueron capaces de movilizar elementos de su marco de referencia teórico para escribir las descripciones esperadas.

La investigación de Anastasiadis y Nikolantonakis (*Processus de visualisation dans des tâches de comparaison d'aire*) contribuye a la discusión sobre el ETM idóneo de la intervención didáctica, incluyendo el estudio de una fuente histórica primaria, la activación del conocimiento previo, la formulación de un problema basado en la fuente histórica y su solución en grupos y con diferentes métodos. Se basa en el papel desempeñado y solicitado por la visualización de las figuras geométricas y en su tratamiento. El análisis muestra que, por ejemplo, la cuadrícula en la tarea de calcular el área de las figuras dadas no solo fue considerada como un conjunto de baldosas, sino también como un signo de una herramienta de medición, que había sido utilizada durante la intervención y de una manera de ver las figuras. Por lo tanto, la atención se centra, en la contribución de Michot y Braconne-Michoux, y en el papel de la visualización.

NUEVAS PERSPECTIVAS

Varias contribuciones se refieren a otros marcos teóricos establecidos en la didáctica de las matemáticas (por ejemplo, la teoría de la mediación semiótica, la teoría del enfoque dual, la teoría de la actividad, el enfoque instrumental y la deconstrucción dimensional). Esto responde a la necesidad de integrar o completar el modelo base de los ETM en función de la especificidad de los estudios y de sus necesidades particulares. La TeETM permite precisamente este tipo de adaptación e implica una profundización de los vínculos entre los marcos (ver el comentario de Alain Kuzniak en la conferencia de apertura sobre "esta plasticidad abierta e integradora" de la TeETM, el artículo de Richard, Venant y Gagnon (2019) o las síntesis del tema 2 desde el EMT3 en Montreal). Como vía de desarrollo teórico, sería necesario profundizar en cómo la TeETM hace posible captar la complejidad dinámica del trabajo matemático mediante la legitimación de análisis locales más finos que se refieran simultáneamente a varios elementos de los ETM (dos génesis, dos planos, dos fibraciones,…). Por otra parte, la cuestión de las propias "fibraciones" quedó abierta en el grupo. Finalmente, los intercambios entre la investigación realizada sobre el sistema de tutoría y la llevada a cabo en la escuela primaria han puesto de manifiesto el interés por estudiar mejor el razonamiento desde la escuela primaria en adelante, ya sea para alimentar un sistema de tutoría como el QED-Tutrix, con vistas a su utilización en los niveles más elementales de la escuela primaria, o simplemente para comprender mejor el trabajo matemático de los más jóvenes.

BIBLIOGRAFÍA

Richard, P.R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and challenged in instrumental proof. In G. Hanna et al. (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*, Mathematics Educations in the Digital Era (vol. 14, pp. 139–172). Springer.

SYNTHESE DU THEME 2

SPECIFICITE DES OUTILS, DES SIGNES ET DU DISCOURS DANS LE TRAVAIL MATHEMATIQUE

Michela Maschietto[a], Konstantinos Nikolantonakis[b], Philippe R. Richard[c], Fabienne Venant[d]

[a] Università di Modena e Reggio Emilia, Italie, [b]Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας (Université de Macédoine-Occidentale), Grèce, [c]Université de Montréal, Québec, [d]Université du Québec à Montréal, Canada

michela.maschietto@unimore.it, knikolantonakis@uowm.gr, philippe.r.richard@umontreal.ca, venant.fabienne@uqam.ca

DESCRIPTION DU THEME ET CONTINUITE THEMATIQUE

Dans la poursuite des symposiums précédents, le Thème 2 se consacre à l'étude des outils du travail mathématique et des signes considérés à la fois comme véhicule des connaissances et support de leurs transformations, et à leurs rapports au discours dès qu'il s'agit d'articulation des signes et des outils dans l'activité mathématique. Au regard de la théorie des espaces de travail mathématique (ThETM), si l'approfondissement des questions relatives à la coordination des genèses retient déjà l'attention, la question plus particulière du rôle de la genèse discursive par rapport aux autres genèses (sémiotique et instrumentale) devient ici plus visible. Plusieurs interrogations sur l'incidence ou les effets des outils, des signes et du discours dans le travail mathématique se posent :

- Interactions et situations didactiques. On peut d'abord explorer le potentiel offert conjointement par les environnements technologiques et les systèmes de signes pour faire évoluer le travail mathématique de l'élève, que ce soit en pensant milieu (sémiotique, technologique ou épistémologique), sujet (élève ou enseignant) ou activité (interactions entre l'élève, l'enseignant et le milieu). En tant qu'interactions essentielles dans la ThETM, l'interrogation peut alors étudier en quoi les outils, les systèmes de signes et le discours affectent la construction et la mise en œuvre des connaissances de l'élève, guidant son travail mathématique.
- Contrôle mutuel des signes, des outils et du discours. En tant qu'expression verbale de la pensée, on reconnaît habituellement au discours un double rôle de moyen d'expression (fonction discursive) et de contrôle sur la représentation, la transformation et la communication des connaissances (fonction métadiscursive). Cependant, pour l'apprentissage en analyse ou en géométrie, par exemple, à l'aide d'un dispositif technologique, on sait que l'interaction entre l'élève et le milieu implique une coordination signe-outil qui renouvelle le rôle traditionnel du discours dans le contrôle des connaissances. Selon la tâche à accomplir, l'interrogation peut alors porter sur des interactions sujet-milieu finalisées, que ce soit pour découvrir, modéliser ou valider une propriété mathématique.

- Fibrations. Alors que la genèse discursive s'active souvent pour le contrôle des genèses sémiotiques et instrumentales, on sait que ce sont les rôles d'outil (moyens de type opératoire), de représentation et de contrôle qui permettent le développement des connaissances au cours de la résolution de problèmes. Ainsi, dans l'interaction entre le plan cognitif et le plan épistémologique, il est possible d'associer les fibrations au processus de conceptualisation, que ce soit pour la formation d'une conception mathématique ou pour sa mise en œuvre. L'interrogation suscitée porte aussi bien sur le processus de conceptualisation chez l'élève que sur les liens entre les espaces de travail (modélisation intra ou extra mathématique), en commençant par la coordination des genèses.
- Preuves et raisonnements. Lorsqu'il s'agit de mathématique, les notions de preuve et de raisonnement sont déjà très connotées. Pourtant, le travail mathématique est historiquement très riche, et les nouvelles possibilités technologiques invitent à repenser la définition même des référentiels. L'interrogation ici porte sur les types de preuves et de raisonnements qui interviennent au cours du travail mathématique, et plus particulièrement à l'école.
- Conception d'artéfacts. Du point de vue de l'utilisateur, les machines mathématiques ou les logiciels formulent chacun dans leur logique des problèmes qui sont susceptibles de contribuer à la réalisation du travail mathématique. En outre, certaines situations didactiques scénarisées à l'interface de dispositifs informatiques renouvellent l'idée même d'interactions qui peuvent orienter le travail mathématique. Or, la conception d'artefacts peut également intégrer les utilisateurs, et ce très tôt dans le processus de conception, en s'interrogeant sur le rôle des genèses dans une perspective de travail mathématique.

SUJETS DES CONTRIBUTIONS

Le thème a fait l'objet de 9 contributions, discutées au sein du groupe de travail, dont certaines ont également été présentées dans la section des affiches. Voici le programme des présentations.

Date	Présentateur	Titre
Vendredi 14 décembre	Apostolos Popotis	Carried and borrowing number in the light of the mathematical working space (plénière)
	Apostolos Popotis	Carried and borrowing number in the light of the mathematical working space (discussion)
	Rosa Elvira Páez Murillo	Exploración guiada en un ambiente con tecnología interactiva, para el estudio de ramas infinitas de una función
	Kostas Nikolantonakis	The mathematical working space in teaching of logarithms in upper secondary school
Samedi 15 décembre	Ludovic Font	Enrichissement du tuteur QED-Tutrix par la génération automatique de preuves de problèmes
	Sandrine Michot	Analyse dans le cadre des ETM d'une tâche de géométrie au 2e cycle du primaire au Québec
	Horacio Solar	La importancia de la refutación en la argumentación colectiva para las oportunidades de aprendizaje matemático
	Fabienne Venant	Simulation de travail mathématique dans un système tuteur intelligent : enjeux sémiotiques (plénière)
Lundi 17 décembre	Fabienne Venant	Simulation de travail mathématique dans un système tuteur intelligent : enjeux sémiotiques (discussion)
	Soledad López	Análisis con el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático, de las curvas parametrizadas: una sesión de clase
	Matthieu Anastassiadis	Processus de visualisation dans des tâches de comparaison d'aire

Tableau 1. Présentations

LES APPORTS DES CONTRIBUTIONS A LA DISCUSSION DU THEME 2 ET LES PROBLEMES ABORDES ET POSES

Dans cette section, les contributions seront reprises par rapport aux questions apparues dans les discussions.

L'utilisation d'artefact matériel et leur analyse dans le cadre de l'ETM ont été abordées dans la discussion sur l'expérimentation didactique avec l'abaque chinois à l'école primaire par Popotis et Nikolantonakis (*Carried and borrowed number in the light of the mathematical working space*). Cette recherche vise à étudier comment l'abaque peut être un outil de médiation de contenu comme la retenue, l'écriture chiffrée des nombres et le calcul en colonne. Cette contribution se caractérise aussi par le recours à d'autres cadres théoriques, comme l'approche instrumentale et la théorie de la médiation sémiotique.

Les questions se sont développées autour de trois points, qui apparaissent importants à étudier au niveau de l'école primaire par la présence de nombreux artefacts et la proposition d'activités manipulatoires :

1) Les aspects sémiotiques déjà dans l'artefact : quelle imbrication sémiotique-instrumentale au niveau des genèses ? Quel contrôle mutuel entre les signes ?
2) Le passage de l'instrument physique à l'instrument mental : quel rôle pour l'abaque graphique, entre l'abaque graphique en tant qu'instrument et une illustration de l'abaque physique ?
3) Les gestes d'utilisation mis en place par l'interaction avec l'abaque matériel : quelle continuité, ou non, dans le passage à l'abaque mental dans le plan [Ins-Dis] pour développer la composante discursive ? Par exemple, quelle continuité entre les gestes pour signifier la retenue avec l'abaque matériel et l'écriture chiffrée des nombres ? Et avec le calcul en colonne ?

Les contributions qui suivent concernent principalement l'utilisation et la conception de logiciels au niveau de l'enseignement secondaire et universitaire sur les domaines de l'analyse mathématique et de la géométrie.

Páez Murillo et Pluvinage (*Exploración guiada en un ambiente con tecnología interactiva, caso de las ramas infinitas de una función*) proposent des tâches d'étude de fonctions, en particulier les asymptotes, par le recours à des commandes spécifiques de GeoGebra (limite, asymptote, zoom). Les consignes contiennent des questions sur les fonctions données, mais aussi sur les résultats affichés par le logiciel. L'analyse des résolutions d'étudiants d'ingénierie montre que les trois genèses du modèle ETM sont activées, mais seulement sur deux plans verticaux : le plan [Sem-Ins] et le plan [Ins-Dis]. Les étudiants ont tendance à bien faire confiance à ce qu'ils voient, à ce que le logiciel affiche, sans se questionner sur les objets perçus. La commande zoom du logiciel permettrait aussi bien une visualisation vers l'infini qu'un regard local. Cependant, la genèse instrumentale a besoin d'une preuve discursive-graphique pour contrôler les connaissances en jeu. La discussion porte alors sur comment soutenir cette genèse, étant donné que la question de la représentation discrète de l'infini ou du continu à l'écran demeure tant et aussi longtemps que les étudiants peuvent rencontrer des résultats qui ne s'affichent pas comme attendu, souhaité ou correctement.

La contribution de Lopez (*Análisis con el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático, de las curvas parametrizadas: una sesión de clase*) se demande ce que sont les genèses à privilégier, ce que sont les registres et les processus cognitifs à prendre en considération pour l'étude des courbes dans des cours universitaires. Elle contribue à la discussion par deux éléments. Le premier concerne un questionnement sur l'ETM idoine. Le deuxième élément, en accord avec les résultats de la recherche de Paez et Pluvinage, porte sur le rôle et la place de la visualisation dans le travail mathématique. En particulier, on se demande *si* et *comment* l'outil informatique peut changer la nature de la tâche pour les étudiants. Par exemple, de quelle façon change ce que signifie étudier une courbe dès qu'on utilise les possibilités de visualisation et d'exploration dynamique de représentations graphiques (la commande de zoom pour une étude locale). On s'interroge également sur la place du calcul algébrique et son implication dans la validation théorique des observations effectuées.

Les contributions de Font et Coll. (*Enrichissement du tuteur QED-Tutrix par la génération automatique de preuves de problèmes*) et de Venant et Coll. (*Simulation de travail mathématique dans un système tuteur intelligent : enjeux sémiotiques*) concernent la conception et l'usage d'un système tuteur intelligent (QED-Tutrix) pour soutenir l'apprenant dans la résolution de problèmes de démonstration en géométrie. Le cadre des ETM est utilisé pour analyser le travail mathématique simulé par le système informatique.

La première contribution se situe plutôt sur le versant de la conception d'artefact et de son effet sur l'apprentissage. Une caractéristique fondamentale du système QED-Tutrix est l'habileté de mémoriser et d'explorer un graphe de toutes les solutions possibles d'un problème donné. Il s'agit alors de la génération automatique de solutions de problèmes de preuve (démonstration en géométrie euclidienne) à partir de référentiels de propriétés et de définitions mathématiques provenant de plusieurs classes (contrats didactiques observés quant au choix des définitions ou des propriétés employées effectivement, au type de raccourcis inférentiels tolérés ou à l'exigence du programme scolaire). Il en découle que des difficultés surgissent sur plusieurs niveaux, par exemple : la nécessité de fournir explicitement à l'ordinateur des hypothèses évidentes pour l'étudiant ; la multiplicité des noms des objets employés dans les classes, alors que l'ordinateur travaille avec un nom unique ; ou le type de raisonnement implémenté par rapport au niveau scolaire des élèves, ne serait-ce que par rapport au paradigme géométrique supposé.

La deuxième contribution aborde plus précisément la question de la construction de la figure à partir des informations extraites de l'énoncé du problème. Les exemples portés à la discussion rendent compte de la complexité de la simulation des processus cognitifs et de la traduction informatique des propriétés et des hypothèses, ainsi que de la prise en compte de la genèse discursive.

La contribution de Lappa et Nikolantonakis (*The mathematical working space in teaching of logarithms in upper secondary school*) porte l'attention sur l'utilisation d'un texte historique (en particulier, de Euler sur les logarithmes) dans la définition d'un ETM idoine et vise à étudier le travail mathématique des étudiants de l'enseignement secondaire ayant les tâches de lire et interpréter ce texte.

La contribution de Solar et Goizueta (*La importancia de la refutación en la argumentación colectiva para las oportunidades de aprendizaje matemático*) pose plusieurs questions, comme celles sur la place du travail mathématique dans l'argumentation et la réfutation, sur le rôle joué par la figure, et sur comment trouver la place qui correspond aux gestes. L'accent est mis en premier lieu sur l'importance de la réfutation, notamment le lien entre justification et réfutation en rapport à l'ETM. Et en second lieu, il est mis sur les outils qui se dégagent du cadre des ETM afin d'analyser les types de justifications données par les étudiants et les interactions en classe, ainsi que l'orchestration « argumentative » de l'enseignant.

L'analyse de tâches de description et de reproduction de figures est l'objectif de la recherche de Michot et Braconne-Michoux (*Analyse dans le cadre des ETM d'une tâche de géométrie au 2e cycle du primaire au Québec*). Dans cette contribution, on s'intéresse à l'articulation des genèses dans le plan sémiotique-instrumental [Sem-Ins], afin de déterminer comment il est possible d'organiser une tâche de description et de reproduction de figures géométriques pour qu'elle soit une source d'apprentissage pour les élèves.

Au cours de la discussion, on a soulevé des questions sur la genèse discursive. En particulier, on s'est interrogés si, dans une perspective d'analyse globale de la tâche, le plan [Sem-Ins] serait « gouverné » par la genèse discursive dans le cas d'élèves qui ont su mobiliser des éléments de leur référentiel théorique pour rédiger les descriptions attendues.

La recherche de Anastasiadis et Nikolantonakis (*Processus de visualisation dans des tâches de comparaison d'aire*) contribue à la discussion sur l'ETM idoine de l'intervention didactique, incluant l'étude d'une source historique primaire, l'activation des connaissances antérieures, la formulation d'un problème fondé sur la source historique et sa solution en groupes et avec des méthodes différentes. Elle s'appuie sur le rôle joué et sollicité par la visualisation des figures géométriques et sur leur traitement. L'analyse montre que, par exemple, le quadrillage dans la tâche de calcul de l'aire des figures données n'était pas seulement considéré comme un ensemble de carreaux, mais aussi le signe d'un outil de mesure, dont l'utilisation avait été faite pendant l'intervention et cela, en tant que manière de voir les figures. On porte ainsi l'attention, à l'instar de la contribution de Michot et Braconne-Michoux, sur le rôle de la visualisation.

DE NOUVELLES PERSPECTIVES

Plusieurs contributions se réfèrent à d'autres cadres théoriques établis en didactique des mathématiques (par exemple, la théorie de la médiation sémiotique, la théorie de la double approche, la théorie de l'activité, l'approche instrumentale, la déconstruction dimensionnelle). Cela répond à la nécessité d'intégrer ou de compléter le modèle des ETM de base selon la spécificité des études et de leurs besoins particuliers. La ThETM permet justement ce type d'adaptation et implique un approfondissement des liens entre cadres (voir le commentaire d'Alain Kuzniak dans la conférence d'ouverture sur « cette plasticité ouverte et intégratrice » de la ThETM, l'article de Richard, Venant et Gagnon (2019) ou les synthèses du thème 2 depuis l'EMT3 à Montréal). Comme piste de développement théorique, il faudrait approfondir comment la ThETM permet de saisir la complexité dynamique du travail mathématique en légitimant des analyses locales plus fines se référant simultanément à plusieurs éléments des ETM (deux genèses, deux plans, deux fibrations,…). D'ailleurs, la question sur les « fibrations » mêmes est demeurée ouverte dans le groupe. Enfin, les confrontations entre les recherches conduites sur le système tuteur et celles à l'école primaire ont mis en évidence l'intérêt à mieux étudier le raisonnement dès l'école primaire, que ce soit pour nourrir un système tutoriel comme QED-Tutrix, dans la perspective d'une utilisation à des niveaux scolaires plus élémentaires (école primaire), ou simplement pour mieux comprendre le travail mathématique des plus jeunes.

BIBLIOGRAPHIE

Richard, P.R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and challenged in instrumental proof. In G. Hanna et al. (Eds.), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*, Mathematics Educations in the Digital Era (vol. 14, pp. 139–172). Springer.

CARRIED AND BORROWED NUMBER IN THE LIGHT OF THE MATHEMATICAL WORKING SPACE

Apostolos Popotis and Konstantinos Nikolantonakis

University of Western Macedonia, Greece

apopotis@gmail.com, knikolantonakis@uowm.gr

This study explores the definition of carried and borrowed number in addition and subtraction respectively, given by 7 students of the 3rd Grade of a primary school in Greece. Data was collected through the children's answers to the questions, before, during and after an educational intervention, which also included the use of the Chinese abacus. We used Poisard's (2006) definition for the two notions and the definitions given by the Greek textbook. We studied the students' work that was integrated into the vertical planes of the MWS model; we realized that the instrument influences powerfully the students' way of thinking and therefore, determines in which planes of the MWS model they will work. Moreover, the concrete instrument has been converted into an abstract one that children can manipulate mentally. The whole discursive development of the two concepts pivots on the instrument.

Key words: *Carried and borrowed number, Chinese abacus, Instrumental genesis, Semiotic mediation.*

INTRODUCTION

In this paper, the theory of Mathematical Working Spaces (MWS) is used to monitor the development of a definition of carried number in addition and borrowed number in subtraction given by 7 third Grade students of a primary school in northern Greece. The students approach the two concepts with the aid of the Chinese abacus. Furthermore, the relationship among MWS (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016), instrumental genesis (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) and semiotic mediation (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) is examined. Poisard (2006) provides a definition of carried and borrowed number and her research is used as a basis for characterizing the answers given by the students as mathematical ones or not. Through the exploration of the vertical planes of the MWS model, the evolution in the articulation of a definition given by the students for the particular concepts is presented.

The main research question is the following: How can be described -through the theory of MWS and with the aid of the Chinese abacus, which as an instrument can mediate mathematical content- the evolution in the articulation of a definition for carried and borrowed number given by primary school students?

THE CHINESE ABACUS

The Chinese abacus is an ancient tool through which one can process the place value concept in the decimal number system. It provides a semi-concrete representation of numbers, children can manipulate it, and they can easily create a mental image of it

(Zhou & Peverly, 2005). The fact that someone can write up to fifteen in each column of the Chinese abacus and make exchanges with his hand reinforces the understanding of the notion of carried and borrowed number (Poisard, 2006; Spitzer, 1942).

THE THEORY OF MWS

MWS is a structure for mathematical activities, organized in a way to allow the analysis of the activity of individuals facing mathematical problems (Kuzniak et al., 2016). It consists of the epistemological level, which is related to the mathematical content of the field being studied and the cognitive level, which concerns the thought of the person who solves a problem. The two levels are linked through three geneses: a) the semiotic genesis, which is related to the decoding and the interpretation of signs, b) the instrumental genesis, which makes the artifacts functional during the process of construction, and c) the discursive genesis, which is activated to promote mathematical reasoning and verbal proof. Thus, three vertical planes are formed: a) the semiotic-instrumental plane, which supports research and discovery, b) the instrumental-discursive plane, which supports reasoning and justification, and c) the semiotic-discursive plane, which promotes presentation and communication.

It would be theoretically and methodologically interesting to use the MWS model as a framework to investigate educational phenomena starting from primary school age (Kuzniak et al., 2016). In our case we will use the MWS in the field of Numbers where the process associated with instrumental genesis is the numerical calculation using material and symbolic artifacts (Anastasiadis & Nikolantonakis, 2017).

THE INSTRUMENTAL APPROACH

The instrumental approach was developed by Rabardel (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Rabardel based his approach on the distinction between artifact and instrument. For him the artifact is the material or the symbolic object per se. Instead, the instrument is a mixed or hybrid entity that includes both artifact-type components and schematic components (utilization schemes) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). According to Béguin and Rabardel (Maschietto, 2015), utilization schemes have both a personal and a social dimension. They can arise from a personal-private construction of the user and/or they can result from the appropriation of social schemes formed by the community (in our case the students of the class).

The process by which an artifact becomes part of an instrument in the hands of the user (in our case the student) is called instrumental genesis (Drijvers et al., 2010). Instrumental genesis involves two processes: a) instrumentalisation and b) instrumentation. Instrumentalisation concerns the emergence and the evolution of the different components of the artifact. It is directed towards the artifact, which is shaped by the user's activity. Instrumentation concerns the emergence and development of the utilization schemes associated with performing a task with the aid of an artifact. It is directed towards the subject and shapes his thought and activity.

Therefore, the two processes are oriented from the subject to the artifact and vice versa. That is, the student's thought is formed by the artifact, but also forms the artifact (Drijvers & Trouche, 2008). Kuzniak et al. (2016) believe that genuinely mathematical knowledge is engaged and developed in the instrumentalisation process.

THE THEORY OF SEMIOTIC MEDIATION

Rabardel's instrumental genesis, although fundamental, is not enough to achieve teaching purposes as mathematical meanings are sometimes hidden (Bartolini Bussi, 2011). Therefore, someone cannot give any tool to children and expect that they can learn because of their engagement with it (Bartolini Bussi & Boni, 2009). The artifact and the modes of its use can act as key elements for the emergence of mathematical knowledge within school (Mariotti, 2012). Artifacts can become mediators of knowledge only in suitable teaching and learning situations (Bartolini Bussi, 2011). Here gains ground the theory of semiotic mediation which aim is to describe and explain the process that begins with the student's use of an artifact for a given task and leads to the appropriation of a piece of mathematical knowledge (Mariotti, 2012).

In this theory the teacher's role is twofold: a) to design suitable tasks for the construction of the intended piece of knowledge, and b) to develop situated texts into mathematical texts within classroom interaction (Bartolini Bussi, 2011). The teacher fosters the emergence of the mathematical meanings embedded in the instrument.

CONNECTING THE MODEL OF MWS TO INSTRUMENTAL GENESIS AND TO THE THEORY OF SEMIOTIC MEDIATION

The model of MWS has the instrumental genesis in its centre, which links the artifacts of the epistemological level to the construction of the cognitive level. If a student wants to use an artifact in order to make a construction, this must be turned into an instrument. The instrumental genesis describes and analyzes the process of this conversion. Kuzniak et al. (2016) do use Rabardel's instrumental approach.

The theory of semiotic mediation has the artifact in its center as the mediation process starts from it. When teacher assigns a task to student to solve it with the aid of an artifact, student produces signs. This stage coincides on the visualization component of the MWS's cognitive plane and should be extended beyond simple vision or perception of signs. The signs that the student produces during his semiotic activity may be written and/or oral texts, gestures, drawings, gazes and whatever sign is used to make sense of and to communicate the procedure (Bartolini Bussi & Maschietto, 2008). These signs reflect the personal meanings that have been constructed and are related to the utilization schemes that have been developed. The construction of personal meanings can be identified with the construction component of the MWS's cognitive plane. The instrumentation process is placed in the upward movement of instrumental genesis. Construction is related to actions that start with the use of technological tools, which may not lead to the production of texts, but include observation, exploration or experimentation.

In the theory of semiotic mediation, the student's personal meanings form a situated text. The term "text" is hybrid, in the sense that it may contain everyday, deictic (e.g. this, that) and mathematical expressions (Bartolini Bussi, 2011). This situated text reflects his personal way of solving the task assigned and it could be related to the component of argumentation and proof in the cognitive plane of the MWS theory.

THE NOTION OF CARRIED NUMBER IN ADDITION

Poisard (2006) has taken into account the responses of the children participated in her research and has accepted as mathematical answers about carried number, the following: "a ten", "a number of two digits", "something that overtakes 9", "the notion of passage between the units and the tens" or "passing to the next column".

THE NOTION OF BORROWED NUMBER IN SUBTRACTION

Poisard (2006) gives to borrowed number the same definition as to carried number. In the 2nd Grade of the Greek primary school, students are taught the subtraction algorithm, initially by the type of "regrouping the minuend" and then by the type of "adding equal amounts". The latter is the type of algorithm mostly suggested to students. In the Greek school the term "borrowing" (...I borrow a ten...) means "adding equal amounts" and Chatzigeorgiou (1990) claims that this misunderstanding may confuse students and be responsible for their failure to perform correctly the subtraction algorithm. The above confusion becomes obvious when the student, who uses the "adding equal amounts" algorithm, is asked from where he borrowed a ten. Usually, he tries to say something that is not correct and reveals his uncertainty.

The type of "regrouping the minuend" is the most suitable for students, as it gives meaning to the execution of the subtraction algorithm and promotes its understanding (Fiori & Zuccheri, 2005). On the contrary, the type of "adding equal amounts" is based on the abstract property of the unchanged difference, which is difficult to be explained to students. The type of "regrouping the minuend" is the only one that can be implemented on the Chinese abacus (Tsiapou & Nikolantonakis, 2013).

METHOD

This article is part of a research study to explore -via an educational intervention- the potential of the Chinese abacus to contribute to number sense development in 9 years-old students of Grade 3 in a rural area in Greece. The researcher was also the teacher of the class and has changed the order of the textbook's chapters, so as not to teach the addition and the subtraction algorithm before and during the intervention.

The basis of the research was the theory of instrumental genesis, semiotic mediation and MWS. It is true that there is a lack of studies referring to the $MWS_{numbers}$, particularly in the context of primary school. So, this paper contributes to the implementation of the theory of MWS in the domain of numbers and it tries to link different theoretical frameworks.

Data collection was attained through a questionnaire along with personal interviews before and after the educational intervention, with the filling out of worksheets, as well as by observing students' activities during the intervention. The students worked on 35 worksheets (one on each class period) with the aid of the Chinese abacus. The two worksheets presented in the appendices are the 31st and the 35th worksheet of the educational intervention.

In the questionnaire before and after the intervention, students were asked to read and write three-digit numbers, to perform additive analysis of numbers, to recognize place value in three-digit numbers, to make exchanges between classes of numbers, to compare and to set in order three-digit numbers, to execute addition and subtraction algorithms, as well as to explain the notion of carried and borrowed number. The intervention's activities covered the whole range of the above aspects.

THE REFERENCE MWS REGARDIND CARRIED AND BORROWED NUMBER

In each class of the Greek primary school there is only one textbook available for the teaching and learning of mathematics. The term "carried number" is described (not defined) in the second Grade's textbook as follows: "When we do vertical operations, we take care to place the units and the tens one under another, as in the abacus. If the units we added exceed one ten, we have a carried number and then we add it to the tens' column". The textbook depicts this notion algorithmically through the execution (on a spike abacus) of two additions: one with carried number and one without. The term "borrowed number" is referred in the title of the 35th chapter of the textbook and is described (not defined) with the aid of the subtraction 91-36 as follows: "When we make calculations with vertical subtraction, firstly we subtract units from units. If we cannot do that, we analyze the number and we borrow 10 units out of the tens, so that the subtraction can be done". This is subtraction with regrouping.

Similarly, in the 36th chapter the same term is described with the subtraction 100-59 as following: "There is another way to do a vertical subtraction: 9 cannot come out of 0. For that reason, I borrow 1 ten (10 units). 9 does come out of 10 and 1 is left. One is the borrowed ten and 5 tens that we have, make 6 tens. 6 comes out of 10 and 4 tens are left". This is the subtraction with the addition of equal amounts and is taught mainly in a procedural way. Teachers do not explain to students from where they borrow a ten and next why they must add a ten to the tens of the subtrahend. Students usually forget to add one ten to the subtrahend's tens, and they fail to calculate correctly. Thus, the reference MWS do affect actual teaching and students' thinking.

In the pre-test, the students were given two subtractions (546-233, 600-8). Although they were free to choose the type of algorithm that they would use, only one student used the regrouping the minuend algorithm.

DESIGN OF THE INTERVENTION'S SUITABLE MWS

For the construction of the suitable MWS, the following activities were designed, inter alia, before investigating the concepts of carried and borrowed number: (1) acquaintance with the origins and the operation of the decimal number system, (2) exploration of the Chinese abacus as an artifact and discovery of the mode of its use, (3) construction of a personal abacus, (4) representation of numbers and execution of additions and subtractions on the abacus.

Several worksheets were designed for the individual exploration of the two notions. The students used both sketched abaci and the actual Chinese abacus.

Each exercise and activity gave the opportunity on the one hand to each student to construct his personal meanings (situated texts) and on the other hand to the teacher (in the plenary discussion) to turn these situated texts into mathematical texts. So, the whole design of the suitable MWS is coherent with the theory of semiotic mediation.

RESULTS

Definition of carried and borrowed number

In the following table 1 appear the students' answers to the question "What carried number is?" and in table 2 the students' answers to the question "What borrowed number is?" before, during and after the educational intervention.

Before the intervention the students had only the questionnaire. During the intervention they were given the Chinese abacus and the worksheet (appendix 1 and 2) and were asked what carried and borrowed number is. After the intervention, they had only the questionnaire sheet in front of them. No answer is marked with (-).

student	*before the intervention*	*during the intervention*	*after the intervention*
Apostolos	-	*Carried number is a ten that we carry over the tens' column.*	*Carried number is a ten that I take from the tens, the hundreds... and I put it in the units, so as the operation can be done.*
Dimitrios	-	*Carried number is a number that we keep until we go to the other column.*	*Carried number is a number that we keep to transfer it to the other column.*
Eva	*If you do a vertical addition and your numbers are large, you will need carried number. You keep a ten somewhere and when you finish the addition, you put it.*	*Carried number is a ten that we will put in the tens, so as to do the right number.*	*Carried number is a number that we add to the next number. For example, 6 + 6 = 12. We write the 2 and 1 is carried number, to add it to the next number, in the tens' column.*
Katerina	*We have carried number when we keep a number.*	*Carried number is a ten that I will carry over the next column.*	*Carried number is the one... the ten that we keep it and we carry it over the next column.*
Konstantinos	*Carried number is a number that you get from something, from a number. I get a number and I get a bit of this number.*	*Carried number is a number that I keep for a while, because I cannot put a two-digit number and I add it to the next column.*	*Carried number is a number that I keep for a while, because I cannot put it to the column where it belongs, and... then I put it to the other column.*
Nikos	*Carried number is the result of an operation.*	*Carried number is a ten and you keep it for the tens.*	*Carried number is a number that I add to the next column.*
Paraskevi	*When we do an operation and we say "one is the carried number" and we count it in the operation. For example, 100+80, 180 and one the carried number, 181.*	*It is a ten that I will use in the next column.*	*Carried number is a number that we add to the next column.*

Table 1: Definition of carried number given by the students

student	*before the intervention*	*during the intervention*	*after the intervention*
Apostolos	-	*We take borrowed number from the tens and we carry it over the units to do the subtraction.*	*The student explained what borrowed number is by executing the algorithm of the subtraction 600-8.*
Dimitrios	-	*Borrowed number is number 10 that I got to do the subtraction. If I did not get it, the subtraction could not be done.*	*I borrow a number from a column... for example from the hundreds' column and I transfer it to the tens' column.*
Eva	*Borrowed number is something that I borrow. A ten, a number I borrow.*	*Borrowed number is the 10 and I get it, because if I do not get it, the subtraction cannot be done.*	*It is a number that we borrow from the next column. For example, if you are in the units, you borrow from the tens, if you are in the tens, (you borrow) from the hundreds, if you are in the hundreds, (you borrow) from the thousands.*
Katerina	-	*Borrowed number is the 10. I take it from the tens' column and I carry it over the units. So, I can do the subtraction.*	*Borrowed number is the one... the ten. When a number is small, I get it from the other number to make it bigger.*
Konstantinos	*Borrowed number is a number that I borrow from a number for a while, I put it somewhere and I give it back.*	*Borrowed number is the number 10 in my subtraction. I took it from the tens' column in order to subtract.*	*It is a number that I borrow for a while to be able to do the subtraction. (I borrow) from the adjacent column. I will exchange one earth bead in the tens for two heaven beads in the units.*
Nikos	-	*Borrowed number is a number that I put in another number, because if I subtract 9 from 2, number 2 will need a ten.*	*It is that I borrow a ten and I add it to the number to get the result.*
Paraskevi	*It is a number that I write and I borrow.*	*Borrowed number is the 10 that I borrowed from the next column of the tens and it helped me to add it to 2. So, I can do the right result.*	*It is a number that we borrow from the adjacent column, because we cannot do the subtraction and it helps us.*

Table 2: Definition of borrowed number given by the students

DISCUSSION

The theory of MWS gives the opportunity to teacher to examine and realize which is the reference MWS of the mathematical concept he is going to teach. In our case the teacher-researcher has incorporated a tool, the Chinese abacus, in his teaching, to make the carried and borrowed number notions easier for the students to understand, as the visual and the tactile perception that the Chinese abacus offers is powerful.

In our case, in the design of the suitable MWS we also used the instrumental genesis, which is part of the theory of MWS, too. A student to articulate a definition for carried and borrowed number, he must base his thought on something. Studying the students' answers to the questions what carried and what borrowed number is, someone can claim that the use of the addition and the subtraction algorithm as a tool proved to be insufficient. So, the students were given the Chinese abacus, as it reveals the true nature of carrying and borrowing (Spitzer, 1942).

An artifact, such as the Chinese abacus, to be able to illustrate the notion of carried and borrowed number must be converted into an instrument. Several activities that were given to the students during the intervention covered both processes of instrumental genesis (instrumentalisation-instrumentation).

The instrumentalisation process concerned: a) discovery of the structural components of the Chinese abacus, and b) formation of the largest possible number on it. The instrumentation process concerned: a) discovery of how the Chinese abacus works, b) representation of the number 107 on the abacus and c) performing the operations 108+241 and 245-108 on it.

As far as semiotic mediation is concerned, the teacher seized any given opportunity to shift the students' situated texts into mathematical texts. For example, when the students were asked to represent the number 342 in their abaci and to explain orally how they worked, a student answered: "I moved three balls in the third from the end stick; I moved these balls in the penultimate stick and one ball in this stick." This situated text through the teacher's guidance and the classroom interaction shifted into the following mathematical text: "I moved three beads on the hundreds' column, because each bead represents a hundred, namely three hundred. Then I moved four beads on the tens' column, because each one represents a ten, (namely) forty. And I moved two (beads) in the units, because each bead worth one." Obviously, the mistake that the student made in his first answer (…and one ball in this stick), is a careless mistake.

Before the instructional intervention, the students' answers to the question what carried number is, neither constitute a definition nor can be considered as mathematical ones, according to Poisard's categorization (2006). These answers are students' situated texts, which express the personal meaning that each one gives to this concept. It seems that some students have formed a vertical addition in their minds and they try to give an answer using the algorithm as a tool. This way of explaining the notion of carried number is similar to the reference MWS (textbook).

At this stage students worked at the instrumental-discursive plane of the MWS model.

During the intervention, in the addition's worksheet the students initially worked at the semiotic-instrumental plane, as they executed the addition 359+6, having the addition algorithm as a tool. Then, they verified the sum they found, using the Chinese abacus. So, they continued to be at the semiotic-instrumental plane, but with another tool. Afterwards, they followed the worksheet instructions and filled out the columns of the abaci by drawing beads and the lines under the columns by writing numerical symbols. At the same time, they followed the same instructions on the Chinese abacus. Thus, students' activity continued to be at the semiotic-instrumental plane.

Students' answers to the question what carried number is, give evidence that they cannot articulate a general definition of the concept. However, they approach the definition given by Poisard (2006). They define the concept based on the specific addition (359+6), where carried number emerges only in the units' place. That's why everyone says that carried number is a ten. Therefore, these students' texts can also be conceived as situated texts that are related to the particular addition. Moreover, students' answers coincide with the reference MWS.

The students in their definition of carried number use the word "column". Throughout the intervention, when we were referring to numbers, we used the term "place value". By using the Chinese abacus, the word "column" replaced the "place value" term. Probably this is due to the presence of rods on the abacus and perhaps it has been formed in the children's mind the idea (mental image) that each place value on a number corresponds to a column on the abacus. So, we can say that this word replacement is a proof that the artifact has become an instrument.

In the post-test, three of the students' answers to the same question referred to the next column. The word "column" refers to the abacus. So we can say that these students are at the instrumental-discursive plane. They internalized the tool and now they manipulate it mentally.

Paraskevi said that carried number is a number that is transferred to the next number, meaning the next place value. To explain it better, she used as example the addition 6+6. It seems that she used the addition algorithm as a tool. Someone might say that she provides her answer, being at the instrumental-discursive plane.

Katerina, to define carried number used the word "column" and talked about tens, hundreds and thousands. Rather, she based her thinking on the Chinese abacus. Therefore, her thought is at the instrumental-discursive plane, too.

In addition, all students' answers can be accepted as mathematical ones. Most of the students choose the abacus as a tool, but there is also the choice of the algorithm.

As far as the concept of borrowed number is concerned, students' answers before the intervention neither constitute a definition of the concept nor can be considered as mathematical ones. The subtraction algorithm seems to dominate their thinking. Their answers constitute a description of the successive steps for the implementation of the algorithm. They seem to use it as a tool of thought. So, they are at the instrumental-discursive plane of the MWS. It is remarkable that most of the students (4 out of 7) did not respond to the question.

During the intervention, on the subtraction worksheet, the students executed vertically the operation 212-9, using the algorithm as a tool. So, they worked on the semiotic-instrumental plane. Then, they verified the result using the Chinese abacus. So, they continued to work on the semiotic-instrumental plane, but with a different tool. Afterwards, they followed the worksheet instructions and filled out the empty sketched abaci with signs. So, they worked again on the semiotic-instrumental plane. From their answers to the last question of the worksheet (what borrowed number is) someone concludes that the students are still at the instrumental-discursive plane of MWS. The subtraction algorithm dominates their thinking and their answers rely on it.

The given definition constitutes a situated text. It refers to the particular subtraction, and is not decontextualized so as to gain general validity.

In the post-test, the students were asked again about borrowed number. Some students' answers referred to columns, which remind the abacus. So, they give their answers based on the mental tool. Therefore, they lie in the instrumental-discursive plane of the MWS model. The fact that the Chinese abacus has been converted from an artifact into an instrument for mental calculation is illustrated in Konstantinos' answer: "…From the adjacent column. I will exchange an earth bead in the tens with two heaven beads in the units". Moreover, according to Poisard's classification (2006), the students' answers can be described as mathematical ones and they approximate the definition given by the researcher.

In conclusion, someone could say that before, during and after the instructional intervention the students' definitions for carried and borrowed number are closely related to, affected by or even determined by prior work in the instrumental dimension.

At all stages of the research, students' thought were strongly dependent on the instrument whether it was concrete or abstract. At no stage they have been released from it in order to move to the semiotic-discursive plane. The discursive development of the two concepts was based on the Chinese abacus more than the algorithm. The use of words such as "column", "abacus", "earth beads", "heaven beads" in students' answers provide evidence for this claim.

REFERENCES

Anastasiadis, M., & Nikolantonakis, K. (2017). The Mathematical Working Space in the case of Area and Perimeter: Concepts' Definitions and Measurement-Calculation Processes. In I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard, L. Vivier, *Proceedings Mathematical Working Space, Fifth ETM* (pp. 117-131). Faculty of Education-University of Western Macedonia, Florina, Greece.

Bartolini Bussi, M. G. (2011). Artefacts and utilization schemes in mathematics teacher education: place value in early childhood education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 93-112.

Bartolini Bussi, M. G., & Boni M. (2009). The early construction of mathematical meanings: learning positional representation of numbers. In O. A. Barbarin & B. H. Wasik (Eds.), *Handbook of Child Development and Early Education: Research to Practice* (pp. 455–477). New York: The Guilford Press.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 746–783). New York: Routledge.

Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2008). Machines as tools in teacher education. In T. Wood, B. Jaworski, K. Krainer, P. Sullivan, & D. Tirosh (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (Vol. 2, pp. 183–208). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Chatzigeorgiou, A. (1990). Addition and subtraction in integers. Students' difficulties and mistakes. *Euclid C, 27*(2), 8-24.

Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 89–132). New York: Springer.

Drijvers, P., & Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments. *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*, 2, 363-391.

Fiori, C., & Zuccheri, L. (2005). An experimental research on error patterns in written subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, *60*(3), 323-331.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 721-737.

Mariotti, M. A. (2012). ICT as opportunities for teaching–learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 25–35). Taipei, Taiwan: PME.

Maschietto, M. (2015). The Arithmetical Machine Zero+1 in Mathematics Laboratory: Instrumental Genesis and Semiotic Mediation. *International Journal of Science & Mathematics Education*, *13*(1), 121-144.

Poisard, C. (2006). The notion of carried-number, between the history of calculating instruments and arithmetic. In P. Groontenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnapan (Eds.), Identities, cultures and learning spaces. *Proceedings of the 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Canberra (Vol 2, pp. 416-423). Adelaide: MERGA.

Spitzer, H. F. (1942). The abacus in the teaching of arithmetic. *The Elementary School Journal*, *42*(6), 448-451.

Tsiapou, V., & Nikolantonakis, K. (2013) The Development of Place Value Concepts to Sixth Grade Students via the Study of the Chinese Abacus. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2058-2067). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Zhou, Z., & Peverly, S. T. (2005). Teaching addition and subtraction to first graders: A Chinese perspective. *Psychology in the Schools*, *42*(3), 259-272.

APPENDICES

Appendix 1

Can you write vertically the following horizontal addition and find the sum? Verify the result using your abacus. Then, follow the instructions to show by drawing beads the way of executing an addition on the Chinese abacus.

horizontal addition	*vertical addition*	*abacus*
359+6=		*Place with beads the number 359 on the abacus. Then, write under each place value how many Units, Tens and Hundreds are activated.* _ _ _ *Add the number 6 by drawing beads. Then, write under each place value how many Units, Tens and Hundreds are activated. Paint carried number with red color.* _ _ _ *Make the necessary exchanges between place values.* _ _ _ *Can you explain what carried number is?*

Appendix 2

Can you write vertically the following horizontal subtraction and find the difference? Verify the result using your abacus. Afterwards, follow the instructions to show by drawing beads the way of executing a subtraction on the Chinese abacus.

horizontal subtraction	*vertical addition*	*abacus*
212-9=		*Place with beads the number 212 on the abacus. Then, write under each place value how many Units, Tens and Hundreds are activated.* _ _ _ *Start subtracting. You cannot subtract 9 Units from 2 Units. Borrow 1 Ten (=10 Units) from the Tens' place and make the necessary exchanges between place values. Then, draw the beads which are activated on the place values and write under each one how many Units, Tens and Hundreds are activated. Paint borrowed number red.* _ _ _ *Subtract the Units in the Units' place and draw what remains. Then, draw beads on the Tens' and Hundreds' place. Write under each place value how many Units, Tens and Hundreds are activated.* _ _ _ *Can you explain what borrowed number is?*

EXPLORACIÓN GUIADA EN UN AMBIENTE CON TECNOLOGÍA INTERACTIVA, CASO DE LAS RAMAS INFINITAS DE UNA FUNCIÓN

Rosa Elvira Páez Murillo[a], François Pluvinage[b]

[a]Universidad Autónoma de la Ciudad de México, [b]Cinvestav-IPN, México

rosa.paez@uacm.edu.mx, fpluvinage@cinvestav.mx

Las tecnologías han generado una revolución sociocultural, que tiene consecuencias notables en las formas de trabajar y aprender. La educación matemática se ve afectada, y un reto para los docentes es de enseñar contenidos y métodos que no aprendieron en su formación, lo que obliga a experimentar previamente. Este texto presenta un experimento de enseñanza sobre el tema de las ramas infinitas de funciones reales de una variable real. El marco teórico es la aproximación instrumental de Guin y Trouche, guiada con la intención de realizar un aporte a la génesis instrumental en el sentido de Kuzniak y Richard. Se diseñaron actividades de exploración guiada con el uso de los sistemas GeoGebra y Graph, seguidas por una evaluación. Se analiza su aplicación a un público de 20 estudiantes de ingeniería.

Palabras clave*: Ramas infinitas, Exploración guiada, TIC, ETM.*

TRABAJOS SOBRE LAS RAMAS INFINITAS CON LAS TIC EN EL MARCO DE LOS ETM

En su presentación general de los espacios de trabajo matemático (ETM), Kuzniak y Richard (2014) destacan tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. Además, especifican que éstas se combinan por pares en las diversas fases de un trabajo matemático: descubrimiento y exploración, presentación y comunicación, justificación y razonamiento (Kuzniak, A., Richard, P., 2014, Figura 3 p. 11). En el presente trabajo, nos interesa más específicamente el plano de *descubrimiento y exploración*, en el que se combinan la génesis semiótica y la génesis instrumental. Este plano es descrito de manera detallada por Kuzniak, Tanguay, Elia (2016), en el apartado *The Sem-Ins plane, conjoining the semiotic genesis and the instrumental génesis* (p. 728).

En las Actas del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa 22, Del Castillo y Montiel (2009) exponen un amplio panorama de las investigaciones sobre el uso de herramientas en la enseñanza de las matemáticas, en particular la aproximación instrumental definida por Guin y Trouche (2002a). La distinción que se hace entre *instrumentalización* e *instrumentación* nos parece tener una prolongación entre *descubrimiento* y *exploración*. En ambas, la primera palabra induce un movimiento del pensamiento cuyo sentido va del individuo al objeto, mientras la segunda palabra induce un momento del pensamiento cuyo sentido va del objeto al individuo.

En modalidad presencial con el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC), una primera reflexión del profesor se presenta antes del trabajo de aula: diseñar un documento para el trabajo activo de los estudiantes. En la sesión de clase, le toca al profesor primero la orquestación, es decir, la coordinación de las diversas formas empleadas por los estudiantes al usar los instrumentos en juego (Guin & Trouche, 2002b). Luego, la síntesis de la búsqueda de ramas infinitas de gráficas de funciones por un método general. Aquí consideramos el ejemplo de una introducción con el uso de GeoGebra, mediante la entrada Asíntota(<Función>). Vamos a ver que esto necesita tomar en cuenta fenómenos que merecen la atención.

Para dar precisiones sobre los fenómenos en juego, podemos considerar primero un ejemplo sencillo pero ilustrativo de uso de sistema: el tratamiento de ecuaciones. Este tratamiento necesita una instrumentalización de parte del profesor que quiere usar en su clase un sistema de cálculo simbólico. Existen sistemas específicamente dedicados al cálculo simbólico, como Derive o Maple, y también la *navaja suiza* que es GeoGebra tiene una vista CAS (cálculo simbólico).

La resolución de ecuación enfoca la posible relación entre *artefactos* y *referencial*. Si se introduce la expresión $x^2 + 6x - 7$ seguida del comando de factorización en cualquiera de estos sistemas, se obtiene con todos la misma respuesta $(x - 1)(x + 7)$. Pero si se introduce la expresión $x^2 + 6x - 3$ seguida del comando de factorización, el sistema GeoGebra[1] repite la expresión, lo que señala su incapacidad. Con Derive o Maple, la factorización que admite radicales devuelve $(x + 2\sqrt{3} + 3)(x - 2\sqrt{3} + 3)$. La conclusión instrumental que resulta de los tratamientos experimentados es que el sistema generalista GeoGebra tiene potencialidades limitadas de cálculo simbólico, en comparación de software especializado. En términos de artefactos, se puede decir que con GeoGebra se promueve un proceso de *descubrimiento y exploración* dirigido hacia la resolución numérica de ecuación.

En el sentido de resaltar la importancia de los procesos de *descubrimiento y exploración,* a los que estamos haciendo mención en nuestro experimento de enseñanza, en específico con el uso de GeoGebra, vale la pena citar el trabajo realizado por Didovic, L. (2009), el cual fue implementado a nivel superior. Este artículo muestra un trabajo en el que las conclusiones están basadas en un estudio estadístico global, del que resulta que el efecto de GeoGebra en la enseñanza del cálculo ha sido positivo en la comprensión y el conocimiento de los estudiantes.

Regresando a nuestro tema matemático de estudio, para el caso de las ramas infinitas de gráficas de funciones reales, el repertorio de comandos de GeoGebra contiene dos elementos relacionados con el tópico: *Asíntota* y *Límite.* Un funcionamiento satisfactorio de estos comandos puede simplificar los tratamientos. En efecto, la función determinada por $y = f(x)$ tiene como asíntota a una recta de ecuación $y = ax + b$ si y sólo si se cumple $\lim_{x \to \infty}\left(f(x) - ax - b\right) = 0$. Por eso, antes de diseñar las hojas de actividades para los estudiantes, hicimos una exploración al usar el comando *Asíntota* de GeoGebra con varias funciones.

[1] Nos referimos en este texto a versiones de GeoGebra hasta la versión 6.

Observamos lo siguiente:

- Obtención correcta de todas las asíntotas, tanto verticales como horizontales u oblicuas, de las funciones racionales y de ciertas funciones que contienen radicales, como $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.
- Sin embargo, un radical puede conducir a la obtención de asíntotas verticales incorrectas; ejemplo ilustrado en la Figura 1[2] (izquierda): $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} + \sqrt{x}$, en el que se representan tres asíntotas verticales (líneas punteadas) de las que dos son falsas.
- Con una función trigonométrica, el resultado puede ser aun peor; en el ejemplo ilustrado en Figura 1 (derecha): $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1} + \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x}}$, el sistema GeoGebra proporciona $x = -1$ como asíntota vertical, mientras -1 se sitúa fuera del dominio de la función, y no obtiene la asíntota oblicua $y = x$.

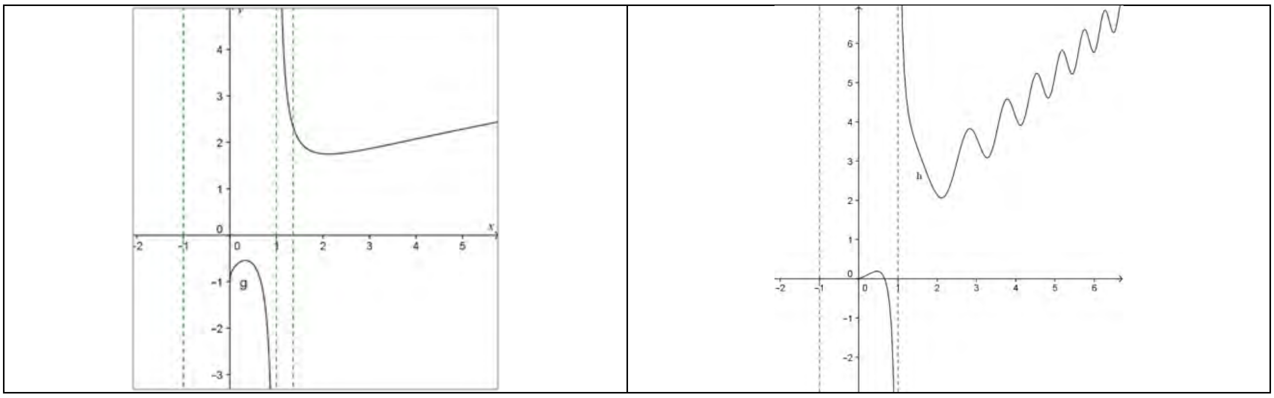


Figura 1. Resultados del comando Asíntota[<Función>] de GeoGebra

Se puede imaginar que ciertos de los defectos observados van a ser corregidos en versiones futuras del sistema, pero verificaciones se necesitarán. Debemos considerar que el comando Asíntota de GeoGebra no es confiable. Por eso es preciso probar que las rectas obtenidas son realmente asíntotas. De todo modo, es preferible no "casarse" con un sistema y entonces introducir otra manera de conseguir asíntotas.

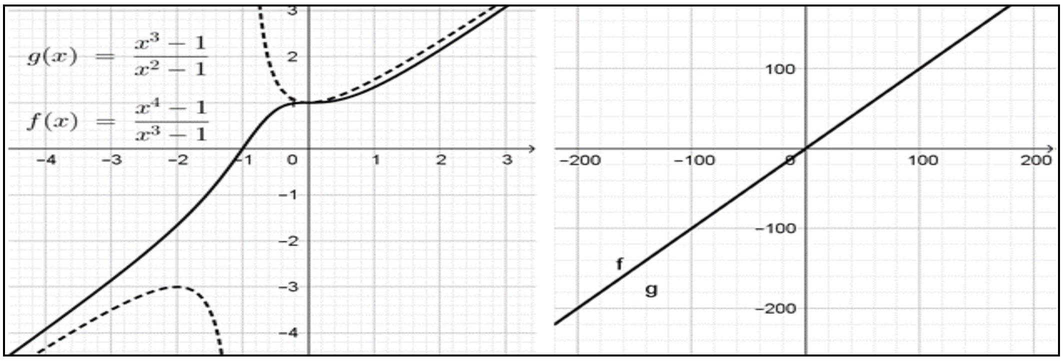


Figura 2. Dos funciones *f* y *g* representadas con dos escalas diferentes

---

[2] El fenómeno ilustrado fue hecho en la versión 5 de GeoGebra; en la 6, desaparece la vertical de abscisa superior a 1.

En un proceso de instrumentación, el individuo sigue una ruta de exploración, el terreno por explorar siendo un tópico matemático. En la exploración de ramas infinitas de gráficas de funciones, si una función tiene a una recta *r* como asíntota, su gráfica se confunde con *r* cuando se observa su comportamiento en una zona lejana. De donde la idea de explorar en un sistema computacional el efecto de zoom proporcionado por la repetición varias veces del comando Alejar. Así, asíntotas horizontales u oblicuas se evidencian, pero ¡desaparecen asíntotas verticales! Véanse en la Figura 2 representaciones a escalas diferentes de funciones *f* y *g*, que se confunden en la gráfica de derecha. Esta desaparición no es un defecto del programa, sino un fenómeno que se produce con todo sistema, a causa del carácter necesariamente finito discreto del universo de toda computadora.

Usamos en experimentaciones anteriores los zooms de alejamiento de GeoGebra, pero puede ser útil poner a disposición de un público estudiantil un sistema que, a diferencia de GeoGebra, no proporcione una obtención directa de asíntotas. Con tal artefacto, usar el zoom de alejamiento es una obligación. El sistema *Graph*, que es gratuito y "open source" (de fuente abierta), corresponde a esta especificación, y en consecuencia propusimos su uso en la segunda actividad de la presente experimentación, después del trabajo con GeoGebra en la primera actividad.

LA EXPERIMENTACIÓN

Las actividades de experimentación

Para el desarrollo del experimento de enseñanza, se diseñaron dos actividades didácticas cuya estructura corresponde a lo que se conoce como "Exploración Guiada" (Carrión, Pluvinage, Adjiage, 2016). Es decir, la actividad está compuesta por una serie de instrucciones relacionadas con el uso de software (GeoGebra y Graph), acompañadas de preguntas, con el fin de producir respuestas del sistema utilizado y estudiar los resultados obtenidos.

En la estructuración y aplicación de las actividades, consideramos que los estudiantes utilizaran primero GeoGebra, el cual cuenta con elementos como "zoom de alejamiento", el comando "Asíntota" o el comando "Límite" para la identificación y/o justificación de la existencia o no de asíntotas. En la segunda actividad, se consideró Graph, el cual es un graficador, y en donde el estudiante cuenta con menos elementos por parte del instrumento, en comparación con GeoGebra, para la exploración del objeto matemático estudiado. Una tercera actividad es desarrollada por los estudiantes, en donde, solamente se les permitió hacer uso de una calculadora científica. Es un proceso de instrumentalización, donde va de más a menos en términos de la potencialidad y uso del artefacto. Mostramos a continuación las tres actividades que fueron diseñadas y lo que pretendíamos en específico en cada una de ellas.

Actividad Uno. Esta actividad consta de 5 preguntas (acompañadas de instrucciones de manejo de GeoGebra), y en la cual se estudia una función por pregunta, iniciando con una función racional.

P 1. En la ventana denotada como **Entrada**, introduce la expresión $f(x)=\dfrac{\left(x^2-1\right)^2}{(x^3-1)}$.

a. Identifica la(s) asíntota(s) que tiene la función *f*(*x*) y explica el procedimiento usado para su identificación.
b. Utiliza el concepto de límite para probar que cada recta encontrada en el inciso *a* corresponde a una asíntota.
c. Utiliza el comando Límite(<Función>, <Valor numérico>). En <Función> vas a introducir la expresión que corresponde a *f*(x) menos la expresión $mx+b$ que corresponde a la asíntota. Para <Valor numérico> vas a introducir ∞. Esto es: $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(f\left(x\right)-\left(mx+b\right)\right)$.

¿Qué valor se obtiene y cómo se explicaría esto en términos de la distancia entre los puntos de misma abscisa *x* de la gráfica de la función dada y de la recta?

Nuestra intención en términos del uso de GeoGebra, es identificar qué elementos del artefacto el estudiante utiliza para identificar las asíntotas de la función. ¿En qué paradigma realiza su trabajo matemático cuando justifica la existencia o no del objeto de estudio? y ¿qué signos o representamen utilizan para ello?

P2. En la ventana denotada como **Entrada**, introduce la expresión $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Luego, en **Entrada**, introduce el comando **Asíntota(**g**).**
a. ¿Qué resultado te proporciona GeoGebra y cómo lo puedes interpretar?
b. Utiliza el comando Límite(<Función>, <Valor numérico>) para las asíntotas que se muestran en el inciso **a** y en las cuales sea "**pertinente**" o "adecuado" **aplicar esta instrucción**. En <Valor numérico> puede ser ∞ o $-\infty$ según corresponda. Esto es: $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(f\left(x\right)-\left(mx+b\right)\right)$ o $\underset{x\to-\infty}{Lim}\left(f\left(x\right)-\left(mx+b\right)\right)$
i. ¿Para qué tipo de asíntotas es pertinente aplicar la instrucción especificada? y ¿qué valor se obtiene?
ii. ¿Para qué tipo de asíntotas NO es pertinente aplicar la instrucción especificada? Argumenta la razón. ¿Qué instrucción aplicarías?

En términos del uso del artefacto tanto material como simbólico y la interpretación de los datos que éste aporta, ¿de qué manera afecta la evolución de su génesis semiótica?

P3 En la ventana denotada como **Entrada**, introduce la expresión $h(x)=\sqrt{x-1}$. Luego utiliza el comando **Asíntota(h).**
a. ¿Qué resultado te proporciona GeoGebra y cómo lo puedes interpretar?
b. ¿De qué manera podrías probar la existencia o no de asíntotas?

P4. En la ventana denotada como **Entrada**, introduce la expresión $j(x)=\dfrac{x^3+sen\left(x\right)}{x^2}$. Luego utiliza el comando **Asíntota(**j**).**
a. ¿Te parece correcto y completo el resultado que proporciona el comando **Asíntota(j)** de GeoGebra? Argumenta tu respuesta
b. Realiza la prueba con el concepto de límite para mostrar que la o las rectas que identificaste en el inciso **a** (independiente del resultado de GeoGebra) son asíntotas de la función.

P5. En la ventana denotada como **Entrada**, introduce la expresión $k(x)=\dfrac{1}{x^2-1}+\sqrt{x}$. Luego utiliza el comando **Asíntota(**k**).**

a. ¿Te parece correcto y completo el resultado que proporciona el comando **Asíntota(**k**)** de GeoGebra? Argumenta tu respuesta
b. Realiza la prueba con el concepto de límite para mostrar que la o las rectas que identificaste en el inciso **a** (independiente del resultado de GeoGebra) corresponden a las asíntotas de la función.

Las preguntas 3, 4 y 5 nos permitirán analizar si el trabajo matemático del estudiante se moviliza de un plano de descubrimiento a un plano de razonamiento. ¿Qué elementos son señales o no de esta transición? Y de ¿qué manera el uso del artefacto favoreció esta transición? En términos generales, en esta actividad nos enfocamos en que los estudiantes desarrollaran tareas de exploración e identificación, en específico con el comando Asíntota. Seleccionamos las funciones de tal manera que, en primera instancia, este comando proporcionara todas las asíntotas de la función (pregunta P2). Luego, el estudiante tiene que interpretar la respuesta, pasando por un caso donde se tiene un conjunto vacío (pregunta 3), seguido de una respuesta parcialmente correcta (pregunta 4) y finalizando con una función en donde la respuesta que proporciona GeoGebra es incorrecta (pregunta 5). En cada caso mencionado se le solicitó al estudiante que justificara la identificación que realizaba con o sin ayuda del artefacto.

Actividad Dos. Esta actividad consta de 4 preguntas. Se contempla el estudio de 4 funciones, 3 de las cuales son funciones racionales.

P1. En la pestaña de **función**, en **insertar función,** introduce la expresión $f(x)=(1-2x^2+x^5))/(1-x^4)$.
a. ¿Tiene esta función asíntotas? En caso positiva identifícalas y explica el procedimiento usado para su identificación.
b. Utiliza la herramienta **alejar,** repetida veces, y observa en la vista gráfica el comportamiento de la función. ¿Qué puedes decir de este comportamiento?
c. En la pestaña **Editar,** en **Opciones**, coloca en **Posiciones decimales** 10. Utiliza el icono de **Evaluación** (sexto icono de derecha a izquierda) para encontrar $f(500)$ y $f(-500)$. Vacíe los valores obtenidos en una tabla
d. En la pestaña de **función,** luego **insertar serie de puntos,** introduce los dos puntos hallados en el inciso anterior y dale **Aceptar.** En la ventana algebraica aparece “Serie de puntos 1”. Luego en la misma pestaña de función, active **Línea de tendencia,** luego **Lineal** y **Aceptar**. ¿Qué ecuación obtienes en la ventana algebraica?
e. En la pestaña **Zoom,** puedes utilizar **normalizar (Ctrl+D)** y/o **ajustar todo** para tener diferentes visiones de la recta trazada y la gráfica de la función. ¿Qué se puede decir de la recta y esta gráfica?
f. ¿Qué relación existe entre la ecuación de la recta obtenida y una de las asíntotas que obtuviste en el inciso a?
g. En la pestaña de **función**, en **insertar función** introduce la expresión: $\left(\frac{(1-2x^2+x^5)}{(1-x^4)}\right)-(mx+b)$ donde $(mx+b)$ corresponde a la ecuación de la recta hallada en el inciso d. ¿Qué representa esta nueva función, en términos de la distancia de separación en la abscisa x entre la gráfica de la función $f(x)$ dada inicialmente y la recta?
h. ¿Cuál sería el $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-(mx+b)\right)$? y ¿cómo explicarías el resultado obtenido con límite en términos de la distancia de separación entre la gráfica de la función $f(x)$ dada inicialmente y la recta?
i. ¿Cuál sería el $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(mx+b)\right)$? y ¿cómo explicarías el resultado obtenido con límite en términos de la distancia de separación en la abscisa x entre la gráfica de la función $f(x)$ dada inicialmente y la recta?

Al igual que P1 de la Actividad Uno, ahora con el uso de Graph, queremos identificar ¿qué elementos del artefacto utilizan para identificar las asíntotas de la función? y ¿qué signos o representamen utilizan para identificar las asíntotas? Asimismo, queremos identificar cómo el uso del artefacto puede favorecer o no a que el estudiante identifique el comportamiento asintótico de la función a través de las representaciones macro-espaciales.

Debido a la insuficiencia del artefacto como tal (comparado con GeoGebra que proporciona de manera inmediata las asíntotas a través de un comando), se planeó acercar al estudiante a la construcción de un método para obtener una aproximación a la ecuación de la asíntota oblicua (u horizontal), a través del trazo de una recta utilizando dos puntos de la curva en un "punto lejano" del origen. Por lo que nos interesa establecer ¿de qué manera, el uso del artefacto material y simbólico favoreció la construcción de un método y la noción de asíntota en términos de distancia?

P2. En la pestaña de **función**, en **insertar función,** introduce la expresión $f\left(x\right)=x^4/(2x^3-x^2-1)$ ¿Tiene esta función asíntotas? En caso positiva identifícalas y explica el procedimiento usado para su identificación.
P 3. En la pestaña de **función**, en **insertar función** introduce la expresión $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x+1}$. Haciendo uso de **Graph**, describe el procedimiento que seguirías para identificar si la función dada tiene o no asíntotas.
P4. Se dice que la gráfica de la función $g\left(x\right)=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{x}$, cuando x tiende al infinito, tiene la forma de una **<u>rama parabólica</u>**. Apoyándote sobre la distancia entre los puntos de misma abscisa *x de la función g(x)* y de la semi-parábola $y=\sqrt{x}$, justifica esta expresión.

Dado que en P1 una serie de elementos con respecto al uso de artefacto fueron ofrecidos al estudiante, en P2, P3 y P4 pretendemos identificar la operatividad que le proporciona el estudiante al artefacto, permitiéndonos así identificar si se permea como tal una movilización de la génesis instrumental al igual que si hay un desarrollado de la competencia matemática de razonamiento.

Actividad Tres. La actividad tres ya no corresponde a una actividad de exploración guiada sino a una actividad de evaluación en la que se les permitió el uso de una calculadora científica. La función considerada en la pregunta P1 presenta la particularidad, en contraste con las funciones racionales, de dar lugar a dos asíntotas diferentes cuando x tiende a ∞ y cuando x tiende a $-\infty$.

P1. Dada la función. $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$. ***a.*** ¿Tiene esta función asíntotas? En caso positivo identifícalas y explica el procedimiento usado para su identificación. ***b.*** Realiza la prueba de que las rectas identificadas en el inciso anterior son asíntotas.

P2. Dada la función $g(x)=\sqrt{x}$. ¿Cómo se puede justificar que la gráfica de la función $g(x)$ no tiene asíntota horizontal, y más generalmente no tiene asíntotas?	
P3. Para el caso de la función $f(x)=\dfrac{1-2x^2+x^5}{1-x^4}$, ¿es la recta $y = -x$ *asíntota* de la gráfica de *f*? Argumenta tu respuesta.	

Esta actividad nos proporcionará información de manera global sobre las competencias matemáticas cognitivas que desarrollaron los estudiantes en este experimento de enseñanza.

Contexto del experimento de enseñanza

El objeto matemático que corresponde al estudio de ramas infinitas hace parte del programa del curso de cálculo diferencial del plan de estudios de ingenierías en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México. El experimento de enseñanza se desarrolló con 20 estudiantes que habían finalizado el curso mencionado. Este tuvo una duración de 5 sesiones de trabajo de 90 minutos cada una. La Actividad Uno fue desarrollada en dos sesiones, al igual que la Actividad Dos. Para éstas fue necesario trabajar en el laboratorio de computación. La Actividad Tres fue desarrollada en el salón de clase con la formalidad de ser una evaluación. El experimento de enseñanza fue dirigido por uno de los investigadores, en el desarrollo de un semestre académico.

RESULTADOS

Para la presentación de los resultados, hemos seleccionado una muestra de cinco estudiantes: E2, E6, E8, E9 y E17. El criterio de elección estuvo basado en la introducción de la consideración de límite, correcta o no, en la Actividad Uno. Elegimos a los que iniciaron el experimento de enseñanza con el conocimiento de cuando menos algunos elementos semióticos sobre el tema.

Descubrimiento y exploración con GeoGebra: Actividad Uno

Como lo habíamos contemplado en el análisis previo de las actividades, en la P1 podemos evidenciar las diferentes formas y elementos en que los estudiantes utilizan el artefacto. En una primera clasificación están los que tienen una confianza ciega en la información que les proporciona el artefacto a través de comandos y que no agregan ningún aporte de conocimientos matemáticos previos. Este es el caso de E2 y E17, pero que además estos dos estudiantes tienen la particularidad de afirmar en primera instancia que “no hay asíntotas” debido a que la recta “toca la gráfica”. Lo que significa, que la información que proporciona el artefacto, silencia por el momento este obstáculo cognitivo de corte epistemológico que proviene de la base del concepto de asíntota que es el de límite. En una segunda clasificación están los que utilizan el artefacto para respaldar un conocimiento previo, como es el caso de E6 y E9, que manifiestan la existencia de una asíntota oblicua en base al grado de los polinomios que componen la función racional. De último, tenemos a E8, que aprovechó cierto apoyo sobre el artefacto para descubrir la presencia de la asíntota pero sin pasar a un proceso de identificación específica.

La confianza ciega que les proporcionan los estudiantes E2 y E17 a la respuesta que ofrece el artefacto, se mantiene casi en términos generales en el desarrollo de la actividad. Ésta solamente se ve afectada por la forma en que se planteó P4 que dio cabida a resurgir el obstáculo ya mencionado con respecto a la intersección entre la recta y la curva. Aquí ellos no aceptan que es una asíntota y no se percatan que la respuesta que proporciona el artefacto es parcialmente correcta, es decir, no identifican la otra asíntota que no es dada. En P5 aceptan la respuesta errónea proporcionada por el artefacto y su argumento está en que son asíntotas porque no coinciden con la gráfica. En resumen, la visión desarrollada por los estos estudiantes con respecto a asíntota y el uso de este artefacto, corresponde a que es cualquier recta que proporcione el comando Asíntota siempre y cuando no tenga ningún punto en común con la función.

El uso del artefacto de manera cautelosa es realizado por los estudiantes E6 y E9. Ellos no solo se basan en la información que les proporciona el comando Asíntota, sino que la combinan con la representación gráfica y sus conocimientos previos. La ejecución de las tareas propuestas en la actividad promovió el desarrollo de la competencia matemática cognitiva en cuanto a la identificación de asíntotas.

Justificación y razonamiento con GeoGebra: Actividad Uno

El conocimiento matemático inicial movilizado por estos estudiantes para probar que la recta corresponde a una asíntota fue la consideración de límite. Un acercamiento coherente a la justificación está en el trabajo realizado por E9 y E6. Para E9, parece suficiente especificar que $\underset{x\to\infty}{\text{Lim}}\, f(x)=\infty$ y $\underset{x\to-\infty}{\text{Lim}}\, f(x)=-\infty$, para asegurar que hay una asíntota oblicua. E6 realiza la misma consideración de $\underset{x\to\infty}{\text{Lim}}\, f(x)=\infty$, agregando un acercamiento numérico e intentando reproducir con errores el procedimiento algorítmico que se realiza para encontrar la ecuación de la asíntota oblicua y ajustarla a la ecuación que proporciona el artefacto. E2 y E8 también consideran una notación matemática de límite pero sin que en ello se refleje un acercamiento a una justificación posible. E17 en un lenguaje natural especifica que sus ramas tienden al infinito.

La actividad es orientada para que el estudiante use el artefacto y evoque la noción de asíntota en términos de distancia, usando el comando límite. Sólo que a su vez, también tenemos que considerar que el uso de GeoGebra puede repercutir en la manera en que los estudiantes se desenvuelven en los diferentes registros. Por ejemplo, la escritura algebraica se ve influenciada dado a la estructura como el comando límite es usado: Límite(<Función>, <Valor numérico>). Evidencia de lo que estamos haciendo referencia, lo detectamos en el trabajo de E6, cuya noción de distancia se ve reflejada tanto en el lenguaje natural, como en el algebraico, en el cual en éste último hay una combinación entre la estructura lineal del uso del comando

Límite establecido en GeoGebra y la no lineal que se usa formalmente para la escritura de este concepto.

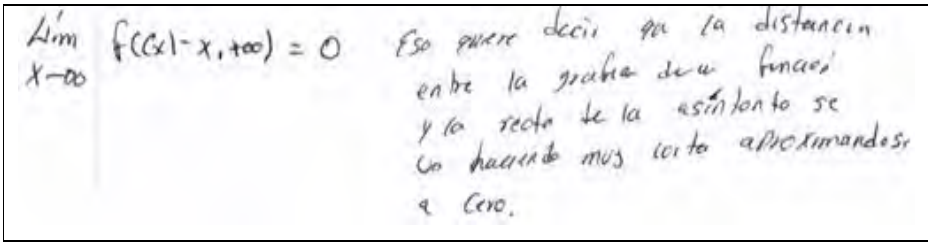
	Eso quiere decir que la distancia entre la gráfica de la función y la recta de la asíntota se va haciendo muy corta aproximándose a cero.

Figura 3. Noción de asíntota en términos de distancia. Respuesta de E6

Para las asíntotas verticales, los estudiantes E6 y E9 utilizan el artefacto para tener un acercamiento numérico y justificar la existencia o no de éstas. En términos generales, E6 y E9 hacen un uso adecuado del artefacto para lo que a descubrimiento y exploración se refiere. Para justificar o razonar, E9 se queda corto, no así E6 en el que podemos evidenciar que un proceso de aprendizaje se ha puesto en funcionamiento.

Descubrimiento y exploración con Graph: Actividad Dos

En esta actividad con el sistema Graph, la obtención de posibles asíntotas necesita un paso intermedio, lo que puede complicar el estudio. Los resultados obtenidos en esta actividad son similares a los mencionados anteriormente. Aunque con la característica de que como en este caso el artefacto usado por los estudiantes tiene limitaciones comparado con GeoGebra, las respuestas de E1, E8 y E17 son más limitadas aún. Esto también afectó al estudiante E6 que en los casos en donde había asíntota oblicua, la ecuación no fue proporcionada, aunque si especificaba la presencia de éstas, justificando ello en el conocimiento de funciones racionales que ya poseía. Para E6, el uso de este artefacto no impactó en el avance más del aprendizaje que ya poseía y en dónde el conocimiento de asíntotas verticales al parecer está bien constituido.

Al inicio de la actividad, la estudiante E9 mostró un conocimiento previo del proceso algorítmico para conseguir la ecuación de la asíntota oblicua, calculando los límites necesarios a través de un acercamiento apoyado por el uso del artefacto. Se evidencia seguidamente el impacto positivo y negativo que tuvo en ella, que en la actividad se implementara la construcción de un método para obtener una aproximación a la ecuación de la asíntota oblicua (u horizontal), a través del trazo de una recta utilizando dos puntos de la curva en un valor "lejano" del origen. Este método la condujo a un éxito cuando la función posee este tipo de asíntotas. En caso contrario, lo que desarrolló fue otra visión de asíntota oblicua: "*Para asíntotas oblicuas evalúo 2 puntos que tiendan a infinito y menos infinito, uno los puntos con una recta y si la pendiente de esta recta es mayor a cero puede haber asíntota oblicua*".

Justificación y razonamiento con la calculadora científica: Actividad Tres

En la actividad tres, los estudiantes no se pueden apoyar sobre la visión de gráficas. Para el desarrollo de esta actividad, el uso del artefacto está solamente limitado a la realización de operaciones aritméticas. El razonamiento matemático que realiza la estudiante E9 a lo largo del desarrollo de la actividad es coherente con su concepción de asíntota horizontal u oblicua. Para él, en el caso de asíntota horizontal tienen que ser iguales $\operatorname*{Lim}_{x\to\infty} f(x)$ y $\operatorname*{Lim}_{x\to-\infty} f(x)$, y en el caso de asíntota oblicua tienen que ser iguales $\operatorname*{Lim}_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $\operatorname*{Lim}_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$. Esto es válido con funciones racionales, pero no con la función de P1, que tiene una asíntota oblicua cuando x tiende a ∞ y una horizontal cuando x tiende a $-\infty$. A pesar de haber obtenido los valores del límite de la función, E9 afirma que no tiene asíntotas horizontales: "*No hay asíntotas horizontales porque el límite de* $\underset{x\to\infty}{f(x)}$ *y* $\operatorname*{Lim}_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ *tienen que aproximarse a un valor específico y en este caso los límites son diferentes"*. Notamos que le falta poco a E9 para adquirir la escritura simbólica que sería $\lim_{x\to\infty} f(x)\neq\lim_{x\to-\infty} f(x)$. En el caso del estudiante E6 es evidente que no resistió a la posibilidad de apoyarse de GeoGebra (instalado en su Android) para identificar las ecuaciones de las asíntotas de la primera función, para luego, a través de un acercamiento numérico y algorítmico, intentar justificar dichas ecuaciones. Los procedimientos algebraicos y numéricos que muestra este estudiante son un maquillaje, ya que ni se percata que el acercamiento numérico para el caso de la asíntota horizontal debe de realizarse cuando $x\to-\infty$. Por otro lado, hay precisiones en la pregunta dos que muestran una evolución de su génesis semiótica en el sentido de apropiarse de una expresión como *"rama parabólica"* aunque su justificación algebraica está limitada a la sola consideración de $\operatorname*{Lim}_{x\to\infty} g(x)$. En términos generales, el trabajo matemático que mostró este estudiante en la actividad uno parece estar muy limitado al uso del instrumento, ya que, a medida que las potencialidades de éste fueron disminuyendo, su trabajo matemático también se fue debilitando. Para el estudiante E17 su concepción de asíntota como una recta que no intersecta a la función mantiene un lugar privilegiado a lo largo de toda la experimentación y el uso del artefacto está en términos de visualizar la representación gráfica para aceptar o no la presencia de ella, de acuerdo a su concepción. Además, en su razonamiento matemático se nota una ausencia del uso de registro algébrico. El trabajo matemático realizado por los E2 y E8 sigue siendo muy limitado y se reduce a hacer unos cuantos cálculos numéricos con ayuda del artefacto.

ALGUNAS REFLEXIONES FINALES Y PERSPECTIVAS

La manera en que se implementó este experimento de enseñanza nos permitió identificar la activación de cada una de las génesis que se menciona en el marco de los ETM. Esto es, el uso del Zoom para aproximarse al comportamiento al infinito de las funciones, hace que se hace active la génesis semiótica. Luego, el acercamiento de obtener la ecuación de la recta a través de “dos puntos lejanos” activa la génesis instrumental. Y por último, el usar el instrumento para apoyar el algoritmo clásico de la obtención de asíntotas no verticales, provoca la activación de la génesis discursiva. En lo que corresponde la génesis discursiva, esta se limitó a la reproducción del algoritmo clásico de obtención de asíntotas no verticales. Aquí, la tecnología es usada como instrumento que se encarga de aspectos rutinarios pero que no modifica el proceso en caso de desarrollarse sin ésta. La utilización de tres artefactos en este experimento de enseñanza nos permitió identificar diferentes aprendizajes, en específico, nociones multivariadas que los estudiantes desarrollaron con respecto a asíntota, las cuales fueron surgiendo debido a las potencialidades o impotencias del artefacto. Por otro lado, evidenciamos la influencia que ejerce el uso de las tecnologías de la información en registros como el algebraico, en donde la escritura algebraica es afectada dada la estructura lineal que se usa en estos artefactos. Finalmente, tenemos que, a través de los experimentos de enseñanza que hemos realizado con estudiantes a nivel superior con respecto al estudio de ramas infinitas, es importante tener en cuenta, en el diseño de las actividades didácticas y en las discusiones plenarias, la concepción incorrecta de que una asíntota no debe cortar la curva. En futuras investigaciones se podrán considerar más situaciones en donde los estudiantes se enfrenten con un conflicto cognitivo, y ayudarles a sobrepasar el obstáculo mencionado. Esto podría implementarse con un trabajo de auto-reflexión. De las observaciones que se reportan en este texto, puede resultar una recomendación de progresión para la aplicación en el aula: Si se usa el comando Asíntota de GeoGebra en la primera etapa de un estudio de ramas infinitas de una gráfica de función, es preferible limitarse a funciones racionales, para evitar una acumulación de dificultades ajenas a la conceptualización de asíntota. Funciones con radicales y funciones trascendentes se introducirán en una etapa ulterior de aprendizaje, como lo hicimos en esta experimentación, en la que radicales sólo aparecen después de actividades que ponen en juego funciones racionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carrión, V., Pluvinage, F., & Adjiage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *ZDM Math. Education*, 48, 809–826.

Del Castillo Escobedo, A., & Montiel Espinoza, G. (2009) ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, Universidad de los Andes, Colombia. 459-467. Disponible en línea en http://funes.uniandes.edu.co/4821/1/Montiel%C2%BFArtefactoAlme2009.pdf

Dicovic, L. (2009) Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. *Computer Sc. and Infor. Systems* 6(2),191-203.

Guin, D., & Trouche, L. (Eds.) (2002a). *Calculatrices graphiques, transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique,* Grenoble, La Pensée sauvage. (Versión inglesa publicada por Kluwer en 2004).

Guin, D., & Trouche, L. (2002b). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *ZDM Math. Education*, 34 (5), 204-211.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Mat. Ed.,* 17(4-I), 5-15.

Kuzniak, A., Richard, P., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *Math. Educati*on *48*(6), 721-737.

THE MATHEMATICAL WORKING SPACE IN TEACHING OF LOGARITHMS IN UPPER SECONDARY SCHOOL

Eleni Lappa & Kostas Nikolantonakis

University of Western Macedonia, Department of Primary Education, Greece

elelappa@gmail.com, knikolantonakis@uowm.gr

Students face difficulties in conceptualizing logarithm as a mathematical object which incorporates the exponential process and the logarithmic function as a process of co-variation inverse to the exponential one. In this case study the collaborative teaching method along with historical elements and the educational software Geogebra, were utilized. The Mathematical Working Space Model (MWS) was used for the organization of the instructional material so as to maximize the didactic utilization and for the observation and analysis of the mathematical activity and its components. The learning difficulties presented and the causes of their occurrence were identified. The MWS model contributed to a holistic approach to the learning process in interacting levels.

***Key words**: Logarithm, Logarithmic function, History of Mathematics, Semiotic Instrumental Discursive dimensions, Geogebra.*

INTRODUCTION

It is well documented that students face difficulties in constructing an efficient mental scheme for the logarithmic concept, which incorporates the exponential process into the mathematical object - number (Weber, 2002; Vagliardo, 2006; Ferrari & Farfán, 2010). We use the term mental scheme to determine the cognitive structure that includes mental pictures, properties, processes and personal definitions associated with the particular concept, that is what Tall and Vinner (1981) call *concept image,* which incorporates the formal definition in a meaningful and not contradictive way. This mental scheme should be activated any time the individual needs to deal with the concept. In addition, students also need to conceptualize the logarithmic function as an inverse co-variance to the exponential one. The notion of function is of high importance in the mathematical construction (Sfard, 1991; Sierpinska, 1992; Hitt, 1998; Artigue, 1999; Gagatsis, Elia & Mousoulides, 2006). However, the use of different semiotic registers considering various representations and the transition from algebraic to functional thinking are not easy tasks for students (Lagrange & Psycharis, 2014; Minh & Lagrange, 2016). Learning difficulties in the concept of function, usually concerns the understanding of the functional dependence as a co-variation, the alternating roles of the independent and dependent variables, the manipulation of functional symbolism, as well as the dual nature of the concept as a process and as an object (Artigue, 1999; Gagatsis et al., 2006; Lagrange & Psycharis, 2014; Minh & Lagrange, 2016). Therefore, the teaching of logarithmic function faces two major obstacles: the first concerns the difficulty of understanding the logarithmic concept and the second is the one that emerges from the concept of function itself.

This case study is concerned with a didactic intervention aimed to deal with the difficulties mentioned above concerning logarithm and logarithmic function. We used the theoretical model of the Mathematical Working Space (MWS – Figure 1) (Kuzniak & Richard, 2014) both for choosing and structuring the contents of the instruction (historical elements and texts as well as the tasks included in the worksheets) and for analyzing the progress of the classroom work. We endeavored to organize the didactic components so as to achieve the best potential interaction between the epistemological and the cognitive elements of the mathematical concepts (Kuzniak, Nechache & Drouhard, 2016; Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016). The research question was: Could MWS be used as a tool in organizing a didactic intervention that promotes the construction of a coherent mental scheme for the concepts of logarithm and logarithmic function and in analyzing the mathematical work produced in class?

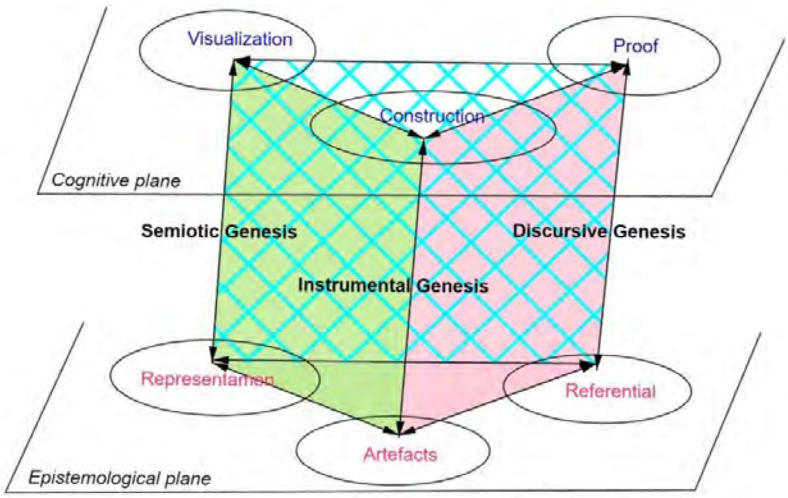


Figure 1: Structure of MWS model

At the epistemological plane, the frame of representations involved Algebraic and Functional symbols. Computational techniques with indubitable validity (e.g. exponential process) as well as the dynamic mathematical software (Geogebra) were considered as artifacts. Finally, the theoretical frame of reference included definitions, properties and theorems related to the specific mathematical concepts. The frames of the epistemological plane were of a dynamic nature as, at each step of the work, were enriched with new elements and were used as the starting point for further development of the work.

The cognitive plane, in interaction with the epistemological one, concerned the processes of visualization through the decoding of the information provided by the symbols, construction under the sense of observation, exploration and experimentation, and proof as a result of the discursive genesis which is validated by the content of the frame of reference. The activation of the contents of the cognitive plane was not evenly distributed in each phase of the work, but it depended on the function of the corresponding dimensions (geneses).

We attempted to put our focus lens on the communication of epistemological and cognitive level through the three geneses of MWS model (semiotic, instrumental and discursive) analyzing the aspects of the mathematical work which included observation, construction and experimentation, justification and proof.

DESIGN OF SUITABLE MWS

The didactic intervention applied to a class of 16 students in the Upper Secondary school (16-17 years) and lasted 10 teaching sessions (45 minutes each) according to Greek secondary school educational program. Students where familiar with exponentials but they hadn't deal with logarithms in the past. They worked in four groups, initially on an introductory worksheet, where they had to carry out difficult and time-consuming numerical calculations such as 8.796.093.022.208/33.554.432 or $\sqrt{1.073.741.824}$. By this way, a suitable environment was created to present the most important stages in the historical evolution of logarithm emphasizing the necessity for its invention and eventually, its importance in modern reality. In the course of the historical presentation, groups managed to carry through with the same calculations using the notion of logarithm. During the last six teaching sessions, groups worked, without teacher's intervention, on three main worksheets using at the same time the educational software Geogebra. After the completion of the work on each worksheet, plenary sessions took place in the class. The sessions and the discussions in the groups were recorded.

1st and 2nd worksheet – Logarithm

The 1st worksheet contained Leonard Euler's text from the book '*Introductio in analysin infinitorum*' as printed on the *Historical Modules Project* (Anderson, Berg, Sebrel & Smith, 2004) **"***Just as, given a number a, for any value of z, we can find the value of y [α^z] so in turn, given a positive value for y, we would like to give a value for z, such that $\alpha^z = y$. This value of z, insofar as it is viewed as a function of y, it is called the LOGARITHM of y"*. Eight tasks (questions) were also included in this worksheet aiming at the creation of the proper environment for students to clarify definition and symbolism as well as to recall basic components of the concept of function, such as the domain and the set of values which they had already been taught during previous school years. The comprehensive understanding of the definition and its symbolism consists in the clarification of the exponential and logarithmic relationship of the involved variables as well as in the successful application of the definition to perform the tasks. The operational knowledge of the concept is expected to be apparent through the application by the students of the exponential process, included in the definition. Afterwards, students would be expected to interiorize the process in terms of the acquisition of proceptual thinking (Gray & Tall, 1994) and possibly make a first step in identifying the loga symbol as an autonomous mathematical object - number.

Euler's text in the 2nd worksheet focused on the proving process of the logarithmic properties: "In like manner if log $y = z$, then log $y^2 = 2z$, log $y^3 = 3z$, etc., and in general log y^n = nz or log y^n = n log y, since z = log y. If follows that the logarithm of any power of y is equal to the product of the exponent and the logarithm of y…”. In a similar way of that in the historical text, students should develop proving process and apply the rules dealing with the activities. They were expected to get further into interiorizing the logarithm concept by using the definition in proving processes and providing the appropriate justification.

3rd worksheet - Logarithmic Function

Initially, the core of the work was Euler’s text: “a function of a variable quantity ...[as] an analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities … a single-valued function is one for which, no matter what value is assigned to the variable z , a single value of the function is determined … If y is any kind of function of z, then likewise z will be a function of y”. Groups’ responses to the questions in the 1st worksheet concerning the notion of function were used as a feedback for designing the 3rd one which focused on the nature of function as a co-variation, the notion of reversibility and the alternating roles of dependent - independent variables. Students engaged in a task involving logarithmic and exponential functions as inverse co-variations, that was based to the exponential formula of the relationship of earthquake magnitude (R) and intensity (I): $I=I_0 \cdot 10^R$. Students also utilized Geogebra while interchanging variables resulting in formulas and graphs of inverse functions, transitioning from the graph to the logarithmic formula, resolving logarithmic equations and justifying the symmetry of the inverse functions’ graphs. Students expected to work on instruments of the epistemological plane, such as graphical representations, value tables, algebraic symbols and relationships.

IMPLEMENTATION OF THE SUITABLE MWS

1st Worksheet analysis

Students initially faced difficulties dealing with the less ‘refined’ and more rhetorical language of the text. As a result, they answered the question 'What is Euler’s definition of logarithm?' using the exact words of the text “*z is called the logarithm of y*” without reference to the equality α^z = y contained in the text, that means the exponential relation that links the variables. Afterwards, dealing with the tasks, they processed the initial response focusing on the equality α^z = y and the meaning of the notation by the examination of the properties and relations of the variables occurred in the definition. They also applied arithmetic values to the variables and replaced their labels. The process of exponentiation and its rules were used as artifacts for constructing the definition. The experimentation on the elements of the epistemological plane (notation and exponentiation process) prompted the articulation of the work through semiotic and instrumental axes and activated the operational form of the definition that concluded in a verbal expression:

Eleni: If the number rises to an exponent then the exponent is the logarithm of the outcome.

Creative process of the dual nature of the concept of logarithm both as an object and as a process (Weber, 2002) was demonstrated in students' dialogues, e.g.:

Giorgos: If I know z and α, then I can find y. If I know y then what does it mean to find z? What does this procedure mean?

Giannis: Then you say that z is the logarithm of y. Is it a result of calculation or a correspondence?

Giorgos: The logarithm counts ratios. It is a number. Is it both?

Answering the worksheet questions related to the concept of a function, i.e. 'If z (logarithm) is a function of y as referred in the text, what is the domain and the range of this function?' or 'what's the relationship among domains and value sets of logarithmic and exponential functions?' students tried to use function definition as a correspondence which they had already been taught during previous school years. However, they could not apply it to the text as they couldn't develop covariational reasoning (Confrey, 1991). Therefore, they didn't manage to answer the questions mentioned above as they could neither recognize dependent and independent variables into the text equations and of course their switching from the exponential to the logarithmic form, nor the appearance in the text of the functional notation which they were used to:

Vasiliki: When I see $f(x) = x + 1$, I know that the independent variable is x. I do not see this in the text and I'm confused.

The work was not developed along the axis of the semiotic dimension since the notation could not be interpreted in functional terms. As a result, the reasoning development of the work was not sufficient. It was also obvious that the frame of reference in groups' Workspace was formed insufficiently as basic elements related to the concept of function were missing, despite that students in upper secondary school should be aware of these elements.

Groups applied the definition to estimate the results of the following requested tasks: $\log_2 4$, $\log_4 2$, $\log_\alpha \alpha$, $\log_\alpha \alpha^x$, $a^{\log_a u}$ and verified the results using the arithmetic and geometric progressions' correspondence, considering logarithm as the number of ratios. They also utilized exponentiation and its rules for experimentations, developing the instrumental dimension of the work. However, $a^{\log_a u}$ seemed to be a difficult task. Students applied experimentally specific 'convenient' arithmetic values to the variables and they used Euler's definition as a tool to get to the results. They also used the text notation in their argumentation and finally answered that $\alpha^{\log y} = \alpha^z = y$. Logarithm definition functioned also as an element of reference for validating the result through reasoning process. The remark of a student to the previous task indicates the perception of logarithm as an exponent, without direct reference to the exponential process:

Giannis: The result is u because the logarithm is an exponent ... That is, here the base α is raised to the exponent that gives u ... so the result is u. Because if $\log_\alpha u$ equals x then α^x equals u and that is what is happening here.

Even though, they also faced difficulties dealing with the equation $5^x = 112$. In spite of the successive applications of the definition, it seemed that the perception of logarithm as an exponent was scarcely incorporated in students' thinking, as they were not able to solve the equation directly. Even though the answer $x = \log_5 112$ emerged through the implementation of the definition, students weren't able to accept it at once, but doubted about its correctness. The idea of $\log_5 112$ symbol as an object - number seems to have not yet been completely interiorized in students' mental scheme. Although the work was advanced so far sufficiently in terms of instrumental dimension by the operational use of the definition, the semiotic dimension regarding the $\log_5 112$ symbol as a numerical value, did not work adequately.

2nd Worksheet analysis

Students' work based more on the idea of logarithm as an exponent than on detailed reference to the definition. Specifically, as concerns the questions related to the logarithmic rules, groups did not have difficulty clarifying the logarithmic rules. They initially analyzed the equalities in the text using logarithm definition and the exponential rules:

Alkis: Since $\log y = z$, α is raised to z and equals y, therefore $\alpha^z = y$ ... $y^2 = (\alpha^z)^2$, $y^2 = \alpha^{2z}$ ... $2z$ is the exponent to base α and therefore the logarithm of y^2. That is, $\log y^2$ equals to $2\log y$.

Apparently, the exponential process involved in the definition, is used as a typical technique, basic element of the framework of artifacts. At the same time students seem to deal with the concept of logarithm as a mathematical object integrating the exponential process, which it can be seen in the flexible handling of the definition in Alkis' response. The same way of thinking was developed by the students to justify Euler's process concerning the product rule. In particular, the work evolved along the discursive axis, based on the use of the definition, which now can be considered as an element of the epistemological frame of reference. The development of formal argumentation resulted in the construction of proof of the logarithmic rules. The semiotic dimension of the work was developed without difficulties in handling text notation and equalities. Consequently, the instrumental and semiotic geneses stimulated the formation of the discursive one and facilitated the communication of the issues.

The resolution of the equation $\log(x^2 + 1) - \log x = 2$ required extensive communication within groups, concerning on the one hand the constraints about the acceptable values of x and x^2+1 and on the other the necessity of the appearance of logarithm in the second part of the equality. The 1st, 2nd and 4th groups used the exponential process with real numbers as exponents to confirm that a power of positive base and real exponent is a positive number. The 3rd group made a direct reference to the domain of the logarithmic function through the logarithm definition:

Giannis: x^2+1 and x should be positive numbers since $\alpha^z > 0$ when $\alpha > 0$.

The 1rst and 4th groups overcame the difficulty of the appearance of logarithm in the second part of the equation by resolving the equation log $x = 2$ and applying the definition. The 2nd and 3rd groups based their way of thinking directly to the idea of logarithm as exponent indicating the integration of the exponential process into the mathematical object:

Dimitris: We will write 2 as logarithm of the base raised to the square, since the exponent is 2.

3rd Worksheet analysis

Groups looked for specific examples on functions according to Euler's definition and created their own analytical expressions. They analyzed the functional notation of the text and used it in their trials. The discussion focused on the role of variables (independent and dependent) and constants in the expressions presented. They recognized Euler's definition in the exponential relationship of earthquake intensity (I) and magnitude (R), $I = I_0 10^R$, identifying the variables and finally characterized the expression as a function of a single variable:

Dimitris: I_0 is a constant equal to a specific numerical value. Giving different arithmetic values for magnitude (R), results in different numerical values for I ... intensity is depended on magnitude that changes. Intensity corresponds to *y* and magnitude to *z*, according to the text.

Apparently, students defined constants and variables in the given expression and matched the variables to those of the text as well as to the usual *x*, *y* notation comparing Euler's definition as "*analytic expression composed in any way whatsoever of the variable quantity and numbers or constant quantities*", to the one of function as values' correspondence. The given expression was also examined as co-variation of variables, in which R is arithmetic and I geometric progression. It was found that the arithmetic change in values of magnitude generates a geometric change of values of intensity and so students 'discovered' the expected appearance of logarithm while shifting variables, as it was requested in the worksheet. The independent variable R as an exponent was directly treated as a logarithm:

Eleni: *R* is arithmetically altered and *I* geometrically … *R* is the logarithm of intensity.

We consider the manipulation and interpretation by the students of the functional notation and the relationships of variables and constants to be a crucial factor for the semiotic development of the work that leaded to experimentations with functional expressions, constants and variables. The exponential process, integrated in the logarithmic concept, was used as an artifact in constructing the inverse function, while the work moved towards the instrumental dimension. At the same time, the correspondence of arithmetic - geometric progressions, a key element of the historical evolution of logarithms, was used in the development of discursive reasoning when dealing with the questions of the worksheet.

The sentence in the text: "*if y is any kind of function of z, then likewise z will be a function of y*" was discussed and criticized by the students. They initially agreed that reversing the variables leads to a new expression that retains the features of the function mentioned in the text. Euler's definition was incorporated into the referential framework, being the starting point for the development of argumentation about what kind of expression should be called a function and whether it is always possible to find the reverse one:

Nikoleta: If we solve the type of function so as to find the independent variable we will end up to the type of the inverse function, but If for every z value we find a single value of y does not necessarily mean that for every value of y we will find a single value of z … look at $y = z^2$.

In Geogebra students were asked to make a transition from the graph to the type of logarithmic function by matching the ordered pairs (I, R) to the independent and dependent variables. They faced difficulties in recognizing the curve appearing on the screen that was drawn by the point A(I, R), as part of the logarithmic graph, although in the previous questions the students had resolved the given expression of earthquake intensity-magnitude ending up to the correspondent logarithmic expression. The difficulty seemed to be mainly in the assignment of independent - dependent variables to the ordered pair of the coordinates of point A and further in the transition to the appropriate functional expression.

One of the groups in order to overcome the initial difficulty, used the linear function $y = x + 1$with the usual functional notation, x for the independent and y for the dependent variable. Working with Geogebra, students concluded that the coordinates of the points in the graph of the above function are of the form of ordered pairs $(x, x + 1)$. In this way they argued that the curve consisted of points (I, R) corresponded to the analytical expression, where R was the dependent variable and I the independent one. As was described, the group utilized the software's capabilities for drawing the graph and examining the coordinates which made them capable of interpreting the coordinate notation. In this way they managed to recognize the curve as a set of points that corresponds to the dependent and independent variables of the logarithmic function.

Two of the groups focused on examining the coordinates of point A and the type of curve. They related the independent and dependent variables to the horizontal and vertical coordinates of A. However, they were unable to find directly the function type corresponding to the curve, failing to define the value of the function as the dependent variable value. At this point, the definition in the text did not operate efficiently to support the discursive progression and so the articulation of the work along instrumental axis exploiting Geogebra capabilities was developed inadequately.

The work continued aiming at the study of the logarithmic function properties. Geogebra software provided the capability of supervising all three representations (graph, value table, type) simultaneously. Groups were involved in observation and experimentation procedures. They found out that logarithm is a monotonic increasing function or a decreasing one depended on the base α, by observing the point movement on the graph and at the same time the change of its coordinates in the value table. The graph and the value table functioned as tools at the vertical plane of semiotic – instrumental geneses. The communication of the results inside the groups was developed in functional terms regarding the notion of co-variation and the correspondence of the coordinates of the points in the graph to the independent and dependent variables as basic elements in the development of the reasoning process:

Synthia: *y* stands for the vertical coordinate that is the logarithm. Increasing the arithmetic values of the independent variable, causes an increase to the depended arithmetic values …… increasing the arithmetic values of *y* causes an increase to the arithmetic values of *x*.

Then, students continued working in the area of Algebra. Euler's definition was used to validate, in an algebraic way, the graphical results. The development of the discursive course of the work, as a result of attempting to produce adequate logical explanation, was either based to the exponential process and the operation of its rules or to direct references to logarithm as a number - exponent.

Dimitris: If $b > c$ then $\log b > \log c$ because higher power outcome means higher exponent when there is the same base higher than one.

In a similar way, students examined the intersection points between the logarithmic graph and the axes and dealt with the resolution of logarithmic equations and inequalities, in a graphical way utilizing the software (Figure 2) and algebraically utilizing the logarithm definition.

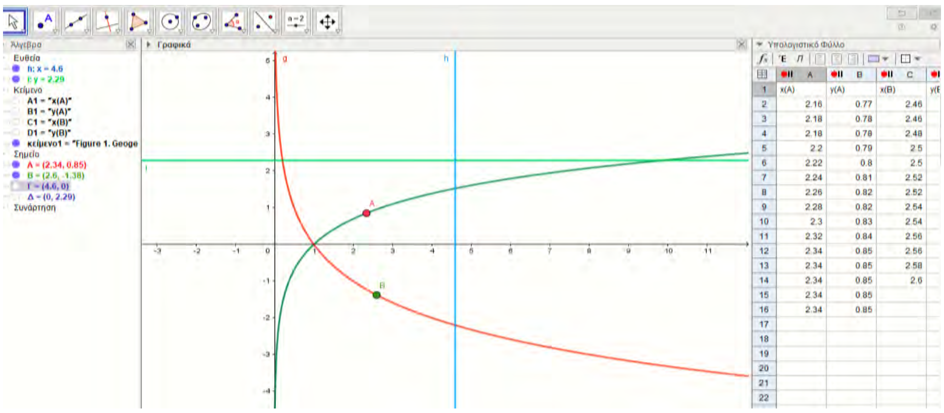


Figure 2: Geogebra Activity

DISCUSSION AND CONCLUSION

In some cases, the activation of the semiotic dimension prompted the work development along the instrumental axis, while in other cases the opposite way of the work development was observed. In any case, the communication of the issues was required, activating the discursive dimension of the work. Finally, the logarithm definition enriched the referential framework of the epistemological plane in the students' Working Space and was further used as a tool for motivating experimentation and exploration procedures. However, in some cases while the logarithm definition was correctly applied activating the instrumental axis of the work, the semiotic dimension was not sufficiently articulated since students could hardly accept the $\log_a b$ symbol as a mathematical object – number at the beginning of the intervention. The work of the groups concerning the concept of function did not develop initially as expected while designing the suitable MWS. Although they had already discussed in detail the notion of logarithm as an element of the exponential process, they couldn't recognize the presence of the concept of function in logarithm definition as they were unable to relate it to the notion of co-variation. There were also difficulties in working with dependent and independent variables and in manipulating functional symbolism (Lagrange & Psycharis, 2014; Minh & Lagrange, 2016). The study of students' personal Working Space highlighted the necessity for the redesign of the suitable MWS which was not a static framework but it was reformed depending on the circumstances.

Working algebraically and interchanging dependent and independent variables, students were driven from the exponential to the logarithmic form, i.e. to the inverse function. The occurrence of logarithm in the correspondence between arithmetic and geometric progressions, which was emphasized during the historical review, was used by the groups and preceded the algebraic resolution of the exponential form. Along with the historical text in the role of a cognitive tool, the contribution of the Geogebra educational software was positively effective in the processing of the concept of function as inverse co-variation and further of its properties as it was used as an artifact and a starting point on the axis of instrumental genesis, resulting in the construction of tangible objects like graphs, and also the promotion of observation, exploration and experimentation processes. These processes resulted the development of a reasoning course, leading the circulation of the work through the two dimensions of Ins – Dis plane. In most cases the work was structured in the context of semiotic, instrumental and discursive geneses' communication. A satisfactory degree of integration of the exponential process was observed in the mathematical object - logarithm as well as the approximation of the logarithmic function concept as inverse covariance.

The main issue of the intervention was the adequate communication of the epistemological and cognitive elements of knowledge through the circulation of the work along the three basic axes of the mathematical activity. The MWS model proved to be a useful tool to design, observe and analyze the mathematical work, in order to thoroughly study the learning process and its components. In this way, the difficulties presented and the causes of their occurrence were identified, facilitating the selection of appropriate tools to overcome them. In this study the utilization of the MWS model contributed to a holistic approach to the learning process in interacting levels.

The theoretical model of MWS could be used in a similar teaching approach to secondary education concerning other mathematical concepts, such as the trigonometric functions. Future research should also investigate the implementation of other theoretical frameworks, like APOS theory (Dubinsky & McDonald, 2001) along with the MWS model, for an in-depth study of the ways that mental structures are formulated during instructional treatment that concerns exponential and logarithmic functions.

REFERENCES

Anderson, D. L., Berg, B., Sebrell, A. W., & Smith, D. W. (2004). Exponentials and Logarithms, *Historical Modules Project*, Mathematical Association of America.

Artigue, M. (1999). The teaching and learning of mathematics at the university level. *Colección Digital Eudoxus*, (7).

Confrey, J. (1991) The concept of exponential functions: A student perspective. *Epistemological foundation of mathematical experience* 124-159. Springer-Verlag

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275-282). Springer, Dordrecht.

Ferrari, M., & Farfán, R. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* RELIME, 13(4), 53-68.

Gagatsis, A., Elia, I., & Mousoulides, N. (2006). Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9 (Extraordinario 1), 197-224.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A" proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for research in Mathematics Education*, 116-140.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123-134.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, 48(6), 861-874.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737.

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4-I), 17-27.

Lagrange, J. B., & Psycharis, G. (2014). Investigating the potential of computer environments for the teaching and learning of functions: A double analysis from two research traditions. *Technology, Knowledge and Learning*, 19(3), 255-286.

Minh, T. K., & Lagrange, J. B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM*, 48(6), 793-807.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. The concept of function: *Aspects of epistemology and pedagogy*, 25, 23-58.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics,* 12(2), 151-169.

Vagliardo, J. (2006). Substantive knowledge and mindful use of logarithms: A conceptual analysis for mathematics educators. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 28(3), 90.

Weber, K. (2002). Developing Students' Understanding of Exponents and Logarithms. In D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting [of the] North American Chapter of the IGPME* (pp. 1017-1027). Athens, Georgia.

CREATION OF A MATHEMATICAL MODEL FOR QED-TUTRIX' AUTOMATED PROOF GENERATOR

Sébastien Cyr[a], Ludovic Font[b], Michel Gagnon[b], Nicolas Leduc[b], Philippe R. Richard[a], Michèle Tessier-Baillargeon[a]

[a]Université de Montréal, [b]École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada

sebastien.cyr.1@umontreal.ca, ludovic.font@polymtl.ca, michel.gagnon@polymtl.ca, nicolas.leduc@polymtl.ca, phillippe.r.richard@umontreal.ca, michele.tessier-baillargeon@umontreal.ca

The intelligent tutor system QED-Tutrix, which is designed to support mathematical work during the solving of proof problems, has currently one issue preventing large-scale experimentations, as it has only five implemented problems. To address this issue, we begun the process to automatize the generation of proofs. This process requires modeling of properties and results used in high-school that must be computable, i.e. without any approximation or tolerance for errors, which is far from what happens in class. We identified three sources of distance between the computable model and the real-life one: the naming of geometrical objects, the approximations in the statement of a problem, and the level of granularity of proofs. For each, we implemented solutions, both in QED-Tutrix and in the automated proof generator.

Key-words: *Tutorial system, automatic generation of proofs, didactic issues in computer science.*

INTRODUCTION

QED-Tutrix is an intelligent tutor software that offers a mathematical working space (Tessier-Baillargeon, Richard, Leduc, & Gagnon, 2012) to solve high-school geometry problems, in a way that is as close as possible to the way students would solve the same problem without the software. In other words, the student is free to explore the resolution without being restrained by forward or backward chaining. Every proof element he inputs in the software leads to a feedback by the virtual tutor. This constant interaction between the system and the student is one of its main features. At its core, QED-Tutrix has the ability to identify the proof(s) the student is most likely trying to achieve, and, with that knowledge, guide the student towards that proof, by helping him find the missing elements. However, this system requires the *a priori* knowledge of all possible high-school proofs for any given problem, meaning that, to implement a new problem in QED-Tutrix, a list of all the possible solutions must be found and implemented. Currently, this work must be done manually, which is an extremely tedious and time-consuming task. Hence, during the development of QED-Tutrix, three years were necessary to program only five problems (Leduc, 2016) were implemented for this very reason. Although sufficient for a preliminary study (Tessier-Baillargeon, 2016) of the use of the software by students and teachers, this is insufficient for a long-term study of the efficiency of

QED-Tutrix in class. Therefore, the automation of the generation of all possible proofs is a priority in the development of our software.

After a careful analysis of the state of the art in Automated Theorem Proving (ATP), we decided to implement a custom automated proof generator, for essentially three reasons. These are discussed at great length in one of our previous papers (Font, Richard, & Gagnon, 2018). First, provers typically aim at proving a theorem, with no constraint on the proofs, as long as it is valid, and as a consequence are focused on speed and not the readability of the proof. Therefore, most provers rely on algebraic methods, such as converting the geometry problem into an equation and solving it, providing, without a doubt, a valid proof, but this proof is completely irrelevant in the context of high-school geometry education. Second, as mentioned, we want all possible proofs for the problem, in a given axiomatic (more details on this axiomatic in the last section), and provers are usually not focused towards exploring several proof paths. Third, we want to be able to represent the degree of granularity of proofs, i.e. to be able to adapt the degree of rigorousness the student has to follow, depending on several factors, such as the class level, the mathematical topic currently studied, or the teacher's personal preferences.

One of the most crucial part of our work to implement that prover is to identify a way to represent the mathematical knowledge used in class, but in a way that is useable by an automated engine, entirely intolerant to approximations. This created many issues that have to be addressed. In summary, in this project for improving QED-Tutrix, our goal is to provide an interface between the teacher and the tutor software in order to facilitate the process of implementing new problems. As a result, our dynamic in this project is to base the development process on a constant discussion between mathematics education experts and computer science experts, instead of developing the software independently and asking the user to adapt along the way. The purpose of this paper is to summarize and explain the issues encountered, as well as present the choices made by experts of both domains to solve them.

First, we quickly present the inference graphs, or HPDIC graphs, an essential part for the internal representation of proofs in QED-Tutrix. Then, we detail the operation of our solver, with an emphasis on the difficulties created by the underlying educational requirements. We regrouped these issues in three categories, each explained in its section: the problematic of object naming, in particular regarding the need for a unique identifier for each object; the issues created by the approximations made both in the statement and in the proof of a problem, such as not taking into account the orientation of an angle; and the concept of granularity of a proof, and how it is handled by the generator.

FROM A PROBLEM STATEMENT TO A SOLUTIONS GRAPH

One of the fundamental pieces of QED-Tutrix is its ability to store and explore the graph of all possible solutions to a given problem. This allows the software to follow in real-time the progress of the student, and to identify the proof he or she is likely trying to write. This graph of solutions is called the HPDIC graph. In a few words, it is a graph composed of *results* and *justifications*. An inference is the combination of some results or hypotheses (the antecedents), a justification, and another result (the consequent). Antecedents and consequents are the same kind of object, since the consequent of an inference can be the antecedent of another inference. An example of inference is provided in Figure 1.

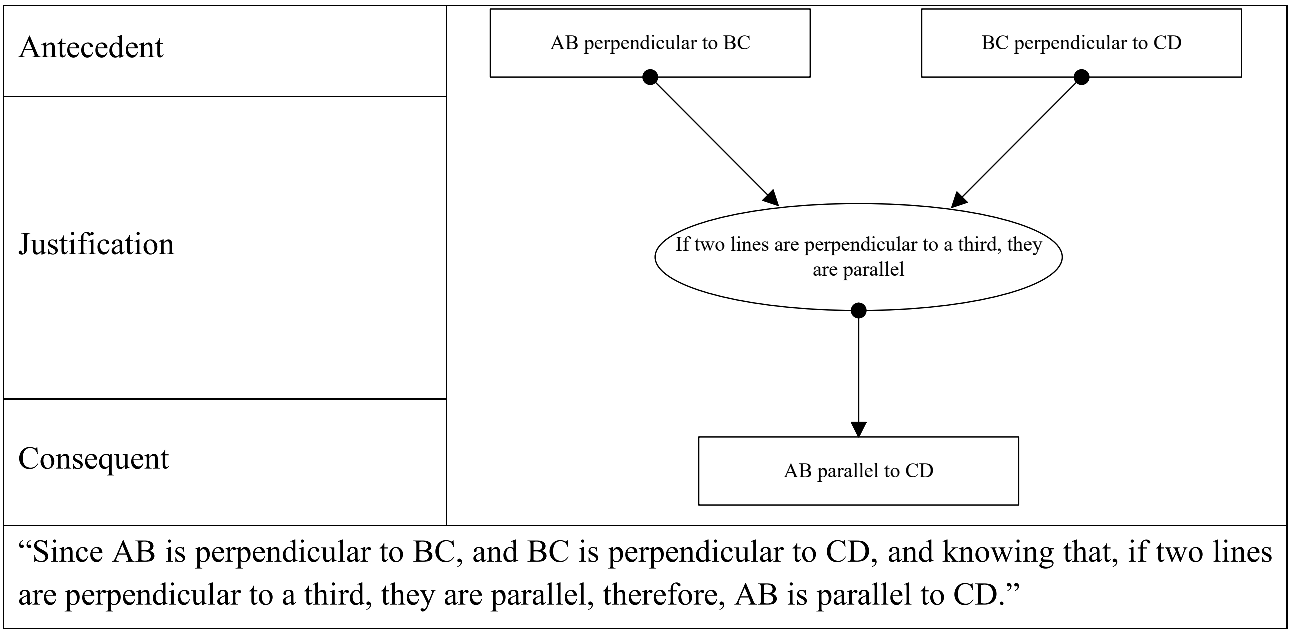


Figure 1: a simple inference

Prove that a quadrilateral with three right angles is a rectangle.

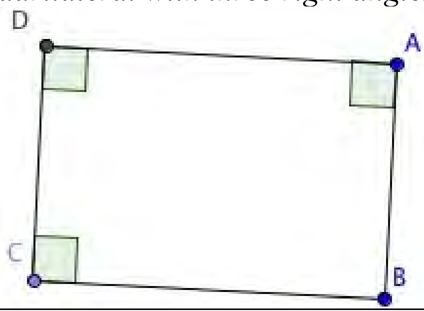


Figure 2: the rectangle problem

Then, a proof can be seen as a chain of inferences from the hypotheses of the problem to the conclusion. When merging all the proofs for a problem in a single graph, the result is called the HPDIC graph of the problem. The HPDIC graph rectangle problem, whose statement is given in Figure 2, is provided in Figure 3.

Those graphs are encoded in QED-Tutrix using simple encoding, where each line represents an inference, i.e. a justification, one or more antecedents, and a consequent. Currently, as mentioned in the introduction, these files have been written manually, adding the burden of writing in an encoded form to the already tedious task of exploring all accessible solutions to a problem. These two difficulties are the reason why we decided to prioritize the creation of an automated proof generator in the current work on QED-Tutrix.

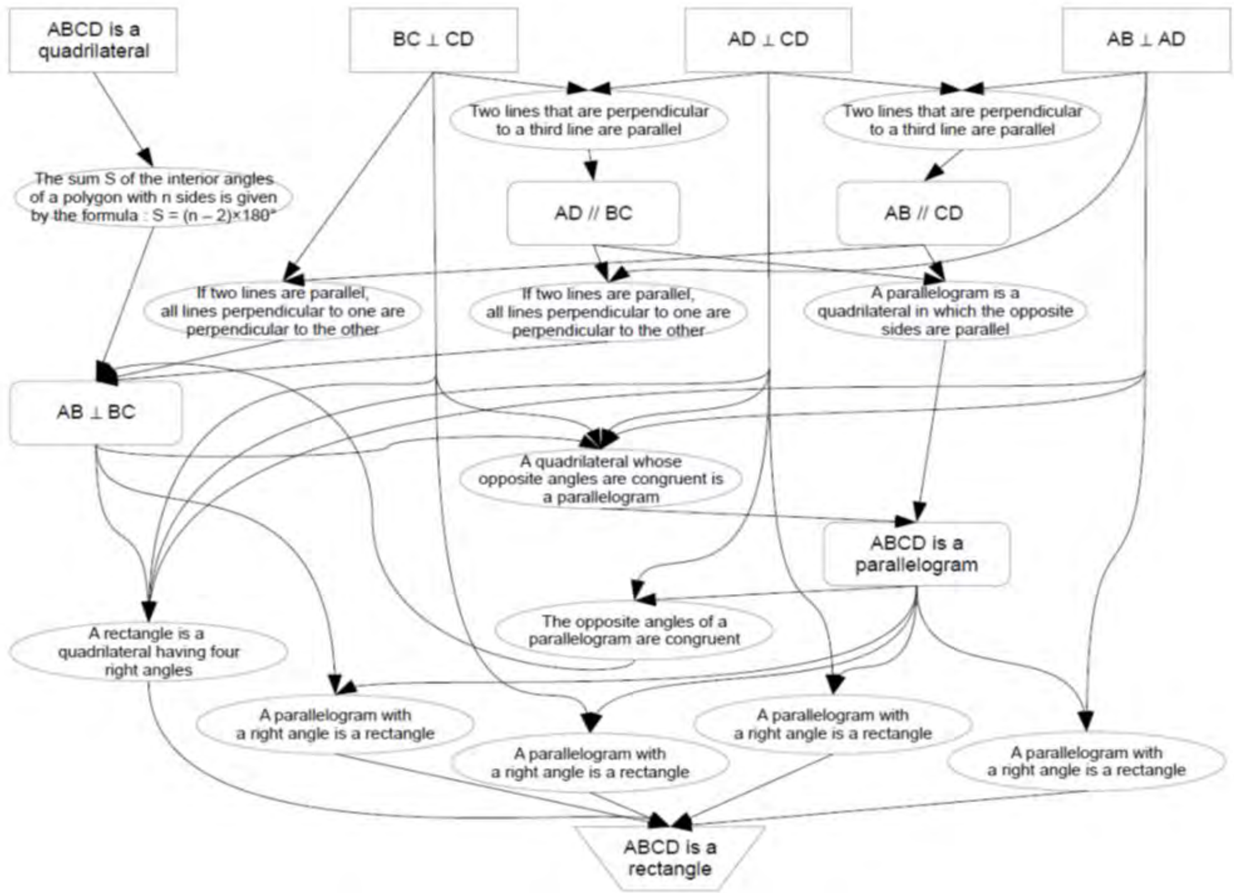


Figure 3: The HPDIC graph for the rectangle problem

OVERVIEW OF THE PROOF GENERATION PROCESS

In the theory of mathematical working spaces, the notion of proof is linked to a theoretical frame of reference, named «referential» in the theory, through the discursive genesis (Kuzniak & Richard, 2014). We know that there are many types of proofs in an instrumented context (e. g. Richard, Venant and Gagnon, 2019), but the proofs we are interested in here are those that are activated through discursive genesis. The notion of referential is then defined in accordance with the needs of the discourse and the possibilities of computer programming. Thus, with the knowledge conveyed by the hypotheses of the problems, the theoretical system of reference based on definitions, properties and theorems as means of justifying the inferences constitute the basis of the implemented referential that allows the discursive development of proofs.

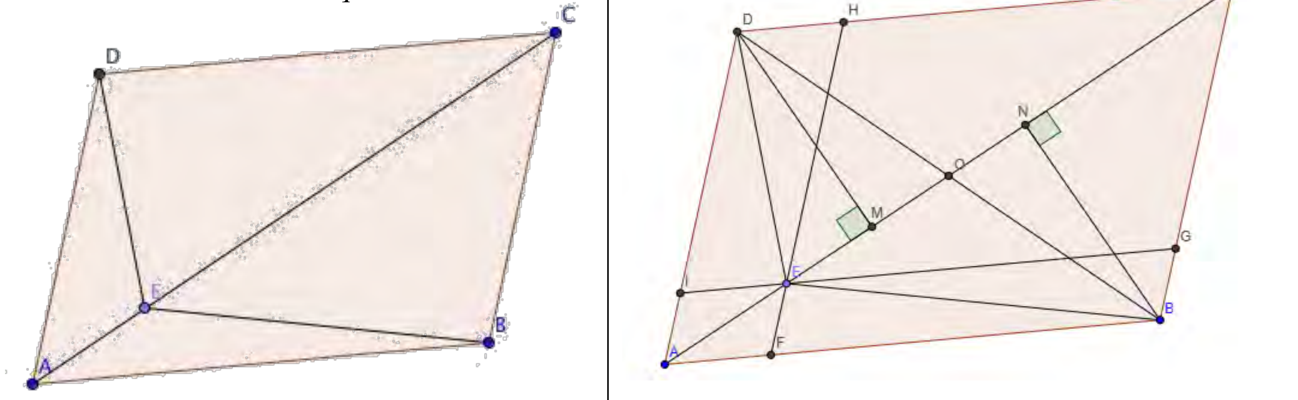
The whole pipeline of the proof generation process aims at streamlining the operation of adding a problem to QED-Tutrix, making it accessible to any teacher, and therefore not only experts in the system. The first step, which is not detailed in this paper, consists in extracting the hypotheses and conclusion of the problem from the figure(s) and statement. The second step, the focus of this paper, exploits that information to automatically generate an HPDIC graph that is immediately usable by QED-Tutrix, containing all proofs in a given axiomatic. The intermediate results between the two steps contain the conclusion, but also a series of hypotheses, that is informally divided in two categories:

- The "high level" hypotheses of the problem, for instance the topmost results (rectangles) in Figure 3. These hypotheses are non-trivial, and represent the information that should be given explicitly (typically, in the text) or implicitly (typically, in the figure) to the student.
- The "low level" hypotheses, which are obvious for any student, but still necessary for an automated tool, such as "A, B, C, D are points", "there is a line, named *(AB)*, that contains the points A and B", or "there is an angle named *ABC* that represents the angle between AB and BC".

A crucial and difficult requirement is that this second category should contain **all geometrical elements** that could be used in **any** proof. In other words, for a proof to be accepted by QED-Tutrix, all intermediate elements, such as triangle heights, median lines, or even useful angles, should be indicated in the "low level" hypotheses. The reason for this requirement is a technical one: first, to impose and unify the name of intermediate objects in the inference graph, and, most importantly, to indicate to the automated proof generator which objects the student is allowed to work on. Indeed, the automated proof generator is not able to create new objects, since the automated construction in geometry theorem proving is an extremely complex matter. To the best of our knowledge, the only system attempting to construct new elements is GRAMY (Matsuda & VanLehn, 2004), and it only allows a small subset of new constructions. Therefore, even though we plan to explore this possibility in the future, we chose, for the time being, to limit the generator's work to a predefined set of elements.

In other words, in the problem given in Figure 4a, no result can be inferred about the line (BD) if it is not present in the list of low-level hypotheses, because, as far as the generator is concerned, this line does not exist (and cannot be constructed).

Prove that the surfaces of triangles ABE and ADE are equal



a) The problem statement

b) The super-figure

Figure 4: the parallelogram problem

In the light of this requirement, we defined the **super-figure** of a problem as the figure containing all geometrical elements that could be used in any proof. A requirement to add a problem in QED-Tutrix is to provide such a figure in the form of a GeoGebra file. Also, this file can easily be altered later, if new geometrical elements are needed for additional solutions. The super-figure of the parallelogram problem is given in Figure 4b. It is important to note that this figure is necessary, but not sufficient, since the generator also needs to know which angles could be useful to solve the problem. This last point is a technical constraint, since automatically constructing all the angles would be possible, but costly. Therefore, although a requirement for the time being, work is currently being done to automate this process.

With this set of high-level and low-level hypotheses, the generator is able to infer new results. To do so, it has access to a list of mathematical properties, encoded in Prolog. By combining hypotheses and properties, we obtain a set of new results, that are added to the hypotheses for the next iteration.

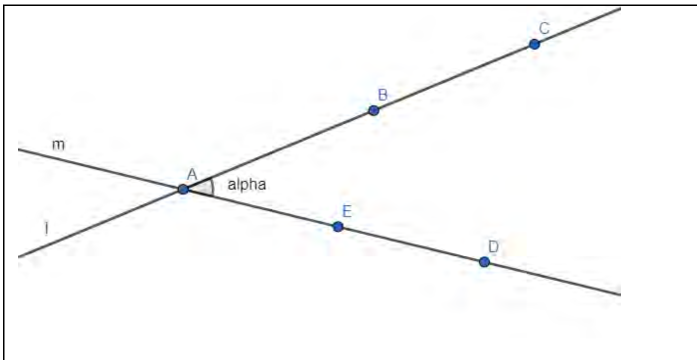
This process is repeated until no new results are found. Given that the set of geometrical objects is finite, and that the number of allowed properties is also finite, we can ensure that the process will end at one point. The output is a set of inferences that form a HPDIC graph. A conversion module is then responsible for the encoding into the format accepted by QED-Tutrix. We will not detail the conversion process, since it is simply a question of different encodings, the content remains the same.

This automatization of the process of writing down the HPDIC graph created several issues that we had to address. In the remainder of this paper, we explain those issues, as well as the solutions we chose.

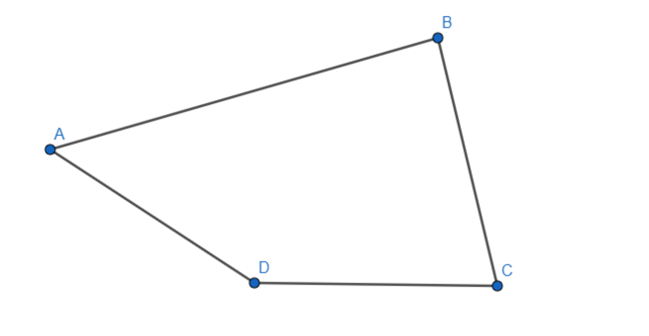
THE MANY NAMES OF GEOMETRICAL OBJECTS

One of the first problems encountered is the question of the naming of geometrical objects. To illustrate this point, let us take the example of the line. In the previous version of QED-Tutrix, where the HPDIC graphs were created manually by a mathematics education expert, the lines were named by a single lower-case letter. It quickly became clear that this system was not appropriate for all the use-cases. Indeed, in many cases, the line is not named with a single letter, but with the name of two points present on it. When the line contains more than two points, any combination of those is a valid name. In Figure 5a, the line through A, B and C can be named: "l", "(AB)", "(AC)", "(BC)", or even "(BA)", "(CA)", or "(CB)". This does not render many combinations in the case of 3 points, but for 5 points, there are already 20 possible names. To be able to store that information, QED-Tutrix was modified. It, however, creates a constraint for the input of the proof generator, as the problem creator (teacher or programmer) must indicate, for each line, the complete set of points on that line. In essence, the problem creator would have to say "there is a line named l in the problem that contains the points A, B and C".

The same is true for angles, with an additional issue. Indeed, the angle in Figure 5 has many names: “alpha”, “EAB”, “EAC”, “DAB”, or “DAC”. However, the problem of the orientation arises. Even though most teachers won’t correct a student that names the angle as “BAE” instead of “EAB”, those are not the same when considering the orientation, as “EAB” is α, but “BAE” is the complementary angle of α (whose value is 360 – α). In the proof generator, it is crucial to distinguish those two, or else the generator would infer incoherent results, such as having two values (α and 360-α) for the same angle. We therefore chose, for the moment, to impose the orientation in the proof generator, but to allow more flexibility in QED-Tutrix, meaning that, even though the proof generator separates EAB and BAE as two completely different angles, the student can identify the angle EAB by both the names “EAB” and “BAE”. The user that wishes to create a problem must indicate all existing and potentially useful angles with all this information: the name (if it has one), all the points on the first (in trigonometric order) semi-line, the central point, and all the points on the second semi-line.



a) Two intersecting lines



b) A polygon

Figure 5: two mathematical situations

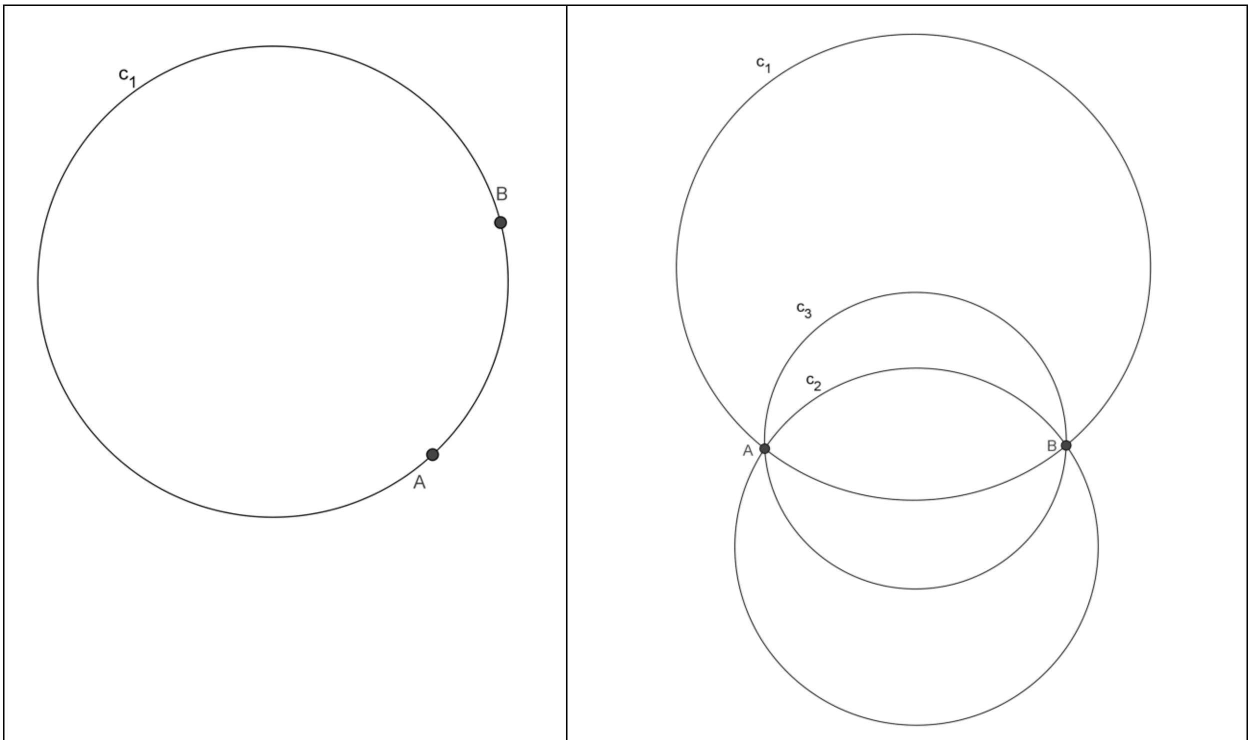
A quick word about polygons. The one in Figure 5b will typically be named “ABCD”. However, choosing a different starting point does not change anything: “BCDA”, “CDAB”, “DABC” are equally valid names. In most cases, reversing the order is also valid: the polygon could be referred to as “ADCB” by a student. In the proof generator, we want the name to be unique to avoid creating redundant results (such as “ABCD is a rectangle” and “BCDA is a rectangle”), and therefore chose to use an encoding ensuring the unicity of naming. In QED-Tutrix however, any combination of shifting and reversing the points is accepted.

We mentioned previously that lines and angles can have names unrelated to their geometrical properties, for instance, line “m”, with no relation to the points present in the line. This can be true for any geometrical object. Even though it is rare, it could happen that a problem gives a name to a polygon or a segment, and we must be able to handle that case. Therefore, we generalized the possibility of naming objects to each non-point geometrical object.

Lastly, we noticed that, on some complex problem, we would have an issue of point names. Since every point in the figure **must** have a name (or the proof generator doesn't know it exists), in problems that introduce grids or other complex structures, the limit of 26 letters for points could be reached. Therefore, we allowed QED-Tutrix to use points named with one letter followed by any combination of digits, such as P1, P2, or A256. Points can still be named without a digit, which would be the case in most problems.

THE DEGREES OF APPROXIMATION OF A PROBLEM

All the issues discussed in the previous section point towards the same global problematic: although in the vast majority of cases, there is no ambiguity, we still must take into account all the possible problems that could be given in a high-school setting, including the ones complex enough to create an ambiguity. For instance, in most problems, the orientation of angles is not relevant, but we must be able to handle the small number of problems where it is, and therefore must take into account the orientation of angles in all problems. The same can be said for circle arcs. In most problems, such as in Figure 6a, there is at most one circle, and no one will correct a student that says "the arc AB" instead of "the arc AB of circle C". Therefore, in the initial version of QED-Tutrix, arcs were defined by only two points. However, there could be problems with two or more circles, each containing a different arc AB, such as in Figure 6b, and in this case, this approximation becomes unacceptable because it creates an important confusion. As a consequence, the generator must account for the circle in every case, even though it could be implicit in most problems, which creates constraints on the sentences the student can input into QED-Tutrix.



a) A problem with one circle

b) A problem with three circles

Figure 6: Two geometrical situations using circles

This last point illustrates the issue created by the variation of rigor needed to properly state and solve a problem, depending on the content of the problem, on its level in the curriculum, and also on the teacher. Indeed, many problems don't need a fully rigorous representation of every object, but such a rigorous representation is necessary in the generator. Often, it even becomes a necessity to provide a certain degree of liberty in the statement of the problem: in Figure 5a, if A and C is fixed but B can be any point on the line, we cannot explicitly state that the angle alpha is between the semi-lines containing E,D and B,C respectively, since the angle EAB is not the same depending on the position of B (left or right of A).

LEVEL OF GRANULARITY

We mentioned previously the difficulty created by the different levels of rigor between the work of a high-school student and the low-level proving done by an automated tool. This is only the tip of a much larger issue: the level of granularity of proofs in QED-Tutrix.

We define informally the level of granularity of a proof as follows. First, we define the "high-school axioms", a set of lowest-level properties, that can always be used without justification regardless of the students' level. For instance, "a quadrilateral with three right angles is a rectangle" is not a "high-school axiom", since it can't be used without justification in early high-school classes, although, depending on teachers, it could be used as such later. However, "if two lines are parallel to a third, then they are parallel to each other" is such an axiom. It is important to note that, in the examples provided in the previous section (such as the obligation to indicate the circle an arc belongs to), the technical constraints are imposing a higher level of granularity.

X and Y are equidistant from A and B. Prove that (XY) is the perpendicular bisector of [AB]

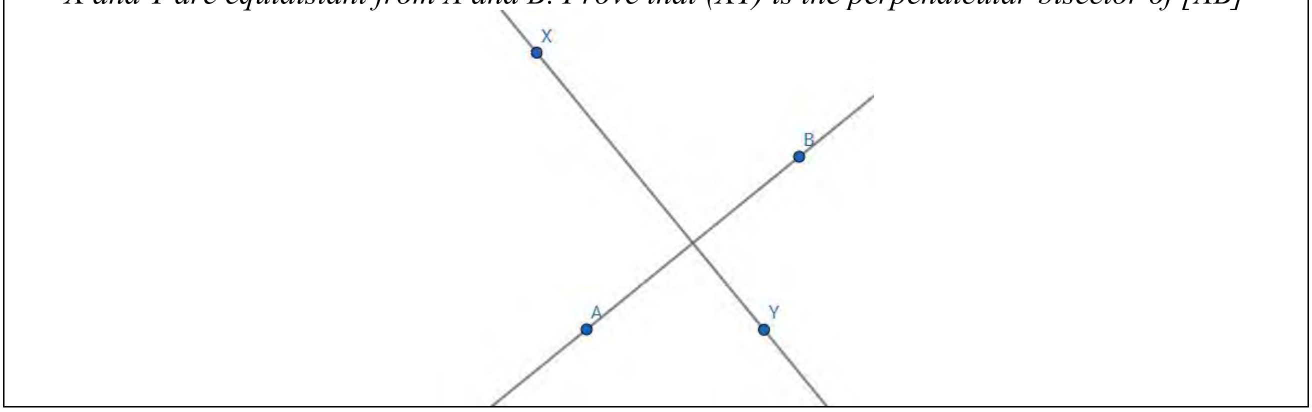


Figure 7: a perpendicular bisector problem

Then, the level of granularity of a proof represents the gap between the properties used in the actual proof, written by a student (or teacher) attempting to solve the problem, and a fully rigorous proof that uses exclusively the high-school axioms. For instance, in the very simple problem given in Figure 7, an axiomatic, or high granularity, proof would be:

1 Every point on the perpendicular bisector of a segment [AB] is equidistant from A and B.
2 Since X is equidistant from A and B, X is on the perpendicular bisector of [AB].
3 Since Y is equidistant from A and B, Y is on the perpendicular bisector of [AB].
4 Since X and Y are two distinct points, there is one and only one line (XY) passing through X and Y.
5 Since X and Y are both on the perpendicular bisector of [AB], (XY) is the perpendicular bisector of [AB].

But a low granularity proof could be:

1 Every point on the perpendicular bisector of a segment [AB] is equidistant from A and B.
2 Since X and Y are both equidistant from A and B, the line (XY) is the perpendicular bisector of [AB].

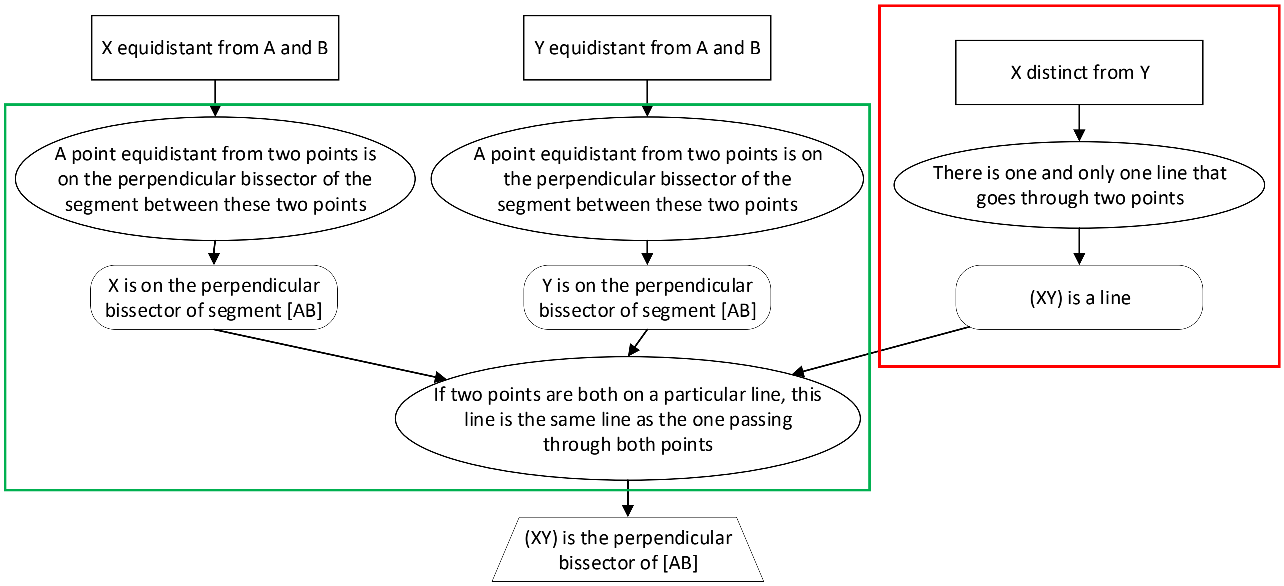


Figure 8: The HPDIC graph for a high granularity proof of the perpendicular bissector problem

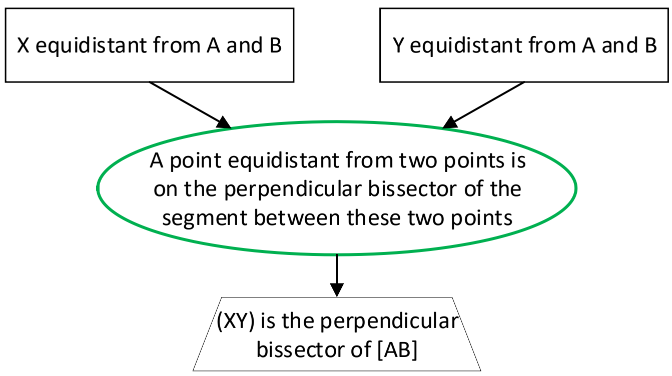


Figure 9: The HPDIC graph for a low granularity proof of the perpendicular bissector problem

The HPDIC graphs for both proofs are given in Figure 8 and Figure 9. We can see in the second proofs that shortcuts have been taken in two ways. The whole red square has disappeared, and the green one has collapsed into a single property. Proofs written by students can contain any number of such shortcuts, and one of the short-terms goals of this project is to understand the way these various levels of granularity are determined and required in class and how they impact the style of proofs the student will produce.

FUTURE WORK

The automated proof generator is still a work in progress. However, the core is operational, and we have been able to generate the full HPDIC graph for two problems, and most of the work to adapt QED-Tutrix to the new formats has been done, paving the way for the following problems. The next short-term objective is to implement the three remaining problems that have manually been generated already, meaning basically implementing the mathematical properties used in those (34 out of 203 initial properties are already implemented). Then, we plan to explore improvements on several aspects.

First, we explained previously that, even though most problems can use a simpler form of geometric objects and properties (for instance, not precising the circle an arc belongs to), the fact that a few cannot use those means that we must use the most general case. A solution we envisioned for that is to create a set of flags to indicate the degree of granularity on several aspects: are there more than one circle (if no, then no need to ask for the circle when using an arc), is the orientation of angles relevant to the problem (if yes, then the software would check the orientation of angles entered by the student), is the orientation of polygons relevant, etc.

Second, the issue of granularity configuration. Indeed, one of the objectives of our team is to allow teachers to configure finely the degree of granularity the student is allowed to use in each particular problem. Currently, the automated proof generator is able to generate a graph encompassing all levels of granularity. The difficulty will be to make the selection process between the levels of granularity for each mathematical topic as easy as possible, in order to make it accessible to teachers unfamiliar with the internal operation of QED-Tutrix.

Third, further from the contents of this paper, is the possibility to semi-automatically extract hypotheses, including the low-level ones, and conclusion from a problem statement and its figure. The need for a manual redaction of all hypotheses is currently one of the weaknesses of our automated proof generator, and the reduction or deletion of the human part of this task would be a major improvement.

Finally, we will address the need to provide a super-figure that, in a way, already contains all possible proofs when encoding a problem. A solution would be to implement a construction tutor that would allow the student to dynamically add new geometrical elements to his or her figure. These new elements would then be given as soon as provided to the automated proof generator, that would then attempt to infer new proofs using these elements.

CONCLUSION

In essence, the project of automating the generation of proofs consists in adapting the software, both QED-Tutrix and the associated generator, to the educational requirements, and not the opposite. Still, at the moment, there are some points where it is the student that has to adapt, because of purely technical constraints. Typically, the circle an arc belongs to must be specified at all times, even though, in a classical proof with pen and paper, it would not be necessary. In this paper, we detailed the three main issues encountered while developing the automated proof generator for QED-Tutrix, along with the steps taken or envisioned to solve them. Indeed, although we already determined that the automation of the generation of proofs is the next step for the usability of QED-Tutrix in real situations (Font et al., 2018), these limitations remain an important obstacle for the students' learning, and therefore still prevent QED-Tutrix from attaining its full potential as a learning tool.

REFERENCES

Font, L., Richard, P. R., & Gagnon, M. (2018). Improving QED-Tutrix by Automating the Generation of Proofs. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, *267*, 38–58. https://doi.org/10.4204/EPTCS.267.3

Kuzniak, A. & Richard, P.R. (2014). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 17.4*(I), 5-40(DOI 10.12802/relime.13.1741 (a,b,c)).

Leduc, N. (2016). *QED-Tutrix : Système tutoriel intelligent pour l'accompagnement d'élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane*. École Polytechnique de Montréal, Montréal.

Matsuda, N., & VanLehn, K. (2004). GRAMY: A Geometry Theorem Prover Capable of Construction. *Journal of Automated Reasoning*, *32*(1), 3–33.

Richard P.R., Venant, F., & Gagnon M. (2019). Issues and challenges about proving. In: Hanna, G., Reid, D., de Villiers. M. (eds), *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*. Springer International Publisher.

Tessier-Baillargeon, M. (2016). *GeoGebraTUTOR : Modélisation d'un système tutoriel autonome pour l'accompagnement d'élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane et genèse d'un espace de travail géométrique idoine*. Université de Montréal, Montréal.

Tessier-Baillargeon, M., Richard, P. R., Leduc, N., & Gagnon, M. (2012). Conception et Analyse de GeoGebraTUTOR, un Système Tutoriel Intelligent : Genèse d'un Espace de Travail Géométrique Idoine. In I. Elia, A. Gagatsis, F. Hitt, A. Kuzniak, B. Parzysz, L. Radford, & L. Vivier (Eds.), *Actes du 3è Symposium Espaces de Travail Mathématique (ETM3)* (pp. 197–218). Montréal, Quebec, Canada.

ANALYSE D'UNE TÂCHE DE GÉOMÉTRIE AU 2E CYCLE DU PRIMAIRE AU QUÉBEC

Sandrine Michot, Annette Braconne-Michoux

Université de Montréal, Québec, Canada

sandrinemichot@yahoo.ca, annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Cet article vise à montrer que le cadre des ETM_G permet d'éclairer le travail d'un élève dans la tâche de reproduction et de description de figures en géométrie en 4^e année primaire au Québec. Il s'avère que les quatre profils que le modèle permet d'envisager dans le plan [SEM-INS] se retrouvent dans une classe de 25 élèves ayant travaillé chacun sur 6 figures composées de deux figures élémentaires (carré, triangle, rectangle, losange). On peut alors considérer que le cadre des ETM_G est aussi un outil d'aide au travail de l'enseignant.

Mots-clés *: Géométrie, ETM_G, Enseignement primaire, Reproduction-description de figures.*

LA PROBLÉMATIQUE ET LE CADRE THÉORIQUE

Diverses recherches en didactique de la géométrie indiquent que la combinaison de tâches de description et de reproduction de figures serait une activité qui permettrait aux élèves de mieux analyser les figures et d'en développer une meilleure connaissance de leurs propriétés (Barrier, Chesnais et Hache, 2014 ; Duval et Godin, 2005 ; Keskessa, Perrin-Glorian et Deplace, 2007 ; Offre, Perrin-Glorian et Verbaere, 2006). En particulier, selon Pierrard (2004), la description de figures joue un rôle important dans la réussite des tâches de reproduction. De plus, Offre, Perrin-Glorian et Verbaere (2006) et Duval et Godin (2005) indiquent respectivement que, pour mieux analyser les figures et en percevoir leurs propriétés, les élèves doivent approfondir leurs connaissances sur l'usage des instruments de géométrie et changer le regard qu'ils portent sur elles, en particulier passer de la surface (2D) aux lignes (1D) (Duval et Godin, 2005 ; Venant et Cyr, 2018). Ce changement de regard, aussi appelé déconstruction dimensionnelle, peut être provoqué par le choix des instruments de géométrie, celui de la figure et les conditions de sa reproduction. Pour étudier les relations qui peuvent s'établir entre la description de la figure et sa reproduction, le cadre des Espaces de Travail Mathématique (ETM_G), et en particulier le plan sémiotique-instrumental [SEM-INS], permet de mettre en évidence les liens entre l'objet géométrique (*representamen*), les instruments (*artefact*), la visualisation que l'élève a de cet objet géométrique et la construction qu'il en fait (Kuzniak, Tanguay et Elia, 2016). En termes d'ETM_G, la genèse sémiotique et la genèse instrumentale sont liées. Toutefois, nous pouvons nous demander comment s'articulent les composantes (*representamen, artefacts*), les genèses (sémiotique et instrumentale) et les processus (visualisation et construction) dans le plan [SEM-INS] quand l'élève identifie, reconnaît, décrit et reproduit une figure : une genèse est-elle prédominante sur l'autre ? La défaillance ou la déficience d'une genèse entraîne-t-elle l'échec dans la tâche ? (Michot, 2018).

Au Québec, les activités de description et de reproduction de figures ne sont pas explicitées dans les programmes et, dans les manuels scolaires ou les cahiers d'exercices, elles sont rares, voire absentes. Les descriptions de figures consistent souvent à recopier des mots donnés dans l'énoncé ou à cocher des cases dans des tableaux ; les tâches de construction de figures peuvent être réussies perceptivement en utilisant la règle, seulement. De surcroît, la plupart des figures sont présentées en position prototypique et leur reconnaissance peut se faire de manière perceptive. Il est donc légitime de s'interroger sur les points suivants, à propos des élèves québécois :

- Quelles sont leurs compétences à propos de la description d'une figure de géométrie complexe (composées de deux figures élémentaires), en termes de description des figures élémentaires, de relations spatiales? Sont-ils en mesure de construire une figure à l'aide d'un programme de construction, sans aucun support visuel?
- Quelles sont leurs compétences à propos de la reproduction d'une figure complexe en termes d'utilisation pertinente des instruments de géométrie et de prises d'informations sur la figure modèle (nature et dimensions des figures élémentaires ; relations spatiales entre les figures élémentaires)?
- Peut-on mettre en évidence un lien entre ces deux activités quand elles sont proposées à un même élève à propos d'une même figure? Le modèle des ETM_G, et plus particulièrement le plan [SEM-INS], permet-il de bien décrire et d'analyser le travail de description et de reproduction de figures géométriques chez des élèves de 4e année primaire ? Nous permet-il de mettre en évidence des profils d'élèves?

LA MÉTHODOLOGIE

Nous avons donc proposé à 25 élèves d'une classe de 4e année du primaire du Québec (9-10 ans) de milieu socioéconomique très hétérogène et majoritairement allophone de reproduire six figures complexes, selon trois « scénarios » (Tableau 1) dans lesquels la description de la figure a été demandée avant ou proposée après sa reproduction. Dans chaque scénario, l'élève a réalisé deux tâches de reproduction : reproduire une première figure sur du papier quadrillé (au cm), soit les figures A, C et E (Figures 1, 2 et 3), et une deuxième figure sur du papier blanc[1], soit les figures D, B et F (Figures 4, 5 et 6).

Les six figures ont été proposées deux par deux (l'une sur papier quadrillé, l'autre sur papier blanc) :

[1] Les mesures de longueur n'étaient pas indiquées sur les figures modèles remises aux élèves. Ces derniers avaient la responsabilité de les repérer avec leur règle.

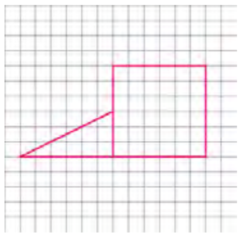


Figure 10 : figure A

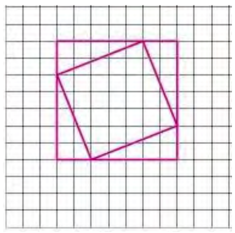


Figure 11 : figure C

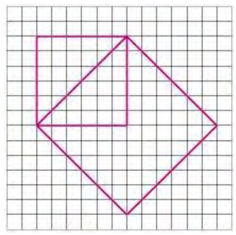


Figure 12 : figure E

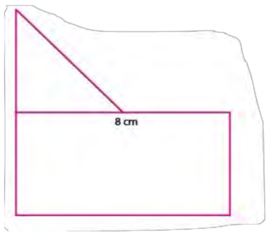


Figure 13 : figure D

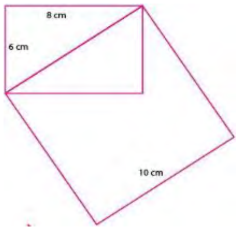


Figure 14 : figure B

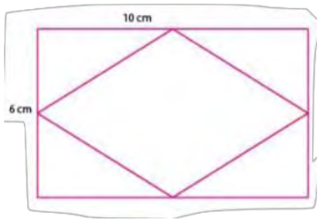


Figure 15: figure F

Ces figures complexes, composées de deux figures élémentaires, respectent aussi les critères de Duval et Godin (2005) en termes de juxtaposition ou de superposition de figures élémentaires.

Scénario 1	Scénario 2	Scénario 3
1) Figure modèle 2) Reproduction 3) Description individuelle 4) Description collective 5) Validation par superposition au calque	1) Figure modèle 2) Description individuelle 3) Description collective 4) Construction 5) Validation par le calque et par description de la production de l'élève	1) Description 2) Construction 3) Comparaison des productions entre les élèves d'un même groupe 4) Validation par superposition au calque de la figure modèle

Tableau I : Les différents scénarios

Dans le premier scénario, les élèves ont reproduit la figure modèle, soit une des figures dessinées à l'échelle 1 sur une feuille 8 ½ × 11 po, puis ils ont décrit la construction qu'ils venaient de faire, individuellement puis collectivement. Dans le deuxième scénario, ils ont décrit la figure modèle, individuellement puis collectivement, enfin, ils l'ont reproduite alors qu'ils avaient toujours la figure modèle sous les yeux. Cependant, les élèves n'avaient pas été avertis qu'ils auraient toujours accès à la figure modèle lors de leur reproduction. Dans le troisième scénario, les élèves ont reçu un programme de construction rédigé par la chercheuse et ils ont construit la figure décrite dans ce programme. Aucune institutionnalisation n'a été effectuée entre les tâches ; les élèves ont validé leur reproduction à l'aide d'un calque.

ANALYSE DES RÉSULTATS

Les traces des élèves (les reproductions et les descriptions de figures) ont été analysées afin d'observer si un scénario a permis aux élèves de mieux reproduire leur figure modèle et de rédiger des descriptions des figures plus « pertinentes », c'est-à-dire dans lesquelles il y a une utilisation de vocabulaire géométrique adéquat ou un langage courant acceptable.

Nous avons analysé les descriptions en termes de complétude : tous les éléments géométriques et spatiaux sont-ils présents ? Quels sont ceux qui manquent ? Le vocabulaire utilisé (géométrique et/ou spatial) est-il pertinent ? Nous avons également regardé si les élèves ont décrit les figures en termes de juxtaposition, de superposition ou les deux à la fois. Enfin, nous avons regardé si la déconstruction dimensionnelle était évoquée dans les textes proposés par les élèves.

Les reproductions de figures ont été analysées afin de mettre en évidence les difficultés des élèves : la nature du support (quadrillage ou papier blanc), la position de la figure dans la page, l'organisation des sous-figures entre elles, leur éventuelle incidence sur la réussite des tâches de reproduction ou de construction. En cas d'erreurs de construction, nous avons analysé la nature de ces erreurs : disposition des figures, mesure de longueur et construction d'angles droits. Finalement, nous avons analysé les constructions issues du scénario 3, afin de voir si, sans enseignement préalable, les élèves étaient capables de suivre un programme de construction pour voir si la présence de la figure modèle avait une importance dans la reproduction, sachant qu'elle est absente dans un programme de construction.

Résultats globaux à propos des descriptions et des reproductions

Cette étude exploratoire nous a permis d'observer que le scénario 2, où la description de figure précède la reproduction, a amené les élèves à décrire plus précisément la figure modèle et leur a permis de mieux réussir leur reproduction.

Dans le scénario 3, où les élèves n'avaient pas de support visuel, mais seulement un programme de construction, les difficultés ont été plus nombreuses. Le changement de registre de vocabulaire a posé problème : les structures de phrases, le vocabulaire courant mélangé au vocabulaire géométrique ont été source de difficultés en particulier dans la compréhension des relations spatiales entre les deux figures élémentaires. Ainsi, on peut penser que les élèves ayant de meilleures compétences langagières (meilleure maîtrise du français) ont pu se donner une visualisation de la figure plus efficace (activation de la genèse sémiotique) et réussir la construction demandée (activation de la genèse instrumentale). Nous avions anticipé cette situation au cours de la rédaction des programmes de construction. Comment rédiger un programme de construction qui soit libre de toute interprétation alors que les élèves ne connaissent pas encore la désignation des points par les lettres et que tous ne maîtrisent pas le vocabulaire nécessaire aux descriptions des relations spatiales? De plus, pour toutes les reproductions ou constructions, nous avons remarqué que l'utilisation du papier quadrillé n'est pas aussi évidente que l'on pourrait l'imaginer :

certains élèves n'utilisent pas adéquatement les nœuds et les lignes du quadrillage. D'une façon générale, quel que soit le support papier, les élèves ont des difficultés à reproduire des configurations de figures où des angles droits sont présentés autrement qu'en position prototypique. Ceci suggère que certains élèves bénéficieraient sans doute d'un enseignement explicite de l'usage des instruments (règle, équerre, quadrillage). Enfin, pour des raisons liées à l'expérimentation, aucune institutionnalisation n'a été effectuée à l'issue de chaque scénario. Nous considérons que, dans des conditions normales d'enseignement, elle permettrait aux élèves de comprendre leurs erreurs, d'améliorer leur maîtrise des instruments et l'usage du vocabulaire géométrique, donc d'affiner leurs apprentissages.

Quelques cas éclairés par le cadre des ETM$_G$

Le cadre des ETM$_G$, et en particulier le plan sémiotique-instrumental [SEM-INS] et ses genèses (Figure 7), nous a permis de mettre en évidence différents profils d'élèves lors de la réalisation de la tâche de description et de reproduction de figure. Dans ce contexte, faute d'autres traces écrites, nous avons considéré que la description proposée par les élèves était la manifestation accessible de l'activation de la genèse sémiotique. Nous ne parlons pas de genèse discursive étant donné que les élèves n'étaient pas dans une démarche de preuve, mais de reproduction de figures. De plus, comme nous n'avions aucune trace ni aucun élément observable en lien avec le référentiel théorique des élèves, nous avons donc fait le choix de ne pas nous y intéresser.

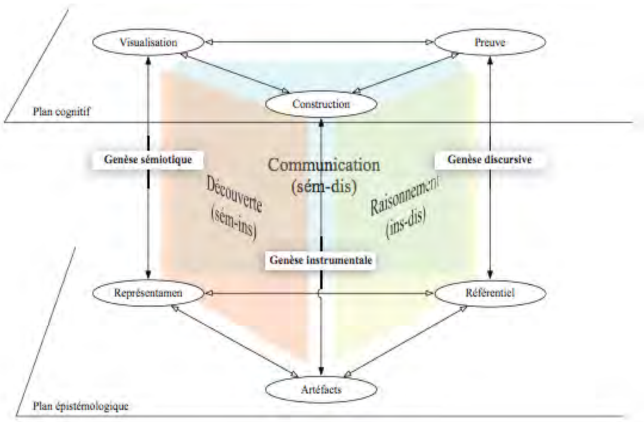


Figure 16 : Les genèses et les plans verticaux dans l'ETM (Kuzniak, Richard, 2014)

Si l'on considère le plan [SEM-INS] du modèle et les activations des différentes genèses, on peut concevoir quatre profils d'élèves : activation de l'une des deux genèses (sémiotique ou instrumentale), activation d'aucune genèse et activation simultanée ou alternée des deux genèses. Même si notre échantillon expérimental est particulièrement réduit, nous avons rencontré ces quatre profils dans les scénarios 1 et 2. Nous les présentons dans les paragraphes suivants en décrivant les interactions à l'intérieur du plan sémiotique-instrumental des ETM$_G$, en utilisant la figure E (Figure 3) pour illustrer nos propos.

Un premier profil d'élève est celui où l'élève reproduit parfaitement la figure modèle sans toutefois être capable d'en donner une description convenable : la genèse instrumentale est activée, mais la genèse sémiotique est peut-être défaillante (Figure 17).

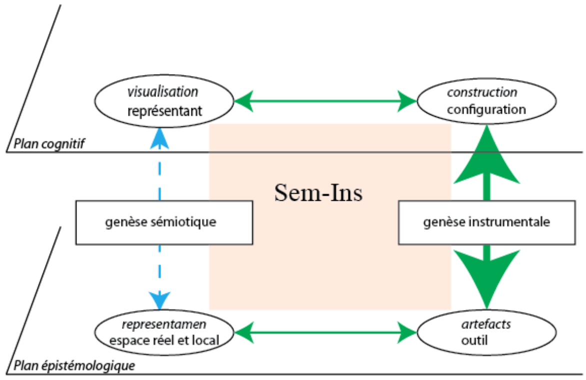


Figure 17 : Genèses sémiotique peut-être défaillante et instrumentale activée

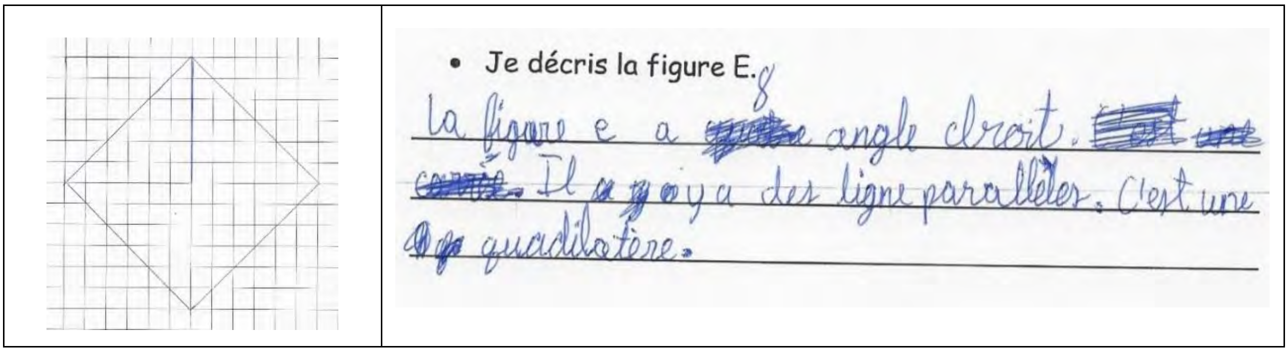


Figure 18 : Scénario 1, figure E, Jean

Dans l'exemple ci-dessus (Figure 18), l'élève a reproduit la figure modèle à l'identique. Il a donc été en mesure de choisir convenablement les *artefacts*, d'activer une genèse instrumentale pour réussir la reproduction de la figure. Ceci laisse entendre que l'élève a sans doute une visualisation pertinente de celle-ci. Cependant, sa description est incomplète : « *La figure a 8 angles droits. Il y a des lignes parallèles. C'est un quadrilatère* ». Les figures élémentaires, les mesures de longueur et la relation spatiale entre les figures élémentaires ne sont pas énoncées. Les termes « angle droit », « lignes parallèles » nous montrent que l'élève a déconstruit la figure. Cependant, cette déconstruction dimensionnelle nous semble peu pertinente pour la reproduction de la figure. Il n'y a pas assez d'indications sur l'activation ou non de la genèse sémiotique dans cette description. L'élève n'a pas su, à partir de la figure modèle (*representamen*), verbaliser la visualisation qu'il se faisait. Une telle difficulté peut être d'ordre langagier : l'élève ne maîtrise pas suffisamment le vocabulaire géométrique pour décrire ce qu'il voit. Il faudrait le questionner pour avoir plus d'informations sur la visualisation qu'il se donne de cette figure.

Le cas de cet élève non francophone (Figure 19) est très intéressant et vient confirmer ce qui était supposé dans le cas précédent : une description incomplète n'a peut-être pas de lien avec une absence d'activation de la genèse sémiotique. Dans le scénario 2, il décrit la figure avec les quelques mots qu'il connaît, mais réussit à reproduire parfaitement la figure.

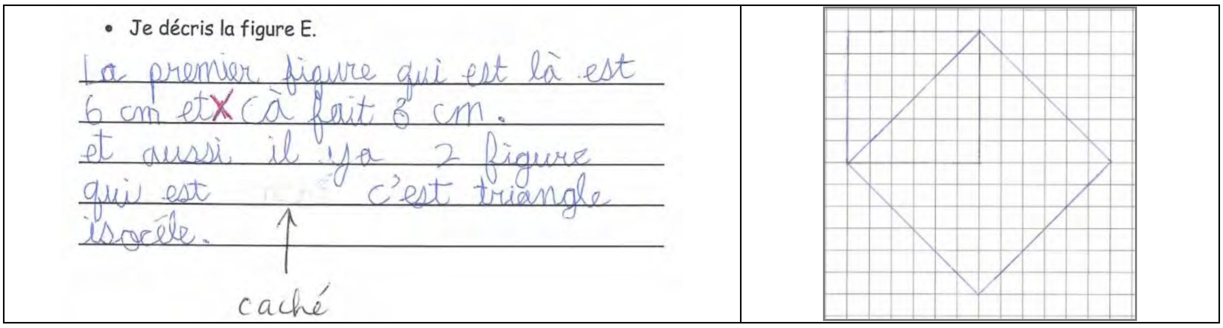


Figure 19 : Scénario 2, figure E, Isao

Dans une telle situation, nous pourrions dire que chez cet élève, les genèses sémiotique et instrumentale sont activées, mais la première ne peut être verbalisée : l'élève ne maîtrise pas le vocabulaire.

Un autre profil d'élève est celui où l'élève est en mesure de décrire la figure, mais éprouve de la difficulté à la reproduire : la genèse sémiotique est activée et la genèse instrumentale est défaillante (Figure 20).

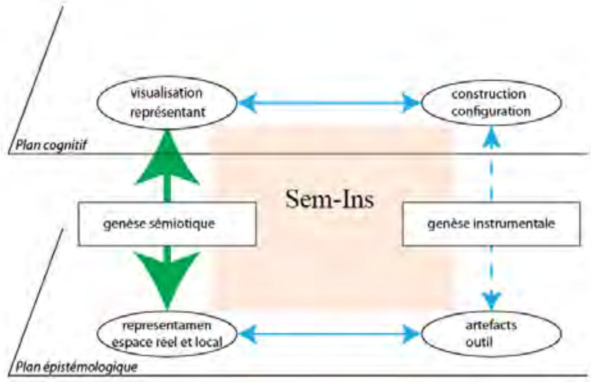


Figure 20 : Genèses sémiotique activée et instrumentale défaillante

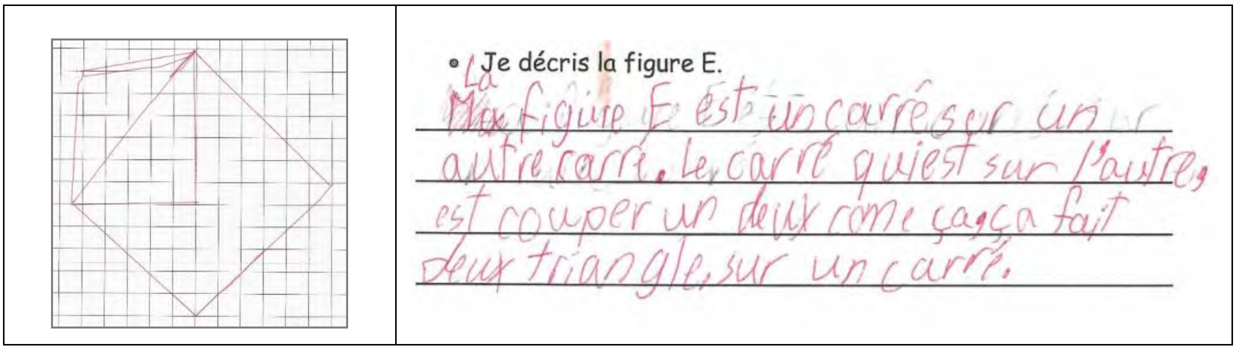


Figure 21 : Scénario 1, figure E, Kevin

Comme nous pouvons le remarquer dans la Figure 21, dans le scénario 1, l'élève n'a pas été capable de reproduire la figure modèle alors qu'il l'avait sous les yeux. Il n'a pas choisi les instruments appropriés (*artefact*) ou les a utilisés inadéquatement puisqu'il n'a ni suivi les lignes ni utilisé les nœuds du quadrillage. De plus, une partie de sa construction semble tracée à main levée et il n'a pas tenu compte des mesures de longueur. Ainsi, nous considérons qu'il n'a pas été capable d'activer adéquatement la genèse instrumentale pour faire cette reproduction. Ceci laisse entendre que l'élève n'a tout simplement pas été capable de se donner une visualisation de la figure : peut-être n'avait-il pas remarqué que les figures étaient des carrés ? Or, sa description, tout à fait pertinente, suggère le contraire : « *Ma figure E est un carré sur un autre carré. Le carré qui est sur l'autre est coupé en deux. Comme ça, ça fait deux triangles sur un carré.* ». Dans ce texte, l'élève a bien reconnu les deux figures élémentaires superposées (« *ce sont deux carrés* ») et il a mentionné la relation spatiale entre les deux carrés, donc il a su changer de regard sur la figure : le côté d'un des carrés « *est coupé en deux [...] triangles* ». Rappelons que dans le scénario 1, l'élève n'a plus accès à la figure modèle lorsqu'il décrit. Cette description est donc le fruit de sa mémorisation de la figure et de l'observation de celle qu'il vient de produire. Ceci nous semble indiquer que l'élève avait réellement l'intention de construire des carrés, mais il n'a pas su mettre à profit ces remarques au cours de sa construction parce qu'il a rencontré des difficultés en lien avec l'utilisation des instruments. En d'autres mots, nous pourrions dire que, à partir du *representamen*, l'élève a su activer adéquatement la genèse sémiotique et se donner une visualisation de la figure sans réussir à la reproduire.

Un autre profil observé lors de notre expérimentation est celui de l'élève qui n'arrive ni à décrire la figure modèle ni à la construire : les genèses sémiotique et instrumentale semblent être toutes les deux défaillantes (Figure 22).

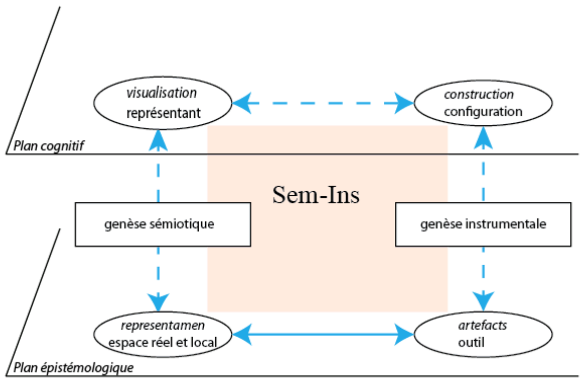


Figure 22 : Genèses sémiotique et instrumentale défaillantes

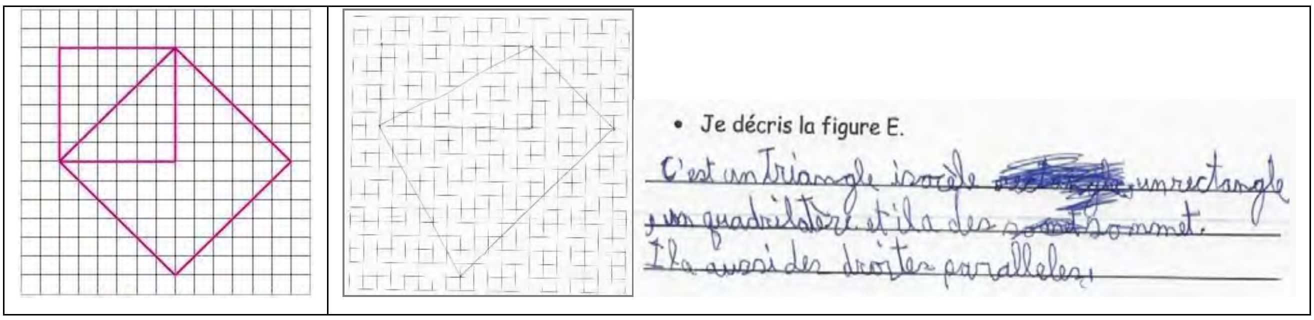


Figure 23 : Scénario 1, figure E, William

En observant la reproduction de l'élève (Figure 23), nous voyons qu'il n'a pas réussi à réaliser la tâche : il n'a pas su utiliser adéquatement les *artefacts* (papier quadrillé et règle) pour reproduire la figure modèle. Une observation fine de sa production nous donne à penser que l'élève a vraisemblablement pris les repères des sommets de la figure à partir des bords de la feuille quadrillée, comme si chaque nœud des bords du quadrillage était l'origine d'un repère cartésien du plan. Mais, une telle démarche n'était pas pertinente puisque le quadrillage sur lequel il travaillait était plus grand que celui de la figure modèle. De plus, nous voyons que l'élève a de la difficulté à utiliser sa règle : ses tracés ne sont pas rectilignes, mais ont des extrémités précises. Dans le cadre des ETM_G, nous pourrions dire d'une telle production que, si l'élève a sous les yeux un exemplaire du *representamen* et dans les mains les bons artefacts, l'usage qu'il fait de ces derniers montre que la genèse instrumentale est défaillante : il n'arrive pas à reproduire la figure (le *representamen*). La description qu'il propose est tout aussi maladroite tant au niveau du vocabulaire géométrique que des relations spatiales; il semble décrire sa reproduction, ce qui correspond aux conditions d'expérimentation (scénario 1) : « *C'est un triangle isocèle, un rectangle, un quadrilatère et il y a des sommets. Il y a aussi des droites parallèles* ». Cette description nous montre que l'élève ne maîtrise pas le vocabulaire géométrique : il parle d'un « *triangle isocèle* » qui est présent sur la figure modèle, mais absent dans sa production. L'élève décrit par ailleurs le rectangle qu'il a construit. Enfin, il déconstruit la figure en termes de sommets et de droites parallèles, sans qu'on puisse être certain de la pertinence d'une telle déconstruction pour lui. Ceci laisse supposer qu'il n'a pas un souvenir précis de la figure modèle en termes de visualisation ou, a minima, qu'il n'a pas été en mesure de verbaliser correctement la visualisation qu'il s'était donnée de la figure E. Nous ne pouvons pas savoir si l'élève a activé ou non sa genèse sémiotique : il faudrait le questionner pour avoir plus d'informations. Comme pour le premier profil, l'élève ne semble pas maîtriser le langage géométrique nécessaire pour bien décrire la figure.

Le dernier profil que nous avons rencontré est le cas où l'élève est capable de décrire et de reproduire parfaitement la figure modèle : les deux genèses du plan sémiotique-instrumental sont manifestement activées (Figure 24).

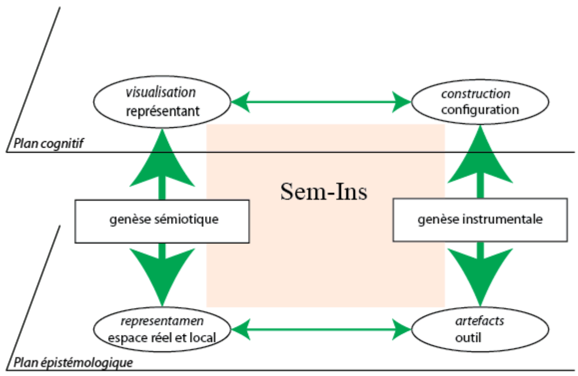
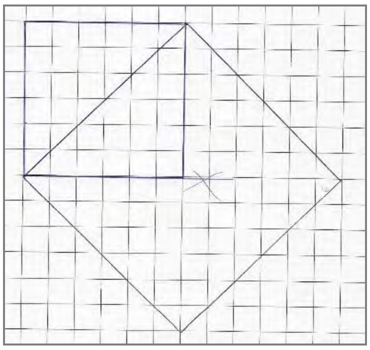


Figure 24 : Genèses sémiotique et instrumentale activées



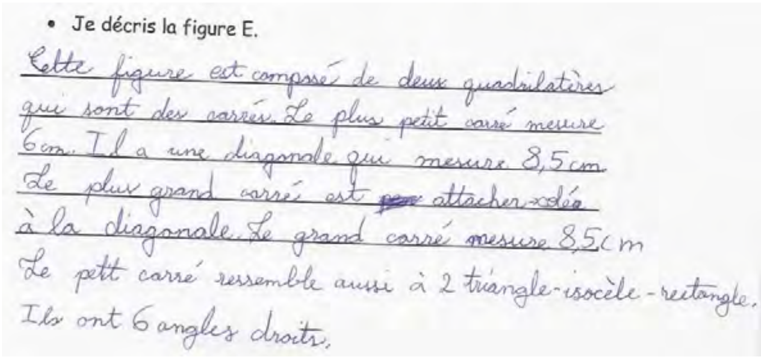

• Je décris la figure E.
Cette figure est composé de deux quadrilatères qui sont des carrées. Le plus petit carré mesure 6cm. Il a une diagonale qui mesure 8,5cm. Le plus grand carré est attacher collé à la diagonale. Le grand carré mesure 8,5cm. Le petit carré ressemble aussi à 2 triangle-isocèle-rectangle. Ils ont 6 angles droits.

Figure 25 : Scénario 2, figure E, Nadia

Comme nous l'observons (Figure 25), la construction est réussie : l'élève a su, à partir du *representamen,* choisir pertinemment ses *artefacts* (instruments) et les utiliser (activation de la genèse instrumentale). Sa description témoigne d'une visualisation complète et précise de la situation : l'élève nomme les deux figures élémentaires en mentionnant leurs positions relatives ; les mesures de longueur sont indiquées pour chaque carré et finalement l'élève indique le changement de regard qu'elle a posé sur cette figure complexe : « *Le petit carré ressemble aussi à 2 triangles isocèle-rectangle* ». Nous considérons que l'élève a su activer la genèse sémiotique en verbalisant adéquatement la visualisation qu'elle se donnait de la figure modèle. Toutefois, nous n'avons pas d'information sur les allers-retours entre les deux genèses au cours de la reproduction de la figure : combien de fois l'élève est-elle retournée au modèle (*representamen)* ou à la description déjà rédigée (genèse sémiotique) ? En effet, dans le scénario 2, après avoir rédigé leur description, les élèves ont été autorisés à conserver la figure modèle pour la reproduire. Nos conditions d'expérimentation ne nous permettent pas de répondre à une telle question.

CONCLUSION

Que ce soit à propos de la description ou de la reproduction d'une figure géométrique, les élèves de 4e année auxquels nous nous sommes adressés ont témoigné de compétences très variées, souvent en dessous de ce que l'on pourrait penser par rapport aux visées du programme d'enseignement.

Le modèle des ETM permet de mettre en évidence les réussites et les difficultés des élèves lors d'une tâche de description et de reproduction de figures. Dans le plan sémiotique-instrumental, nous avons pu observer que les difficultés des élèves peuvent être décrites en termes de genèse sémiotique et/ou de genèse instrumentale défaillantes.

Compte tenu des conditions d'expérimentation, nous n'avons pu constater l'activation de la genèse sémiotique qu'au travers de la description de la figure. Mais nous avons été confrontées à des cas d'élèves qui peuvent se donner une bonne visualisation de la figure puisqu'ils sont en mesure de la reproduire, sans pour autant la décrire en utilisant le vocabulaire géométrique pertinent. Une institutionnalisation permettrait sans doute de pallier ces difficultés. L'enseignant pourrait faire travailler ses élèves sur le vocabulaire géométrique et spatial pour décrire les figures (activation de la genèse sémiotique) en lien avec la genèse instrumentale. Ce genre d'intervention permettrait de faire évoluer la qualité des verbalisations et des descriptions.

Les élèves ont travaillé d'un scénario à l'autre sans qu'aucune institutionnalisation ne soit faite ; ils ont contrôlé leur construction au calque. On peut facilement imaginer qu'en mettant en commun les éléments pertinents aux descriptions et les démarches de construction efficaces, plusieurs d'entre eux auraient progressé davantage d'un scénario à l'autre dans l'utilisation des instruments : les reproductions auraient été mieux réussies dans le scénario 2 et, en particulier, le programme de construction (scénario 3) n'en aurait été que mieux compris.

Dans la mesure où, sur une classe de 25 élèves, à propos d'une même figure, nous avons rencontré les quatre profils possibles associés au plan [SEM-INS], ceci nous laisse entendre que ce modèle théorique, du moins le plan sémiotique-instrumental, est bien adapté pour décrire et analyser l'activité d'un élève de 4^{e} année lors d'une tâche de description et de reproduction de figure. Ainsi, ce modèle théorique pourrait être une aide pour l'enseignant qui veut accompagner l'élève dans ses apprentissages. Dans ces conditions, le cadre des ETM_G pourrait faire évoluer l'enseignement de la géométrie plane. Toutefois, la tâche sur laquelle nous avons testé le cadre des ETM_G pour analyser le travail des élèves est très petite et ne nous permettait pas d'investiguer dans les autres plans des ETM_G, [SEM-DIS] et [INS-DIS]. Pour ce faire, il faudrait imaginer une tâche plus complexe (ou des tâches) dans lesquelles les élèves devraient aussi élaborer des éléments de preuve (genèse discursive), que ceux-ci soient instrumentés, donc relevant de la Géométrie GI, ou plus théoriques dont relevant de la Géométrie GII (Houdement & Kuzniak, 2003).

À la lumière de ces résultats, il serait sans doute pertinent d'explorer les éléments suivants dans d'autres recherches :

- mener des entretiens avec certains élèves pour préciser l'activation ou non de la genèse sémiotique ;
- réaliser une institutionnalisation entre chaque scénario et faire des retours avec les élèves à chaque étape pour contrôler les apprentissages ;
- mener une recherche similaire avec des élèves d'un niveau scolaire plus élevé, comme des élèves de 6^{e} année ou de 1re secondaire, plus habiles avec l'utilisation des instruments de géométrie et repérer les éléments de difficultés qui persistent et ceux qui ont disparu ;
- réaliser une recherche similaire avec un plus grand effectif d'élèves pour infirmer ou confirmer que la description préalable peut être une aide à la reproduction (scénario 2 qui semble plus favorable que le scénario 1) ;

- explorer l’activation de la genèse discursive dans les plans sémiotique-discursif [SEM-DIS] et instrumental-discursif [INS-DIS] du cadre des ETM_G à partir d’une autre activité de géométrie, pour décrire le travail d’un élève à un autre niveau de scolarité et pour apprécier l’aide que ce cadre théorique peut apporter à l’enseignant.

REFERENCES

Barrier, T., Chesnais, A., & Hache, C. (2014). Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spirale*, (54), 175-193

Duval, R., & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, (76), 7-27.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Epistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l’enseignement de la géométrie. *Carnet de route de la COPIRELEM, Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques. Tome 2 - Démarches et savoirs à enseigner,* 95-106.

Keskessa, B., Perrin-Glorian, M.-J., & Deplace, J.-R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, (79), 33-60.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). *Mathematical Working Spaces in Schooling: An introduction.* Dans A. Kuzniak, D. Tanguay et I. Elia (éds.), Mathematical Working Spaces in Schooling, chap. 1. *ZDM Mathematics Education,* vol. 48(6), 721-737. New-York, Heidelberg : Springer.

Michot, S. (2018). *Étude exploratoire de la description et de la reproduction de figures géométriques chez des élèves du 2e cycle du primaire* (Maîtrise ès arts, Université de Montréal, Montréal). Repéré à https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/21335

Offre, B., Perrin-Glorian, M.-J., & Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N*, (77), 7-34.

Pierrard, A. (2004). Des écrits pour présenter des dessins géométriques, *Grand N*, (74), 7-30.

Venant, F., & Cyr, S. (2018). Déconstruction dimensionnelle et vocabulaire géométrique chez les futurs enseignants du primaire, *Grand N*, (101), 23-44

LA IMPORTANCIA DE LA REFUTACIÓN EN LA ARGUMENTACIÓN COLECTIVA PARA LAS OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Horacio Solar[a], Manuel Goizueta[b]

[a]Pontificia Universidad Católica de Chile, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

hsolar@uc.cl, manuel.goizueta@pucv.cl

La investigación de la argumentación en el aula de matemáticas ha sido abundante y prolífica en las últimas décadas, mostrando que esta promueve espacios de comunicación y discusión en el aula. Gran parte de los estudios han utilizado la estructura de Toulmin para caracterizar la argumentación en el aula de matemáticas. Esta comunicación muestra una adaptación de la estructura que releva el papel de la refutación en la argumentación colectiva para la emergencia de oportunidades de aprendizaje matemático. Analizamos dos episodios de aula en que el docente realiza una gestión argumentativa de la clase y vemos cómo, mediante procesos argumentativos, y en particular a partir de la aparición de refutadores, se dan distintas oportunidades de aprendizaje matemático.

Palabras clave*: argumentación colectiva, refutación, argumentación en el aula de matemáticas, modelo de Toulmin, gestión argumentativa*

ARGUMENTACIÓN COLECTIVA EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

La investigación de la argumentación en el aula de matemáticas ha sido abundante y prolífica en las últimas décadas, mostrando que esta promueve espacios de comunicación y discusión en el aula. Gran parte de los estudios han utilizado la estructura de Toulmin (2003) para caracterizar la argumentación en el aula de matemáticas (Conner, Singletary, Smith, Wagner, & Francisco, 2014; Krummheuer, 2007; Simpson, 2015; Wagner, Smith, Conner, Singletary, & Francisco, 2014).

La estructura de Toulmin (Figura 1) consta de seis elementos: los datos (D) son aquellas afirmaciones o hechos que se dan por sentados; la conclusión (C) es la afirmación que se pretende justificar con base en los datos; la garantía (W) fundamenta el carácter justificativo de los datos en relación con la conclusión; el respaldo (B), a su vez, fundamenta la autoridad de la garantía en relación con el campo argumentativo; el calificador modal (Q) da cuenta del nivel de certeza con el que se afirma la conclusión; y, finalmente, los refutadores (R) expresan las condiciones en que la garantía no permite el paso entre datos y conclusión.

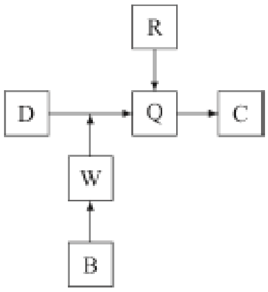


Figura 1: Estructura de Toulmin (2003)

Los primeros estudios que utilizaron la estructura de Toulmin para analizar la argumentación en el aula de matemáticas (Krummheuer, 1995) se centraron en la justificación y en la fundamentación, reduciendo el sistema original a cuatro elementos: datos, garantía, respaldo y conclusión. Esta versión reducida de la estructura ha sido adoptada en otros estudios en relación con diversos temas matemáticos, tanto en primaria como en secundaria, mostrando que es útil transversalmente al nivel escolar y al contenido (Rasmussen, Stephan, & Allen, 2004).

El uso de esta versión simplificada de la estructura de Toulmin ha sido cuestionado por diversos autores, quienes sugieren la necesidad de utilizar la versión completa para dar cuenta de la complejidad de la argumentación en la actividad matemática. Por ejemplo, para dar cuenta del papel de distintos calificadores modales para evidenciar niveles de adhesión a la conclusión y, así, el estatus epistémico conferido a esta por el argumento (Inglis, Mejia-Ramos, & Simpson, 2007). Otros estudios han profundizado en la noción de *argumentación colectiva* (Krummheuer, 2007; Yackel, 2002), proponiendo como foco el aprendizaje de los estudiantes mediante los procesos de argumentación que construyen conjunta e interactvamente entre pares y con el profesor. Para evidenciar el rol del profesor en el desarrollo de la argumentación de los estudiantes, algunos autores han enriquecido la estructura de Toulmin para incluir las acciones del profesor, las que si bien pueden no constituir los componentes de la argumentación, contribuyen a su desarrollo (Conner et al., 2014). Entre estos estudios que abogan por el uso de la versión completa de la estructura de Toulmin, o que incluso proponen su ampliación, un elemento que ha recibido poca atención es el refutador. Esto se hace patente en los análisis de argumentación que plantean las investigaciones en argumentación colectiva (Conner et al., 2014; Krummheuer, 2007; Simpson, 2015; Wagner et al., 2014; Yackel, 2002).

En nuestras investigaciones y experiencias de desarrollo profesional continua de profesores hemos visto que cuando el docente promueve la argumentación colectiva en el aula de matemáticas, genera razonamientos que pueden ser contrapuestos y pueden actuar como garantías y refutadores, contribuyendo a generar nuevas conclusiones. En particular, hemos detectado tres condiciones para promover la argumentación colectiva en el aula de matemáticas: el uso de estrategias comunicativas por parte del profesor, tareas matemáticas abiertas a la discusión que permiten el contraste de posturas y una planificación de clases que permite al docente anticipar la argumentación (Solar y Deulofeu, 2016). Si se cumplen estas tres condiciones para promover la argumentación colectiva, decimos que el docente realiza una *gestión argumentativa*.

Estas acciones de contraposición de ideas o refutación por parte de los estudiantes cobran relevancia para generar oportunidades de aprendizaje matemático en el aula. Así, nuestro propósito en este comunicación es poner en foco el papel de la refutación en las interacciones de aula como parte de la creación de oportunidades de aprendizaje matemático para los estudiantes. En particular, mostramos que la refutación es una pieza clave en la visibilización y discusión de los fundamentos de los argumentos, permitiendo la reflexión crítica acerca de los conocimientos matemáticos que son puestos en juego por los estudiantes. Esto nos lleva a repensar la estructura original propuesta por Toulmin y presentar otra, alternativa, que pone en evidencia la relación fundamental entre la garantía, el respaldo y el refutador. Esta propuesta se fundamenta en el análisis de datos de aula, mediante el que mostramos de qué modo esta adaptación de la estructura de Toulmin permite dar cuenta de cómo los estudiantes generan oportunidades de aprendizaje matemático contraponiendo sus ideas en el marco de una gestión argumentativa de la clase.

METODOLOGÍA

El estudio[1] se realizó en el marco de un curso de desarrollo profesional con diez profesoras de enseñanza primaria de Concepción, Chile, durante el año 2014. El foco del curso fue el desarrollo de la argumentación en el aula de matemáticas. El 2015 se seleccionó a tres profesoras que habían logrado desarrollar la argumentación en sus clases para profundizar en prácticas vinculadas a la argumentación. Las tres profesoras realizaron regularmente un total de 30 sesiones de 120 minutos entre los años 2014 y 2015. El proceso de formación se realizó bajo el modelo de Mejoramiento de la Experiencia Docente (Solar, Ortíz, & Ulloa, 2017), el cual tenía como propósito que profesores en ejercicio estudien problemáticas en torno a la gestión del aula de matemáticas, por medio de la reflexión acerca de sus prácticas con la ayuda de videos de clase. El uso de videos para la formación de profesores es una práctica cada vez más habitual y que ha significado una aportación relevante al análisis de clases para los propios profesores (van Es & Sherin, 2010).

El curso consistió en cuatro etapas: i) identificar argumentación por medio de la estructura de Toulmin en videos de clase de matemáticas; ii) promover la argumentación por medio de estrategias comunicativas por parte del profesor (Solar y Deulofeu, 2016) usando videos de clases de los propios profesores; iii) el diseño de clases por medio de tareas matemáticas adecuadas para promover la argumentación y,

[1] El estudio fue parte del Proyecto de investigación Fondecyt 11130675 (National Fund for Scientific and Technological Development)

finalmente, iv) a partir de la implementación de sus clases, la evaluación del proceso de apropiación de la argumentación.

Para el estudio, se utilizó un estudio de caso múltiple (Yin, 2014) para entender la prácticas de argumentación colectiva en el aula de matemáticas. Se consideraron como casos las tres profesoras que participaron en el seminario. Los datos se obtuvieron durante 2014 y 2015 de clases de 90 minutos que fueron grabadas en video, realizando, además, una observación no participante mediante una pauta para identificar momentos de argumentación. Para esta comunicación, se eligieron dos clases de una de las tres profesoras. Mediante la estructura de Toulmin modificada, se analizaron los procesos de argumentación y las prácticas de la profesora para promoverla. Se eligieron estas dos clases porque en cada una de ellas se observa la aparición de refutaciones por parte de estudiantes y las prácticas de la docente dan distintas oportunidades de aprendizaje matemático. Se analizan tres dimensiones asociadas a la argumentación: tareas abiertas a la discusión (Solar y Deulofeu, 2016); estructura argumentativa (Toulmin, 2003) y rol de la profesora (Conner et al., 2014).

ANÁLISIS DE DATOS

Abajo realizamos el análisis de dos clases impartidas por la profesora Mónica. Una realizada en septiembre de 2014, cuando Mónica estaba aproximadamente en la mitad del proceso de formación de ese año, y otra que corresponde a 2015, cuando Mónica ya participaba en el curso como uno de los casos del proyecto.

Clase 1: “girar la figura”

Mónica es profesora de un 6° de primaria (11-12 años) y en el curso de desarrollo profesional se le solicita que realice una clase para promover la argumentación en una de las clases que ya tenía diseñada a lo largo de la unidad didáctica. Para ello, Mónica adapta una clase para promover la argumentación, planteando una actividad introductoria basada en una guía de trabajo individual, en la cual los alumnos deben asociar distintas figuras según las similitudes que poseen. Entre las figuras hay una que puede ser un cuadrado y otra que puede ser cuadrado inclinado o un rombo, según se considere y, para determinarlo, habría que medir sus lados y ángulos. Esta tarea matemática es abierta a la discusión, porque se esperan diferentes respuestas. Por un lado que algunos estudiantes respondan que ambas son cuadrados y, por otro, que otros respondan que son diferentes, ya que una de ellas es un rombo. Una vez que Mónica se ha paseado por la sala para ver las diferentes respuestas de los alumnos, proyecta en la pizarra la guía que repartió entre los alumnos. Hace pasar a la pizarra a Marcelo y a Fernanda para que marquen qué figuras tienen las mismas características, ya que en una de las respuestas no coinciden. Fernanda no marcó una de las figuras como similar a otra dado que, para ella, parecía un rombo en vez de un cuadrado; a diferencia de Marcelo, que sí marcó la figura como similar a la otra que se asemeja a un cuadrado. La profesora promueve y gestiona la discusión de los dos puntos de vista. Ante la idea de un estudiante de que al girar la hoja la figura que parece rombo se puede ver como un cuadrado, Fernanda cambia su punto de vista, aceptando que las dos figuras pueden ser un cuadrado.

Luego de que Fernanda cambió su punto de vista aceptando que dos cuadriláteros pueden corresponder a un cuadrado, Bastián no está de acuerdo y da a entender que, cuando se gira una de las figuras la otra que era un cuadrado deja de serlo. Mónica solicita que Josefa y Daniel pasen a la pizarra para que discutan esta idea con Bastián y con el resto del curso.

En la Figura 2 se presenta el análisis de la interacción de la clase desarrollado en Solar y Deulofeu (2016) mediante la estructura modificada de Toulmin. En ella se describe de qué manera emerge el contraste de dos posturas: entre Bastián, y por otra parte, Josefa y Daniel, además se aprecian las acciones de la profesora Mónica para promover la argumentación.

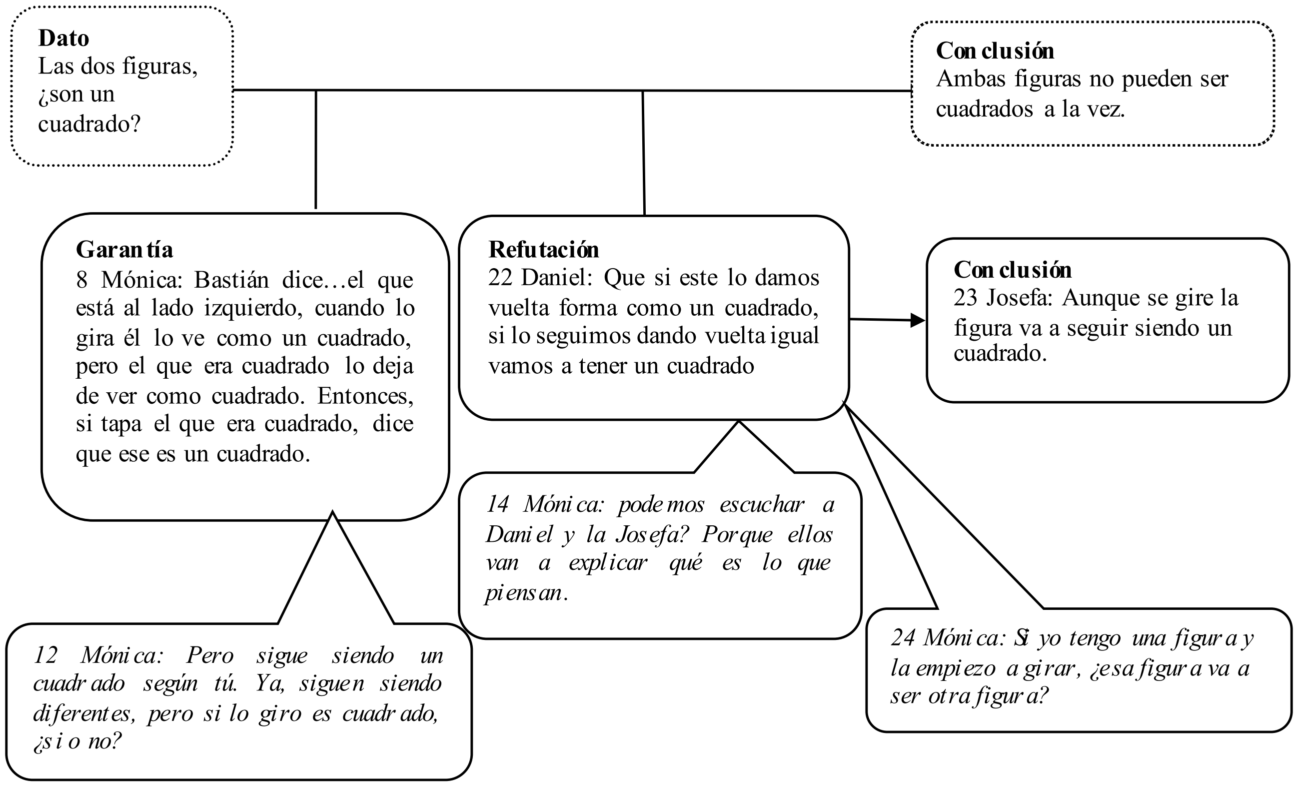


Figura 2: Proceso argumentativo (Solar y Deulofeu, pág. 1104)

Este análisis mediante el esquema de Toulmin, se ha construido sobre la base del dato que desencadena la argumentación: "las dos figuras, ¿son un cuadrado?" que es implícito en la discusión. En la estructura argumentativa el razonamiento de Bastián de que la figura cambia al girar la hoja se presenta como una garantía que conlleva a una conclusión implícita de que ambas figuras no pueden ser cuadrados a la vez. El razonamiento de Daniel de que al dar la vuelta la hoja la figura sigue siendo un cuadrado tiene el carácter de refutador que conlleva a una nueva conclusión en palabras de Daniela de que la figura, aunque se gire, seguirá siendo un cuadrado.

Esta argumentación colectiva representa una oportunidad de aprendizaje que a continuación detallaremos:

El razonamiento de Bastián (la figura cambia al girar) es visual, mientras que los razonamientos de Daniel y Josefa consideran las propiedades de una figura que no cambia al girar. El razonamiento de Bastián corresponde a un patrón de pensamiento profundo que, para ser superado, requiere de una respuesta específica por parte del docente. En este caso se aborda mediante una gestión argumentativa por parte de la profesora Mónica.

Si bien el razonamiento de girar la hoja había aparecido antes entre Marcelo y Fernanda, ante la idea de Bastián, este razonamiento cobra más relevancia para los estudiantes ya que sirve para refutar el razonamiento planteado por Bastián.

El razonamiento de girar la hoja podría haberse conectado con la noción de rotación, idea que pudo haber tenido un carácter de fundamentación en la argumentación colectiva. El refutador asienta las bases para que pueda emerger una fundamentación que permita resolver el conflicto.

La interacción que se generó se encamina a profundizar en el patrón de pensamiento de Bastián que puede llevar a producir cambios de un nivel de razonamiento visual a análisis, generando oportunidades de aprendizaje matemático.

La interacción argumentativa puede ser analizada desde el punto de vista de las acciones de la profesora.

Las intervenciones de Mónica que se encuentran enmarcadas en la estructura argumentativa, han promovido que se generara la argumentación colectiva: la intervención 12 pretende suscitar el razonamiento de Bruno. La intervención 14 genera el espacio para que exista la contraposición de ideas; en particular la pregunta que hace Mónica (24) después de la intervención de Daniel y Josefa es un camino hacia la fundamentación, Mónica hace un cambio relevante al preguntar si cualquier figura va a seguir siendo la misma si se gira en vez de centrarse solo en el cuadrado. No obstante, no se clasifica como fundamento porque no se conecta con los movimientos rígidos – no emergió la rotación como concepto – y no es una idea desarrollada por los propios alumnos. La profesora no propone acciones para que realmente se instale el fundamento de la argumentación colectiva, a pesar de haberse dado la oportunidad para que así fuese.

Clase 2: "1:2= 1"

En esta segunda clase que se analiza, Mónica se encuentra en su segundo año de participación en calidad de uno de los tres casos del proyecto. Durante el 2015 se realizaron 10 sesiones con los tres casos, en que se diseñaron clases de manera colaborativa entre investigadores y docentes con foco en desarrollar la argumentación. La clase 2 que se analiza, se diseñó durante el seminario de profesores con el propósito que alumnos de 4to grado (9 -10 años) tuvieran que encontrar un número adecuado para que se cumpliera una igualdad. Para promover la argumentación, se ha diseñado una tarea matemática con dos actividades (figura 3), en la actividad A, Mónica anticipa que los alumnos respondan generalmente de manera satisfactoria, escribiendo el 1 en ambas casillas como la única respuesta posible en el campo de los números naturales. En cambio, en la actividad B, Mónica anticipa diferentes respuestas, incluyendo errores asociados a la posición del cero. La profesora definió como objetivo, descubrir las regularidades en la multiplicación y la división.

Actividad A.- ¿Qué números debe ir en el recuadro para que se cumpla la igualdad? ¿Cuántas posibilidades existen?

$$\boxed{1} : \square = \square$$

Actividad B.- ¿Qué números deben ir en el recuadro para que se cumpla la igualdad? ¿Cuántas posibilidades existen?

$$\square \bullet \square = \boxed{0}$$

<u>RESPUESTAS ESPERADAS</u>

Para la actividad A se esperan que todas las respuestas sean correctas (1:1=1)

Para la actividad B se espera que surjan respuestas erróneas.

Figura 3: extracto plan de clases Mónica

La tarea matemática es abierta a la discusión dado que si bien la profesora anticipó que los estudiantes no tendrían dificultades para responder a la actividad A*,* en la gestión de la actividad, <u>Mónica se da cuenta</u> que aparecen *diferentes respuestas* en la actividad A tales como $1:3 = 2 \; y \; 1:2 = 2$, estas respuestas están relacionadas con las estrategias de los estudiantes de 4to grado de primaria los cuales no habían estudiado aun los números 1 y 0 como términos de operaciones multiplicativas, y por tanto es la riqueza de la naturaleza matemática lo que permite diferentes respuestas, una correcta y varias incorrectas en la actividad A.

La clase comienza con la entrega a los estudiantes de la actividad A, en que falta el divisor y el cociente. En vez de que los estudiantes respondieran de manera general con la solución esperada $1 \div 1 = 1$, aparecen una multiplicidad de respuestas inesperadas entre los estudiantes, agrupadas en torno a completar las casillas del problema con los números 1, 2 y 3.

En la figura 3 se han organizado estas interacciones en una estructura de Toulmin para dar cuenta que tienen características de argumentación colectiva

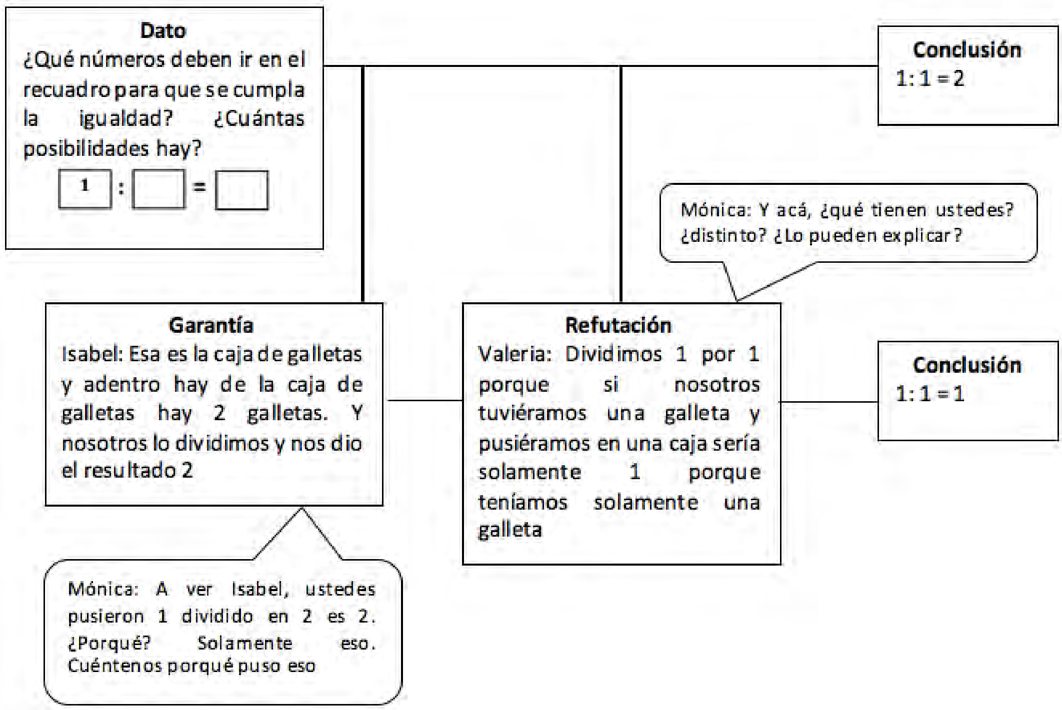


Figura 4: Estructura argumentativa Caso Mónica

La figura 4 muestra que la garantía es propuesta por Isabel, quien a su vez plantea como conclusión de que $1{:}1 = 2$. Posteriormente, surge la refutación de Valeria que permite llegar a una nueva conclusión de que $1{:}1 = 1$, que corresponde a la solución correcta. Es importante considerar que la refutación de Valentina se sustenta en la misma metáfora realizada por Isabel, siguiendo el mismo modelo de razonamiento. Esto permite mantener el proceso de pensamiento planteado por Isabel y facilita la comprensión de la refutación indicada por Valeria.

La garantía de Isabel contiene un modelo de reparto equitativo para la división. Este ejemplo es importante, pues será utilizado por Mónica para discutir las múltiples respuestas que irán apareciendo en la clase, lo que otorga una herramienta para que los alumnos argumenten.

En lo que sigue de la clase, Mónica, en vez de evaluar la respuesta, pregunta al resto del curso quien puede tener la razón. Daniela señala que cambió de opinión y es ella misma quien refuta la respuesta de Tania, con quien estaba de acuerdo antes, señalando que "uno es uno dividido en uno, porque el uno se divide una sola vez". Como veremos a continuación, frente a esta argumentación, que corresponde a la respuesta esperada, Mónica decide preguntar a otros alumnos si cambiarían la opinión.

Mónica: Fernanda, ustedes tienen $1 \div 3 = 2$. Has escuchado a tus compañeros, ¿Usted todavía cree que uno dividido en tres es dos, o cree que podrías cambiar de opinión? ¿Podría cambiar de opinión?

Fernanda: Esa (*muestra la respuesta* $1 \div 2 = 2$).

Mónica:	Por esa, $1 \div 2 = 2$. ¿Isabel? ¿Que tenía esa de las galletas? ¿Sigue pensando lo mismo, o cambia de opinión?
Isabel:	Sigo con lo mismo.
Mónica	Sigue pensando lo mismo. ¿Y acá? Javier. ¿Usted? (*Javier no responde*). (…) Vamos a esperar la respuesta de Javier. Javier tenía, junto con Isabel, $1 \div 2 = 2$. Y ellos lo explicaron con este ejemplo. ¿Sí? Tenían dos galletas. Y esas dos galletas, ¿dónde las fueron a repartir?

(*Los alumnos vuelven a los puestos a revisar sus respuestas.*)

Entendemos aquí que la causa del error de Fernanda radica en que al realizar el reparto equitativo de una cantidad, ésta debe ser mayor que uno. Reconocemos en esta característica un posible patrón de pensamiento, puesto que aun habiendo aparecido la respuesta correcta y el correspondiente razonamiento que hay detrás de ella, aún se mantiene la posición de Isabel que es compartida, por lo menos, por Fernanda. Sin embargo, no hay suficiente evidencia que respalde esta posición, ya que la idea es declarada solo por dos alumnos, que son quienes originan el error.

Mónica sigue indagando en la respuesta $1 \div 2 = 2$ para profundizar en el significado de los términos de la división, y para ello sigue con el modelo de repartir galletas, propuesto anteriormente por los alumnos, y comienza a inducir el reconocimiento de los errores (y de sus repeticiones), así como la manifestación de la respuesta correcta.

Las intervenciones de Mónica que se encuentran enmarcadas en la estructura argumentativa, han promovido que se generara la argumentación colectiva, ya que permiten que varias estudiantes intenten convencer a otros de la validez de sus conclusiones, o bien, de errores en los argumentos de compañeras.

Se pueden apreciar varias acciones de la profesora vinculadas con la gestión argumentativa de la clase: Mónica elabora preguntas que permiten que el alumno explicite su pensamiento, y por otra, permitir la expresión del pensamiento por distintos medios. Pese que Mónica realiza acciones para elicitar el pensamiento de los estudiantes, no profundiza en los razonamientos detrás del dibujo de la caja de galletas de los estudiantes, por tanto, no interpreta las ideas de los estudiantes.

En el análisis presentado de la clase, se logra apreciar dos patrones de pensamiento de los estudiantes: la interpretación de la división como un reparto equitativo, y que la cantidad que se reparte debe ser mayor que uno. La profesora reconoce parcialmente estos patrones, primero, al utilizar el ejemplo como un recurso de explicación para los estudiantes, y en segundo lugar, para intentar corregir las respuestas incorrectas. Sin embargo, no utiliza el modelo completo de reparto equitativo, ya que no reconoce esta idea detrás de la respuesta $1 \div 2 = 2$.

En ambos casos hemos encontrado los siguientes resultados:

- En ambas clases presentadas, se ha generado una contraposición de ideas entre estudiantes por medio de las acciones docentes. Hemos visto como la profesora

Mónica mediante la elicitación de ideas de los estudiantes, las preguntas, y la búsqueda de posición de los estudiantes en vez de evaluar sus respuestas, han favorecido el desarrollo de la argumentación en el aula de matemáticas.

- Por medio de la estructura de Toulmin, hemos notado que aparecen diferentes elementos de la estructura, si bien vemos que aparecen cuatro elementos (D, C, W y R), consideramos que la aparición del refutador es el proceso clave a la en una argumentación colectiva en su papel de generar la contraposición de ideas.
- La aparición del refutador ha permitido generar diferentes oportunidades de aprendizaje matemático, tales como contrastar niveles de razonamiento geométrico en la clase 1, y el patrón de pensamiento de reparto equitativo que tiene instalado un grupo de estudiante en la clase 2.

En síntesis, los dos casos nos muestran que el papel del refutador es relevante para suscitar los razonamientos matemáticos en los estudiantes que dan cuenta de oportunidades de aprendizaje matemático.

CONCLUSIÓN

A modo de conclusión, queremos reflexionar acerca del uso realizado de los elementos de la estructura de Toulmin para el análisis de la argumentación; lo que nos lleva a proponer una versión adaptada de esta estructura, que hemos ya usado en estudios anteriores (Solar & Deulofeu, 2016).

En una argumentación colectiva, en la estructura orginal de Toulmin (2003) el dato es una afirmación o hecho atribuible generalmente a los estudiantes. En cambio, en los dos episodios que hemos analizado, hemos reinterpretado el dato como una pregunta. Este nuevo significado del dato como una pregunta ha favorecido en ambos casos que aparezcan conclusiones diferentes que se pretenden justificar, que sean otros estudiantes quienes pueden generar una garantía para alguna de las conclusiones y, en particular, que surja una refutación que genera una nueva conclusión.

Además, en la estructura original de Toulmin, el refutador expresa condiciones en que la garantía no permite el paso entre datos y conclusión (Toumin, 2003), en cambio en las estructuras argumentativas de ambas clases muestran cómo las acciones del profesor colocan a la garantía y al refutador en el mismo nivel epistémico. Es decir, promueven que tanto las justificaciones como las objeciones expresadas sean fundamentadas por los estudiantes como parte del apoyo a sus conclusiones. La profesora logra esto evitando evaluar como correctas o incorrectas las posiciones de los estudiantes, promoviendo, mediante preguntas, que sean los propios estudiantes quienes decidan cuál es el razonamiento correcto en cada caso. Esto implica que el fundamento sea posible y necesario tanto como apoyo para la garantía como para el refutador a diferencia de lo que sugiere la estructura original de Toulmin, donde el fundamento es un respaldo a la garantía. Aunque Toulmin (2003) considera la relación entre garantía y refutador en este mismo sentido cuando explica el refutador como aquellas condiciones bajo las cuales la garantía no actúa como tal, pensamos que este aspecto fundamental del papel del refutador en los argumentos es opacado en la estructura original. Es por ello que proponemos una versión alternativa, en la cual destacamos la relación que existe entre la garantía (W), el refutador (R) y el respaldo (B) (Figura 5).

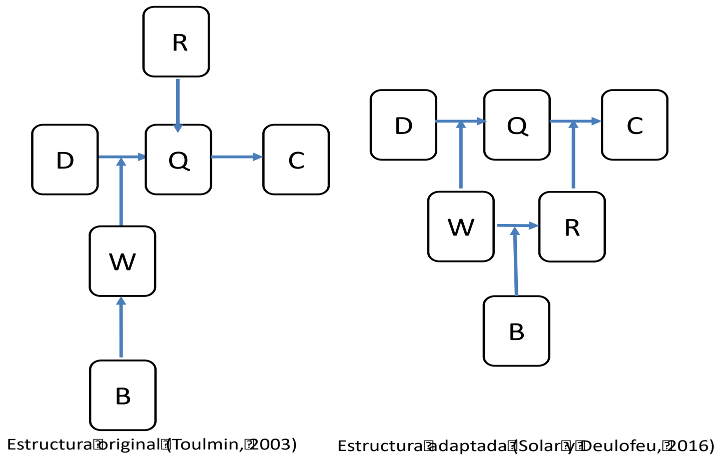


Figura 5: Contraste estructuras de Toulmin

Esta nueva estructura ha sido usada no solo para el análisis de la argumentación, sino también en la formación inicial y continua de profesores de matemáticas (Goizueta y Solar, en prensa), ya que permite dotar de un recurso al docente para diseñar clases de matemáticas para promover la argumentación.

En otras investigaciones hemos dado cuenta de la gestión argumentativa de la clase de matemática (Solar & Deulofeu, 2016). En este sentido, la argumentación puede ser entendida no solo como un propósito en la clase de matemáticas, sino también como un tipo de gestión de clase (gestión argumentativa) para otros propósitos. Actualmente tenemos dos proyectos en desarrollo en esta línea. En ambos proyectos se está realizando una formación de profesores con focos en la modelación en uno, y en la inclusión en otro. Ambos tienen en común el uso de la argumentación como la estrategia clave para gestionar la clase.

Aún estamos estudiando qué otras implicaciones pueden tener esta visión de la argumentación en el aula de matemáticas, y esperamos poder discutirla con la comunidad con base en los resultados de estudios ya realizados y en estos que están en proceso.

REFERENCIAS

Conner, A. M., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 401–429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Goizueta, M. & Solar, H. (en prensa). Relaciones entre la argumentación en el aula de matemáticas y la mirada profesional del profesor. En R. Olfos, E. Ramos y D.

Zakaryan (Eds.), *Formación de profesores: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática*. Barcelona, España: Graó.

Gutiérrez, A. ., & Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. Focus on Learning Problems in Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *20*(2–3), 27–46.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., & Simpson, A. (2007). Modelling mathematical argumentation: The importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(1), 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Krummheuer. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Ed.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom: Two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 60–82. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2007.02.001

Rasmussen, C., Stephan, M., & Allen, K. (2004). Classroom mathematical practices and gesturing. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*(3), 301–323. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.06.003

Simpson, A. (2015). The anatomy of a mathematical proof: Implications for analyses with Toulmin's scheme. *Educational Studies in Mathematics*, *90*(1), 1–17. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9616-0

Solar, H., & Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *30*(56), 1092–1112. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Toulmin, S. E. (2003). *The Uses of Argument (Updated edition 2003). Cambridge, Cambridge University Press*. https://doi.org/10.2307/2183556

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2010). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*(2), 155–176. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9130-3

Wagner, P. A., Smith, R. C., Conner, A., Singletary, L. M., & Francisco, R. T. (2014). Using Toulmin's model to develop prospective secondary mathematics teachers' conceptions of collective argumentation. *Mathematics Teacher Educator*, *3*(1), 8–26.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*(4), 423–440. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00143-8

Yin, R. (2014). *Case study research: design and methods*. Los Ángeles: Sage Publications.

SIMULATION DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE DANS UN SYSTÈME TUTEUR INTELLIGENT : ENJEUX SÉMIOTIQUES

Fabienne Venant[a], Philippe R. Richard[b] et Michel Gagnon[c]

[a]Université du Québec à Montréal, [b]Université de Montréal, [c]École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada

venant.fabienne@uqam.ca, philippe.r.richard@umontreal.ca, michel.gagnon@polymtl.ca.

Nous voulons montrer comment l'analyse d'une simulation du travail mathématique à l'aide du modèle des ETM amène à mieux dégager les interactions informatiques et didactiques que posent la conception et l'usage d'un système tutoriel intelligent. Dans notre contribution, l'attention est portée plus particulièrement sur les enjeux sémiotiques de cette modélisation.

***Mots-clés** : Système tutoriel, Conception, Usage, Simulation, Genèse sémiotique.*

TRAVAIL MATHÉMATIQUE DU SYSTÈME TUTEUR

La création de systèmes tuteurs qui se destinent à favoriser le travail mathématique des élèves suppose qu'il faut être capable d'anticiper, et cela très tôt dans le processus de conception, quel en sera l'usage. C'est dans un tel esprit que notre équipe de recherche travaille au sein du Laboratoire Turing[1] afin de développer QED-Tutrix, un système tuteur intelligent conçu pour soutenir l'apprenant dans la résolution de problèmes de démonstration en géométrie. Dans le paysage actuel des outils technologiques mis à la disposition des enseignants, QED-Tutrix adopte une approche originale (Leduc, 2016 ; Tessier-Baillargeon, Leduc, Richard & Gagnon, 2017). Ainsi, la conception de QED-Tutrix considère que l'effort de preuve peut être conjoint au processus de conjecture laissant aux apprenants une grande liberté dans l'exploration du problème à résoudre tout en leur proposant un accompagnement adapté à leurs choix ou aux obstacles rencontrés. De même, en jouant sur les valences du travail mathématique[2], la conception du système peut viser à respecter le contrat didactique habituel de la classe (Leduc et *coll.*, 2016), même si cela demande parfois des ajustements dans la mise en œuvre de certaines inférences (Tessier-Baillargeon, 2016).

Nous convoquons ici le modèle des espaces de travail mathématiques (ETM -- Kuzniak, 2011 ; Kuzniak et Richard, 2014), pour analyser le travail mathématique simulé par le système informatique. En effet, pour pouvoir accompagner l'apprenant de façon adéquate, l'agent virtuel doit lui-même résoudre le problème mathématique proposé, et s'appuyer sur cette résolution dans ses interactions avec l'apprenant. Ce

---

[1] Voir http://turing.scedu.umontreal.ca/

[2] Il s'agit d'une capacité à tolérer des variations dans la coordination des genèses du travail mathématique lors de l'interaction avec différents milieux (Richard, Oller & Meavilla, 2016). Sur la notion de genèse, voir nos considérations sur théorie des Espaces de Travail Mathématiques (ETM).

travail mathématique est réalisé au sein de l'ETM de référence, l'agent virtuel devant, de plus, être le garant de l'adéquation des preuves proposées au paradigme porté par l'institution. Leduc et *coll.* (2016) ont montré que les interactions possibles à l'interface de QED-Tutrix en font un ETM idoine. L'ergonomie de QED-Tutrix répond en effet aux deux caractéristiques émises par Kuzniak et Richard (2014) pour mériter le qualificatif ***idoine*** : ses composantes sont pensées, élaborées et organisées de manière à permettre à l'élève de s'engager dans la résolution problème et de clore celle-ci, et son interface amène l'élève à travailler conformément au paradigme véhiculé par le programme de formation de l'école québécoise. L'interface du système est le lieu des interactions entre l'apprenant et l'agent virtuel, en conformité avec les exigences de l'ETM de référence. L'ETM idoine se construit, par adaptations successives, comme une structure intermédiaire connectant l'ETM de référence, l'ETM personnel de l'enseignant, par la prise en compte de ses choix didactiques et de ses exigences pédagogiques, et l'ETM personnel de l'apprenant, par la prise en compte de ses actions et l'identification de ses choix. Le caractère idoine de cet espace repose donc en grande partie sur la capacité du système à reconnaitre la stratégie de preuve dans laquelle l'élève s'engage, afin de pouvoir l'aider à la mener à bien en conformité avec le référentiel théorique. Pour cela, le système doit anticiper le travail mathématique de l'élève en modélisant au sein de sa mémoire informatique l'ensemble des preuves acceptables pour le problème à l'étude. Nous proposons d'analyser ce travail d'anticipation et de modélisation comme un travail mathématique virtuel, réalisé au sein même de l'ETM de référence. Ce travail est décrit, conformément au modèle ETM, comme un processus mettant en correspondance les plans épistémologiques et cognitifs, selon différentes genèses. Le présent article s'attarde cependant davantage sur la genèse sémiotique.

GENÈSES VIRTUELLES

Pour mieux comprendre les enjeux sémiotiques dans l'ETM de référence, imaginons que le système doive résoudre le problème suivant :

> Problème 1 :
> *ABCD est un parallélogramme de centre O.*
> *On appelle M le milieu de [AB] et N le milieu de [DC].*
> *Démontrer que (OM) est parallèle à (BC).*

Dans le système QED-Tutrix, les preuves sont implémentées sous forme de graphes d'inférence. Une inférence est une opération logique consistant à conclure la vérité d'une proposition à partir d'autres propositions prises comme hypothèses, et d'une propriété ou d'une définition prise comme justification. Considérons, par exemple, une des preuves possibles pour le problème présenté :

Preuve 1 :

ABCD est un parallélogramme, O est le centre de ABCD. Or tout parallélogramme possède un centre de symétrie qui est l'intersection de ses diagonales, donc O est l'intersection de [AC] et de [BD].

Comme de plus, un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux, alors O est le milieu de [BD].

Dans le triangle ABC, O est le milieu de [AC], et M est le milieu de [AB]. Or dans un triangle si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté, donc (OM) est parallèle à (BC).

Cette preuve débute par une inférence à partir de deux hypothèses présentes dans l'énoncé du problème : *ABCD est un parallélogramme* et *O est le centre du parallélogramme*. Or le centre de symétrie d'un parallélogramme étant le point d'intersection des diagonales, on peut inférer que O est l'intersection des diagonales [AC] et [BD]. La figure 1 présente cette inférence sous forme de graphe.

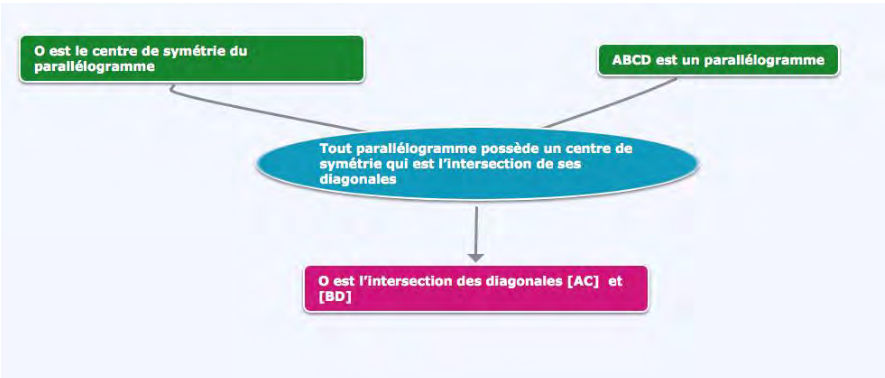


Figure 26. Représentation d'une inférence sous forme de graphe

La preuve se poursuit ensuite comme un enchainement d'inférences, la conclusion d'une inférence devenant une hypothèse pour l'inférence suivante. Elle prend alors le statut de résultat intermédiaire. La figure 2 présente l'enchainement des deux premières inférences de la preuve 1. La conclusion de la première inférence *O est l'intersection des diagonales [AC] et de [BD]* est un résultat intermédiaire utilisé comme hypothèse pour la deuxième inférence. La figure 3 montre un graphe représentant l'intégralité de la preuve 1. Nous appelons un tel graphe un graphe HPDIC, car il contient des Hypothèses, des Propriétés, des Définitions, des résultats Intermédiaires et des Conclusions. La figure 4 présente un graphe HPDIC modélisant au moins six preuves différentes pour le problème 1[3].

[3] Le lecteur intéressé trouvera une version plus lisible de ce graphe à l'adresse suivante : https://www.mindomo.com/fr/mindmap/hpdic-067937c9f30f47269cd3b9e3b7779d30

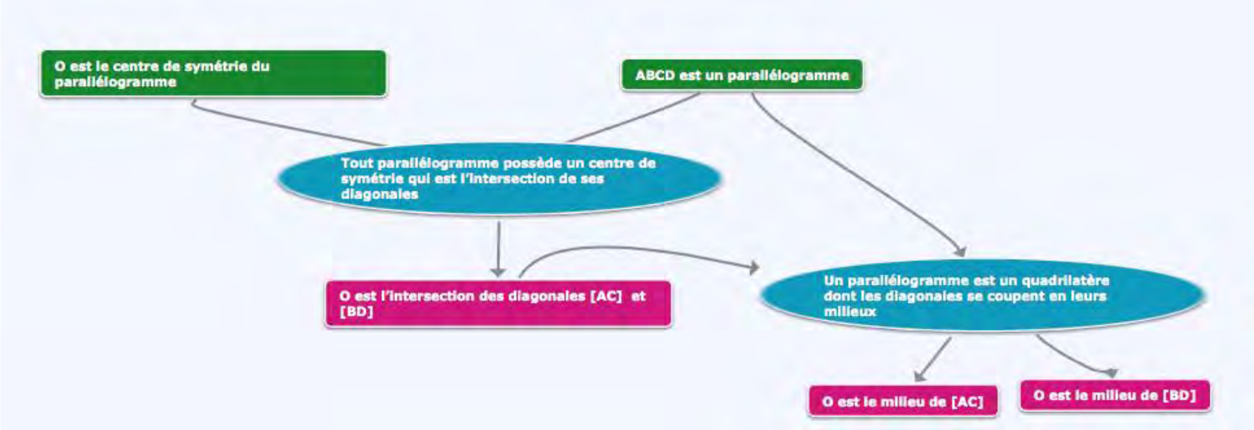


Figure 27. Enchaînement de deux inférences

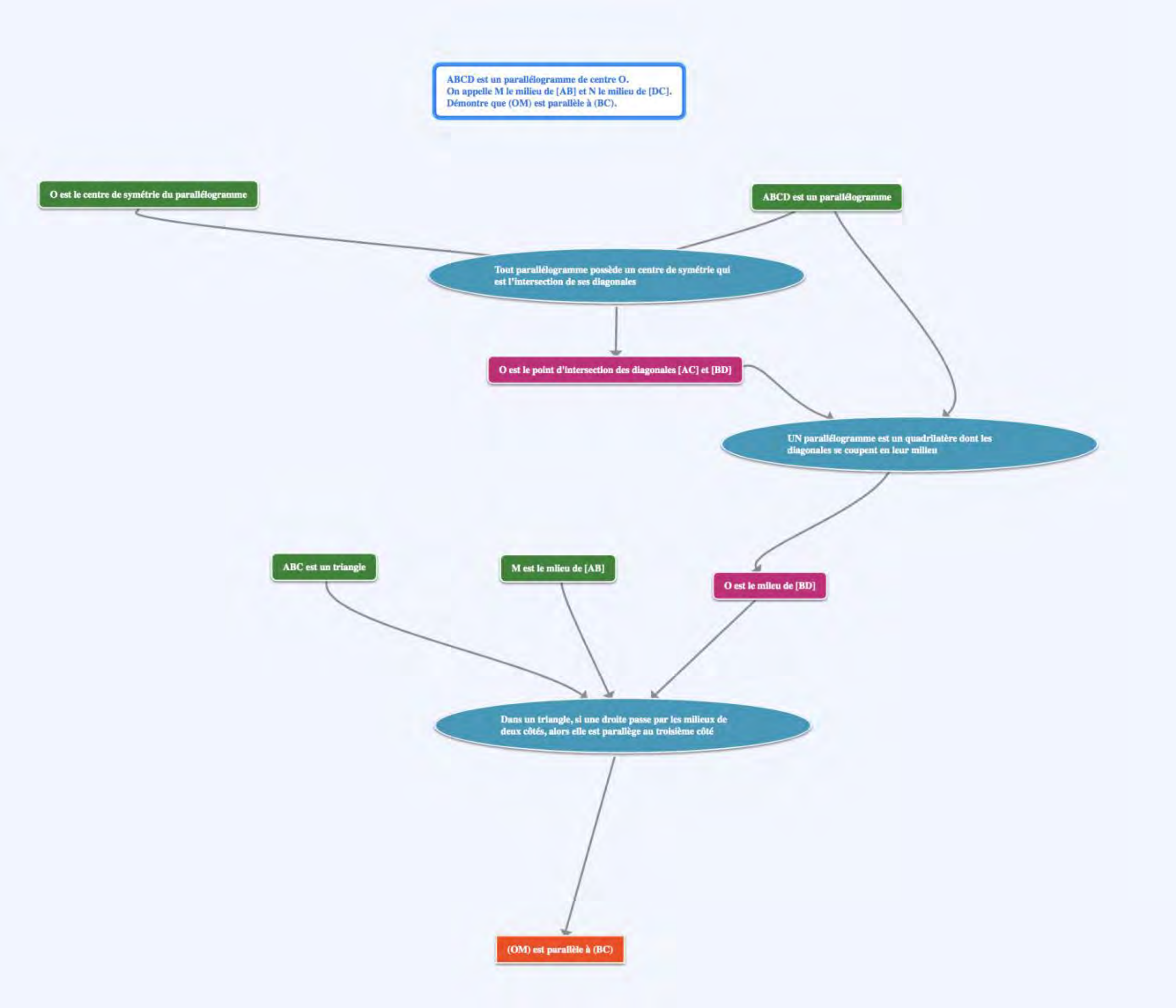


Figure 28. Graphe représentant la preuve

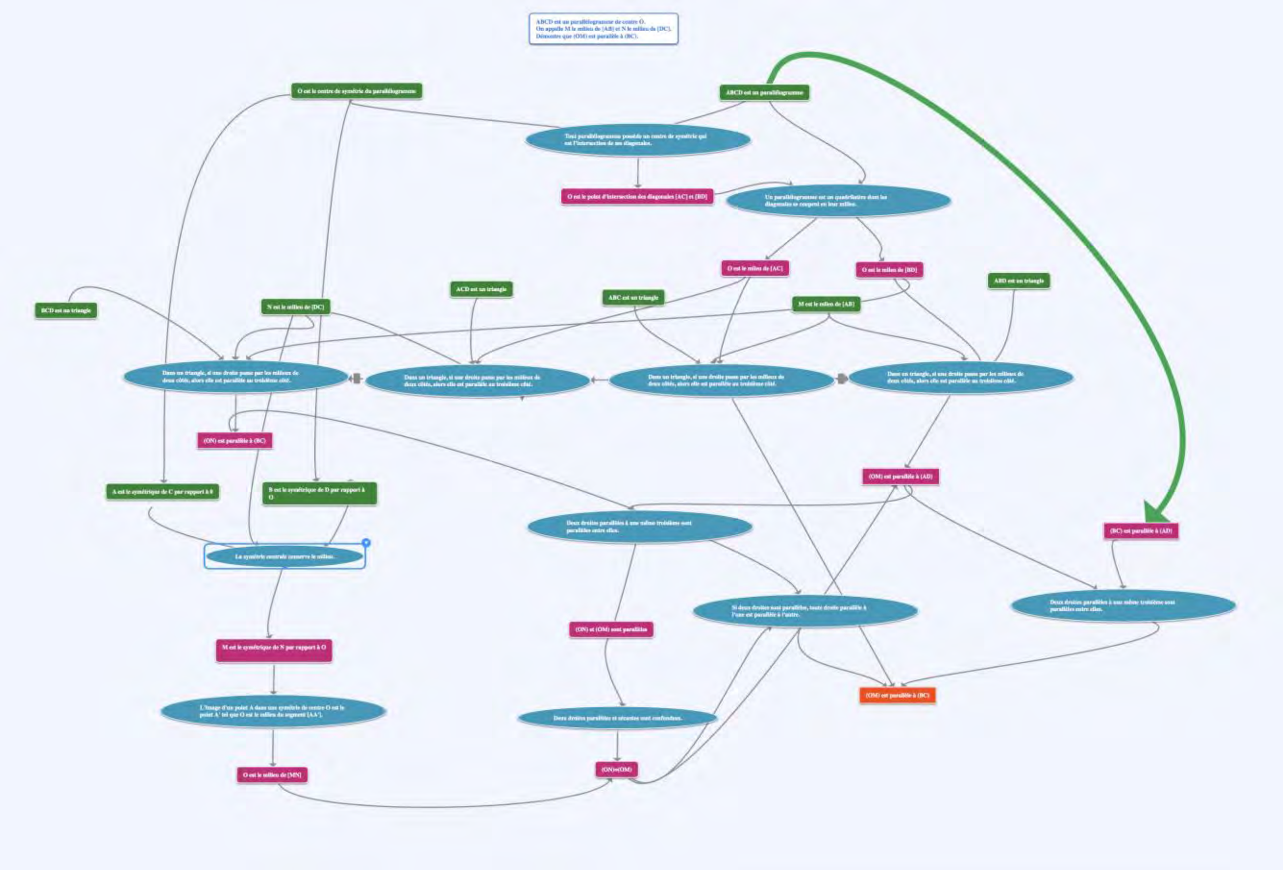


Figure 29. Graphe HPDIC pour le problème 1

Dans la version actuelle du système, l'ensemble des preuves considérées comme acceptables pour un problème donné a été élaboré par des didacticiens des mathématiques, puis codé sous forme d'un graphe HPDIC dans la mémoire du logiciel. Dans les versions futures, nous voulons que le système élabore lui-même l'ensemble des solutions possibles, à partir de l'énoncé du problème. Le graphe devient alors le fruit d'un travail mathématique, porté par des genèses sémiotiques et discursives virtuelles, au sein de l'ETM de référence.

D'un point de vue purement sémiotique, il s'agit d'extraire de l'énoncé du problème, situé dans le plan épistémologique, les objets et informations utiles à sa résolution, et de les traduire sous forme de propositions d'ordre cognitif pouvant être incluses dans le graphe HPDIC. Par exemple, de la phrase « ABCD est un parallélogramme de centre O », le système doit extraire l'objet mathématique *parallélogramme ABCD*, et en dériver les objets non présents textuellement, mais néanmoins nécessaires à la résolution du problème, comme les *diagonales* [AC] et [BD]. D'autres objets peuvent être dérivés, comme les *côtés opposés* [BC] et [AC]. Les preuves illustrées dans la figure 4 font appel au théorème des milieux dans un triangle « Dans un triangle si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté ». Des objets intermédiaires doivent donc également être considérés, comme les *triangles* ABC, ABD, BCD et ADB implicitement inclus dans le *parallélogramme* ABCD. Cette phase d'extraction des hypothèses constitue la genèse sémiotique virtuelle, c'est-à-dire le processus par lequel les signifiants, qu'ils soient textuels ou figuraux, acquièrent leur statut d'objets mathématiques opérationnels.

Toutes les hypothèses possibles sont ainsi extraites et mises en **instance discursive**, sous forme de propositions disponibles pour une deuxième phase visant à les impliquer, ou non, dans une des preuves possibles. Les propositions non utiles resteront en instance discursive, et n'entreront pas dans les discours de preuve. Cette deuxième phase s'inscrit dans le plan SEM-DIS de l'ETM. Elle consiste à mettre en correspondance les propositions en instance discursive et les propositions du référentiel théorique afin de générer tous les pas d'inférences possibles. Elle s'inscrit dans la genèse discursive, c'est-à-dire le processus par lequel les propriétés et les résultats organisés dans le référentiel théorique sont actionnés afin d'être disponibles pour le raisonnement mathématique et les validations discursives.

Au sein du système tutoriel, ces genèses sont prises en charge par deux processus d'extraction et de traitement de l'information : extraction des hypothèses et des conclusions à partir de l'énoncé du problème (genèse sémiotique), et organisation de ces dernières en démonstrations acceptables sous forme d'un graphe d'inférence et d'un texte argumenté (genèse discursive). À l'issue de ce processus, un graphe est construit. Il contient dans sa structure l'ensemble des preuves acceptables et/ou attendues pour le problème considéré. Ce graphe peut être considéré comme l'aboutissement du travail mathématique virtuel du système. La détermination des chemins possibles ou acceptables au sein du graphe participe de l'ETM idoine, car elle doit convoquer l'ETM personnel de l'enseignant, pour prendre en compte les heuristiques qu'il privilégie ainsi que les raccourcis référentiels qu'il autorise.

ENJEUX SEMIOTIQUES

Comme on peut le voir dans les figures 3 et 4, l'extraction automatique des hypothèses et conclusions depuis l'énoncé du problème doit permettre d'accéder à différents types d'information textuelle :

- Des hypothèses explicites, comme *ABCD est un parallélogramme.* Ce sont les informations qui sont directement accessibles dans le texte, moyennant une analyse linguistique.
- Des hypothèses implicites. Ce sont des hypothèses qui ne nécessitent pas un pas d'inférence, mais dérivent directement des propriétés ou de la définition d'un objet présent dans une hypothèse lexicale. Par exemple *(BC) est parallèle à (AD)* est sous-entendu par *ABCD est un parallélogramme.*
- Des hypothèses dérivatives. Ce sont les hypothèses qui posent des objets intermédiaires que l'on doit considérer ou construire pour avancer dans un pas de démonstration. Ces objets sont potentiellement présents dans une hypothèse lexicale, mais ne sont pas explicitement décrits. Par exemple *ABC est un triangle* est porté par *ABCD est un parallélogramme*, qui sous-entend implicitement que les points A, B, C, et D ne sont pas alignés.

- Des hypothèses contextuelles. Ce sont les hypothèses qui dérivent implicitement du contrat didactique. Par exemple, *ABC est un triangle* est aussi une hypothèse contextuelle. Dans cette hypothèse, on suppose en effet qu'on ne considère pas le cas limite où les points A, B, C et D sont alignés.
- Une conclusion explicite : le résultat à démontrer est ici clairement exprimé dans le texte.

D'autres cas de figure sont envisageables, ainsi que le résume la figure 5.

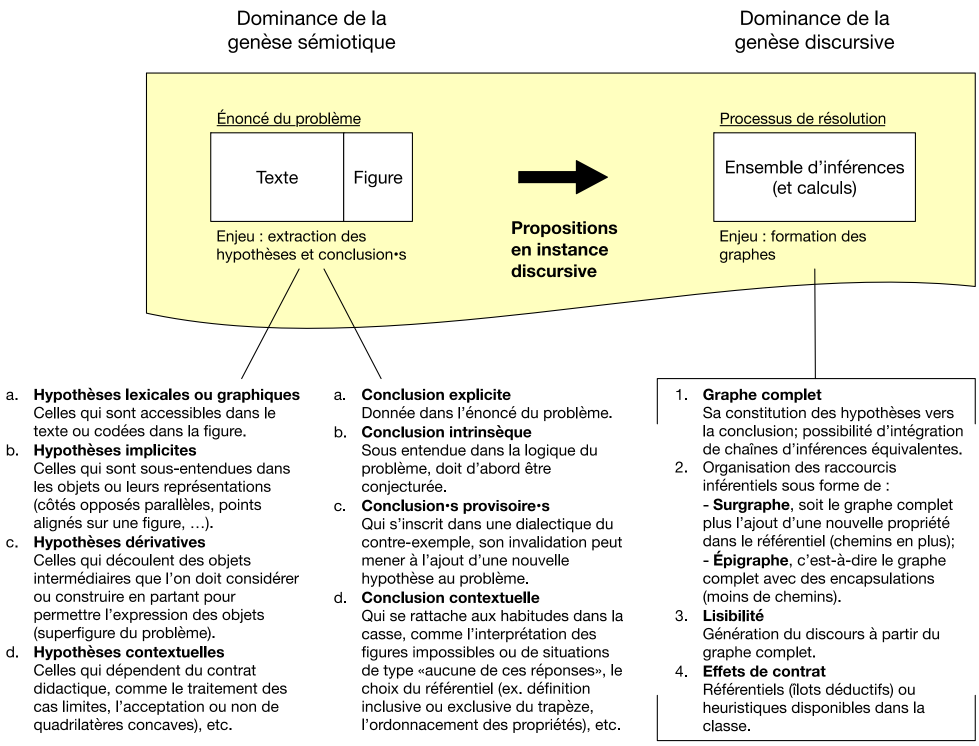


Figure 30. Genèses sémiotiques et discursives dans QED-Tutrix

Ce travail d'extraction et de dérivation d'informations plus ou moins explicites constitue une simulation informatique du processus cognitif que Tanguay (2015) appelle la désagglutination. Ce processus permet, en partant d'un signe ou d'un assemblage de signes (une formulation textuelle, par exemple), d'accéder à un objet mathématique au sein duquel toutes les significations et composantes géométriques potentielles sont agglutinées, pour en extraire les composantes pertinentes pour le travail de preuve engagé. Il constitue une des « conditions essentielles pour que le signe puisse intervenir efficacement dans des processus de pensée sophistiqués, des processus qui relèvent de formes syntaxiques de pensée, par exemple le raisonnement déductif. » (Tanguay, 2015, p. 83). Ainsi dans le problème proposé, de l'expression « soit un parallélogramme ABCD », le système extrait l'objet parallélogramme, qu'il désagglutine, en composantes géométriques définitoires : sommets, côtés opposés, côtés adjacents, diagonales… mais aussi en propriétés reliant ces différentes composantes : parallélisme des côtés opposés, point d'intersection des diagonales en leur milieu :

> « Il s'agit bien en fait de distinguer l'objet de ses propriétés, de désengluer ces propriétés pour être à même de les envisager séparément, d'en appréhender un à un les liens structuraux, de cause à effet, une condition essentielle pour être ensuite capable de conduire des démonstrations sur et à partir de ces propriétés » (Tanguay, 2015, p. 81).

La question des liens structuraux soulevée ici par Tanguay correspond à un autre enjeu sémiotique crucial dans l'implémentation informatique. En effet, la désagglutination dont nous venons de parler est le pendant d'un processus inverse, mais tout aussi important dans la conceptualisation, décrit par Tanguay (2015), dans la lignée d'Arzarello (2006), et qualifié d'amalgame :

> « Il consiste à amalgamer différentes significations autour d'un même sens, à élargir le spectre des liaisons possibles, à tisser des réseaux d'analogies, à unifier les concepts spécialisés en unités plus englobantes et par là plus polyvalentes, polymorphes, adaptables, et donc plus immédiatement mobilisables par l'intuition; toutes conditions essentielles pour que les concepts puissent intervenir efficacement, entre autres, dans les processus de recherche ou d'exploration, processus plus ouverts, divergents, qui demandent une pensée souple et inventive » (Tanguay, 2015, p.83)

Pour que la désagglutination soit possible, la nature amalgamée des objets mathématiques doit être prise en compte. Le système doit non seulement encoder chacun des objets mathématiques susceptibles d'être convoqués dans la résolution des problèmes, mais aussi les liens structuraux qu'ils entretiennent entre eux et avec leurs propres composantes géométriques. Ce sont ces informations qui permettront l'extraction des hypothèses implicites, mais aussi la sélection, depuis le référentiel théorique, des propriétés et définitions sur lesquelles la résolution du problème, et donc la génération du graphe HPDIC, peut s'appuyer. Dans le problème 1, par exemple, c'est non seulement le lien définitoire entre le parallélogramme, ses diagonales, son centre et ses côtés opposés qui entre en jeu, mais aussi les liens conceptuels entre parallélogramme et triangle. Ainsi, les preuves modélisées dans figure 4, impliquent chacune un des triangles BCD, ACD, ABC, ABD. Le système doit donc pouvoir générer les triangles formés par trois sommets du parallélogramme. En revanche, les autres points mentionnés dans l'énoncé ne sont pas pertinents pour la génération de triangles. Ce ne sera pas nécessairement le cas dans un autre problème mettant en jeu le parallélogramme, pour lequel il sera peut-être pertinent de considérer aussi les triangles dont un des sommets est le centre de symétrie du parallélogramme. Il est donc impossible a priori de contraindre la génération des objets mathématiques intermédiaires. La solution informatique que nous avons choisie est la surgénération de tous les objets mathématiques potentiellement utiles, qui sont ensuite dénommés et placés en instance discursive sous forme de propositions. Par exemple, l'objet parallélogramme est instancié en « ABCD est un parallélogramme » et l'objet centre en « O est le centre du parallélogramme ABCD ».

VERS LA GENESE DISCURSIVE

C'est à partir de toutes les propositions en instance discursive que débute la sélection des propriétés et définitions pouvant intervenir dans un discours de preuve acceptable. Certaines propriétés pourront être testées pour finalement être exclues du graphe. Dans le problème 1, par exemple, les objets *parallélogramme* et *triangle* mènent à la sélection de la propriété « Chaque diagonale d'un parallélogramme le sépare en deux triangles de même aire », qui n'entre finalement dans aucune des preuves acceptables. L'un des enjeux de cette phase discursive est la validation du graphe produit. Il faut en effet s'assurer que tous les chemins possibles dans le graphe correspondent à une preuve acceptable. La question de l'acceptabilité est constitutive du caractère idoine de l'ETM, car elle s'inscrit dans l'articulation entre l'ETM de référence et l'ETM personnel de l'enseignant. En effet, pour être acceptable, une preuve doit non seulement mettre en jeu des éléments approuvés du référentiel théorique, mais aussi prendre en compte les habitudes didactiques de l'enseignant. Par exemple, l'enseignant peut tolérer plusieurs types de raccourcis inférentiels, parce que cela facilite la lecture d'une preuve ou la rend pédagogiquement plus efficace. Ainsi, il est peu probable qu'un humain passe par toutes les étapes décrites dans le graphe de la figure 4 pour démontrer que les droites (ON) et (OM) sont confondues, car toutes deux parallèles à (AB). De même, la déduction de la proposition « (AD) et (BC) sont parallèles » peut se faire directement à partir de la seule proposition « ABCD est un parallélogramme ». Elle constitue donc un raccourci inférentiel. En réalité, le logiciel devra passer au travers des étapes suivantes :

1. À partir de la proposition en instance discursive, *ABCD est un parallélogramme*, extraire du référentiel théorique la définition de l'objet parallélogramme : « un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux-à-deux parallèles ».
2. Instancier les côtés opposés du parallélogramme, [BC] et [AD] d'une part, et [AB] et [CD] d'autre part.
3. Instancier la deuxième partie de la définition du parallélogramme en gérant l'implicite contextuel et générer les quatre propositions possibles « [BC] et [AD] sont parallèles » ou « (BC) et (AD) sont parallèles » d'une part, et « [AB] et [CD] sont parallèles » ou « (AB) et (CD) sont parallèles. » d'autre part.

Ces exemples illustrent les difficultés que l'on rencontre dans la simulation de processus cognitifs : ce qui est traité intuitivement par un cerveau humain doit parfois faire l'objet d'un traitement informatique explicite. Peut-on, par exemple, dans un système informatique, déclarer que deux côtés d'un parallélogramme, définis comme des segments, sont parallèles, alors que la relation de parallélisme a été définie pour des droites. S'il faut nécessairement définir les droites portant ces segments pour supporter la relation de parallélisme, alors les conséquences sur la lisibilité de la preuve peuvent être lourdes. La décision prise influence non seulement le codage des éléments dans le plan épistémologique, mais aussi leur traitement dans les différentes genèses. Elle conditionne, dans la construction de L'ETM idoine, la connexion entre l'ETM de référence et l'ETM personnel de l'enseignant et soulève des enjeux importants dans le plan SEM-DIS de l'ETM de référence, les genèses sémiotiques et discursives informatiques s'influençant mutuellement.

CONCLUSION

L'analyse proposée ici consiste à modéliser à l'aide de la théorie des ETM des procédures informatiques de construction et de représentation de preuves. Ce travail a permis de mieux décomposer l'activité mathématique virtuelle, en la situant dans l'articulation des dimensions sémiotiques et discursives de l'espace de référence. Les genèses sémiotiques et discursives informatiques présentent l'avantage, même si elles s'influencent mutuellement, d'être clairement distinctes. Elles se prêtent particulièrement bien à une formalisation en termes de double mouvement d'amalgame-désagglutination au sein des ETM. Nous adhérons ici à la proposition de Tanguay et Venant (2016) de prendre en compte dans le modèle des ETM ce processus qui « intervient par exemple aussi bien dans la genèse sémiotique du concept, quand différentes significations, issues de différents *representamen*, doivent s'amalgamer pour le constituer, que dans la genèse discursive, quand un concept doit se spécifier pour être mobilisé au sein d'une preuve où il est instancié. » (Tanguay et Venant, 2016, p.29). Dans la lignée de ces auteurs, nous soulevons également la place du signe dans la théorie des ETM. En effet, l'extraction automatique d'information à partir d'un texte repose sur des analyses sémantiques et syntaxiques qui redéfinissent la « place à donner aux pôles du triangle sémiotique signifiant-signifié-référent dans le modèle, et à la question de savoir si le référentiel théorique peut rester confiné à l'axe discursif de la preuve » (Tanguay et Venant, 2016, p.29).

Par ailleurs, la transposition de questions d'extraction d'information et de génération de texte, classiques en informatique, en termes de genèses sémiotique et discursive apporte un éclairage nouveau sur les questions, classiques en didactique, de lecture d'énoncé, de gestion des implicites et de lisibilité et d'acceptabilité de preuves. L'élève qui résout le problème est lui aussi en prise avec l'extraction des objets mathématiques, et de leurs caractéristiques, à partir des informations contenues dans l'énoncé. La question de l'importance du vocabulaire et des pratiques langagières dans l'appréhension des objets mathématiques prend ici tout son sens (Venant et *coll.,* 2015, Gobert, 2013). La traduction informatique des propriétés et des hypothèses exige une grande précision dans la définition des objets et l'utilisation du vocabulaire, alors que le langage courant peut parfois accepter d'assimiler certains concepts comme côté et segment, ou même droite et segment, dans l'expression des propriétés de parallélisme par exemple. Ces considérations nous amènent au rôle joué par la figure dans le processus de preuve, et à la place à lui donner dans le modèle. En effet, l'extraction des informations textuelles, et la gestion des implicites se concrétisent souvent dans la réalisation d'une figure. Ainsi, qu'une figure accompagne ou pas l'énoncé, l'élève va en tracer une pour lui-même. Le rôle de la figure peut éventuellement aller plus loin. L'élève peut en effet construire tout ou partie de son raisonnement de façon instrumentale (Richard et *coll.*, 2019). Enfin, la question des raccourcis inférentiels soulève celle de la validité d'une preuve, en lien avec le contrat didactique : quels sont les implicites ? Quel est le niveau de rigueur attendu ou que peut-on considérer comme trivial ? Certaines hypothèses dans une inférence peuvent-elles être considérées comme facultatives ? Quels cas limites traite-t-on ? Il apparaît alors que la question de la lisibilité et de l'acceptabilité des preuves participe pleinement de la construction d'un ETM idoine sans lequel aucun tutorat ne peut être envisagé.

RÉFÉRENCES

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 9*, numero extraordinario 1, pp. 267-299.

Gobert, S. (2013). Construire des significations dans et par le langage. Bronner A. et coll. (Coord.). *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage.*, La Pensée Sauvage.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9–24.

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Espaces de travail mathématique. Points de vue et perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa (Relime), 17* (4-I), 29–39.

Leduc, N. (2016). *Développement d'un tutoriel intelligent pour aider à élaborer des preuves en géométrie*. Thèse de doctorat. École Polytechnique de Montréal.

Leduc, N., Tessier-Baillargeon, M., Corbeil. J.-P., Richard, P. R., & Gagnon M. (2016). Étude Prospective d'un Système Tutoriel à l'aide du Modèle des Espaces de Travail Mathématique. *Actes du cinquième symposium ETM, Florina*.

Richard, P.R., Venant, F., & Gagnon, M. (2019). Issues and challenges about instrumental proof. In Gila Hanna, David Reid et Michael de Villiers (Eds.) *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*, Springer book series Mathematics education in the digital era.

Richard, P.R., Oller, A.M., & Meavilla, V. (2016). The Concept of Proof in the Light of Mathematical Work. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 48*(6), 843–859 (DOI: 10.1007/s11858-016-0805-9).

Tanguay, D. (2015). Circulation et coordination dans les espaces de travail, pour une activité articulant géométrie et arithmétique. In I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak & P. R. Richard, eds., *Proceedings of the 4th symposium Espaces de Travail Mathématique*, 69-85. Universidad Complutense de Madrid, Spain.

Tanguay, D., & Venant, F. (2016). The semiotic and conceptual genesis of angle. *ZDM Mathématics Education. 48*(875).

Tessier-Baillargeon, M. (2016). *GeoGebraTUTOR : Modélisation d'un système tutoriel autonome pour l'accompagnement d'élèves en situation de résolution de problèmes de démonstration en géométrie plane et genèse d'un espace de travail géométrique idoine*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, Montréal.

Tessier-Baillargeon, M., Leduc, N., Richard, P.R., & Gagnon, M. (2017). Étude comparative de systèmes tutoriels pour l'exercice de la démonstration en géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 22*, 91-117.

Venant, F., Tremblay, O., & Labrecque A.-A. (2015). Le lexique au carrefour des mathématiques et du français: pistes pour travailler vocabulaire courant et mathématique. *Bulletin de l'Association de Mathématique du Québec*.

LA ALGEBRIZACIÓN EN UN CURSO DE CURVAS Y SUPERFICIES PARAMETRIZADAS : UNA SESIÓN DE CLASE

Silvia Soledad López

Université Paris-Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, France

soledadlopezf7@gmail.com

El objetivo de este artículo es comprender el trabajo matemático que se realiza en una clase perteneciente al curso "curvas y superficies parametrizadas", de la Universidad de Paris. Para ello, hemos hecho un seguimiento de las prácticas de clases de un profesor, donde hemos podido observar que en el tratamiento del estudio de las curvas, con las funciones de $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, es privilegiado el trabajo algebraico. En este curso de "curvas y superficies parametrizadas" en el cual debería estar inmerso el dominio del análisis, la geometría y el álgebra, se ve altamente influenciado por el trabajo algebraico. Para este estudio se utilizó el modelo teórico Espacio de Trabajo Matemático (ETM), el cual nos permitió caracterizar el trabajo hecho por el profesor de este curso.*

Palabras clave*: Espacio de trabajo matemático, ETM idóneo, Funciones parametrizadas.*

INTRODUCCIÓN

El cálculo con las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, muchas veces, queda corto a la hora de modelar la realidad. Puesto que los fenómenos dependen de más de una variable. En el estudio de las curvas parametrizadas, resulta necesario introducir el parámetro t. Por esta razón, es necesario que los estudiantes cuenten con los conocimientos previos del cálculo diferencial y cálculo en varias variables. Sin embargo, es sabido, en varias investigaciones en didáctica, que el paso de las funciones de una variable a más variables es complejo para los estudiantes. En los trabajos de Breidenbach, Hawks, Nichols y Dubinsky (1992), han propuesto construir un puente entre las representaciones algebraicas y gráficas, ya que señalan que hay una generalización en la transición de las funciones de una a dos variables. También, en el estudio de Yerushalmy (1997), se ha insistido sobre la importancia de la interacción entre diferentes representaciones para poder generalizar los aspectos importantes de las funciones en varias variables. El estudio de Martínez-Planell, R., & Trigueros (2015), en la cual la teoría APOS (Acción-Procesos-Objeto-Esquema) ha sido utilizada para analizar las construcciones mentales necesarias en el aprendizaje de las funciones de dos variables (con estudiantes que habían terminado con éxito el curso de cálculo en varias variables), se ha mostrado que los estudiantes no habían construido un esquema coherente para $\mathbb{R}^3$. Los autores han concluido que las "dificultades encontradas se refieren a los distintos procesos asociados a la comprensión geométrica y formal de estas funciones y a obstáculos específicos que la transición del estudio de las funciones de una variable a las funciones de dos variables presenta" (Martinez Planell et al., 2015, p. 162).

Nuestras hipótesis son; en la universidad la actividad matemática se centra en el trabajo calculatorio y algebraico. En la secundaria se utilizan artefactos, en particular software o calculadora, pero ellos parecen poco utilizados para las matemáticas en la universidad. Por último, suponemos que es usada la gráfica para ilustrar elementos del referencial teórico (teoremas, definiciones, etc.), pero no hay un trabajo matemático a partir del gráfico para abordar elementos del referencial teórico.

Se realizó un seguimiento de las prácticas en la sala de clases de un profesor, para el desarrollo de una tesis de master de investigación de didáctica de las matemáticas de la Universidad de Paris. El cual se basó en el análisis de una unidad de enseñanza llamada; "*curvas y superficies parametrizadas*" (de la misma universidad), para estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, que cursaban el segundo semestre del año académico 2016-2017. La elección de este curso, se basa en el interés por estudiar el tratamiento que se les da a las funciones del tipo; $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con las curvas parametrizadas.

Este escrito se enfoca en el análisis de sólo una clase de trabajo dirigido (TD), perteneciente al curso nombrado más arriba. En esta clase los estudiantes trabajan sobre hojas de ejercicios, teniendo aproximadamente 15 minutos para trabajar de forma individual o en binomios, posteriormente el profesor resuelve los ejercicios sobre la pizarra. Para analizar esta clase de TD, hemos adoptado el modelo de los Espacio de Trabajo Matemático (ETM), el cual nos permitirá saber (en palabras del marco teórico) las génesis (o dimensiones) que son activadas (semiótica, instrumental y discursiva), los planos verticales que son privilegiados [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis]; y el paradigma que orienta el trabajo de validación AG-AC-AR, específicamente analizamos el ETM idóneo de un profesor. Estos elementos serán descritos a continuación.

METODOLOGÍA Y MARCO TEÓRICO

El estudio adoptó un marco cualitativo para identificar los elementos del ETM que están presentes en las clases de un curso de licenciatura en matemática, esta teoría toma en consideración dos aspectos presentes en todo trabajo matemático; dos planos como base lo definen, un *Plano Epistemológico*, que está formado por tres componentes: el *Representamen*, los *Artefactos* y el *Referencial Teórico.* El segundo *Plano Cognitivo,* lo forman las componentes: *Visualización*, *Construcción* y *Prueba*. En un ETM los planos epistemológico y cognitivo están articulados. Para describir esta articulación, se han considerado un conjunto de génesis, la *génesis semiótica*, ésta supone una entrada desde los procesos de visualización, la cual se articula entre la componente *representamen* y el significado que el individuo le dé. Una segunda *génesis instrumental,* es la que da vida al *artefacto* (materiales, softwares o simbólicos, este último referido a los algoritmos). La tercera *génesis discursiva*, entra en juego el razonamiento, donde se articulan las componentes del *referencial teórico* con la componente *prueba,* una explicación es necesaria para argumentar y justificar el trabajo matemático.

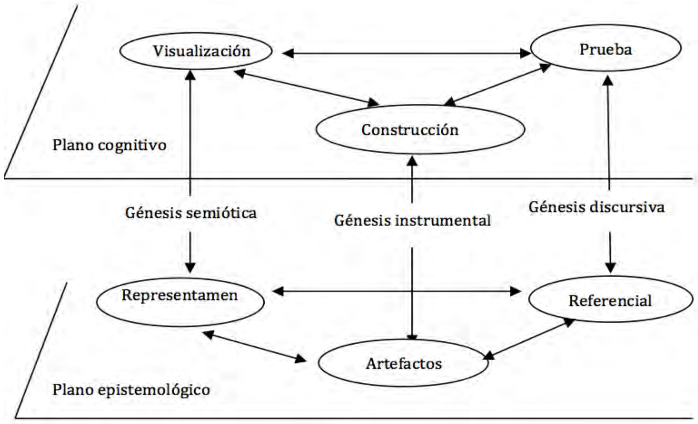


Figura 1: El modelo de los ETM (Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016)

Durante un proceso de actividad matemática, las génesis que se desencadenan no aparecen de manera aislada, existe una articulación y una interdependencia entre ellas. Estos vínculos definen a los *planos verticales* del ETM, el plano semiótico-instrumental [Sem-Ins], el plano instrumental-discursivo [Ins-Dis], y por último, el plano semiótico-discursivo [Sem-Dis].

La teoría distingue el *ETM idóneo*, el cual concibe la reflexión sobre la reorganización didáctica de las componentes del espacio de trabajo, un utilizador de este ETM es el profesor, para quien el espacio de trabajo organizado resulta idóneo.

Por último, la teoría formula tres paradigmas para el dominio del análisis, identificados en (Montoya & Vivier, 2015); el primero: *Análisis-Geométrico/Aritmético (AG),* permite interpretaciones, con implícitos, nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real, el segundo paradigma: *Análisis-Calculatorio (AC)*, donde las reglas del cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos, por último el paradigma: *Análisis-Real (AR),* se caracteriza por un trabajo que considera la aproximación, incluso lo topológico, definiciones y propiedades son establecidas teóricamente (cotas, desigualdades, "lo despreciable").

Para el estudio de funciones, son tomados en cuenta las perspectivas y dominios de trabajo de Montoya, Páez, Vandebrouck, & Vivier, 2018. En el cual se distinguen tres perspectivas, la *Perspectiva puntual*: que considera las propiedades que no dependen del valor de la función en un punto x_0. Por ejemplo, enunciar $f(x_0) = 3$ es una propiedad puntual que no da nada sobre $f(x_1)$ cuando $x_1 \neq x_0$. La *Perspectiva local*: considera las propiedades de una función f que depende de los valores de f sobre una vecindad de x_0. Por ultimo, la *Perspectiva global*: que considera las propiedades válidas sobre intervalos; de paridad, periodicidad, crecimiento, continuidad y derivabilidad global.

Se realizó la observación de este curso, con el objetivo de comprender el ETM idóneo de un profesor, en la enseñanza de las curvas parametrizadas. Como este objeto matemático es trabajado, cuáles registros y conversiones de registros son realizados, comentarios explicando esas conversiones y cambios de registro, la justificación del referencial teórico. Para esto, se observaron las clases de una unidad de aprendizaje llamada "*curvas y superficies parametrizadas*", tomando en cuenta las clases magistrales, en las cuales el profesor da a los estudiantes todos los conceptos necesarios para desarrollar este curso, la metodología de clases consiste en que el profesor escribe en la pizarra todas las definiciones, proposiciones, postulados, etc. Y algunos ejemplos. Además se observaron las clases de trabajo dirigido (TD), la metodología de trabajo es; el profesor da a los estudiantes hojas de ejercicios, las cuales son desarrolladas en la clase sobre la pizarra, principalmente por el profesor y/o con ayuda de los estudiantes.

En este artículo se presenta el análisis de sólo una clase de TD, para ello se realizó el análisis a priori y a posteriori de la tarea, con el objetivo de caracterizar el trabajo matemático que hizo el profesor, en base a los aspectos teóricos del ETM mencionados más arriba. En esta clase se les entregó a los estudiantes una actividad sobre el estudio de la parametrización de una curva dada en coordenadas polares. Esta clase ha sido desarrollada después de la primera clase magistral, en esta última, el profesor ha dado las nociones sobre curva plana, curvas parametrizadas, curvas regulares y birregulares. Las clases fueron analizadas a través de observaciones presenciales y el registro de audio.

ANÁLISIS A PRIORI DE LA TAREA

La elección de esta tarea, se basa en que ella nos permite analizar cómo el profesor aborda un problema que se presenta a través del lenguaje algebraico y natural, pero su análisis está al interior de la geometría, los elementos teóricos utilizados fueron desarrollados en la clase magistral (anterior a esta clase de TD), específicamente el teorema de los puntos cúspides, el cual fue definido por el profesor, como sigue;

Definición: $\gamma: I \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ es un difeomorfismo de clase C^k (con $k \geq 0$) si:

1.- γ es de clase C^k

2.- γ es invertible, existe un recíproco, γ^{-1} que es también de clase C^k

Sea $t_0 \in I$

Sea $p \geq 1$ el entero más pequeño (si existe) tal que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$

Sea $q > p$ el más pequeño entero (si existe) tal que $\gamma^{(q)}(t_0)$ no es colineal a $\gamma^{(p)}(t_0)$

Entonces localmente, entorno del punto $\gamma(t_0)$, la curva tiene una de las formas siguientes, según la paridad de p y q.

Luego el profesor describe los casos gráficamente, como sigue:

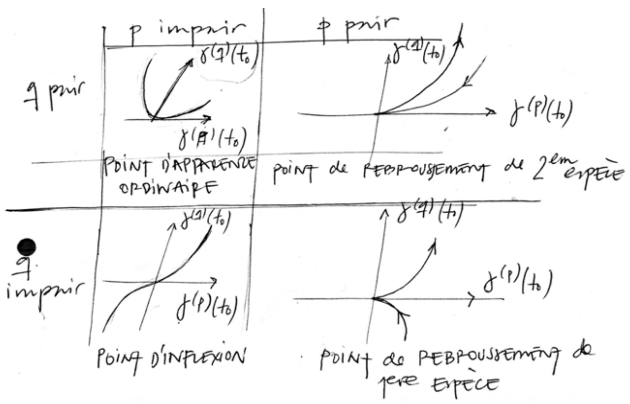


Figura 2: imagen de lo que el profesor escribe en la pizarra en la clase magistral

El profesor del curso no da más explicaciones ni ejemplos, este teorema sólo es retomado en esta clase de TD. En las sesiones siguientes, no es utilizado de nuevo el teorema, las curvas son construidas a partir de tablas de variaciones, tampoco hay preguntas de este tipo en el examen.

Analizaremos cuáles paradigmas se verán privilegiados, las génesis que serán activadas y los planos que van a dirigir la tarea, esto nos ayudará acercarnos en la predicción del trabajo matemático que se realiza en este curso.

La tarea:

Estudiar la curva : r=1-sin(θ)
1. Dar una parametrización ($x(t)$,$y(t)$)=γ(t) de esta curva.
2. Estudiar la curva γ

Pregunta 1

En esta pregunta los estudiantes deben convertir la función polar a una función parametrizada, es decir; $r = f(\theta)$ a $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. La conversión de coordenadas polares a coordenadas paramétricas se basa en estas dos relaciones $x = rcos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$, basta reemplazar en $r = 1 - \sin\theta$, luego $x = \cos(\theta)(1 - \sin(\theta))$ y $y = \sin(\theta)(1 - \sin(\theta))$, ahora se hace $t = \theta$, este cambio de signo (de θ a t), podría hacer pasar a un segundo plano la interpretación geométrica del parámetro.

$$\gamma: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$\boldsymbol{t \to \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t(1 - \sin t) \\ \sin t\,(1 - \sin t) \end{pmatrix}}$$

En términos del ETM_{AN}, el plano vertical movilizado es el [Ins-Dis], ya que en esta conversión de la función de $r = f(\theta)$ a $\gamma(t)$, de $(r, \theta) \to (x, y)$ coordenadas polares a coordenadas cartesianas, se debe utilizar la relación trigonométrica; $x = r\cos(\theta)$, $y = \mathrm{r}\sin(\theta)$, elementos que se encuentran al interior del referencial teórico, pero que también toman un estatus de instrumentos simbólicos para reemplazar x e y en la función $r = f(\theta)$, los artefactos son las coordenadas cartesianas, las cuales servirán para hacer la conversión a coordenadas paramétricas, tenemos el instrumento (coordenadas cartesianas, conversión a función paramétrica), la perspectiva de localidad es: puntual, ya que el trabajo se realiza por medio del punto $(r\cos(\theta), rsin(\theta))$.

A continuación, se presentan tres tipos de análisis que podrían realizar los estudiantes de la curva parametrizada, en el inicio podrían estudiarla visualmente utilizando un software, por otro lado, podrían hacer un estudio de variaciones o un estudio local de la curva en el punto (0,0).

Visualización

A través de un software, se puede aportar en la visualización y reflexionar a partir de la representación gráfica. Los estudiantes pueden observar algunas características de la curva (ver figura 3), como las que se describen en lo que sigue;

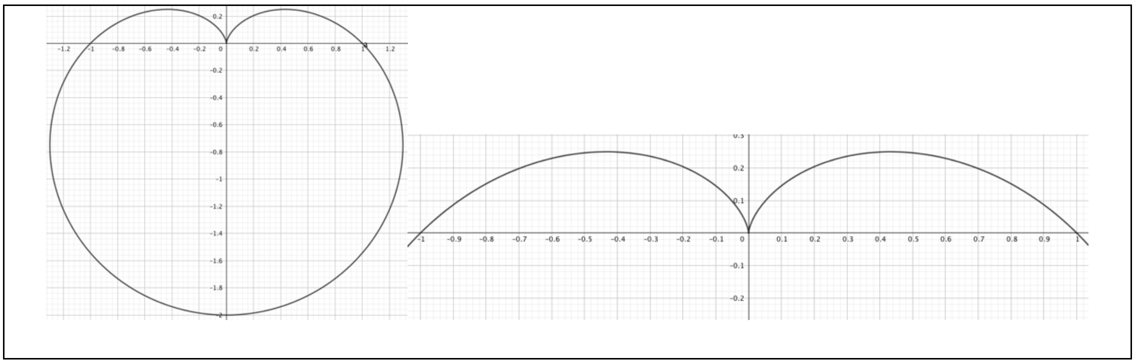


Figura 3: grafica de la cardioide

1. La curva es cerrada, conexa, compacta, simple y limitada (una curva de Jordan), esta curva, no es una función del tipo $y = f(x)$, por esto la necesidad de trabajar con curvas parametrizadas para este estudio. Podemos preguntarnos también, por su área, o su perímetro.
2. Corta al eje x en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$, y al eje y en el punto $(0,-2)$, la gráfica es simétrica en $x = 0$.
3. Se observa un punto crítico en $(0,0)$, con el software es posible de hacer un zoom al origen, donde se ubica el punto crítico y aquí los estudiantes pueden pensar en el curso y decir que en la curva hay punto singular en $t_0 \in I$ donde $\gamma'(t_0) = \left(x'(t_0), y'(t_0)\right) = (0,0)$, conjeturar a partir del teorema del curso, que en $(0,0)$ existe un punto cúspide de 1^{era} especie, por último, pensar en cómo es la tangente en el origen.
4. Es posible estudiar localmente el punto crítico en $(0,0)$, calcular para que valor de t se cumple; $\left(x(t), y(t)\right) = (0,0)$, desarrollando un sistema de ecuaciones $0 = \cos t(1 - \sin t)$ y $0 = \sin t\,(1 - \sin t)$, o con la interpretación geométrica de $t = \theta$ se obtiene que $\mathrm{t} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$.

Si el estudiante realiza un análisis visual tenemos un artefacto el software, el objetivo de este artefacto es la construcción de la gráfica, tenemos un instrumento software para graficar y concluir observaciones a partir de la visualización, la génesis que se activa es semiótica. Ahora, a partir de esto, es posible que se active la génesis discursiva, ya que comenzando del análisis de la curva se pueden concluir elementos que pertenecen al referencial teórico. En el tercer punto descrito más arriba, podemos ver que, si se analiza a partir de la gráfica, de lo que se visualiza, el paradigma AG se activa, ahora, a partir de este análisis de visualización, se puede iniciar una transición en AC, cuando por ejemplo se utilizan procesos algebraicos como el sistema de ecuaciones, o la interpretación geométrica para encontrar el valor de t. Es posible que se vea potenciado también el paradigma AR, cuando se reflexiona, por ejemplo, en el análisis del punto singular y la tangente en este punto. Si en un punto $\gamma(t_0)$ singular, estudiamos el límite, y si este límite es un real l, la tangente en $\gamma(t_0)$ existe y tiene por coeficiente director l, por otro lado, si este límite existe, pero es infinito, la tangente en $\gamma(t_0)$ existe y es vertical. A partir del trabajo en el plano [Sem-Dis] y [Sem-Ins], una dialéctica entre los paradigmas AG/AC o AR, podría orientar el trabajo de validación.

En lo que sigue, se muestra un estudio local, sea con tablas de variaciones, sea con el desarrollo de Taylor, o con el teorema del desarrollo limitado.

Estudio de variaciones

Hacer una tabla de signos para estudiar el comportamiento de la curva, primero los estudiantes deberán derivar la función para encontrar los puntos críticos, entonces $x'(t) = (sint - 1)(2sint + 1)$; $t = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ donde $x'(t) = 0$ y $y'(t) = cost(1 - 2sint)$; $t = \pm\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ donde $y'(t) = 0$, luego;

t	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$x'(t)$		$-$	•	$+$	|	$+$	•	$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	
$y'(t)$		$-$	|	$-$	•	$+$	|	$+$	•	$-$	•	$+$	•	$-$	

Tabla 1: tabla de signos sobre el comportamiento de la curva

Analizando el comportamiento de la tangente vertical cuando x cambia y no y, y la tangente horizontal cuando y cambia y no x , se obtiene:

t	-1		$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$				$\frac{3\sqrt{3}}{4}$		$\frac{\sqrt{3}}{4}$				$-\frac{\sqrt{3}}{4}$		-1
$x(t)$		↘		↗	•	↗		↘		↘	•	↘		↘	
$y(t)$	0	↘	$-\frac{3}{4}$	↘	-2	↗	$-\frac{3}{4}$ •	↗	$\frac{1}{4}$	↘	•	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0

Tabla 2: tabla sobre el comportamiento de la tangente

Con estos datos se puede trazar la curva en el plano cartesiano, con las tablas de variaciones entre intervalos, también se pueden calcular otros puntos y ubicarlos en el plano, luego analizar su comportamiento a nivel local, en torno al punto $(0,0)$. Las tablas de variaciones con los signos de $x(t)$ y $y(t)$ permiten tener el aspecto de la curva en $(0,0)$, pero no la tangente. Así el cálculo de $\gamma''(0)$ podría ser suficiente, podríamos también estudiar el vector $\gamma'(t)/(t-\frac{\pi}{2})$ que dirige la tangente en t y ver lo que esto da en última instancia en $\frac{\pi}{2}$. Podemos también apoyarnos sobre la interpretación geométrica de t=θ, ya que este recurso geométrico parece olvidado, trabajamos en análisis y deducimos consecuencias en geometría, pero no a la inversa. Es importante decir aquí, que el análisis comienza sobre la curva, ella vive en el dominio geométrico, y de esto se utilizan elementos prioritariamente del dominio del análisis para su estudio.

En el trabajo de tablas de variaciones es activado el paradigma AC, ya que las reglas del cálculo son aplicadas independiente de la reflexión de su existencia. Se analiza a nivel local, en torno al punto (0,0), y global con la construcción de la gráfica de la curva. La derivada y las tablas de variaciones son dos artefactos simbólicos, tenemos aquí el instrumento derivada en la construcción de la tabla de signos, y las tablas de variaciones, que son utilizadas para analizar el comportamiento de la curva, por esta razón, en esta estrategia en general se privilegia el plano vertical [Ins-Dis], donde dirige la génesis instrumental a través de los artefactos simbólicos señalados anteriormente.

Estudio local de la curva en (0,0)

El estudiante podría utilizar el desarrollo de Taylor, haciendo un cambio de variable: $t=\frac{\pi}{2}+u$, trabajamos en función de u donde x es impar y y es par, luego usando formula de Taylor:

$$\mathrm{x}\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{u}\right)=-\mathrm{x}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{u}\right) \quad \text{y} \quad y\left(\frac{\pi}{2}+u\right)=y\left(\frac{\pi}{2}-u\right)$$

Tenemos:

$$x\left(\frac{\pi}{2}+u\right)=-sinu(1-cosu)=\left(u-\frac{u^3}{6}+O(u^5)\right)\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{24}+O(u^6)\right)=0-\frac{u^3}{2}+O(u^4)$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}+u\right)=cosu(1-cosu)=\left(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+O(u^6)\right)\left(\frac{u^2}{2}-\frac{u^4}{24}+O(u^6)\right)$$
$$=\frac{u^2}{2}+O(u^4)$$

Podemos por lo tanto deducir que, localmente, la curva está cerca de $y=2^{(-1/3)}x^{(2/3)}$, lo que da un aspecto de punto crítico.

Ahora por medio de los cálculos realizados, hemos obtenido los vectores que se muestran a continuación, y esto nos permite concluir que tipo de punto crítico se obtiene, utilizando el teorema del curso.

$\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\binom{0}{0}$, $\gamma''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\binom{0}{1}$, $\gamma'''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\binom{-3}{0}$ donde $p=2$, $q=3$

En este estudio es activado el paradigma AC, cuando el teorema de Taylor es utilizado como un artefacto, para analizar en torno al punto (0,0), tenemos el instrumento Taylor como fórmulas para el análisis local. Además, la derivada es un artefacto involucrado en este proceso que se instrumentaliza en el procedimiento algebraico que se hace. Las génesis que en general movilizan este procedimiento es la instrumental y discursiva, la primera, permite el trabajo dentro del registro algebraico, y la segunda, cuando se utilizan elementos del referencial teórico. Cabe señalar que, nos acercamos a un razonamiento al interior del paradigma AR, ya que para determinar de forma sistemática la posición de la curva con respecto a su tangente en un punto singular, podemos efectuar un desarrollo limitado de las coordenadas $\gamma(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ en la vecindad de $t=t_0$, aquí se valida involucrando la definición establecida teóricamente en el curso.

ANÁLISIS A POSTERIORI

Desarrollo general

En términos generales la tarea se desarrolla a lo largo de toda la sesión de la clase, la cual tiene una duración de 3 horas, en principio el profesor da un poco de tiempo (aproximadamente 15 minutos) para que los estudiantes aborden la tarea con sus propias estrategias, luego comienza a desarrollarla en la pizarra, atendiendo algunas dudas de los estudiantes y describiendo su procedimiento.

Para la pregunta 1, realiza lo mismo que se ha descrito en el análisis a priori, usando la relación; $x=rcos(\theta)$ y $y=\sin(\theta)$ reemplaza en: $r=1-\sin\theta$, obteniendo la función en coordenadas paramétricas, luego hace un cambio de signos en la función, para trabajar con el parámetro t.

En la pregunta 2, inicialmente aborda el problema a través de un trabajo de cálculo algebraico con las tablas de variaciones, se aproxima a la producción de la gráfica, obteniendo la cardioide como el producto final.

Una vez que el profesor hace la gráfica, remarca el análisis en el punto (0,0) donde la derivada se anula, en $t_0=\frac{\pi}{2}$, $\left(\gamma'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}\right)=\binom{0}{0}$. En lo que sigue, realiza un cambio de variable $t=\frac{\pi}{2}+u$, con el objetivo de utilizar la fórmula de Taylor, para analizar las derivadas y usar el teorema del curso, obteniendo los vectores

$\gamma''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \binom{0}{1}$ y $\gamma'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \binom{-3}{0}$, luego concluye que hay un punto cúspide de primera especie, con $p = 2$ et $q = 3$, con esta nueva información, el profesor hace énfasis sobre la gráfica, y ubica los vectores γ'' sobre el eje y, luego γ''' sobre el eje x, con esto termina su desarrollo, destacando que es posible utilizar un desarrollo limitado con el teorema de la clase (teorema de Taylor), lo cual es práctico y es lo que se les va a pedir en el estudio de las curvas.

Análisis a posteriori desde el ETM_{AN}

El análisis que hace el profesor se sitúa en general sobre el registro algebraico, las tablas de variaciones y la derivada son utilizadas como artefactos, tenemos el instrumento tablas de variaciones para construir la gráfica, y la derivada para encontrar los puntos críticos y luego utilizada para el desarrollo del teorema de Taylor. Las reglas del cálculo son aplicadas independiente de la reflexión de su existencia, entonces el paradigma predominante es el AC, podemos decir que el plano que se privilegia es el [Ins-Dis], donde dirige la génesis instrumental, ya que hay mucha utilización de signos, sólo se deben mirar las tablas y los desarrollos limitados, esto cambia cuando se trabaja con un software desde el inicio, pues permitiría un trabajo sobre la gráfica antes de hacer cálculos. En este sentido, el análisis del profesor es a la inversa, ya que comienza el trabajo matemático desde el cálculo, con esto construye la gráfica, la cual le permite visualizar un punto crítico, el que posteriormente analiza nuevamente con elementos del cálculo, para verificar el punto cúspide de primera especie, con el teorema del curso. Es importante señalar el rol de la geometría, que nos permite un análisis sobre la forma de la curva, a partir de esto, es posible justificar que no es posible estudiarla al interior de las funciones del tipo; $f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, la curva que se tiene en la tarea, está al interior del dominio de las funciones vectoriales, de la forma; $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en este tema nos encontramos con un diálogo entre elementos matemáticos que son parte del dominio del cálculo diferencial y el cálculo vectorial, donde existen signos que tienen otro significado, por ejemplo, un punto del plano cartesiano, la derivada, la tangente, entre otros.

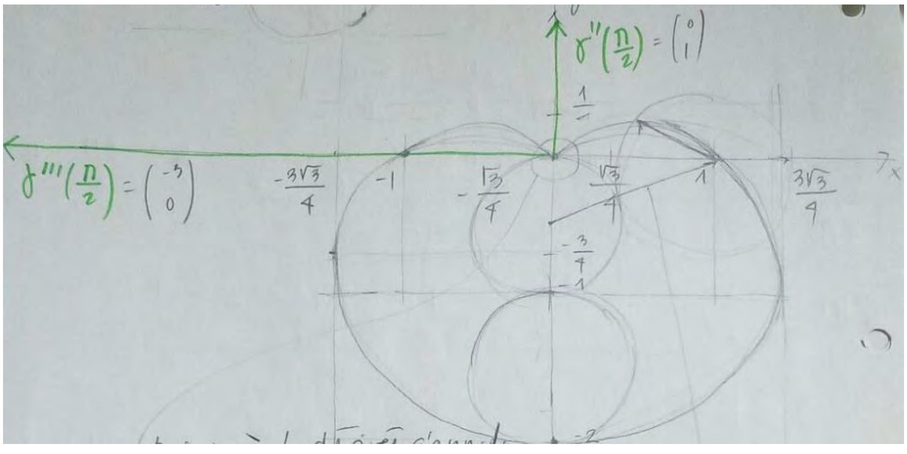


Figura 4: imagen de lo que el profesor escribe en la pizarra

Finalmente, como se dijo anteriormente un análisis basado en la visualización, podría enriquecer esta tarea, ya que pueden surgir elementos del referencial teórico a partir de lo que se observa, con posibilidades de un tránsito de AG/AC acercándose a AR para justificar, se observó en el curso en general, que hay poco trabajo local y utilización de software, este hecho hace que haya poca movilización del plano vertical [Sem-Dis], y se prioriza el trabajo en el paradigma AC, esto a veces hace que el plano que dirija la actividad matemática sea el [Ins-Dis], debido a que hay bastante utilización de artefactos simbólicos, como los que pudimos identificar en esta tarea (derivada, tablas de variaciones, teorema del curso, entre otros).

CONCLUSIÓN

Este análisis fue realizado para observar y comprender el ETM idóneo de un profesor, en un curso de *curvas y superficies parametrizadas*. En este artículo, se relata una parte del seguimiento de este curso a través de la clase de TD. En este sentido, respecto a lo observado, se propone trabajar estos objetos partiendo con el uso de software, para destacar el rol de la visualización con la activación de la génesis instrumental, ya que cuando utilizamos por ejemplo el software Geogebra, el cual nos permite graficar de inmediato la curva, aquí los estudiantes pueden hacer un análisis a partir de la gráfica, de lo que observan, se propone comenzar con un trabajo en el plano [Sem-Ins], validando los resultados sobre el paradigma AG, para luego continuar con un trabajo en el plano [Sem-Dis], utilizando elementos del referencial teórico para justificar lo que se observa. Cabe señalar, que cuando no se trabaja con software, como lo vimos en el desarrollo hecho por el profesor en la clase de TD, se tiende a privilegiar el trabajo algebraico, al interior de AC, puesto que la actividad matemática en cierto modo se vuelve mecánica cuando son utilizadas las fórmulas para validar los resultados obtenidos. La geometría, se deja de lado, y una tarea sobre una curva, se transforma en un problema de cálculo. Cuando se parte de AG hay un cierto control, para promover el análisis desde la geometría, ya que se inicia desde los elementos que son visualizados, y es posible una conversión de registro que apoya lo visual y viceversa.

REFERENCIAS

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., Nichols, D., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 247–285. https://doi.org/10.1007/BF02309532

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*, 721–737. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Martínez-Planell, R., & Trigueros, M. (2015). Las funciones de dos variables: análisis mediante los resultados del diálogo entre la teoría APOS y la TAD. *Enseñanza de Las Ciencias*, *33(2)*, 157–171. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1520

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R., Vandebrouck, F., & Vivier, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *4*(1), 139–160. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0068-z

Montoya, E., & Vivier, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico. Cambios de dominios y de puntos de vista. En A. Ruiz (Ed.), *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Chiapas, México.

Yerushalmy, M. (1997). Designing Representations: Reasoning about Functions of Two Variables. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(4), 431–466.

SÍNTESIS DEL TEMA 3

GÉNESIS Y DESARROLLO DEL TRABAJO MATEMÁTICO: EL PAPEL DEL PROFESOR, EL FORMADOR Y LAS INTERACCIONES

Inés Mª Gómez-Chacón[a], Nuria Climent[b], Jesús Victoria Flores Salazar[c], Laurent Vivier[d], Diana Zakaryan[e]

[a]Universidad Complutense de Madrid, España, [b]Universidad de Huelva, España, [c]Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú, [d]Université Paris Diderot, France, [e]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

igomezchacon@mat.ucm.es, climent@uhu.es, jvflores@pucp.pe, diana.zakaryan@pucv.cl, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

DESCRIPCIÓN INICIAL DEL TEMA

Este tercer tema se centra en avanzar en la reflexión sobre el rol de los docentes y las interacciones en la elaboración y diseño de un Espacio de Trabajo Matemático idóneo y que sea eficiente, iniciado en el Simposio ETM4 y desarrollado en el Simposio ETM5. En ese sentido, en el ETM6 se plantean los siguientes cuestionamientos:

¿Qué elecciones didácticas hace el docente al diseñar el ETM idóneo?

Al diseñar e implementar estos ETM idóneos, se pone en juego el conocimiento del profesor y surgen las siguientes preguntas: *¿Cómo identificar el conocimiento necesario para implementar un ETM idóneo? ¿Este conocimiento le permite al profesor diseñar ETM idóneos que sean consistentes y a la vez eficientes?*

La implementación efectiva de estos ETM idóneos en el aula requiere de la interacción entre los estudiantes y el profesor para desarrollar el trabajo matemático. El análisis de las interacciones que se producen durante la implementación de los ETM idóneos en las clases es necesario para comprender la forma en que se elabora el trabajo matemático. Entonces, cabe preguntarse:

¿Cómo ocurren estas interacciones? ¿Cómo gestiona el profesor las interacciones?

En este tema, se proponen investigaciones sobre cómo describir las interacciones profesor-alumno en la implementación de ETM idóneos y se tiene como centro el proceso de interacción entre el conocimiento de los docentes y los diferentes campos del trabajo matemático en el diseño e implementación de ETM idóneos y el contexto de la formación docente.

CONTRIBUCIONES

En el marco de este tema se presentan dos conferencias plenarias, 6 comunicaciones y cuatro pósteres:

Título de la contribución	**Temas específicos y marcos teóricos**	**Tipo de contribución**
Impacto de la participación de los profesores en el valor epistémico de tareas con gráficos diseñadas en una plataforma de evaluación en línea en matemáticas.	Valor epistémico de las tareas ETM idóneo Diseño de tareas con gráficos	Conferencia Plenaria-1
Etude du phénomène de dédoublement des milieux dans l'enseignement de l'équation du premier degré à une inconnue	Teoría Antropológica de lo Didáctico	Conferencia plenaria-2
El espacio de trabajo personal e idóneo de profesores frente a tareas algebraicas	ETM personal e ETM idóneo de profesores ETM en álgebra (ETM_{Alg})	Comunicación-1
Sobre aspectos epistemológicos que los profesores en ejercicio manifiestan en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales	Estudio de clases Formación continua de profesores ETM idóneo	Comunicación-2
Comprensión del uso de las herramientas teóricas y operatorias en el espacio de trabajo matemático y el conocimiento matemático del profesor	Relaciones entre ETM y MTSK del profesor Relaciones entre uso de herramientas y conocimiento de la estructura de la matemática Profesor universitario	Comunicación-3
Tres estados en el proceso de aprendizaje de una maestra de formación	Formación inicial de profesores Aprendizaje de estudiantes para profesor Escenarios de aprendizaje	Comunicación-4

Avanzando hacia un modelo para la formación de docentes de matemática	Modelo de formación de profesores Desarrollo profesional	Comunicación-5
Del trabajo matemático del aula al conocimiento del formador	ETM en Educación Secundaria ETM en formación de profesores Conocimiento del formador	Comunicación-6
Relación ETM-MTSK: conexiones entre la génesis semiótica y el conocimiento de los temas	Relaciones entre ETM y MTSK del profesor Relación entre la génesis semiótica y el Conocimiento de los Temas	Poster-1
La numération *sécimale* en formation initiale des enseignants du premier degré	Formación inicial de profesores ETM idóneo Base six	Póster-2
Kindergarten and primary Teachers' interpretative knowledge and MWS in the context of a measurement task	Conocimiento interpretativo MTSK ETM personal Tareas formativas	Póster-3
Conocimiento especializado de futuros profesores de primaria sobre división de fracciones	Formación inicial de profesores Conocimiento sobre división de fracciones Modelización matemática	Póster-4

Tabla 1: Contribuciones

HORIZONTES COMUNES

Las contribuciones a este tema se han centrado en el trabajo del profesor, especialmente en relación con un contenido matemático específico (Álgebra, Geometría, Análisis, Aritmética, Medida). En algunos casos se ha trabajado sobre el ETM en un área matemática concreta, como es el caso del Álgebra (ETM_{Alg}) y la Geometría ($ETM_{Géo}$).

El ETM idóneo del profesor ha sido foco de interés en muchos de los trabajos. Así, se han estudiado las posibles influencias de un entorno tecnológico, de su ETM personal y de su conocimiento.

También, las investigaciones han puesto en el punto de mira el ETM idóneo (y personal) del formador de profesores en un entorno de formación inicial.

Las aproximaciones a este ETM idóneo han sido variadas, como, por ejemplo, a través de tareas diseñadas por los profesores, de entrevistas en la que hipotetizan cómo organizarían la implementación de una tarea, o de su práctica de aula. Asimismo, se ha analizado el ETM idóneo del profesor, de distintos niveles educativos (Básica, Secundaria, Universidad y formadores de profesores), en relación con la activación de distintas génesis y planos.

Además del ETM, se han usado otros marcos de referencia, como el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el conocimiento interpretativo del profesor, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y la teoría antropológica de lo didáctico.

Ha sido objeto de estudio la formación de los profesores, tanto inicial como continua. En este sentido, se ha destacado el diseño de tareas para dicha formación, cómo se forman a futuros profesores de distintos niveles educativos, la caracterización de modelos de formación continua y los ETM que se ponen en juego en el aula de formación inicial.

Consideramos que ha habido un avance en el ETM 6 en los siguientes temas trabajados:

- La comprensión de posibles relaciones entre ETM y MTSK. Se pretende en general indagar sobre la posible complementariedad de ambos marcos para explicar la práctica del profesor; qué permite explicar cada uno de los marcos y qué aporta al otro. Este estudio ha cobrado mayor nivel de concreción que en anteriores simposios. Así, como pueden apreciarse en las preguntas formuladas en las comunicaciones, se plantean posibles relaciones entre subdominios de conocimiento del profesor y la activación de determinadas génesis.
- Él área de Primaria e Infantil, se consolida el énfasis en las mimas, sobre todo en relación con la formación de docentes. Además, la elaboración y diseño de ETM idóneos en la formación de profesores se detalla en focos de interés concretos: tareas, conocimiento del formador, modelización del aprendizaje del profesor y modelos de formación.
- El rol del profesor:
    - en las interacciones, el discurso oral y las tres génesis,
    - como diseñador de recursos, como sistemas de ejercicios o de evaluación en línea y las relaciones con el ETM idóneo.
- La identificación de distancias profesor-estudiantes en términos de paradigmas y medios.

HORIZONTES TRANSVERSALES Y TEMAS ABIERTOS DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo con las contribuciones y temas avanzados, se han tratado de afinar los mismo, formulando cuestiones precisas como las siguientes:

- ¿Cuál es el impacto en el valor epistémico de las tareas sobre gráficas diseñadas por los profesores para conformar el sistema de evaluación en línea en la unidad de funciones polinómicas cuando los profesores participan en el diseño? ¿Cuál es la distancia entre las tareas sobre gráficos en la plataforma y las tareas habituales de los profesores diseñadores en las tareas sobre gráficos?
- Posible relación entre el ETM personal del profesor frente a una tarea algebraica y su ETM idóneo en relación con el uso de esta tarea en el aula. ¿Cómo influye el ETM personal en el ETM idóneo de un profesor al enseñar álgebra?
- ¿Las tareas propuestas por un grupo de profesores sobre sistemas de ecuaciones lineales propician la activación de las distintas génesis y estimulan la circulación entre planos?
- ¿Cómo pueden relacionarse los componentes del ETM con los componentes del Conocimiento Especializado del profesor de matemáticas (MTSK)? En concreto, ¿cuál es la función de las herramientas teóricas y operacionales en el ETM y cómo pueden ser comprendidas desde el Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas en el MTSK?
- ¿Cómo podemos analizar el progreso de aprendizaje de futuros profesores a lo largo del proceso de resolución de tareas matemáticas, que involucran la exploración de elementos, la generalización de patrones geométricos y la reformulación de contenidos matemáticos en un contexto artístico?
- ¿Cómo interactúan el ETM y el MTSK en el análisis de un mismo fenómeno? Y, específicamente ¿Cómo se hacen visibles las conexiones teóricas dadas por la génesis semiótica del ETM y el Conocimiento de los Temas (KoT) del MTSK en la práctica del profesor?
- ¿Cuál es la diferencia entre entorno del estudiante en relación al que el profesor asume en un tipo de tarea sobre resolución de ecuaciones de primer grado?
- ¿Qué elementos teóricos apoyan la concreción de programas de Desarrollo Profesional Docente efectivos para profesores de matemáticas? y ¿cómo concretarlos en un modelo para programas de DPD efectivos?
- ¿Cómo podemos describir los ETM y conocimientos especializados de un profesor de Secundaria implementado una tarea en el aula y un formador de profesores que reflexiona sobre la implementación de dicha tarea en la formación inicial? ¿Qué relaciones y diferencias se perciben entre ambos ETM y conocimientos especializados?

- ¿Cuáles son el contenido y el rol de los ETM idóneo y personal de los profesores en y para dar sentido al razonamiento involucrado en producciones de estudiantes y a aspectos matemáticos subyacentes en los razonamientos de los estudiantes?
- Está en debate la noción de modelización. Parece que incluso que, si la tarea requiere modelizar, profesores en formación no la toman en cuenta y solo la enuncian como un ejercicio que evoca la realidad, en ese contexto ¿Cuál es el papel de la creación/formulación de problemas?
- ¿Cómo influye la constitución de un $\mathrm{ETM}_{\mathrm{seis}}$ (en base seis) en formación inicial de profesores en el enriquecimiento de sus $\mathrm{ETM}_{\mathrm{diez}}$ (en base diez) personales? ¿Cuáles son las posibilidades de *fibración* entre ambos ETM?
- ¿Cuál es el rol del discurso oral en el ETM idóneo de una profesora especialista en la enseñanza del triángulo?

TEMAS/PREGUNTAS ABIERTAS

A continuación, señalamos algunas cuestiones abiertas y temas a investigar que podrían ser tratados en el próximo simposio ETM 7.

- Modelos para analizar y diseñar los programas de formación de docentes de matemáticas, con un acuerdo sobre las dimensiones profesionales. Explorar especialidades según niveles educativos.
- ETM idóneo del profesor de Primaria.
- Relaciones entre ETM idóneo y ETM personal del profesor.
- Rol de las tecnologías digitales en el aula y en formación de profesores.
- Relación entre ETM y MTSK, específicamente, continuar la investigación de relaciones entre ciertos subdominios y categorías del MTSK y las distintas génesis del ETM (particularmente en su complementariedad).

SYNTHESE DU THEME 3

GENESE ET DEVELOPPEMENT DU TRAVAIL MATHEMATIQUE : ROLE DE L'ENSEIGNANT, DU FORMATEUR, DU COLLECTIF ET DES INTERACTIONS

Inés Mª Gómez-Chacón[a], Nuria Climent[b], Jesús Victoria Flores Salazar[c], Laurent Vivier[d], Diana Zakaryan[e]

[a]Universidad Complutense de Madrid, España, [b]Universidad de Huelva, España, [c]Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú, [d]Université Paris Diderot, France, [e]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

igomezchacon@mat.ucm.es, climent@uhu.es, jvflores@pucp.pe, diana.zakaryan@pucv.cl, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

DESCRIPTION INITIALE DU THEME

Ce troisième thème vise à faire avancer la réflexion sur le rôle des enseignants et des interactions dans l'élaboration et la conception d'un Espace de Travail Mathématique idoine qui soit efficace, initiée lors du symposium ETM4 et développée lors du symposium ETM5. En ce sens, les questions suivantes sont soulevées à l'ETM6 :

Quels choix didactiques l'enseignant fait-il lors de la conception de l'ETM idoine ?

Lors de la conception et de la mise en œuvre de ces ETM idoines, les connaissances de l'enseignant sont mises en jeu et les questions suivantes se posent : *comment identifier les connaissances nécessaires à la mise en œuvre d'un ETM idoine ? Est-ce que ces connaissances permettent à l'enseignant de concevoir des ETM idoines qui soient à la fois cohérents et efficaces ?*

La mise en œuvre efficace de ces ETM idoines dans la salle de classe exige une interaction entre les élèves et l'enseignant pour développer le travail mathématique. L'analyse des interactions qui se produisent pendant la mise en œuvre d'un ETM idoine en classe est nécessaire pour comprendre la manière dont le travail mathématique s'élabore. Se pose alors la question :

Comment ces interactions se produisent-elles et comment l'enseignant les gère-t-il ?

Dans ce thème, des recherches sont proposées sur la façon de décrire les interactions entre enseignants et élèves dans la mise en œuvre d'ETM idoines, et l'accent est mis sur le processus d'interaction entre les connaissances des enseignants et les différents domaines de travail mathématique dans la conception et la mise en œuvre d'ETM idoines et le contexte de la formation des enseignants.

CONTRIBUTIONS

Pour ce thème, il a été présenté deux conférences plénières, six communications et quatre affiches :

Titre de la contribution	Thèmes spécifiques et cadres théoriques	Type de contribution
Impacto de la participación de los profesores en el valor epistémico de tareas con gráficos diseñadas en una plataforma de evaluación en línea en matemáticas.	Valeur épistémique des tâches ETM idoine Elaboration de tâches avec des graphiques	Conférence plénière-1
Etude du phénomène de dédoublement des milieux dans l'enseignement de l'équation du premier degré à une inconnue	Théorie Anthropologique du Didactique	Conférence plénière-2
El espacio de trabajo personal e idóneo de profesores frente a tareas algebraicas	ETM personnel et ETM idoine de professeurs ETM de l'algèbre (ETM_{Alg})	Communication-1
Sobre aspectos epistemológicos que los profesores en ejercicio manifiestan en la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales	Etudes de classes (*lesson studies*) Formation continue des enseignants ETM idoine	Communication-2
Comprensión del uso de las herramientas teóricas y operatorias en el espacio de trabajo matemático y el conocimiento matemático del profesor	Relation entre ETM et MTSK de l'enseignant Relation entre l'usage d'outils et les connaissances de la structure mathématique Enseignant universitaire	Communication-3
Tres estados en el proceso de aprendizaje de una maestra de formación	Formation initiale des enseignants Apprentissage des étudiants Scénarios d'apprentissage	Communication-4
Avanzando hacia un modelo para la formación de docentes de matemática	Modèle de formation des enseignants Développement professionnel	Communication-5

Del trabajo matemático del aula al conocimiento del formador	ETM du secondaire ETM en formation des enseignants Connaissance du formateur	Communication -6
Relación ETM-MTSK: conexiones entre la génesis semiótica y el conocimiento de los temas	Relation entre les ETM et MTSK du professeur Relation entre la genèse sémiotique et la connaissance des thèmes	Poster-1
La numération *sécimale* en formation initiale des enseignants du premier degré	Formation initiale des enseignants ETM idoine Base six	Poster-2
Kindergarten and primary Teachers' interpretative knowledge and MWS in the context of a measurement task	Connaissance interprétative MTSK ETM personnel Tâches formatives	Poster-3
Conocimiento especializado de futuros profesores de primaria sobre división de fracciones	Formation initiale des enseignants Connaissance sur la division des fractions Modélisation mathématique	Póster-4

Table 1 : Contributions

HORIZONS COMMUNS

Les contributions à ce sujet se sont concentrées sur le travail de l'enseignant, en particulier en relation avec un contenu mathématique spécifique (algèbre, géométrie, analyse, arithmétique, mesure). Dans certains cas, des travaux ont été proposés sur l'ETM d'un domaine mathématique spécifique, comme l'algèbre (ETM_{Alg}) et la géométrie ($ETM_{Géo}$).

L'ETM idoine de l'enseignant a fait l'objet de nombreux articles. Ainsi, les influences possibles d'un environnement technologique, de son ETM personnel et de ses connaissances ont été étudiées.

La recherche s'est également concentrée sur l'ETM idoine (et personnel) du formateur d'enseignants dans un environnement de formation initiale.

Les approches de cet ETM idoine ont été variées, comme, par exemple, par le biais de tâches conçues par les enseignants, d'entretiens au cours desquels ils émettent des hypothèses sur la manière dont ils organiseraient la mise en œuvre d'une tâche, ou de leur pratique en classe. De même, l'ETM idoine de l'enseignant, de différents niveaux d'enseignement (élémentaire, secondaire, universitaire et en formation d'enseignants), a été analysé par rapport à l'activation de différentes genèses et différents plans.

En plus des ETM, d'autres cadres de référence ont été utilisés, tels que le modèle des connaissances spécialisées du professeur en mathématiques, les connaissances interprétatives du professeur, les trajectoires hypothétiques d'apprentissage et la théorie anthropologique du didactique.

La formation des enseignants, initiale et continue, a fait l'objet d'études. En ce sens, il a été souligné la conception des tâches de cette formation, la formation des futurs enseignants de différents niveaux d'enseignement, la caractérisation des modèles de formation continue et les ETM qui sont mis en œuvre dans la salle de formation initiale.

Nous considérons qu'à l'ETM6 il y a eu une avancée dans les thèmes travaillés suivants :

- La compréhension des relations possibles entre ETM et MTSK. En général, l'objectif est d'examiner la complémentarité possible des deux cadres afin d'expliquer la pratique de l'enseignant, ce qui permet d'expliquer chacun des cadres et ce qu'il apporte à l'autre. Cette étude est devenue plus concrète que lors des symposiums précédents. Ainsi, comme on peut le voir dans les questions posées dans les communications, des relations possibles sont soulevées entre les sous-domaines de connaissance de l'enseignant et l'activation de certaines genèses.
- Le domaine du primaire et de la maternelle se consolide, surtout en ce qui concerne la formation des enseignants. En outre, l'élaboration et la conception d'ETM idoines à la formation des enseignants sont détaillées dans des domaines d'intérêt spécifiques : tâches, connaissances du formateur, modélisation de l'apprentissage de l'enseignant et modèles de formation.
- Le rôle de l'enseignant :
  - dans les interactions, le discours oral et les trois genèses,
  - en tant que concepteur de ressources, comme les systèmes d'exercice ou d'évaluation en ligne et les relations avec l'ETM idoine.
- L'identification des distances enseignant-élève en termes de paradigmes et de milieux.

HORIZONS TRANSVERSAUX ET THEMES DE RECHERCHE OUVERTS

En fonction des contributions et des thèmes avancés, on a tenté de les affiner en formulant des questions précises telles que les suivantes :

- Quel est l'impact sur la valeur épistémique des tâches avec graphiques conçus par les enseignants pour concevoir le système d'évaluation en ligne dans l'unité d'enseignement des fonctions polynomiales lorsque les enseignants participent à la conception ? Quelle est la distance entre les tâches de la plate-forme et les tâches habituelles des enseignants dans les tâches avec graphiques ?
- Relation possible entre l'ETM personnel de l'enseignant face à une tâche algébrique et son ETM idoine pour l'utilisation de cette tâche en classe : comment l'ETM personnel de l'enseignant en algèbre influence-t-il l'ETM idoine pour l'enseignement de l'algèbre ?
- Les tâches proposées par un groupe d'enseignants sur les systèmes d'équations linéaires favorisent-elles l'activation des différentes genèses et stimulent-elles la circulation entre plans ?
- Comment peut-on relier les composantes de l'ETM avec celles des connaissances spécialisées de l'enseignant de mathématiques (MTSK) ? Plus précisément, quelle est la fonction des outils théoriques et opérationnels des ETM et comment peut-on les comprendre à partir de la connaissance de la structure des mathématiques dans les MTSK ?
- Comment analyser les progrès d'apprentissage des futurs enseignants tout au long du processus de résolution de tâches mathématiques, impliquant l'exploration d'éléments, la généralisation de modèles géométriques et la reformulation de contenus mathématiques dans un contexte artistique ?
- Comment ETM et MTSK interagissent-ils dans l'analyse d'un même phénomène ? Et, en particulier, comment rendre visibles dans la pratique de l'enseignant les connexions théoriques données par la genèse sémiotique de l'ETM et la connaissance des thèmes (KoT) des MTSK ?
- Quelle est la différence entre l'environnement de l'élève et celui qu'assume l'enseignant dans une tâche de résolution d'équations du premier degré ?
- Quels éléments théoriques appuient la concrétisation de programmes efficaces de développement professionnel des enseignants de mathématiques, et comment les concrétiser dans un modèle de programmes efficaces de développement professionnel ?
- Comment décrire les ETM et les connaissances spécialisées d'un enseignant du secondaire qui met en œuvre une tâche en classe et d'un formateur d'enseignants qui réfléchit à la mise en œuvre de cette tâche dans la formation

initiale ? Quelles relations et quelles différences sont perçues entre les ETM et les connaissances spécialisées ?

- Quels sont le contenu et le rôle de l'ETM idoine et personnel des enseignants dans le raisonnement, et pour lui donner un sens, impliqué dans les productions des étudiants et aux aspects mathématiques sous-jacents aux raisonnements des étudiants ?
- La notion de modélisation fait l'objet d'un débat. Il semble que même si la tâche nécessite une modélisation, les enseignants en formation ne la prennent pas en compte et ne l'énoncent que comme un exercice qui évoque la réalité. Quel est le rôle de l'élaboration et la formulation du problème ?
- Comment la constitution d'un ETM_{six} (en base six) influence-t-elle la formation initiale des enseignants dans l'enrichissement de leurs ETM_{dix} (en base dix) personnels ? Quelles sont les possibilités de *fibration* entre les deux ETM ?
- Quel est le rôle du discours oral dans l'ETM idoine d'une enseignante spécialisée dans l'enseignement sur le triangle ?

THEMES ET QUESTIONS OUVERTES

Voici quelques questions ouvertes et sujets de recherche qui pourraient être abordés dans le prochain symposium ETM 7.

- Modèles d'analyse et de conception de programmes de formation des enseignants de mathématiques, en accord avec les dimensions professionnelles. Explorez les spécialités en fonction des niveaux d'études.
- ETM idoine de l'enseignant du primaire.
- Relations entre l'ETM idoine et l'ETM personnel de l'enseignant.
- Rôle des technologies numériques en classe et dans la formation des enseignants.
- Relations entre ETM et MTSK, en particulier pour poursuivre la recherche sur les relations entre certains sous-domaines et catégories des MTSK et les différentes genèses de l'ETM (notamment dans sa complémentarité).

IMPACTO DE LA PARTICIPACIÓN DE LOS PROFESORES EN EL VALOR EPISTÉMICO DE TAREAS CON GRÁFICOS DISEÑADAS EN UNA PLATAFORMA DE EVALUACIÓN EN LÍNEA EN MATEMÁTICAS

Jorge Gaona

Université Paris Diderot, LDAR, France & Universidad Academia Humanismo Cristiano, Chile

jgaonap@docentes.academia.cl

En esta contribución se muestran parte de los resultados de un trabajo de tesis doctoral, el cual busca estudiar el valor epistémico de un conjunto de tareas diseñadas por dos equipos de profesores en una institución de educación superior en Chile. Este valor epistémico se estudia mediante el marco teórico del ETM y se utilizan, como referencia de comparación, las tareas habituales de los profesores. Esta comparación nos permitió diferenciar la influencia de las limitaciones de la plataforma, instrumentales y del ETM idóneo. En esta contribución se discuten los resultados relativos al diseño de tareas con gráficos en la plataforma.

Palabras clave: *Diseño de tareas, Espacio de Trabajo Matemático, Profesor diseñador, Recursos digitales, Génesis instrumental.*

INTRODUCCIÓN

Múltiples investigaciones han dado pistas que muestran al profesor como un actor clave si se tiene por objetivo integrar de manera adecuada recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Abboud-Blanchard, 2014; Bozkurt & Ruthven, 2017; Lagrange, Dedeoglu, & Erdogan, 2005; Trigueros, Lozano, & Sandoval, 2014). A su vez, todos estos autores coinciden en que la decisión por parte del profesor, de integrar tecnología depende de muchos factores, como por ejemplo: sus creencias sobre la tecnología (Ertmer, 2005), particularmente, si estiman un real beneficio para el aprendizaje de los estudiantes versus el costo que conlleva la planificación e implementación.

El beneficio para el aprendizaje se puede entender como el valor pragmático y epistémico de la tecnología (Artigue, 2002). El valor pragmático es el potencial que tiene la tecnología para hacer lo mismo que haríamos sin ella de forma más eficaz o eficiente o de realizar acciones que sin ella sería imposible. También esta relacionado con la funcionalidad que tiene una tecnología en particular. En este sentido Drijvers (2015) distingue las herramientas tecnológicas para hacer matemáticas y para aprender matemáticas, a su vez, esta última funcionalidad la subdivide en dos: practicar habilidades o desarrollar conceptos. Por otra parte, el valor epistémico está relacionado con el potencial que tiene esta para ayudar a comprender los objetos involucrados.

El costo que conlleva la planificación e implementación es el tiempo que conlleva estar familiarizado con los recursos, tanto en sus dimensiones relacionadas con el uso técnico de la herramienta tecnológica como con la realización de las tareas matemáticas propuestas (Abboud-Blanchard, 2014, p.304).

Otro factor es la cercanía con el currículum y flexibilidad de los recursos, pues como bien lo señala Ruthven (2007), la clase que realiza un profesor es un sistema de rutinas procesadas y automatizadas, adaptadas a circunstancias particulares en las que trabaja el profesor y una gran parte de la integración con tecnología implican una modificación de él.

Por otra parte, muchas veces el profesor ha sido visto como un implementador de recursos tecnológicos que han sido previamente desarrollados por diseñadores curriculares profesionales, matemáticos y didactas, no obstante, cada vez se da más relevancia al profesor como diseñador o co-diseñador y este cambio ofrece perspectivas tanto para formación profesional (Pepin, Gueudet, & Trouche, 2017) como para la integración adecuada de estos recursos en su práctica. No obstante, para que esta participación se produzca, esta debe estar promovida y soportada ya sea por la institución o por alguna organización o proyecto que entregue las herramientas y condiciones necesarias.

Todos estos factores son resumidos por Gaona (2018) en el esquema que se muestra en la figura 1. En este esquema, cada uno de los segmentos que une el centro del hexágono con los vértices puede ser visto como una escala cualitativa donde los valores óptimos están en los extremos. De los 6 factores que se proponen, cuatro tienen un signo "+" que indica que ese factor es creciente. Es decir, esperamos que el valor pragmático, epistémico, la participación y la flexibilidad de los recursos vaya creciendo a medida que el profesor trabaja con ellos y a medida que crece se alcance el óptimo. En cambio, los costos y la distancia con el currículum se espera que vayan decreciendo y a medida que decrecen se alcanza su óptimo.

Tomando en cuenta el esquema de la figura 1, en el trabajo de tesis se estudia la relación entre la participación y el valor epistémico de las tareas y la distancia con el currículum efectivo. En esta comunicación nos enfocamos en el uso de gráficas en la plataforma y tomamos como referencia las tareas habituales del profesor en el aula. Específicamente queremos responder las siguientes preguntas de investigación:

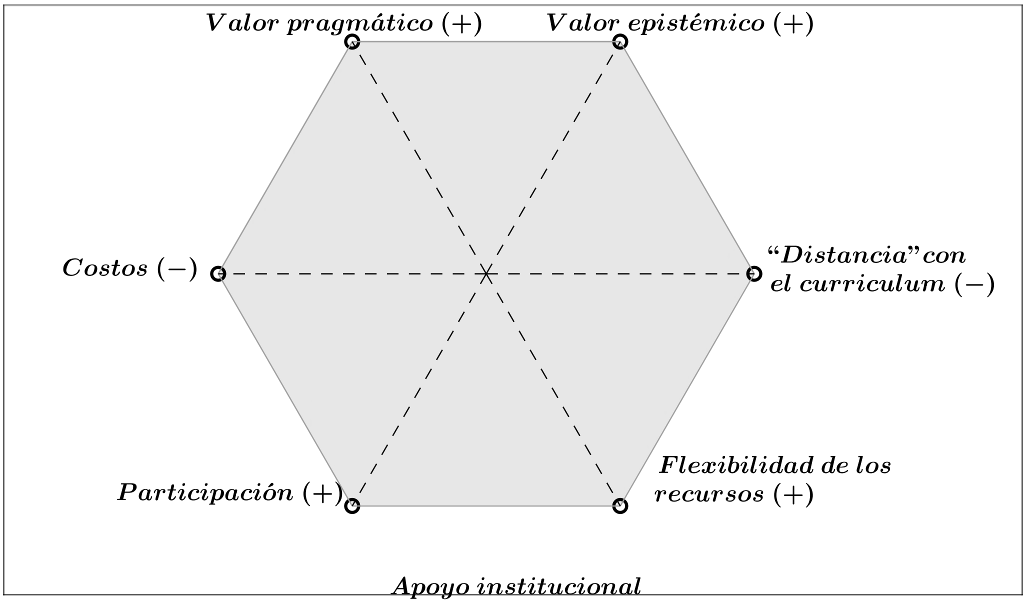


Figura 1: Factores que influencian la integración de tecnología, extraído de (Gaona, 2018)

P1: ¿Cuál es el impacto de la participación de los profesores (como diseñadores) en el valor epistémico de las tareas sobre gráficas diseñadas en un sistema de evaluación en línea en la unidad de funciones polinómicas? P2: ¿Cuál es la distancia entre las tareas sobre gráficos en la plataforma y las tareas habituales de los profesores diseñadores en las tareas sobre gráficos?

Para estudiar el valor epistémico de las tareas, utilizaremos el Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak & Richard, 2014; Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016), al que llamaremos ETM de aquí en adelante.

Este marco teórico nos parece pertinente puesto que como lo indican Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016) "el Espacio de Trabajo Matemático y su estudio deben permitir dar cuenta de cómo un determinado conjunto de tareas y actividades terminan por estructurar (o no) un trabajo matemático complejo y rico por parte de profesores y estudiantes" (p.5).

Esta investigación se enmarca dentro de un proyecto institucional de la Universidad Tecnológica de Chile INACAP denominado SEDOL-M (Gaona, Reguant, Valdivia, Vásquez, & Sancho-Vinuesa, 2018; Vásquez & Gaona, 2016). Este proyecto tiene como objetivo desarrollar con y para los profesores un sistema de evaluación en línea que contribuya a desarrollar el trabajo autónomo de los estudiantes fuera de la sala de clases para la asignatura de matemática I y en mi trabajo de tesis estudio el valor epistémico para la unidad denominada "funciones polinómicas". La asignatura Matemática I es una nivelación donde se retoman temas de la educación secundaria, como álgebra, funciones o trigonometría, entre otros.

Las tareas de SEDOL-M se diseñaron en una plataforma Moodle, la cual se integró con Wiris y que permite, entre otras características, definir parámetros aleatorios en los enunciados y escribir la respuesta y una retroalimentación paso a paso en función de estos enunciados. Además, cuando se utilizan preguntas de tipo “respuesta corta”, los estudiantes pueden ingresar la respuesta mediante un editor de ecuaciones. El sistema cuenta con un CAS que permite evaluar si dos expresiones son equivalentes matemáticamente y otras propiedades adicionales, por ejemplo, puede diferenciar una expresión simplificada de otra que no lo está, entre otras características.

Una vez que se caractericen las tareas de la plataforma, tomando en cuenta las potencialidades y limitaciones de los software utilizados, necesitamos un referente para compararlas y para esto utilizaremos las tareas habituales de los profesores diseñadores, de esta forma estudiaremos la relación entre lo propuesto en este “nuevo” ambiente y su ambiente “tradicional”.

MARCO TEÓRICO

Para estudiar el valor epistémico de las tareas, primero se analizan distintos componentes de ellas como son: el tipo de tarea (Chevallard, 1999, p. 2) y la o las representaciones semióticas utilizadas en los objetos matemáticos puestos en juego (Duval, 1993). Luego, utilizaremos la teoría del ETM (Kuzniak & Richard, 2014; Kuzniak et al., 2016), la que nos permite analizar mediante la articulación de dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo (cada uno con sus respectivos componentes), la circulación potencial de las tareas a través tres dimensiones: una semiótica (relativa a los signos), otra instrumental (relativa a los artefactos materiales, informáticos o simbólicos) y una discursiva (relativa a las justificaciones y razonamientos de tipo deductivos). Cuando las dimensiones no se pueden aislar, utilizamos la idea de planos verticales que articulan dos de estas dimensiones: plano semiótico-instrumental, semiótico-discursivo e instrumental-discursivo.

Dentro de una institución educativa, se distinguen tres niveles de ETM: ETM de referencia, el cual es el ETM paradigmático de la institución; el ETM idóneo el cual es el ETM propuesto y organizado por el profesor para que los estudiantes trabajen y el ETM personal, que es el ETM sobre el cual trabajan tanto estudiantes como profesores para resolver tareas.

Como nuestro trabajo se centra en estudiar las tareas diseñadas por los profesores en un ambiente tecnológico, distinguimos el trabajo instrumental asociado al trabajo matemático mismo (que es una de las dimensiones del ETM), del trabajo instrumental ligado al diseño de las tareas. Ambas nociones están inspiradas en el trabajo de Rabardel (1995).

METODOLOGÍA

Como se indicó en la introducción, esta investigación se enmarca en el proyecto SEDOL-M, en el cual, entre el 2015 y el 2018, se han conformado 8 equipos de profesores, de 8 sedes distintas de INACAP. Cada equipo ha trabajado en el diseño de diferentes tareas para 10 unidades diferentes, una de estas unidades es “funciones polinómicas”, para las cuales trabajaron dos equipos, de 3 profesores cada uno, de los campus Renca (profesores A, B y C) y Santiago Sur (profesores D, E y F). Estos seis profesores diseñaron 29 tareas, 13 sobre función cuadrática y 16 sobre función afín. De las 29 tareas en la plataforma, nos concentraremos en las 11 tareas que están relacionados con gráficos. Todas las tareas son contextualizadas y del tipo “respuesta corta” en Moodle, lo que significa que hay un espacio para que el estudiante, mediante un editor o un sistema de reconocimiento de escritura a mano alzada, ingrese la respuesta.

Se analizan los enunciados y los algoritmos que definen los enunciados y las retroalimentaciones. Se hizo un análisis general de las tareas clasificándolas según tipo de tarea (Chevallard, 1999), el tipo de contextualización y los registros y características de las tareas. A partir de este análisis general se realiza un análisis a priori de la circulación del ETM que se activa a partir de estos elementos.

Luego, se caracterizan las tareas habituales de 3 (B, D y E) de los 6 profesores diseñadores a partir de las tareas que proponen a sus estudiantes durante las clases. Las profesoras fueron elegidas en función de sus horarios de clases. Se utilizan como datos los registros de todas las sesiones de la unidad “funciones polinómicas” en una clase para cada profesor entre mayo y junio del 2017. Esta caracterización se realiza de la misma forma en como se caracterizaron las tareas de la plataforma.

RESULTADOS

Como se indicó al comienzo, las tareas de la plataforma diseñadas por los profesores fueron 29, en estas tareas el uso de los distintos tipos de registros de representación y su frecuencia están relacionados de manera marcada por el tipo de función involucrada. Como analizamos profesor por profesor, pudimos observar que algunos se inclinaron más por un registro que por otro, por ejemplo la profesora B utilizó solo el registro gráfico, la profesora E solo el algebraico, el profesor F privilegió el lenguaje natural y el resto utilizó de forma combinada dos o más registros.

En total, fueron 11 tareas las que están relacionadas con gráficas, que fueron programadas por 5 de los 6 profesores diseñadores. De estas 11 tareas, 4 trabajan con la función cuadrática y 7 con la función afín. Los tipos de tareas trabajados con la función cuadrática son: “Calcular el vértice de una función” y “Calcular la pre-imagen de un valor”, con la función afín son: “Calcular el intervalo solución de una inecuación”, “Calcular la intersección entre dos curvas” y “Calcular la pendiente de una función”. El único tipo de tarea que está presente en ambos tipos de funciones es “Calcular la imagen de un valor”. Varias de estas tareas eran de estimación, es decir, la respuesta no era “exacta” y el profesor definió un rango donde la respuesta era considerada correcta por la máquina.

En la mayoría de estas tareas, el gráfico está en el enunciado y es el principal registro de la función que tienen los estudiantes para responder a las preguntas; no obstante, también había tareas donde aparecían dos registros, por ejemplo gráfico y algebraico. Para diseñar este gráfico, los profesores podían definir tanto el plano sobre el que se traza el gráfico (altura, ancho, centro, graduación, malla entre otros), como el objeto a graficar sobre este plano, por ejemplo, si es una función, se puede definir el dominio sobre el que se grafica y también elementos estéticos, como el color o el ancho de la línea. Como otros programas informáticos, si hay elementos que no se definen, estos quedan definidos por el software por defecto. En la figura 2 se muestran los algoritmos para dos de las tareas con gráficos. El plano cartesiano se define con el comando "*tablero({})*" y dentro de las llaves se ingresan los atributos. En el algoritmo de la profesora A (izquierda) se define el "centro", la "anchura" y la "altura" en función de los parámetros aleatorios de la función, en cambio, la profesora B, define la coordenada *x* del "centro" y la "anchura" con un valor fijo y la coordenada de las abscisas y la "altura" con un valor que dependen de los valores aleatorios de la función. Una vez que se define el enunciado y el algoritmo, los estudiantes visualizan iteraciones de la pregunta como la de la figura 3.

En general, con respecto a la configuración del plano cartesiano, se observó que hubo profesores que fijaron la altura, el ancho y el centro del plano, lo que los obligó a restringir la variabilidad de los parámetros aleatorios (con respecto a las preguntas donde no hubo gráficos), esto se observó de forma clara en los profesores C y F. La profesora B también fijó estos parámetros, pero como todas sus tareas fueron gráficas no se observó de forma explícita una restricción de la variabilidad. Las otras dos profesoras que utilizaron gráfico (A y D), configuraron de forma variable las dimensiones del "tablero", de tal forma que la función se adaptara al plano y no a la inversa como el resto de los profesores.

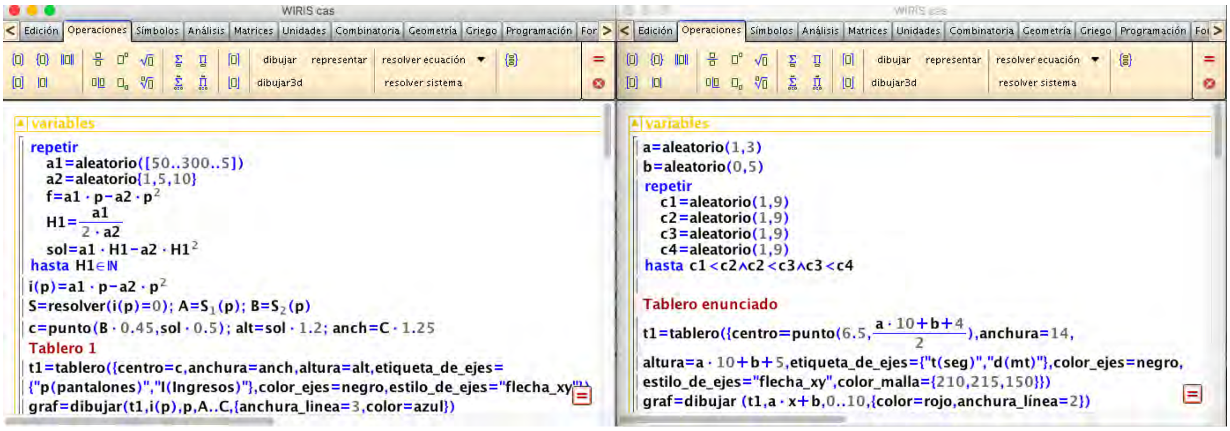


Figura 2: Partes del algoritmo de una tarea con gráfico de la profesora A (izquierda) y de la profesora B (derecha).

Los elementos que ningún profesor configuró, fueron la malla y la graduación, lo cual implicó que para las tareas de estimación (como la pregunta de la izquierda de la figura 3), la dificultad de la tarea cambiase según la iteración, puesto que si el valor buscado queda justo en la línea de graduación, el trabajo de estimación es más sencillo que si este queda en una posición intermedia. Por ejemplo, en la tarea de la profesora A, la respuesta es el punto (60,3600) y ese valor se debe estimar entre 3500 y 3750 en el eje de las abscisas. Además, las profesoras que trabajaron con tareas de estimación (como la profesora A), para calificar las respuestas de los estudiantes, dieron márgenes de error que no consideraban la cuadrícula, lo que hacía que para ciertas iteraciones el margen fuese muy grande (calificando preguntas que claramente no eran buenas estimaciones como correctas) y para otras el margen muy pequeño, lo que calificaba buenas estimaciones como incorrectas. Los profesores que trabajaron con respuestas exactas restringieron la variabilidad para que las imágenes fuesen más sencillas de leer por los estudiantes.

Además, en las retroalimentaciones diseñadas por las y los profesores se observaron dos elementos adicionales. El primero fue que no se observó una articulación de los gráficos con otros registros. Por ejemplo, en una tarea donde aparecía el gráfico y la expresión algebraica, se hacía una lectura de este, pero no se utilizaba como elemento de control para, por ejemplo, comprobar si los cálculos algebraicos estaban dentro de rangos adecuados. El segundo es que los gráficos se leían de forma exacta, incluso en las tareas de estimación, tal como se muestra en la figura 4. Esto conjeturamos que está ligado con la dimensión instrumental y particularmente con el fenómeno de pseudo-transparencia (Artigue, 1997) puesto que el software de forma interna puede "leer" de forma exacta la imagen o pre-imagen de un valor (puesto que lo hace a través de la definición algebraica), pero en pantalla esto no es posible de realizar.

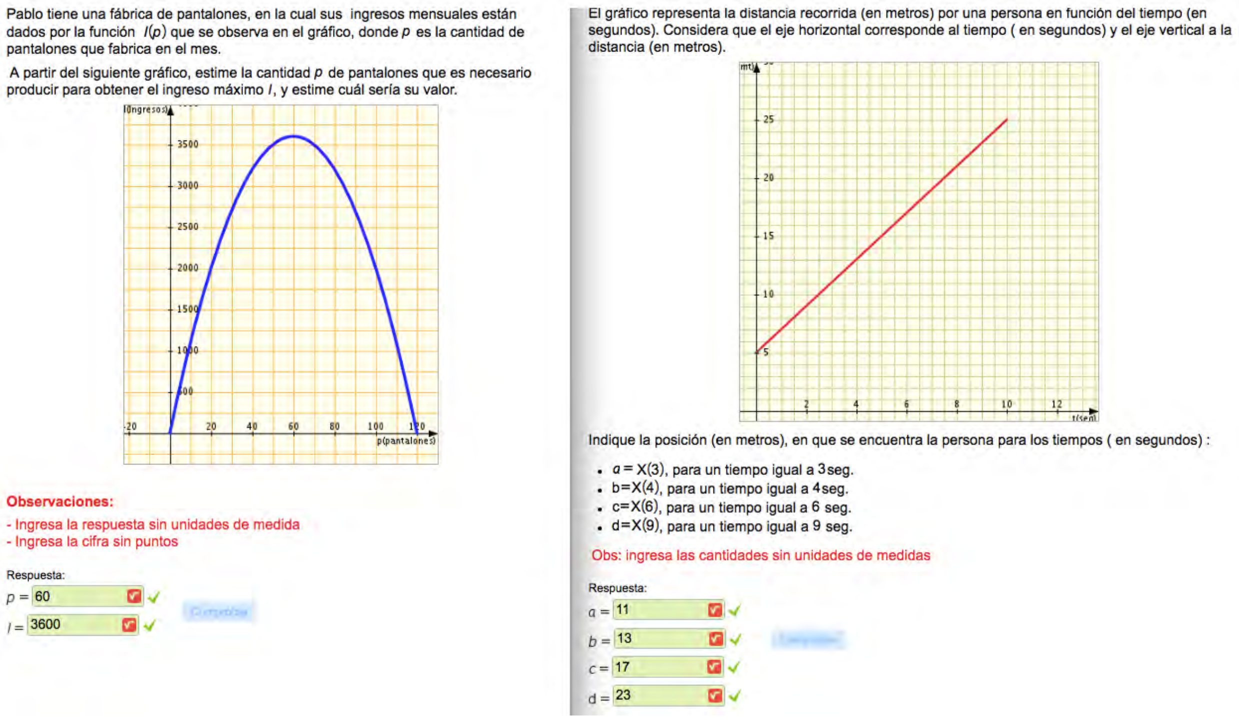


Figura 3: Iteración de preguntas con gráfico de la profesora A (izquierda) y de la profesora B (derecha).

Otro fenómeno que parece estar ligado a la lectura exacta de los gráficos, pero que es más global aún, puesto que aparece en todas las tareas y no solo en las de gráfico, es el uso casi exclusivo de números enteros. De los 6 profesores, 5 utilizaron números enteros tanto para los coeficientes de la función, como para los números de las preguntas y respuestas (por ejemplo cuando se pedía calcular la imagen de un valor).

Incluso, en algunos casos se ponían restricciones extras para que ciertos elementos como la pendiente o el vértice de una función fuesen valores enteros (como se observa en el algoritmo de la profesora A en la figura 1 quien hace un ciclo "*repetir-hasta*" para que el vértice *H1* sea un número natural). Solo una profesora usó números decimales en los coeficientes, pero en los números de las preguntas, los valores que utilizó fueron todos números enteros.

En estas tareas con gráficos, se observa que se privilegia principalmente un trabajo en la dimensión semiótica, donde se movilizan algunos elementos del referencial teórico como los conceptos de imagen, pre-imagen, vértice, pendiente, entre otros. En estas tareas, los elementos que conforman el plano cartesiano son la malla y la graduación, y al analizar las retroalimentaciones, se observa que se espera que estos elementos se transformen en herramientas semióticas, guiando el proceso de visualización. Sin embargo, como están configurados por defecto, cambia la dificultad de las tareas según la iteración, lo que bloquea el proceso de transformación de la malla y la cuadrícula en una herramienta semiótica. Este bloqueo se refuerza con la lectura exacta de los gráficos, puesto que no se les indica a los estudiantes cómo usar estos elementos para una lectura adecuada.

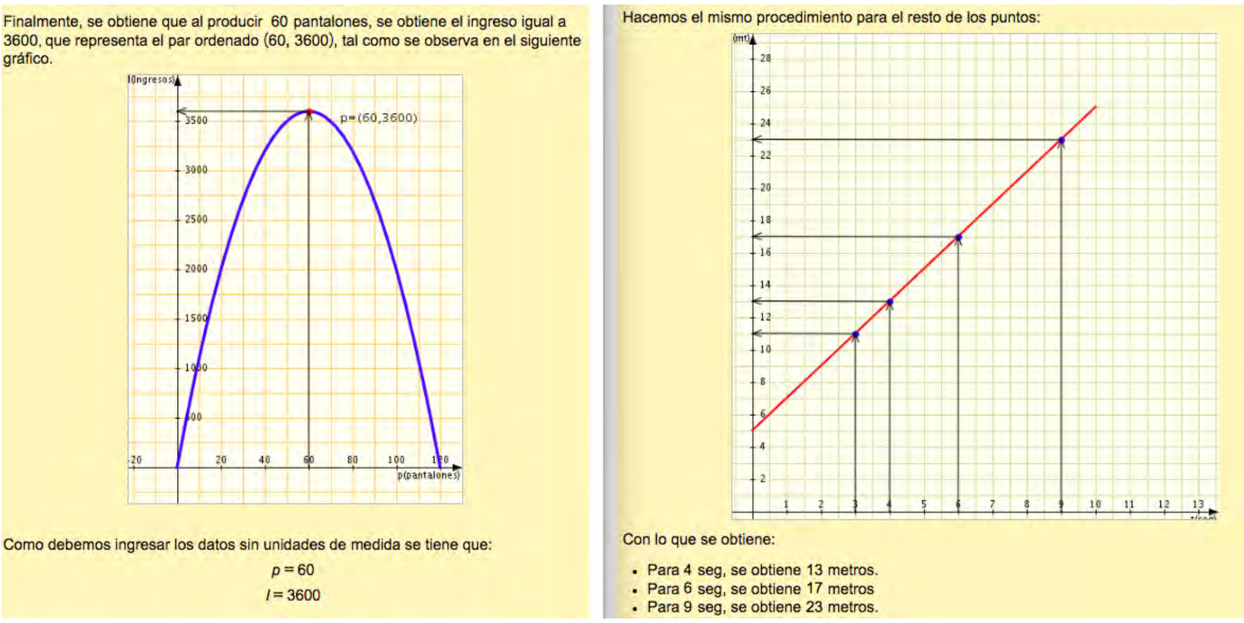


Figura 4: Extracto de la retroalimentación de preguntas con gráfico de la profesora A (izquierda) y de la profesora B (derecha).

En el caso particular de los gráficos, debido a las múltiples decisiones matemáticas de diseño que tenían que tomar los profesores, hay fenómenos que parecen tener una fuerte influencia instrumental. Sin embargo, no sabíamos si podían haber otras fuentes de influencia, como las limitaciones de los software o la influencia del ETM idóneo de los profesores.

Para averiguar cuáles podían ser las principales fuentes de influencia de estos fenómenos, se analizaron las tareas habituales de las profesoras B, D y E.

Cada profesora durante la unidad de funciones polinómicas trabajó una cantidad distinta de tareas en sus clases y a su vez, las tareas relacionadas con gráficos variaron entre cada profesora. Esta información se resume en la tabla 1.

Profesora	Total tareas	% gráficos en enunciado	% gráficos en la respuesta	% total con gráficos
B	38	7,9%	21,1%	28,9%
D	96	16,7%	9,4%	26,0%
E	40	12,5%	27,5%	40,0%

Tabla 1: Resumen de tareas con gráficos en los enunciados y las respuestas

Una primera distinción que se puede hacer sobre las tareas que las profesoras trabajaron en clases relacionadas con gráficos es que hay tareas donde el gráfico aparece en la respuesta: “Graficar o identificar cuál es el gráfico de una función” y tareas donde el gráfico aparece en el enunciado. Al realizar esta distinción observamos como primera diferencia entre las tareas de la plataforma y las tareas habituales, que en la plataforma solo hay tareas donde el gráfico esté en el enunciado y no en la respuesta. Esta diferencia se debe principalmente a una limitación de la plataforma, puesto que no es posible trabajar con la tarea “Graficar una función”. Sin embargo, las y los profesores diseñadores decidieron no trabajar con alguna tarea “cercana” como podría ser “Identificar la gráfica de una función” a partir de una lista de opciones, aunque está reportado en la literatura que en estas preguntas con opciones múltiples, la naturaleza de la pregunta cambia bastante cuando se pasa de la construcción del gráfico por el estudiante a la identificación de un gráfico en una lista de alternativas, aunque se usen como alternativas los errores comunes de los estudiantes (Berg & Boote, 2015).

Otro elemento que se puede observar en la tabla, es que el uso de los gráficos como una representación de la cual se puede extraer información no es muy utilizada, salvo el caso de la profesora D. Sin embargo, un análisis en detalle de sus clases, muestra que de las tareas que en el enunciado contienen gráficos, la mitad de ellos se trabajan en un episodio de una clase donde muestra cuatro gráficos y pide a los estudiantes identificar cuál de ellos es función y les solicita identificar dominio y recorrido.

Como los gráficos no son muy utilizados por las profesoras para obtener información sobre las funciones involucradas en tareas específicas, no es posible tener un parámetro de comparación con respecto a la lectura exacta de gráficos. Sin embargo, el uso casi exclusivo de números enteros parece ser una influencia para esto, junto con el fenómeno de pseudo-transparencia, que viene dado por la diferencia entre las representaciones internas del programa informático y las representaciones que se muestran en pantalla.

Por otra parte, se pudo constatar que en las tareas habituales, el gráfico tampoco se articula con otros registros. Al observar las clases, se constata que cada registro funciona de forma aislada, en términos del ETM podemos decir que las dimensiones instrumentales y semióticas no se trabajan de forma coordinada, puesto que por ejemplo, hay ciertas fórmulas que son utilizadas como artefactos simbólicos y para los cuales, las representaciones gráficas no cumplen ningún papel y cuando los gráficos aparecen son el producto final de un proceso y no son utilizados, por ejemplo, como elemento de control para las soluciones algebraicas que se obtienen de los artefactos simbólicos puestos en juego. Además, de lo anterior, la dimensión discursiva está ausente, lo que restringe el trabajo potencial de los estudiantes.

CONCLUSIONES

En esta comunicación se muestran parte de los resultados del trabajo de tesis que está en proceso de finalización, el cual analiza el impacto de la participación de los profesores de una institución de educación superior chilena en el valor epistémico de las tareas. Acá nos centramos específicamente en el trabajo sobre los gráficos. En una primera instancia se analizaron las tareas sobre gráficos diseñados en la plataforma y se observaron una serie de fenómenos: configuración por defecto de la malla y cuadrícula del plano cartesiano sobre el que se trazaba la gráfica de la función, lectura exacta de gráficos incluso en las tareas de estimación y desarticulación entre los distintos registros.

Al identificar estos fenómenos, se buscó la fuente de influencia de estos analizando las tareas habituales de tres de los 6 profesores diseñadores. Se conjeturó que las principales fuentes de influencia eran: limitaciones de la plataforma, limitaciones de naturaleza instrumental e influencia del ETM idóneo.

Al analizar las tareas habituales las tres profesoras diseñadoras, se observó que los gráficos en el enunciado aparecen de forma mucho más frecuente en las tareas de la plataforma que en las tareas habituales, a pesar del costo instrumental de producirlas. Por contraparte, en la plataforma no aparecen tareas relacionadas con la transformación de un registro específico (como algebraico, tabla de valores o lenguaje natural) al gráfico, a pesar de que en las tareas habituales se observa que es una tarea en la que los profesores privilegian bastante, al parecer debido principalmente a las limitaciones de la plataforma. Las limitaciones de la plataforma de cierta forma “obligaron” a los profesores-diseñadores a utilizar el gráfico como un registro del cual hay que obtener información de la función y no utilizarlo solamente como un producto al que hay que llegar, como se constató que ocurre en las tareas habituales.

Retomando las preguntas de investigación planteadas, observamos que el valor epistémico de las tareas gráficas en funciones polinómicas viene fuertemente influenciado por la dimensión instrumental, debido a las múltiples decisiones que deben tomar al diseñar los gráficos y que pueden afectar el trabajo matemático de los estudiantes; también hay influencias que vienen dadas por las limitaciones de la plataforma, como la ausencia del tipo de tarea “graficar una función” y también del ETM idóneo, como el uso de números enteros y quizás esto mismo influye en la lectura exacta de gráficos en las retroalimentaciones observadas.

Lo anterior sugiere que si se persigue una evolución de las tareas con gráficos de la plataforma, hay que fortalecer estos tres aspectos: mejorar las competencias de programación, buscar alternativas de otros software para trabajar con cierto tipo de tareas y más importante, aún - pues será condición necesaria para aprovechar los dos aspectos anteriores – trabajar en el ETM idóneo de los profesores para enriquecer elementos de los objetos matemáticos que se ponen en juego en las preguntas.

En relación a la distancia entre las tareas sobre gráficos de la plataforma y las habituales, observamos que en las tareas habituales, el gráfico es más concebido como un producto al que hay que llegar y no como un registro del cual se puede obtener información, tal como lo muestran otras investigaciones (Cordero, 2008). En cambio, en la plataforma, las mismas limitaciones, han obligado de cierta forma, a utilizar el gráfico como el registro principal y esto ha producido un cambio que privilegia un trabajo en la dimensión semiótica.

Las perspectivas que se abren en esta investigación, están relacionadas con la evolución conjunta del ETM idóneo y de la evolución de los recursos. En este sentido sería interesante saber si existe una influencia bidireccional, es decir, si la evolución del ETM idóneo mejora los recursos y por otra parte, si el enriquecimiento de los recursos hace evolucionar el ETM idóneo de los profesores.

REFERENCIAS

Abboud-Blanchard, M. (2014). Teachers and Technologies : Shared Constraints, Common Responses. En A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (pp. 297–317). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_13

Artigue, M. (1997). Le logiciel “Derive” comme revelateur de phenomenes didacticques lies a l’utilisation d’environments informatiques pour l’apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 133–169. https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1002996128978

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245–274. https://doi.org/https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Berg, C., & Boote, S. (2015). Format Effects of Empirically Derived Multiple-Choice Versus Free-Response Instruments When Assessing Graphing Abilities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(1), 19–38. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10763-015-9678-6

Bozkurt, G., & Ruthven, K. (2017). Classroom-based professional expertise: a mathematics teacher’s practice with technology. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(3), 309–328. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10649-016-9732-5

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221–266.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.-M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265–286). México D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. – Díaz de Santos.

Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). En *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education Digital* (pp. 135–151). Springer International Publishing. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_8

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37–65.

Ertmer, P. A. (2005). Teacher pedagogical beliefs: The final frontier in our quest for technology integration? *Educational Technology Research and Development*, *53*(4), 25–39. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/BF02504683

Gaona, J. (2018). Integrar tecnología en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, factores claves. *Revista de Gestión de la Innovación en Educación Superior*, *3*, 75–93.

Gaona, J., Reguant, M., Valdivia, I., Vásquez, M., & Sancho-Vinuesa, T. (2018). Feedback by automatic assessment systems used in mathematics homework in the engineering field. *Computer Applications in Engineering Education*, *26*(4), 994–1007. https://doi.org/https://doi.org/10.1002/cae.21950

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 1–22.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4), 1–8. https://doi.org/https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*, *48*(6), 721–737. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x

Lagrange, J.-B., Dedeoglu, N., & Erdogan, E. (2005). Teachers using technology: models of the complexity of practice. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1505–1515). San Felieu: Fundemi IQS – Universitat.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. *ZDM - Mathematics Education*, *49*(5), 799–812. https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11858-017-0870-8

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Ruthven, K. (2007). Teachers, technologies and the structures of schooling. En D. Pitta-Pantazi & C. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 52–67). Larnaca: Department of Education - University of Cyprus.

Trigueros, M., Lozano, M., & Sandoval, I. (2014). Integrating Technology in the Primary School Mathematics Classroom: The Role of the Teacher. En A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.) (Vol. 2, pp. 111–138). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1

Vásquez, M., & Gaona, J. (2016). Sistema de evaluación dinámica online en matemática para desarrollar el estudio autónomo fuera del aula (SEDOL-M). En V. Sánchez (Ed.), *III Congreso de Innovación Educativa* (pp. 3118–3127). Monterrey: TecLabs, Tecnológico de Monterrey.

ETUDE DU PHENOMENE DE DEDOUBLEMENT DES MILIEUX DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'EQUATION DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE

Elie Kazan[a], Yves Matheron[b], Nawal Abou Raad[c]

[a]Université Libanaise, Faculté de Pédagogie, Liban, [b]IFE-ENS de Lyon, France, [c]Université Libanaise, Faculté de Pédagogie, Liban

elie_kazan2003@hotmail.com, yves.matheron@ens-lyon.fr, nabouraad@ul.edu.lb

Notre travail, qui se situe dans la mise en évidence d'un phénomène didactique, nouveau et générique, dans l'enseignement des mathématiques au Liban « le dédoublement des milieux », repose sur l'idée partagée en didactique, que le professeur, dans un enseignement ordinaire, dévolue à ses élèves un milieu à partir duquel les actions des élèves sur ce milieu et les interactions qu'il renvoie permettent l'enseignement d'une notion. Nous avons choisi de présenter dans ce texte l'observation d'un enseignement ordinaire de l'« Equation du premier degré à une inconnue », dans une classe de EB7 (élèves de 12 à 13 ans) d'une école privée de Beyrouth, afin de montrer l'écart entre les différents milieux mobilisés, que nous avons désigné par l'expression de « distance mésogénétique ».

Mots-clés *: Dédoublement des milieux, Bifurcation, Distance mésogénétique.*

INTRODUCTION

Ce texte est issu de la thèse de Kazan (2014). L'enjeu de son travail se situe dans la mise en évidence d'un phénomène didactique – le dédoublement des milieux – dans l'enseignement des mathématiques au Liban et en France, et qui semble générique. Il est défini ainsi :

> Le dédoublement des milieux est un appareil didactique permettant de diagnostiquer le degré de l'évolution des rapports personnels de l'institution (élèves et professeur) vers les éléments institutionnels du savoir. (p. 257).

L'hypothèse qui a soutenu ce travail est la suivante :

> Dans toute forme d'enseignement, qu'elle prenne la forme d'un cours dialogué ou celle d'une ingénierie didactique, il y a une action qui se présente sous la forme d'une dialectique entre les organisations du savoir et les connaissances antérieures des élèves (p. 13).

Un recueil de données empiriques portant sur l'observation de trois situations didactiques, au cycle primaire et au collège, l'une dans une classe à enseignement ordinaire « Equations du premier degré à une inconnue en EB7 au Liban » et les deux autres dans deux classes à enseignement à partir des ingénieries didactiques « Nombres Relatifs en EB6 au Liban » et « la Soustraction en CE1 en France », a permis de montrer que des « bifurcations » existent au niveau des milieux, à l'intérieur d'une situation didactique. Au professeur incombe la responsabilité de concevoir un milieu dans et sur lequel agissent les élèves, à travers des ostensifs[1] qu'il utilise pour le faire advenir. Il renvoie les élèves aux organisations mathématiques avec lesquelles continue à exister, ou est supposé continuer à exister, un certain rapport antérieurement établi. Il les renvoie aussi aux groupes et aux institutions qu'ils ont antérieurement fréquentées (Matheron & Salin 2002 ; Araya & Matheron, 2015). Il tente de restreindre ces souvenirs à l'environnement des connaissances nécessaires à la venue du sujet qu'il va enseigner. Il fait contractuellement appel à des connaissances anciennes supposées partagées, en faisant le pari sous contrat que ses élèves se replaceront dans les organisations mathématiques nécessaires pour son projet d'enseignement. Mais rien ne garantit que ses élèves ne mobiliseront pas des connaissances différentes de celles qu'il attend, et par conséquent que les milieux qui lui paraissent avoir été dévolus pendant l'enseignement à la classe d'une part, et ceux de certains élèves d'autre part, voire des élèves entre eux, ne soient pas différents.

Le dysfonctionnement qui peut surgir s'explique par le fait que le professeur et les élèves sont multi-assujetties à des institutions différentes, ou parfois mal assujetties à celles considérées comme nécessaires aux processus d'enseignement/apprentissage.

Une question se pose : « le milieu dans lequel évoluent les élèves et avec lequel ils travaillent est-il celui que le professeur souhaite dévoluer ? »

Pour instruire une réponse à cette question, il est nécessaire de revenir à la notion de milieu proposée 1) par Brousseau (1998) comme système antagoniste de l'élève et dénué d'intentions ; 2) par Chevallard (2003) comme système de rapports stables, afin d'étudier les rapports institutionnels et personnels aux savoirs en jeu, aussi bien pour le professeur que pour les élèves ; 3) par Matheron (2010) comme ensemble d'ostensifs et de non ostensifs qui activent des rapports personnels ou institutionnels à des organisations mathématiques ou à des éléments d'organisations mathématiques. Si les ostensifs sont des objets qui ont une forme accessible aux sens, les non-ostensifs sont, quant à eux, ce que l'on nomme usuellement les notions, concepts, (Bosch et Chevallard, 1999), qui ne peuvent être évoqués que par les ostensifs. D'où la nécessité d'une mémoire en tant que système permettant l'activation de rapports antérieurement établis.

Nous avons choisi de présenter dans ce texte l'observation d'un enseignement ordinaire de l'« Equation du premier degré à une inconnue », dans une classe de EB7 d'une école privée de Beyrouth, afin de montrer, dans le cas où cela est possible, l'écart entre les différents milieux mobilisés, par le professeur et les élèves, et le milieu institutionnel du savoir (milieu potentiel) ; écart que Kazan (2014) a désigné par « distance mésogénétique ».

[1] C'est-à-dire des objets qui ont une réalité matérielle, sensible, perceptible, et peuvent prendre une forme scripturale, graphique, discursive, gestuelle, etc. (*cf.* Bosch et Chevallard, 1999). Les gestes, mots, discours, schémas, dessins, graphismes, écrits, notations mathématiques, etc., sont des ostensifs. La notion d'ostensif englobe et dépasse celle de « représentations » essentiellement graphiques ou scripturales.

DEMARCHE METHODOLOGIQUE

En ce qui concerne le professeur observé, l'analyse des séances transcrites nous a montré certaine des régularités dans sa façon d'accomplir des tâches didactiques. Ceci nous a permis, d'une part, d'identifier les techniques didactiques du professeur et les technologies sur lesquelles elles s'appuient et, d'autre part, d'accéder à des manifestations du rapport personnel des élèves à ces tâches et de mettre en exergue des traces de leur passé scolaire d'étude des mathématiques. Nous avons tenu compte du système de conditions et de contraintes issus de *niveaux de codétermination didactique* (Chevallard ; 2003) spécifiés par l'organisation en *sujet*, *thème*, *secteur*, *domaine* mathématique, en allant du plus spécifique (le sujet) au plus général (le domaine), puisqu'on sait qu'au-delà des niveaux propres aux organisations mathématiques se trouvent ceux relevant de la pédagogie, de l'école, de la société et de l'humanité. Nous avons aussi examiné comment les mises en œuvre didactiques du professeur peuvent évoquer les milieux cognitifs (ensembles des objets mathématiques effectivement activés (Chevallard ; 2003)) des élèves aux éléments institutionnels du savoir évoqué. Par exemple, pour le thème « Équations se ramenant à $a.x=b$ », il est institutionnellement attendu de diviser les deux membres de l'équation par le même nombre non nul a. Les élèves ont une certaine pratique des équations, dès la première classe de l'enseignement primaire EB1 (CP, élèves de 6 à 7 ans), même si la pratique est désignée sous le terme « d'égalité à trou », comme dans $2 + \ldots = 7$ ou $2 \times \ldots = 10$. Alors qu'un élève de EB7 va être amené à résoudre algébriquement des équations du premier degré se ramenant à une équation du type $a.x = b$.

Dans ce travail, nous analysons la première séance portant sur les équations en EB7, car la problématicité, ainsi que les premières hypothèses sur le phénomène didactique de « dédoublement des milieux », ont émergé de l'observation des actions des élèves sur un milieu différent du milieu amené dans la classe par le professeur.

Nous résumons dans le tableau 1 les différents niveaux d'organisations mathématiques pour les « Equations » relevés dans le programme libanais en vigueur de 1997 :

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Domaine : Arithmétique et Algèbre</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Secteur : Equations et Inéquations</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Thème : Equations se ramenant à $a.x=b$</td></tr>
<tr><td align="center">Sujet 1</td><td align="center">Sujet 2</td><td align="center">Sujet 3</td></tr>
<tr><td>Remplacer une équation par une équation équivalente</td><td>Résoudre une équation du type $ax=b$ où $a \neq 0$</td><td>Organiser des données et les traduire par une équation</td></tr>
</table>

Tableau 1 : Les différents niveaux d'organisations mathématiques pour les « Equations » dans le programme libanais

Le professeur utilise le manuel scolaire (Education de base 7. Collection Puissance ; 2009) comme ressource principale pour ses préparations du cours. Il a planifié le déroulement de la séance selon trois phases :

Durée	Phase	Contenu didactique
8 min	Définition de l'objet d'étude : « les équations »	Le professeur donne la définition des équations et du vocabulaire spécifique : termes, membres, inconnues, etc.
14 min	Exposé d'une technique de résolution d'équations de différentes formes	Le professeur expose différentes techniques à partir des équations suivantes : $3x = 4$, $\frac{3x}{5} = 2$, $\frac{3x}{5} - 1 = 7$ et $3x - 1 = x + 6$
28 min	Exercices de travail de la technique et de l'organisation mathématique sur la résolution des équations	1- Résoudre des équations à solution unique 2- Résoudre des équations à une infinité de solutions 3- Résoudre des équations à solution impossible.

Tableau 2 : Synopsis de la première séance sur les « Equations »

ANALYSE

Ci-dessous, nous analysons comment le professeur a introduit, lors de la première phase, l'objet « équation du premier degré à une inconnue » et, lors de la seconde phase, la technique de résolution de l'équation $3x = 4$. Ce qui nous a permis de relever des indices qui attestent de la présence du dédoublement des milieux didactiques.

Pour définir ce qu'est une équation, le professeur a mobilisé des souvenirs propres à son rapport personnel à des organisations mathématiques fiables pour la reconstruction du savoir relatif aux équations. Dans son premier discours : « *En général, une équation. Quel genre ou quel modèle on peut avoir* ; « *Ça c'est l'exposant un* » ; *« Donc, en général une équation est formée d'inconnue n'est-ce pas ?* » ; « *Combien d'inconnues il y a ? Une variable,…* », le professeur a fait appel à des ostensifs langagiers « *modèle, genre, inconnue, racine, degré, variable, exposant* » afin de placer les élèves dans le milieu souhaité. La question qui ne semble pas être prise en compte par le professeur est celle de savoir si ces ostensifs évoquent, pour ses élèves, les mêmes non-ostensifs que pour lui-même. Aussi continue-t-il à développer son discours en usant d'ostensifs en relation étroite avec la finalité assignée aux techniques à mettre en œuvre dans les équations : « *l'inconnue qu'on va trouver* », « *on va trouver la racine* », « *il faut résoudre une équation* ». Il restreint le *topos* des élèves à la demande de reprise, de leur part, des derniers mots qu'il prononce « *trouver la racine* », puis l'élargit pour négocier la dévolution de la question et faire avancer le temps didactique. Ainsi commence-t-il par tenter de définir ce qu'est une « équation », puis s'arrête pour questionner les élèves sur le « modèle », le « genre » dans le but de tisser des rapports avec le nouveau savoir « *Bon d'abord on va commencer par la définition ou bien par le modèle de l'équation* ». Cette étape révèle une grande confusion : les termes qu'il énonce, relatifs aux équations, lui paraissant suffire pour enrôler les élèves et les placer dans un milieu aux objets partagés entre lui et la classe.

Dans un deuxième temps, le professeur énonce de deux manières différentes la même tâche définitoire propre à ce qu'il souhaite enseigner aux élèves : trouver « *la solution de l'équation* », et trouver « *la racine de l'équation* ». Il présuppose que ces termes renvoient au passé didactique de ses élèves. Puis il répète « *mais, pour trouver ça il faut résoudre une équation* » sans que ces formulations permettent d'évoquer un savoir-faire, une technique faisant partie du passé didactique des élèves dont la participation s'est réduite à un « *oui* ».

Pour enrôler les élèves, le professeur pose la question suivante : « *qu'est-ce que veut dire résoudre une équation ?* ». Nous pensons que cette question cache la question de la technique de résolution relative à la tâche « *résoudre une équation* » et non pas la recherche de son sens. Pour raccourcir la distance entre les élèves et le milieu qu'il croit avoir créé par son discours sur les équations et leurs racines, le professeur poursuit son discours par une deuxième question « *vous savez* ? ». Mais la réponse d'une élève « *Trouver la racine de cette équation* » qui reproduit les paroles antérieures du professeur, montre que cette distance s'est agrandie. Signalons, que les élèves réfèrent, depuis les petites classes, le mot « Equation » à son sens arithmétique, à partir des tâches qu'ils ont rencontrées, du type « Compléter des égalités additives, soustractives ou multiplicatives ». En revanche les termes « inconnue, variable, racine, solution, degré » sont, pour les élèves, des nouveautés. Le professeur a évoqué la notion mathématique à partir d'un milieu qu'il pense avoir créé par son discours, dans l'intention de le transformer en un milieu adéquat pour la production du nouveau savoir. Nous avons transcrit son discours dans les tableaux suivants en le référant aux types de tâches qu'il vise et à ce qui apparaît comme une évocation d'une technique associée :

Type de tâches 1	Déterminer l'inconnue solution : « *L'inconnue qu'on va trouver, on va trouver la solution de l'équation, on va trouver la racine de l'équation* ».
Technique 1	Résoudre l'équation : « *Mais, pour trouver ça, il faut résoudre une équation* ».

Tableau 3 : Milieu 1 évoqué par le professeur

Type de tâches 2	Résoudre une équation du 1er degré à une inconnue : « *Qu'est-ce que veut dire résoudre une équation ? »*
Technique 2	Non établie par le professeur : elle est l'objet de l'enseignement visé.

Tableau 4 : Milieu 2 évoqué par le professeur

De même, nous avons relevé dans le tableau suivant le travail des élèves dans le même épisode ainsi que le discours d'un élève qui évoque, ce qu'il y a à faire, soit donc une technique

Type de tâches	Résoudre une équation du 1er degré à une inconnue
Technique	Déterminer la racine : « *Trouver la racine de cette équation »*

Tableau 5 : Milieu évoqué par les élèves

Pour enseigner l'algorithme de résolution d'une équation de la forme $ax = b$, le professeur s'appuie ensuite sur l'exemple $3x = 4$, qui joue le rôle d'un « milieu institutionnel » pour le type de tâches « résoudre l'équation $ax = b$ ». Ce milieu, les paroles du professeur, les ostensifs verbaux « équation », « résoudre » ainsi que les ostensifs scripturaux « 3 », « x », « = », « 4 » qu'il donne à voir, renvoient les élèves dont le rapport à ces objets est idoine, à trois organisations mathématiques. 1) Le secteur « Calcul numérique », ou encore celui de l'arithmétique : « *Je peux additionner, ajouter, soustraire, diviser »* ; 2) le secteur des « Expressions Algébriques », dû à la présence des monômes comme « $3x$ » ; 3) le thème des « Equations », inclus dans le secteur « équations, inéquations » : « *Il est en quel côté ?* (Il parle de « *x »*) » et « *Je dois diviser par* 3 *dans chaque membre* ».

Les deux organisations mathématiques « Expressions algébriques » et « Equations » amènent à deux types de tâches différentes non indépendants – « diviser deux nombres » et « trouver la solution d'une équation » –, puisque pour résoudre une équation, il faut outiller des techniques relatives aux expressions algébriques. L'ostensif « principal » auquel il faut attacher de l'importance est « x », car il indique la nature de l'objet mathématique équation et non pas l'égalité, qui est mis en œuvre dans ces deux types de tâches. Au début de la séance, le professeur, par son discours, n'a pas différencié le statut de « x » dans chacune de ces deux organisations mathématiques. Pour lui, « x » est à la fois une « variable », comme c'est le cas dans le monôme $3x$, et aussi « une inconnue », comme c'est le cas dans l'équation $3x = 4$. C'est ce qu'attestent ses propos : « *l'équation* $3x = 4$ *est formée d'une inconnue. Combien d'inconnues il y a ? Une variable* », « *Équations à plusieurs variables ?* », « *inconnue dans une équation* ». Aussi le « x » est, pour lui, une chose à déterminer « *comment je peux avoir x ?* » et encore à supprimer « *en le supprimant* ». Tandis que ce même « x » pourra signifier pour l'élève une « lettre de l'alphabet » selon une relation d'ordre soutenue par le sens de l'écriture, dans la série des ostensifs rencontrés par une lecture de gauche à droite : « 3, x, = et 4 ». Signalons que le manuel adopté donne, selon cet ordre, la définition des termes d'une équation *« Les termes de l'équation* $2x - 3 = 5$ *sont* $2x$, -3 *et* 5 *».*

Le verbe « supprimer », utilisé à plusieurs reprises par le professeur à travers son discours, évoque chez les élèves une « soustraction ». Les ostensifs utilisés ont provoqué un replacement des élèves au sein d'une organisation mathématique qu'ils ont antérieurement fréquentée (Matheron, 2011) : dans ce cas dans le secteur « Calcul numérique » au sein duquel ils ont sollicité le souvenir qu'ils ont du thème « Opérations sur les rationnels », dont l'un des sujets est « Soustraire deux nombres ; diviser deux nombres » ; termes utilisés par le programme et leur professeur.

La technique de résolution de $3x = 4$ proposée par le professeur – « *Je dois diviser par* 3 *et par* 3 *dans chaque membre* » dit-il – a placé les élèves pour la première fois, devant la division *par un même nombre* de chacun des membres d'une égalité. Notons que la technologie de cette technique qui à « $a.x = b$ fait correspondre la solution $x = \frac{b}{a}$ » se déduit du théorème-enseignant (Abou Raad, 2006), dont le discours du professeur sert de justification « *Si moi j'ai* $3x = 4$*, donc une équation, la règle me dit **:** je peux additionner, ajouter, soustraire, diviser, multiplier chaque membre par le même nombre, rien ne change* ».

Or le calcul du quotient de deux nombres rationnels non nuls relève du secteur « Calcul numérique ». C'est effectivement le secteur dans lequel se sont placés quelques élèves en répondant par « *Je peux diviser par* 3 *», « sur* 3 » à la question du professeur « *Si moi j'ai* $3x= 4$*. Comment je peux avoir* $x=$ *? En supprimant le..?* » Ces réponses renvoient au passé didactique des élèves, notamment à la définition déjà rencontrée du quotient q de a par b tel que $bq = a$. Or, ces réponses n'ont pas satisfait le professeur qui s'attendait à une division par 3 dans chaque membre, qui reprend « *Vous m'avez dit : on divise par* 3 *Je peux diviser par* 3*,…Comment je supprime le* 3 *ici ?* (il pointe du doigt le 3 du $3x$) » ; « *Sur* 3*, pourquoi sur* 3 *? Je dois diviser par* 3 *et par* 3 *dans chaque membre euh terme* ».

CONCLUSION

Le professeur a clôturé son discours « *Mon but à la fin est de trouver* ***x*** ». Ce travail devrait apporter quelque chose de nouveau aux élèves qui sont dans l'appropriation d'une nouvelle connaissance. Comment l'interaction entre les pôles didactiques (Professeur / élève / savoir) a-t-elle eu lieu dans cet épisode ?

Nous présentons ci-dessous, sous forme de deux tableaux, une schématisation des milieux cognitifs, « milieux faits de connaissances stabilisées », indexés sur les organisations mathématiques, dans lesquels évoluent d'une part le professeur et, d'autre part, les élèves.

Par son discours à partir des ostensifs verbaux, le professeur évoque, au sein du domaine « Arithmétique et Algèbre », trois secteurs se subdivisant chacun en plusieurs thèmes et sujets (Tableau 6). Alors que ces mêmes ostensifs ont renvoyé les élèves à un autre milieu constitué de deux secteurs qui correspondent à ce que peuvent établir leurs rapports personnels antérieurement construits, forcément relatifs à d'autres organisations mathématiques que celles évoquées par le professeur (Tableau 7).

La distance mésogénétique qu'un observateur extérieur peut interpréter comme un dédoublement des milieux au sein du même milieu d'étude, a lieu au niveau des différents sujets mobilisés par le professeur et par les élèves. Dans le tableau 6, le professeur souhaite faire advenir le sujet « résoudre l'équation $ax = b$ », pour lequel la technique institutionnellement attendue consiste à diviser chaque membre par $a \neq 0$, ou à les multiplier par l'inverse de a, alors que des élèves, dans le tableau 7, travaillent dans le sujet « diviser deux nombres ».

Le professeur veut que ce qui est milieu pour lui le soit aussi pour l'élève, et il tend à construire une mémoire officielle pour faire advenir des rapports aux objets du nouveau milieu. Les élèves se réfèrent à des techniques en mobilisant des objets des milieux constitués de leurs rapports à des organisations mathématiques qu'ils ont précédemment étudiées et qu'ils jugent nécessaires, à partir de ce qu'évoquent pour eux les différents ostensifs présents dans le milieu que leur soumet le professeur. Tout se passe comme si les deux pôles du système didactique (professeur et élève) travaillaient la tâche nouvelle « résoudre l'équation $3x = 4$ » en se référant à un « dédoublement des milieux ».

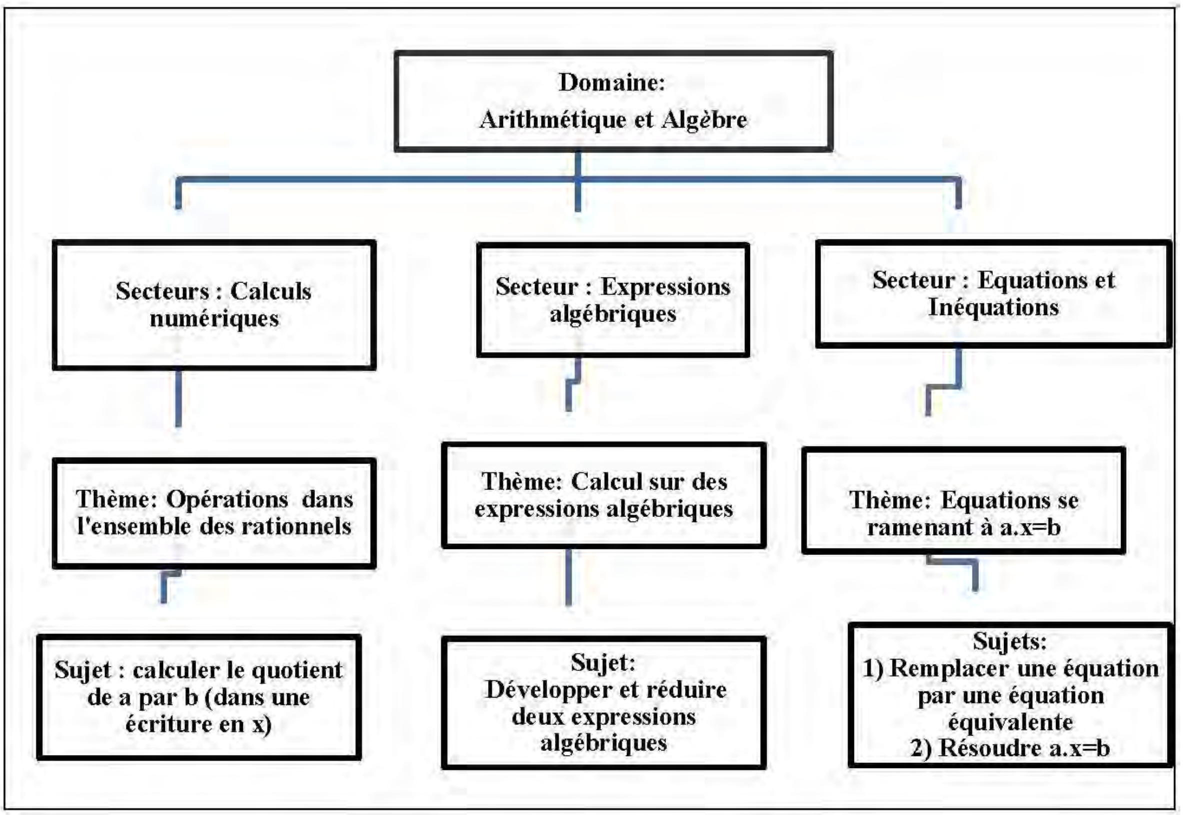


Tableau 6 : Milieux cognitifs du professeur pour l'équation $3x = 4$

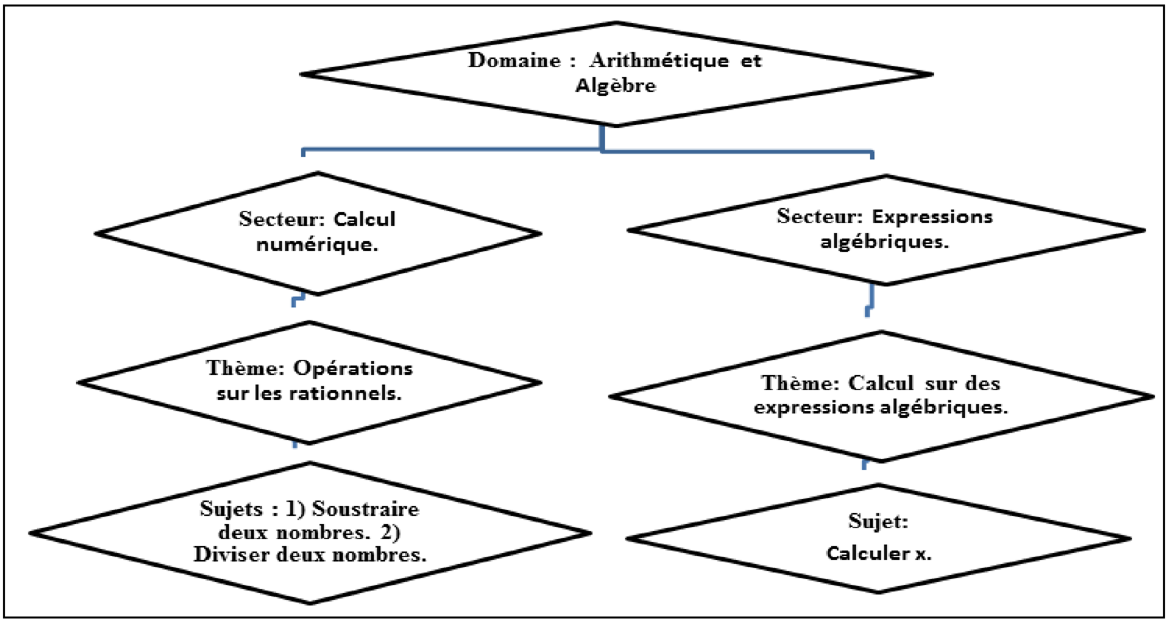


Tableau 7 : Milieux cognitifs des élèves pour l'équation 3x=4

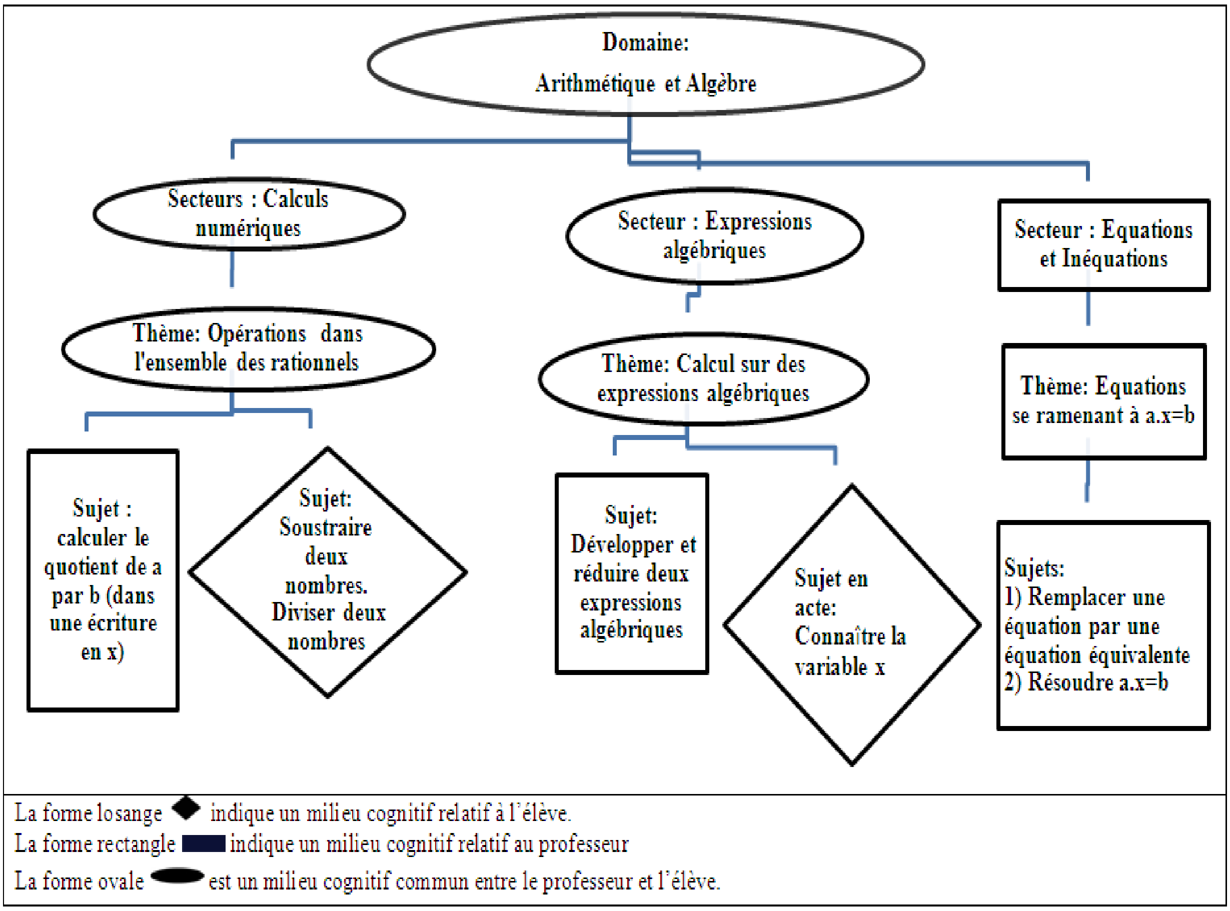


Tableau 8 : dédoublement des milieux pour l'équation 3*x* = 4

Le problème didactique que nous avons montré dans cet épisode, et qui est sans doute propre à d'autres situations d'enseignement, consiste à bâtir un nouveau savoir à partir des milieux faits des connaissances anciennes des élèves, afin que ces connaissances coïncident plus ou moins avec l'organisation des connaissances attendues pour le milieu du professeur, alors qu'il y a une différence entre les milieux propres à chaque pôle. Professeur et élèves adhèrent à la nouvelle tâche en se référant à deux milieux différents. Ce qui est milieu pour le professeur n'est pas perçu comme tel aux yeux des élèves, dans le sens où le milieu dans lequel évolue l'élève n'est pas le milieu que le professeur souhaite dévoluer. Les techniques des élèves montrent qu'ils s'interdisent implicitement de pénétrer dans des niveaux évoqués institutionnellement par le professeur. Pour effectuer le travail qui leur est montré ou dévolu, les élèves se sont placés au sein des secteurs, thèmes et sujets qui leur procureront les éléments du nouveau milieu. Le tableau 8 montre comment peuvent se combiner ces deux milieux dans la situation de classe évoquée.

REFERENCES

Abou Raad N. (2006) *Le calcul algébrique en France et au Liban. Etude comparée de l'enseignement de la factorisation et des erreurs des élèves.* Thèse de doctorat en Sciences de l'Education de l'Université Aix-Marseille I.

Araya, A. & Matheron, Y. (2015). Un modèle pour l'évocation des connaissances en classe de mathématiques. Micro-cadre institutionnel de la mémoire didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, 35/1, La Pensée Sauvage, Grenoble

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19/1, La Pensée Sauvage, Grenoble

Brousseau, G. (1998) Théories des situations didactiques. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactiques des mathématiques. In Maury, S. et Caillot, M., Rapport au savoir et didactiques. Paris : FABERT

Kazan, E. (2014). Etude du phénomène didactique, Le dédoublement des milieux dans l'enseignement ordinaire et dans des ingénieries. Thèse de doctorat, Aix Marseille Université.

Matheron, Y. & Salin, M. (2002). Les pratiques ostensives comme travail de construction d'une mémoire officielle de la classe dans l'action enseignante. Revue Française de Pédagogie, n° 141, octobre-novembre-décembre 2002.

Matheron, Y. (2010). Contribution à l'étude du travail de la mémoire dans les processus d'enseignement et d'éducation, Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches. Université de Provence.

Matheron, Y. (2011). Le travail du professeur de mathématiques relatif à la conception et la réalisation des phases de dévolution, Education & Didactique, 5(3)

Curriculum Libanais (1997). CRDP, Décret 10227, 8 mai 1997.

Manuel : Mathématiques (2009) Education de base 7. Collection puissance.

ESPACIO DE TRABAJO PERSONAL E IDÓNEO DE PROFESORES FRENTE A TAREAS ALGEBRAICAS

Mauricio Gamboa Inostroza[a], Arturo Mena-Lorca[a]

[a]Universidad de Concepción, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

maurigamboa@udec.cl, arturo.mena@pucv.cl

Este trabajo estudia el Espacio de Trabajo Personal e Idóneo de Profesores de Matemática que ejercen docencia en Chile, específicamente en el dominio del álgebra. La idea principal es dar evidencias del Espacio de Trabajo personal de un profesor frente a una tarea algebraica y contrastarlo con el espacio de trabajo idóneo que a priori utilizaría a la hora de ejecutar una clase. Para lo anterior, se solicita a profesores que resuelvan ciertas tareas algebraicas para luego, en función del tipo de respuesta, hacer una entrevista para indagar en su Espacio de Trabajo idóneo. Los resultados dan cuenta que los profesores sitúan sus actividades en el álgebra elemental y les complica en demasía trabajar con herramientas de la aritmética para hacer un tránsito hacia el álgebra.

Palabras clave: *Paradigmas algebraicos, Espacio de Trabajo Matemático, Formación de Profesores, ETM idóneo, ETM personal.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha habido una gran cantidad de investigaciones acerca del álgebra y, específicamente del pensamiento algebraico (Cai y Knuth, 2011; Kieran, 2007; Gamboa y Mena-Lorca, 2017). En la mayoría de ellas se supone que la labor de los docentes es proveer de las herramientas necesarias para que el estudiante logre enfrentarse a la sociedad como un ciudadano competente. Sin embargo, al inicio de la educación secundaria los estudiantes continúan experimentando muchas dificultades en relación con el trabajo algebraico y, en general les complica el proceso de transición de la aritmética al álgebra (Kieran, 2007). Ahora bien, según Chimoni, Pitta-Pantassi y Christou (2018), a pesar de la extensa literatura sobre los enfoques de los estudiantes y el diseño de ambientes de apoyo, existe poca exploración del conocimiento matemático de los profesores con respecto a la enseñanza y aprendizaje del álgebra. En el enfoque tradicional que se da al álgebra en la escuela, se separa el estudio de la aritmética, reservado para la escuela primaria, del estudio del álgebra, que se trata como parte de los currículos de secundaria (*Ibíd*.; Gamboa y Mena-Lorca, 2017). Lo antes descrito suele basarse en la premisa de que una base sólida en conocimiento aritmético es un requisito previo para un comienzo exitoso en álgebra (Chimoni *et. al*., 2018; Carraher y Schliemann, 2007). Esta separación del contenido ha sido criticada por la investigación centrada en la llamada *Early Algebra* (Carraher y Schliemann, 2007; Kieran, 2007), que propone que el desarrollo del pensamiento algebraico se inicie en la educación primaria. El pensamiento algebraico puede desarrollarse en el contexto del aprendizaje numérico en primaria y secundaria, particularmente en relación con patrones lineales figurativos (Radford, 2008), y/o por medio de las ecuaciones usando herramientas de reducido contenido simbólico (Gamboa y Mena-Lorca, 2017). Para Chimoni *et. al.* (2018), una de las razones para explicar el problema del tránsito de la aritmética al álgebra es el papel decisivo de los docentes en la gestión de las actividades *ad hoc*; ellos deberían poder analizar detalladamente los enfoques de resolución de problemas de los estudiantes para alentarlos adecuadamente respecto del pensamiento algebraico. Ante esto, nos hemos propuesto identificar cómo influye el conocimiento personal de un profesor de matemática en su práctica cuando enseña álgebra en algún nivel educativo determinado, y si puede adaptarse para trabajar tareas similares en otros niveles. *A priori*, pensamos que con frecuencia su concepción del álgebra es un obstáculo a la hora de realizar la actividad de enseñanza si supone un trabajo fuertemente simbólico, sin reparar en que hay una mirada más elemental del trabajo algebraico que podría generar mejores escenarios para que los estudiantes transiten de la aritmética al álgebra. Por ello recurrimos a la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, en particular la idea de paradigmas algebraicos (Gamboa y Mena-Lorca, 2017), que se detallará más adelante.

EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO Y EL ETM_{ALG}

La teoría del Espacio de Trabajo Matemático, ETM (Kuzniak, 2011), tiene como objeto comprender lo que se pone en juego a la hora de abordar una tarea en algún dominio matemático en el ámbito escolar (Geometría, Estadística, Álgebra, etc.). Se configura el ETM como un ambiente pensado y organizado por los individuos que les permite resolver problemas o tareas matemáticas. En la escuela, estos individuos no son expertos sino estudiantes principiantes o avanzados (*Ibíd.*).

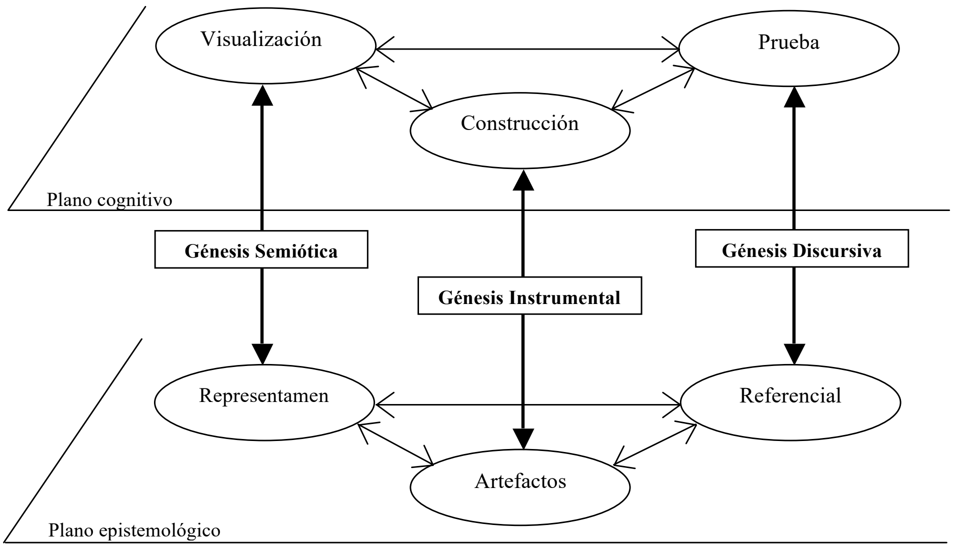


Figura 2: El Espacio de Trabajo Matemático y sus Génesis

Figura 1: El Espacio de Trabajo Matemático y sus Génesis: traducido de Kuzniak (2011)

3.3. Las componentes del plano epistemológico y cognitivo

En el espacio de trabajo geométrico, son tres las componentes en la dimensión puramente matemática que caracterizan la actividad geométrica, a saber: un espacio real y local que es la concepción por el individuo del modelo geométrico, con un conjunto de objetos concretos y tangibles; un conjunto de artefactos corresponde a todo lo que le permite al geómetra manipular los objetos geométricos con el objetivo de abordar un problema; un sistema teórico de referencia corresponde al conjunto de definiciones, propiedades y relaciones articuladas por los axiomas y que finalmente determinan el modelo geométrico. La ampliación de la teoría hacia el trabajo matemático en general provocó que se generaran cambios. Si bien los artefactos y el referencial teórico como componentes de base en el plano epistemológico no sufrieron modificaciones para el ETM, la componente ligada al espacio y a las configuraciones

El ETM considera además el análisis de los ambientes que organiza el profesor cuando implementa una clase de matemática. En el ETM se concibe el estudio de la matemática como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos de un dominio, en un ambiente *ad hoc*, mediante la articulación de dos *planos*: el *epistemológico*, referido a la matemática en juego, y el *cognitivo*, centrado en el sujeto y estrechamente ligado al anterior; en tales planos se identifican *componentes* o *polos* (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014), que se señalan en la Figura 1. Una primera aproximación a pensar en un Espacio de Trabajo Algebraico, ETM_{Alg}, la hicieron Mena-Lorca, Mena-Lorca y Morales (2012). Se veía necesario precisar que un ETM_{Alg} debería considerar a estudiantes (o profesores) trabajando en problemas algebraicos y los aspectos cognitivos implícitos –intuición, experiencia, razonamiento– de la disciplina que conocen. Luego surgió en forma natural la pregunta de si el trabajo de aula se realiza de acuerdo a diferentes miradas de la disciplina (si el profesor trata de imponer a los estudiantes su propio modo de trabajo en ella o bien reconoce una manera diferente de trabajar de estos) y con ello la de determinar el rol de los objetos y/o el tipo de argumentación que se acepta.

El ETM en el álgebra

Se proponen allí los tres *paradigmas algebraicos* que se describen más adelante, para un *Espacio de Trabajo Algebraico*. En Gamboa y Mena-Lorca (2017) se profundiza en esos paradigmas, en el marco de un *Espacio de Trabajo Matemático en el dominio del Álgebra* (ETM_{Alg}), y se les da un doble sustento. Por una parte, se pone de manifiesto, mediante un análisis documental, que el desarrollo histórico del álgebra está directamente ligado al trabajo aritmético, y cómo hay en la historia problemas matemáticos que inicialmente fueron abordados con una mirada *elemental*, pero, a medida que el conocimiento evolucionó, sus procedimientos de resolución se volvieron más complejos. Por otra parte, la propuesta de paradigmas se sustenta también en un *análisis de contenido* (Berelson, 1971) del currículo y en investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

La descripción del ETM_{Alg}, particularmente de los paradigmas, parece más complicada que en otros dominios (Gamboa, 2019). Ello es coherente con Piaget (1982), por ejemplo, quien expresa que el álgebra presentó muchos más problemas para delimitar el desarrollo de los niveles operacionales que las otras disciplinas. Esa dificultad repercute en la determinación del comportamiento de cada uno de los elementos de los planos epistemológico y cognitivo presentes en este ETM. La *visualización*, por ejemplo, puede estimarse un buen ejemplo: desde ya, hay una problemática relativa a la diferencia de significados que puede deducir una persona según el orden en que esté dispuesta la expresión que lo utiliza (distributividad vis a vis factorización, e. g.). Por otra parte, los métodos del álgebra tienden a ser más generales que en otras disciplinas (y los cuantificadores implícitos son determinantes); el lenguaje algebraico suele ser comparativamente más codificado, sobre todo en los primeros estadios de conocimiento; y la carencia de simbolismo al generalizar es una dificultad adicional.

Los Paradigmas Algebraicos

Basado en lo expuesto anteriormente, Mena-Lorca, Mena-Lorca, Morales y Montoya (2012) y luego Gamboa y Mena-Lorca (2017) consideran tres paradigmas algebraicos, los cuales se profundizan en Gamboa (2019):

A1: etapa de la *aritmética elemental* o "álgebra *presimbólica",* en la cual el trabajo es mediado por representaciones concretas y/o pictóricas, lenguaje numérico, incluso escrito, reconocimiento de patrones. Los individuos pueden establecer relaciones entre variables por medio de objetos (concretos o pictóricos) que representan cantidades desconocidas. El trabajo instrumental es guiado por la intuición, y por lo general se hace por medio de indagación, y ensayo y error. Los procesos de razonamiento son más bien de comprobación, y la generalización es un poco limitada y no formal.

A2: etapa del *álgebra elemental*, que ya presenta una posibilidad de trabajar con letras, variables, incógnitas, e incluso con ciertos parámetros. Los individuos son capaces de modelar situaciones en lenguaje algebraico (de manera simbólica y gráfica) y resolver tareas operando algorítmicamente (ecuaciones, e. g.), reconocen y utilizan funciones; frente a una situación de exploración son capaces de generalizar por medio de símbolos, operar con técnicas avanzadas (usan herramientas tecnológicas), etc.

A3: etapa de las *estructuras algebraicas*, que corresponde a un estadio más avanzado y contemporáneo, en el cual el sujeto se acerca a las ideas generales de conjuntos y de diversas estructuras algebraicas. El trabajo es normado por las propiedades del sistema axiomático en que se trabaja, y los procesos de resolución de tareas requieren de herramientas teóricas más avanzadas.

Los distintos Espacios de Trabajo Matemático

La teoría de los ETM distingue tres diferentes espacios de trabajo (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016). el ETM de referencia, que corresponde al espacio de trabajo paradigmático, es decir, concierne a la teoría matemática en sus diferentes dominios (números, geometría, álgebra, estadística, etc.), y puede ser encontrada en textos o manuales escolares que están dirigidos a un grupo específico de personas. El ETM-personal, que usa un individuo (estudiante, profesor) en su propia construcción de conocimiento y de sus capacidades cognitivas; este espacio de trabajo es característico de cada individuo, por lo que el ETM personal del docente difiere del ETM personal de su estudiante. finalmente, está también el etm-idóneo, que utiliza un profesor para cooperar en la construcción del ETM-personal de sus alumnos (Montoya, Mena-Lorca, y Mena-Lorca, 2014).

EL ESTUDIO: ETM$_{ALG}$ PERSONAL E IDÓNEO EN PROFESORES

Nuestro propósito es estudiar las diferencias en el espacio de trabajo personal en álgebra que poseen los docentes de matemática y aquel que utilizan en la enseñanza a la hora de ejecutar clases de matemática. En nuestra investigación, con base en lo expuesto por Kuzniak y Nechache (2017), adoptamos la idea de “ETM idóneo potencial”, referido a aquellas tareas propuestas que pueden ser llevadas a cabo en las clases, es decir, lo que el profesor propone para ser ejecutado, y que incluye aquello que el profesor considera *a priori* como tareas efectivas para la adquisición de aprendizajes por parte de los estudiantes. El ETM idóneo potencial permanece en el ámbito del pensamiento y no refiere a la ejecución en aula; sin embargo, ETM idóneo potencial y ETM idóneo “real” están íntimamente relacionados

La recolección de información: Diseño y Metodología

Para la recolección de datos en este trabajo se decidió aplicar dos procesos. El primero corresponde a un Cuestionario con cuatro tareas aplicado a ocho docentes en la especialidad de matemática, los cuales imparten clases el segundo ciclo de enseñanza básica y enseñanza media del sistema educacional chileno. El segundo proceso consiste en entrevistas subsecuentes realizadas a algunos de los encuestados. Las tareas fueron elegidas tras la discusión con un grupo de profesores que participaron en un programa de maestría, aludiendo a la idea de “tarea emblemática” de Kuzniak y Nechache (2017). (Tabla 1, a continuación).

(1) El gavilán:	Un gavilán atacó a un palomar. Las palomas unidas enfrentaron con éxito el ataque de tal ave de rapiña. Furioso, el gavilán exclamó: *¡Adiós, mis cien palomas!* –sugiriendo que el triunfo de las palomas se debía a su cantidad–. Ante ello, una de las palomas respondió: – *No somos cien como usted dice Sr. Gavilán. Pero, nosotras más nosotras, más la mitad de nosotras, más la mitad de la mitad de nosotras, más usted Sr. Gavilán, sí sumamos cien…* Entonces, ¿cuántas palomas había en el palomar?
(2) El pastel	La madre de Juan ha preparado un pastel para él y sus amigos. Luego que entre Pedro y Juan se comieran un cuarto del pastel, Nicolás se comió un tercio de lo que quedaba. Si sobraron dos kilos de pastel, ¿cuántos kilos pesaba inicialmente el pastel?
(3) La reja de maderos	Se desea construir una reja con maderos de 1 metro dispuestos como en la figura:  ¿Cuántos maderos de 1 metro se necesitan para construir 6 metros de reja? ¿Cuántos maderos de 1 metro se necesitan para construir 30 metros de reja? **Explique.** ¿Cuántos metros de reja se pueden construir con 209 maderos? **Explique.**
(4) El presupuesto	Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar $1.200 al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

Tabla 1: Tareas aplicadas a los docentes

Para cada una de las tareas, en su análisis *a priori* se consideraron respuestas que se clasificaron en los paradigmas A1 y A2, lo cual permite hacer una aproximación paradigmática al ETM personal de los docentes. Las entrevistas semiestructuradas tenían el objetivo de profundizar en su ETM personal, sus creencias acerca del álgebra, e identificar las estrategias que utilizarían como docentes a la hora de ejecutar dichas tareas en el aula. Ello tenía como finalidad principal caracterizar *a priori* el ETM idóneo potencial de los docentes al trabajar la enseñanza de esas tareas en algún contexto dado y compararlo con su ETM personal evidenciado en el cuestionario y en la primera parte de la entrevista. Para las entrevistas, se consideraron dos docentes en función de la disponibilidad y más importante la naturaleza de las respuestas entregadas en el cuestionario, las cuales entregaban información más completa que los otros participantes.. Detalles adicionales a los aquí presentados se encuentran en Gamboa (2019).

ANÁLISIS DE LOS DATOS: CUESTIONARIO A PROFESORES

El Gavilán

Para responder esta pregunta los ocho docentes participantes utilizan la estrategia de planteamiento y resolución de la ecuación. Este tipo de respuesta –como se planteó en nuestro análisis *a priori*– sitúa a los docentes en el paradigma A2. Se registra claramente el uso de algoritmos de resolución de ecuaciones, por lo que su trabajo se relaciona con la génesis instrumental. Aunque utilizan distintas técnicas en la operatoria algebraica, de igual forma se termina en la expresión $x = 36$, como lo evidencia, por ejemplo, P5 (Figura 2). Sólo P2, tras encontrar el valor de la incógnita, comprueba el resultado para afirmar que el valor obtenido corresponde a la respuesta correcta (Figura 3).

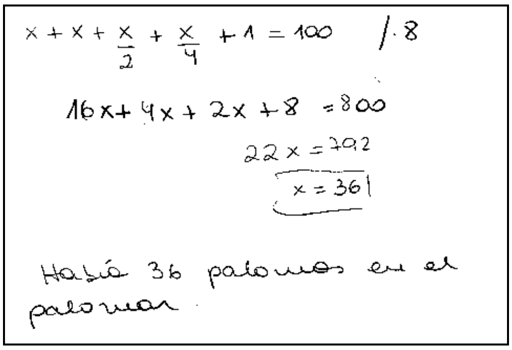


Figura 2 Respuesta de P5 al problema 1

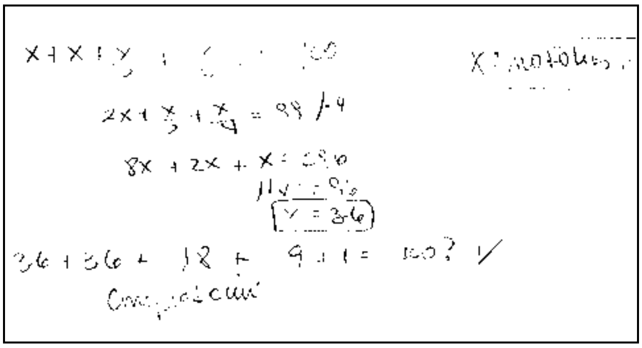


Figura 3 Respuesta de P2 al problema 1

Ante este problema, todos los participantes evidencian estar situados en el paradigma A2, pues realizan el trabajo operatorio del álgebra en el sentido habitual sin ningún inconveniente; además, están convencidos de que el solo hecho de resolver la ecuación (y todo lo que esto conlleva: leyes de cancelación, axiomas de cuerpo, etc.) les dará la respuesta. P2 presenta un caso particular de esta estrategia, al plantear y resolver la ecuación correctamente pero luego comprobar si el resultado es el que corresponde; en este sentido consideramos que P2 activa la génesis discursiva en su trabajo.

El pastel

A pesar de que *a priori* se pensó que usar una representación gráfica del pastel sería una estrategia útil para poder resolver el problema, solo P2 muestra recurrir a ella en su respuesta (Figura 4); de hecho, además justifica su respuesta redactando el procedimiento utilizado para llegar a ella. Se evidencia así que el trabajo que hace P2 se encuentra en el paradigma A1, activando en este caso las génesis semiótica y discursiva. Por otra parte, la estrategia de plantear la ecuación fue la más usada por los informantes para solucionar el problema; ellos usan distintas técnicas para la operatoria algebraica, sin embargo, todos terminan en la expresión $x = 4$ kg (Figura 5). Esto indica que el trabajo que realizan se encuentra en el paradigma A2 y se relaciona con la génesis instrumental.

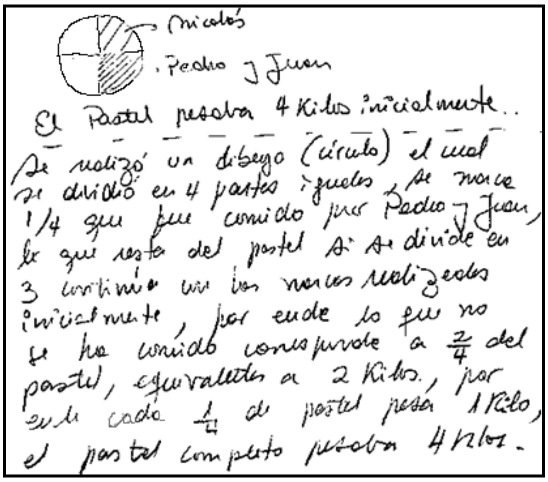


Figura 4: Respuesta de P2 al problema 2

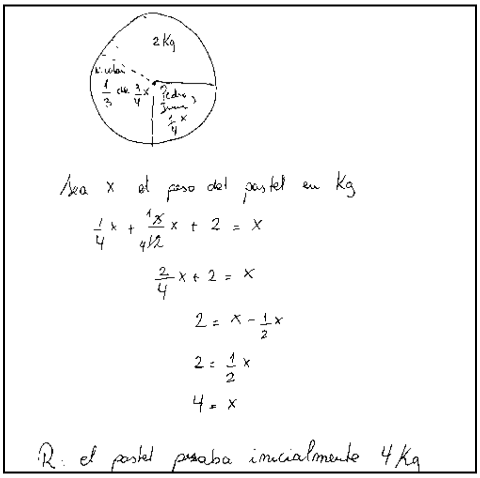


Figura 5: Respuesta de P3, problema 2

Si bien se evidencia que esta estrategia domina como método para dar respuesta al problema, algunos participantes inician su desarrollo utilizando otra técnica, como se observa en la figura 4. P3 evidencia intenciones de aplicar la estrategia de representación gráfica, aunque aplica finalmente el plantear y resolver una ecuación.

La reja de maderos

Un trabajo interesante es el que realiza P4 pues, antes de dar respuesta a las partes a., b. y c. de la tarea, hace un análisis exploratorio para llegar a una fórmula que le permita responder las preguntas propuestas. Además, verifica que esa fórmula es correcta comparando los resultados obtenidos hasta $n = 5$ con los que obtiene por conteo (Figura 6). Esto es interesante porque el trabajo realizado se encuadra finalmente en A2, pero muestra que en realidad transita desde A1 con un trabajo con representaciones propio de ese paradigma, para luego generalizar pasando por el conteo y definir finalmente la fórmula que define el término general llegando así a A2, y mostrando evolución desde A1 a A2 en la activación de las génesis semiótica e instrumental.

Por su parte, P2 evidencia desde el comienzo un trabajo muy similar al de P4, pero sin representaciones pictóricas, y encuentra una regularidad que lo lleva a proponer una fórmula. Utilizando esa fórmula, resuelve las partes b. y c. de la tarea, por lo que su trabajo algebraico se sitúa en el paradigma A2.

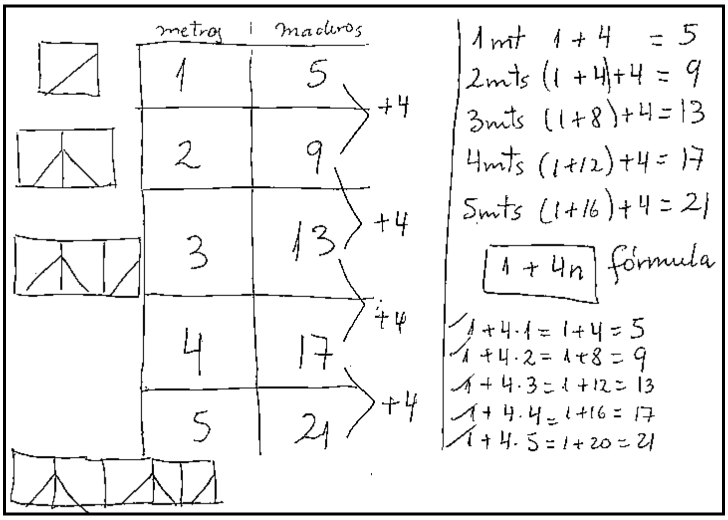


Figura 6: Análisis exploratorio de P4.

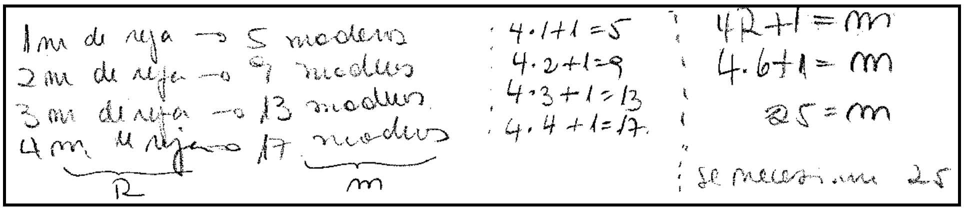


Figura 7: Respuesta de P2 a la parte a. de la tarea.

El presupuesto

Nuevamente, la estrategia más utilizada es el planteamiento y resolución de ecuaciones. Los docentes que la utilizan se sitúan sin lugar a dudas en A2. Lo peculiar de la resolución con esta estrategia es el uso de distintos planteamientos de ecuaciones: algunos usan un sistema, otros se apoyan en la proporcionalidad. En P2 y P5 se distingue con claridad que su trabajo se relaciona con la génesis instrumental. P2 define las variables que utiliza, por lo que el análisis de su respuesta es más claro para el lector (Figura 8). A diferencia de P2, el docente P5 no define la variable que utiliza y además obtiene dos valores distintos para una misma variable “x”, lo que dificulta entender su procedimiento de resolución. A pesar de los planteamientos constatados y de las distintas técnicas usadas en el trabajo con la operatoria algebraica, todos concluyen que lo recibido es $144.000. De las respuestas obtenidas, solo en dos se evidencia esta estrategia, ligada fuertemente a la génesis instrumental en A1 (Ver tabla 2).

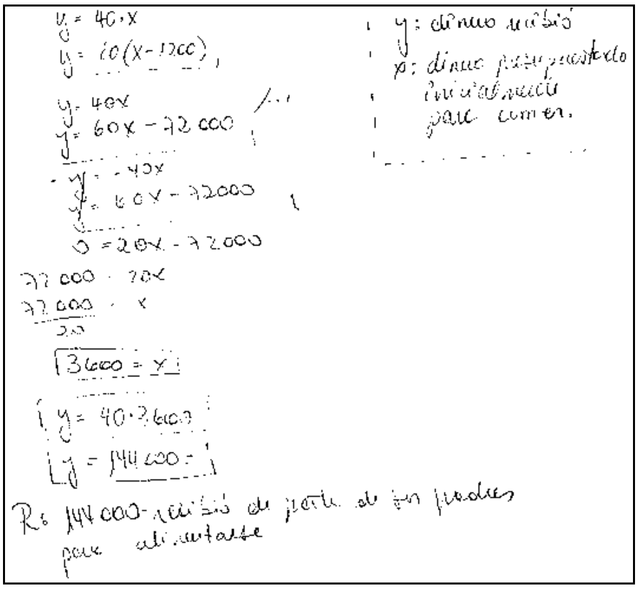


Figura 8: Respuesta de P2

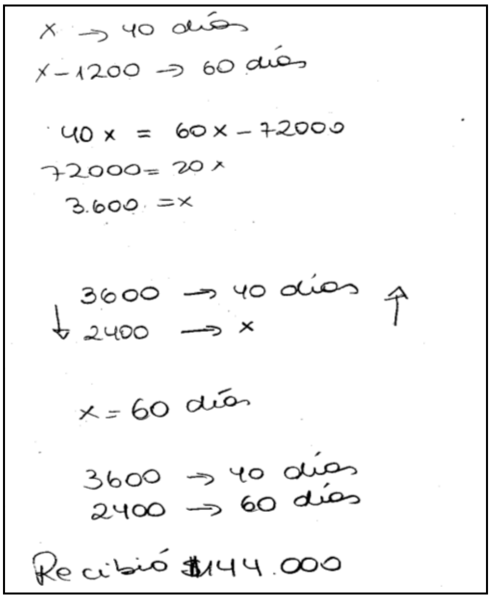


Figura 9: Respuesta de P5

Resumen del trabajo personal de los profesores

En la Tabla 2 encontramos clasificadas, según los paradigmas algebraicos A1 y A2, las respuestas de los ocho docentes a los cuatro problemas planteados en el cuestionario.

	1	2	3a	3b	3c	4
P1	A2	A2	A2	A2	A2	A1
P2	A2	A1	A2	A2	A2	A2
P3	A2	A2	A1	A2	A2	A2
P4	A2	A2	A2	A2	A2	A1
P5	A2	A2	A2	A2	A2	A2
P6	A2	A1	A1	A1	A2	A2
P7	A2	A2	A1	A1	A1	A2
P8	A2	A1	A1	A2	A2	A2

Tabla 2: Categorización del trabajo personal según paradigmas algebraicos

LAS ENTREVISTAS: EL ETM IDÓNEO POTENCIAL Y LOS CONFLICTOS

Al responder el cuestionario, P2 entrega respuestas completas e interesantes: no solo aplica algoritmos, operaciones y/o propiedades de carácter aritmético o algebraico, sino que también verifica si estas respuestas son correctas según el contexto del problema. Muestra distintas habilidades y técnicas, algunas muy distintas a la mayoría de los otros participantes. Por lo anterior se le hace una entrevista en que P2 diseña posibles clases en el aula, las cuales no se alejan de lo evidenciado en el cuestionario respecto a su paradigma dominante. Una excepción se halló en su propuesta para la tarea 4, para la cual, como la mayoría de los docentes, planteó un sistema de ecuaciones, pero en la entrevista habla de la estrategia de ensayo y error, adecuando, a nuestro parecer, su ETM personal a fin de generar un ETM que permita circulaciones adecuadas para el aprendizaje. En este sentido expone que la herramienta sistema de ecuaciones es de mayor complejidad para adaptarla a niños de esta edad, y que debe idear algo novedoso y que se adecue a las herramientas y habilidades que poseen estos niños:

[Entrevistador]: Y si tuvieras que enseñarlo en un curso menor a primero medio ¿qué estrategias utilizarías?

[Profesor P2]: En los pequeños, más pequeños, yo partiría con desafíos. Hay ciertos eh… problemas que aparecen en… distintas páginas por ejemplo de *Facebook* o de internet que está asociada por ejemplo… alguna que recuerde eh… un plátano –sale un plátano– más una manzana más una pera equivale a un determinado número; después tres manzanas equivalen a otro determinado número [...] Por lo tanto, cuando son más pequeños les llama la atención eso, como está ligado al tema de ecuaciones sería una buena manera partir desde ahí, en cursos más pequeñitos ir jugando eh… con este tipo de juegos y desafíos

Por su parte, P1 también entrega respuestas interesantes respecto de aquella tarea, y evidencia trabajar en el paradigma A1, pero en la entrevista se percata que también se puede resolver de manera algebraica:

Entrevistador: Ahora vamos a pasar al último problema que es el del presupuesto. Debido a la resolución que tuviste en los problemas anterior es que eh… cómo resolviste este problema nos llamó la atención. Por eso me gustaría saber ¿por qué lo resolviste de esta manera?

Profesor P1: Creo que aquí me voy a demorar un poco porque estoy tratando de recordar qué es lo que hice con este problema. [...] eh… voy a seguir buscando ese… ese recuerdo, esa idea, ese alumbrazo que en ese momento eh… que en ese momento tuve para poder darle solución a ese problema mmm… algebraicamente eh… lo estaba planteando ahora y sí se puede, pero ya recordaré qué es lo que ocupé ahí.

Se indagó si acaso adecua su trabajo algebraico para enseñar la tarea a estudiantes más pequeños a primero medio, ante lo cual evidencia que no tiene una claridad o estrategia que le permita conducir dicho proceso; su respuesta, similarmente a P2, tiene una buena intención al validar procesos de respuesta más elementales, pero no evidencia tener herramientas para conducir un proceso de aprendizaje en esas circunstancias:

Entrevistador: Y con niños más pequeños ¿qué estrategias utilizarías?

Profesor P1: Bueno, la estrategia que utilizaría acá sería eh como… cómo fue… mi forma de abordar el problema de hecho eh… de esa manera lo eh… lo prepararía, entendiendo de que los estudiantes pequeños no tienen conocimiento avanzado del álgebra, por lo tanto resulta bastante útil la idea de que… [...] eh… para poder llevar a cabo esta… esta resolución a pequeños sería buscar las distintas formas de que ellos podían eh… con los elementos que tienen a mano con lo que se sabe porque es un problema un poco más complejo por lo tanto eh… tratar de hacer las conexiones con lo que ellos ya saben y a partir de eso eh… darle solución

CONCLUSIÓN

Respecto del cuestionario, en la mayoría de los casos los docentes solucionan los problemas a través de la aplicación directa del álgebra, y muestran que su paradigma dominante es A2. En las entrevistas, evidencian que enseñarían los problemas planteados de una forma similar a la planteada por ellos, admitiendo, sin embargo, que considerarían válidos los procedimientos por ensayo y error de los estudiantes; no obstante, aunque, como se mostró anteriormente, tienden a validar que sus estudiantes recurran a estrategias distintas a las de ellos, no hacen una conexión entre el trabajo de los estudiantes y el que ellos como profesores proponen o esperan. En este sentido, se infiere que tienen claridad de que los estudiantes son capaces de resolver las tareas de una manera más elemental, pero a la hora de explicitar la forma y no pueden exponer claramente un diseño coherente para el desarrollo de esas tareas. Esto implicaría que enseñan de tal forma que los estudiantes obtengan respuestas y utilicen modelos similares a los que ellos usaron. Lo anterior proporciona evidencia de que su ETM personal, muy ligado a A2, es muy similar a su ETM idóneo, aunque muestran capacidad de flexibilizar su ETM personal, siendo conscientes de que hay otras estrategias –que ellos no han internalizado–. Lo anterior, como resultado de esta investigación, contrasta con la idea de realizar las adecuaciones necesarias para lograr una trasposición efectiva a la hora de enseñar. De hecho, las adecuaciones presentadas por los docentes tienden a quedar en un ámbito más bien externo, tal como el de usar material concreto, flexibilizar el vocabulario (referirse a la incógnita como "la cosita", e. g.) y similares, lo cual dista de lo que cabría esperar de un ETM idóneo apropiado. A nuestro modo de ver, esto entrega antecedentes para mejorar la formación inicial y continua de los profesores para la enseñanza del álgebra.

REFERENCIAS

Berelson, B. (1971). *Content analysis in communication research*. Glencoe, Ill: free press.

Cai, j., & Knuth, e. (2005). Developing algebraic thinking: multiple perspectives. ZDM*, 37(1),* 1-3.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, vol. II, pp. 669-70, Charlotte: Information Age Publishing.

Chimoni, M., Pitta-Pantazi, D., Christou, C. (2018). Examining early algebraic thinking: insights from empirical data. *Educational Studies in Mathematics, 98*, 57-76

Gamboa, M. (2019). *Paradigmas y Espacio de Trabajo Matemático en el dominio del álgebra.* Tesis (no publicada) para optar al grado de Doctor en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.

Gamboa , M. y Mena-Lorca, A. (2017). Paradigmas algebraicos y Espacio de Trabajo Matemático. *Actas* del *Quinto Simposio de Espacio de Trabajo Matemático*, pp. 193-205. University of Western Macedonia, Florina, Grecia

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 1-22.

Kieran, C. (2007). Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, pp. 11-50. Rotterdam: Sense.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 17*(1), 1-16.

Kuzniak, A. & Nechace, A. (2017). Tâches Emblématiques dans l'étude des ETM idoines et personnels : Existence et Usages. *Actas* del *Quinto Simposio de Espacio de Trabajo Matemático*, pp. 145-155. University of Western Macedonia, Florina, Grecia

Mena-Lorca, A; Mena-Lorca, J.; Morales, A. y Montoya, E. (2012). Hacia una noción de Espacio de Trabajo Algebraico. *Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático*, Universidad de Montreal, Canadá, noviembre.

Montoya, E.; Mena-Lorca, A; y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el Espacio de Trabajo Matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *17*(1) 57-71

Piaget, J. y García, R. (1982). *Psicogenésis e historia de la ciencia.* Ciudad de México: Siglo XXI.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM, 40*(1), 83–96.

SOBRE ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS QUE LOS PROFESORES EN EJERCICIO MANIFIESTAN EN LA ENSEÑANZA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Patricia Vásquez-Saldías[a], Arturo Mena-Lorca[a], Jaime Mena-Lorca[a], Miguel Rodríguez[b]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [b]Universidad Playa Ancha, Chile

patricia.vasquez@pucv.cl, arturo.mena@pucv.cl, jaime.mena@pucv.cl, mrodriguez@upla.cl

En este artículo reportamos una investigación que involucró a un grupo de cinco profesores chilenos en formación continua; los cuales utilizaron la metodología Lesson Study para diseñar e implementar clases sobre Sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para analizar las tareas presentadas por el grupo de profesores recurrimos a la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, ETM. El principal resultado consiste en que, independientemente que los profesores hayan estudiado los sistemas de ecuaciones lineales en un curso de álgebra lineal en su formación inicial, el ETM idóneo de estos profesores se sustenta en lo que los textos escolares plantean y/o en las orientaciones que el Ministerio de Educación de Chile propone.

Palabras clave*: Sistemas de ecuaciones, Espacio de Trabajo Matemático, Estudio de Clases.*

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES EN EL CURRÍCULO ESCOLAR Y LA NECESIDAD DE SU ESTUDIO

En el currículo escolar chileno se pone énfasis, particularmente en Matemáticas, en la necesidad de promover habilidades de pensamiento, según expresa el Ministerio de Educación chileno (MINEDUC, 2015). Junto con ello, se precisa que el estudiante "se valga de los conocimientos adquiridos para describir y analizar el mundo con el fin de desenvolverse efectivamente en él" (MINEDUC, 2015, p. 94).

El subsector de Matemáticas chileno se organiza en cuatro ejes temáticos: Geometría, Números, Álgebra y funciones, Probabilidad y estadística. Para cada uno se explicitan los *Objetivos de aprendizaje* (OA) en relación a las habilidades que se deben desarrollar (Resolver problemas, Argumentar y comunicar, Modelar, y Representar).

En 1[er] año medio (alumnos cuyas edades fluctúan entre 14 y 15 años), el eje Álgebra y funciones tiene dentro de sus OA el de "Resolver sistemas de ecuaciones lineales 2×2 [dos ecuaciones y dos incógnitas] relacionados con problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, mediante representaciones gráficas y simbólicas de manera manual y/o con software educativo" (MINEDUC, 2015, p. 119), y dado que el eje

Números tiene como OA "Calcular operaciones con números racionales, de manera simbólica", el ámbito numérico para esos sistemas de ecuaciones es el de los números racionales. Sin embargo, los textos escolares provistos por el MINEDUC no hacen cuestión del asunto y, para visualizar las 'rectas' involucradas en estos sistemas, las presentan como si fueran *continuas,* esto es, considerando el sistema de los números reales.

En 2° medio, el campo numérico se amplía al de los números reales y en el eje de Álgebra y funciones, para los sistemas lineales (SEL) 2×2, hay dos OA, a saber: "Resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2, de manera gráfica y algebraica" y "Resolver problemas que involucren sistemas de ecuaciones lineales de 2×2, sobre todo en situaciones de modelación". En los textos de ese nivel la resolución se hace por los métodos de igualación, de reducción, de sustitución, de Cramer, y gráfico; y la solución ahora se presenta, para el caso de dos rectas de pendiente distinta (no se advierten casos en que se trate de la intersección de dos rectas donde una de ellas sea vertical), como un elemento de $\mathbf{R}^2$ donde ellas se intersecan.

En 3º medio, la Guía didáctica para el profesor contiene un capítulo dedicado a las rectas en el plano; allí, la determinación de una recta que pasa por dos puntos se hace de dos maneras. Una de ellas considera un tratamiento puramente algebraico, presentando a la recta por medio de su ecuación, como $y = mx + n$ o $x = m'y + n'$, reemplazando allí las coordenadas de los puntos. La otra manera, en principio geométrica, comienza con el teorema de Tales, pero luego torna a un tratamiento algebraico. El capítulo termina indicando las diferentes maneras en que se presenta una recta, según su posición en el plano (vertical, horizontal u oblicua).

Es conveniente notar que en textos del estudiante para 3° medio (por ejemplo, Saiz y Blumenthal, 2017), en la sección de ejercicios y problemas, muchos de ellos son rutinarios, algunos se presentan en el registro algebraico, otros en el registro geométrico, y que son escasos los problemas no rutinarios, tal como el que se muestra en la Figura 1:

> José Miguel estudiaba con Carlos para su prueba de matemática. Carlos vio el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} 4x - 3y + 1 = 0 \\ 2x - 1{,}5y + 9 = 0 \end{array}\right|$ y dijo que no tenía solución, sin necesidad de resolverlo. ¿Estaba Carlos en lo cierto? ¿Pueden decir cuál fue el razonamiento de Carlos para dar su respuesta?

Figura 1: Problema no rutinario que conlleva a la activación de un proceso discursivo (Saiz y Blumenthal, 2017, p.274).

Tal como se aprecia, este problema procura que el alumno logre una articulación entre los aspectos algebraico y geométrico que se ponen en juego (Montoya, Mena-Lorca, Mena-Lorca, 2014). Esa articulación la podría obtener al observar que los coeficientes de x e y en las ecuaciones de una de las rectas, son la mitad (o el doble) de los coeficientes de la otra recta, y al ubicarlas en el plano cartesiano se dará cuenta que son rectas paralelas y por tanto el sistema no tiene solución. Otra manera es que el estudiante se enfoque en un ambiente numérico, al considerar la ecuación $4x - 3y + 1 = 0$ y note que al dividirla por dos se obtiene la ecuación $2x - 1{,}5y + 1{,}5 = 0$ y, como el ámbito numérico es el cuerpo de los reales, debería indicar que la segunda ecuación del Sistema de ecuaciones no es compatible con esta última, por lo tanto no existe un par ordenado de números reales que satisfaga ambas ecuaciones.

Por lo general, los allí denominados problemas suelen estar muy dirigidos, sin preguntas que lleven a la activación de un proceso discursivo que provoque argumentaciones y pruebas en el sentido de Kuzniak y Richard (2014).

Por ejemplo:

Dado P: $(4, -3)$ se suma tres unidades a la abscisa y cuatro a la ordenada, de tal manera que se obtiene la abscisa y la ordenada de un segundo punto llamado P'. Ahora bien, para conseguir P'', a la abscisa de P réstale tres unidades, y también quítale 4 unidades a la ordenada.

- **a.** Escribe las coordenadas de P' y P''.
- **b.** Muestra que estos tres puntos pertenecen a la misma recta.
- **c.** Escribe la ecuación principal de la recta sugerida anteriormente, con la pendiente como número racional. ¿Qué encuentras de particular del numerador y denominador de esta fracción y las unidades de formación de P'?
- **d.** ¿Es verdad que P es el punto medio de $\overline{P''P'}$? Justifica tu respuesta.
- **e.** Repite las preguntas anteriores pero con las siguientes condiciones: a partir de P resta tres unidades a la abscisa y suma cuatro a la ordenada, para obtener P'. Para la abscisa de P'' suma tres unidades a la abscisa de P, y resta cuatro a su ordenada, para conseguir la ordenada de P''.

Ahora bien, supongamos que P'' se haya formado con la mitad de las unidades mencionadas en el enunciado, manteniendo las mismas condiciones anteriores para obtener los otros puntos,

- **f.** ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de P''?
- **g.** Encuentra las medidas $\overline{PP'}$, $\overline{P''P}$ y $\overline{P''P'}$?
- **h.** Haciendo uso de lo obtenido en **e.**, muestra que estos tres puntos son colineales.
- **i.** ¿Cuál es la razón entre $\overline{P''P}$ y $\overline{PP'}$?
- **j.** Conforme a lo respondido en **g.** ¿por qué P no es el punto medio de $\overline{P''P'}$? Justifica tu respuesta.

Figura 2: Problema rutinario que promueve el uso de coordenadas (Saiz y Blumenthal, 2017, p.288).

Cabe mencionar que en ese texto los sistemas de ecuaciones se utilizan en otras situaciones, tales como la obtención de los coeficientes de una función cuadrática al conocer tres de sus puntos, y muestra con esto la necesidad de estudiarlos.

La enseñanza y aprendizaje del Álgebra lineal es un tema recurrente en la literatura (Dorier, 2000; Harel, 1989; Robinet, 1986; Dorier y Sierpinska, 2002). Según Sierpinska (2000) al alumno le dificulta transitar desde las acostumbradas rutinas de cálculo a un estudio que incluye demostraciones; de hecho, ante estas tiende a volver a sus prácticas anteriores (Robinet, 1986). Por su parte, el profesor (por un conflicto entre sus ETM personal e idóneo, nos parece), suele impartir el tema con un enfoque más bien teórico (Sierpinska, 2000), y desestimando a menudo la visualización (Zazkis, Dubinsky y Dautermann, 1996). Incluso, como muestran Vásquez, Mena-Lorca y Mena-Lorca (2016), puede ocurrir que los profesores en ejercicio opinen que el currículo escolar no incluye álgebra lineal.

En cuanto a la comprensión del conjunto solución de un SEL, diversas investigaciones dan cuenta de las dificultades que esto presenta (De Vries y Arnon, 2004); incluso, cómo algún método de resolución habitual puede oscurecer aquella comprensión (Rodríguez, Mena-Lorca, Mena-Lorca, Vásquez -Saldías y Del Valle, 2019).

Por tanto, en atención a los distintos elementos que hemos desplegado y referenciado, nuestra motivación es seguir ahondando en la problemática que subyace a los SEL, incorporando para ello una mirada más ecléctica. Es decir, conciliando aspectos cognitivos, epistemológicos y los recursos tecnológicos para allanar el camino de los SEL desde la matemática escolar hasta la matemática universitaria. Activando, en dicho camino, la estructura algebraica y un modelo geométrico que estimule niveles progresivos de abstracción durante su comprensión y construcción.

MARCO TEÓRICO

El objetivo en este trabajo es describir y caracterizar, de acuerdo con los planos epistemológico y cognitivo que utiliza el Espacio de Trabajo Matemático, las tareas que los docentes del estudio utilizaron para abordar la enseñanza de los SEL, las cuales fueron tomadas por ellos desde distintas fuentes: los textos escolares, la guía para el docente y otras que propusieron los propios profesores.

El marco teórico utilizado, el *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM), concibe la investigación como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos de un dominio, en este caso el Álgebra Lineal (Kuzniak, 2011; Kuzniak & Richard, 2014).

El marco distingue lo que designa por *ETM de referencia*, aquel sustentado por la comunidad matemática; el *ETM idóneo*, que una comunidad escolar organiza en torno a una tarea (en nuestro caso, relativa a la solución de los SEL) para permitir y comprometer a los alumnos en la resolución o abordaje de tareas matemáticas; y el *ETM personal,* el de trabajo del individuo (Kuzniak y Richard 2014). Ahora bien, en la implementación del ETM idóneo interviene naturalmente el ETM personal del profesor, y así también, en la resolución de la tarea, se hace presente el ETM personal del alumno. De tal manera, el marco da una particular claridad, en particular, al estudio de los desempeños de los profesores, para quienes el ETM idóneo permanece excesivamente ligado a su ETM personal, lo que se traduce en dificultades en los aprendizajes de los alumnos (Montoya, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2014).

El marco del ETM plantea que en el desarrollo de una tarea matemática por parte de un individuo se articulan dos planos: el *plano epistemológico*, vale decir, el paradigma de la matemática y su institucionalidad, y el *plano cognitivo* del individuo; así manifiesta de manera detallada cómo los diferentes aspectos que comporta el saber matemático son incorporados a la cognición del individuo. Cada plano está constituido por tres componentes o polos (ver Figura 3): en el plano epistemológico están los polos del *representamen* (los signos: íconos, índices, símbolos o gráficas);

de los *artefactos* (medios para la acción: herramientas, simbólicas o materiales); y el *referencial* (la teoría: procedimientos, propiedades, definiciones y fundamentos). El plano cognitivo está conformado por la *visualización*, la *construcción* y la *prueba*. La visualización corresponde a un proceso en el cual se estructuran las informaciones aportadas por los diagramas o los signos; la construcción es relativa a una significación mediada por instrumentos; y la prueba se entiende como un proceso discursivo que permite construir argumentaciones.

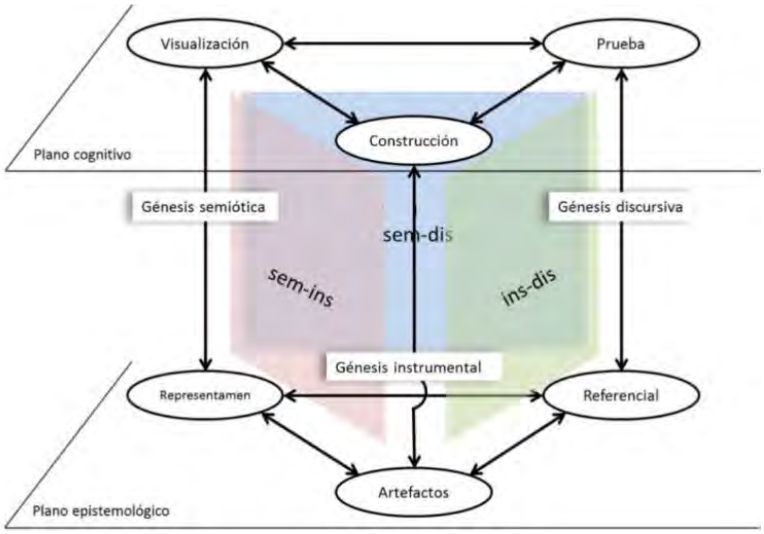


Figura 3: Representación del plano cognitivo y epistemológico (Kuzniak & Richard 2014, p.2)

METODOLOGÍA

La importancia de la reflexión en las prácticas profesionales, enunciadas en variadas latitudes y múltiples ámbitos (Shulman, 1986; Schön, 1987), ha ido también en aumento en la enseñanza escolar en el país, particularmente a partir del proyecto nacional *Fortalecimiento de la formación inicial docente*, que comenzó a fines del siglo anterior y duró un lustro (MINEDUC, 2007).

En relación al desarrollo profesional docente, hemos considerado la metodología colaborativa de Lesson Study, que ha mostrado ser apropiada para desarrollar y fortalecer la formación de los profesores en Japón; y que, en la enseñanza de la Matemática, se está extendiendo por el mundo (Isoda, Arcavi y Mena-Lorca, 2012). Ella presenta una posibilidad de ayudar en el tránsito abrupto entre la formación inicial y el desempeño del profesor en el sistema (Korthagen, 2010; Fernández, 2010).

A Chile, la metodología Lesson Study llegó a través de un convenio entre el MINEDUC y la Agencia Japonesa de Cooperación Internacional, JICA, firmado en 2005 (Estrella, Mena-Lorca y Olfos, 2018), que procuraba atender a los resultados de la evaluación del sistema educacional del país realizada por la OCDE (2004).

En nuestro caso, esta metodología es incorporada a un programa de formación continua: los estudiantes, profesores en ejercicio, en el tercer y penúltimo semestre de un programa de dos años de duración, forman grupos de trabajo de acuerdo al nivel escolar en el cual se desempeñan; revisan los programas de estudio que deben desarrollar en sus escuelas, colegios, liceos, institutos profesionales o establecimientos de educación superior, y deciden la problemática que van a abordar para colaborativamente planificar, implementar y realizar una clase preparada según esa metodología. La Figura 4 representa de forma gráfica la secuencia a seguir:

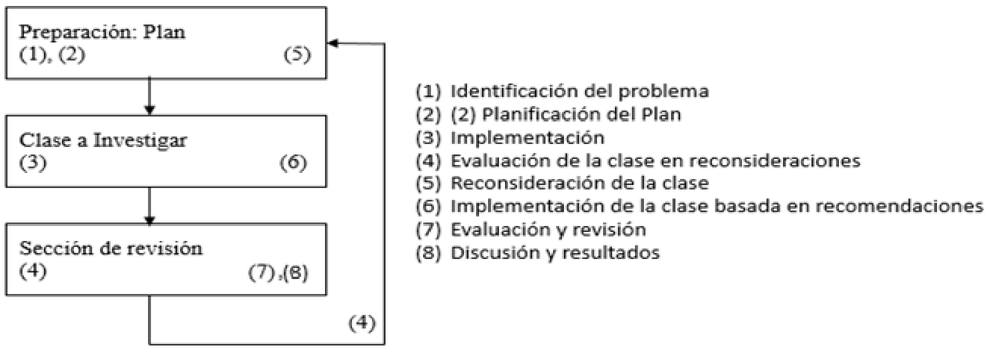


Figura 4. Secuencia a seguir en el Lesson Study (Isoda et al., 2012, p. 27)

En la discusión de cada grupo, los participantes debaten de manera abierta y horizontal, aportan con las fortalezas de cada cual: algunos tienen mayor conocimiento matemático, otros son más cuidadosos con la metodología, por nombrar algunos aspectos que intervienen en dicha instancia; potenciándose las capacidades de cada cual (Isoda *et al*., 2007).

Siguiendo a Stake (2007), hicimos un estudio de caso, para comprender las particularidades de uno entre los grupos de profesores, prestando especial atención a lo que se refleja de él en relación a los aspectos epistemológicos que exteriorizan sus componentes al abordar e implementar el tema de los SEL 2×2. En adelante, el caso se denominará *el grupo*.

A fin de fortalecer el plano epistemológico, cada uno de los profesores que participan del Lesson Study debe estudiar en detalle el programa, los textos utilizados, las sugerencias didácticas que facilitan el entorno escolar, provengan estas del MINEDUC o de otros medios. En cada una de las etapas mencionadas, los profesores además tienen a sus compañeros de grupo como principales colaboradores. Por su parte, el desarrollo del programa de formación va a la vez proveyendo y fortaleciendo a los estudiantes-profesores con distintas perspectivas teóricas en Didáctica de la Matemática, discutiendo en común las presentaciones que hacen los diferentes grupos de su planificación, implementación (en las respectivas instituciones en las cuales se desempeñan) y revisión de las clases, cuidando especialmente que haya claridad en el aspecto propiamente matemático. Para ello, en la tradición del programa, el grupo debe incluir explícitamente elementos de Ingeniería Didáctica (Artigue, 2014) en su proyecto.

Es en este escenario que nos proponemos analizar si las tareas propuestas por el grupo efectivamente propiciaron la activación de las respectivas génesis y, a la vez, si éstas estimularon o no la circulación entre los planos anteriormente mencionados, a partir de las reflexiones que realizaron los propios profesores participantes del estudio (Montoya, Mena y Mena, 2014). Para ello se establecieron categorías de análisis, en relación con los estándares referenciales, que se conciben como un instrumento de apoyo para las instituciones formadoras de profesores de Educación Media en matemática, estos son un parámetro para orientar las metas en la formación de sus estudiantes.

Así también, se definieron categorías de análisis para establecer con ello los elementos necesarios para el fortalecimiento del ETM-idóneo de un profesor que enseña conceptos del Álgebra lineal (Vásquez, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2015).

Una vez que el grupo decide sobre la problemática a abordar y ha examinado elementos que van a configurar o robustecer el plano epistemológico correspondiente, continúa con la elaboración del plan de clases, que contiene una serie de tareas o actividades que propondrá durante la clase. Las cuales se presentan a continuación:

1. *¿Es cierto que una ecuación de primer grado de dos variables representa siempre a una recta?*
2. *¿Qué representa gráficamente un sistema de ecuaciones de* 2×2, *es decir, dos ecuaciones y dos incógnitas?*
3. *Representa gráficamente de todas las formas posibles dos rectas en el plano cartesiano.*
4. *Describan el conjunto solución de los sistemas graficados en la actividad 3 y asócienlo a una representación geométrica, según la posición de las rectas.*

ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES DESDE EL ETM

La respuesta a la primera es que ella es verdadera sólo si el espacio vectorial ambiente es $\mathbf{R}^2$. El grupo de *Lesson Study* presenta la siguiente respuesta experta: "Ecuaciones lineales de varias variables admiten también interpretaciones geométricas cuando los coeficientes de la ecuación pertenecen a un cuerpo. Así, una función lineal de dos variables de la forma $f(x,y) = a_1x + a_2y$ representa una recta en un plano". Lo que deja ver una interpretación errada al no observar que la expresión define una curva en $\mathbf{R}^3$.

Cabe indicar que la edad de los estudiantes que atiende cada uno los profesores participantes de este estudio, de ahora en adelante profesor, fluctúa entre 14 a 17 años. Por lo tanto, según los programas de estudio del MINEDUC, los elementos matemáticos que ellos pueden desplegar son aquellos que están relacionados con la geometría analítica.

Los artefactos que se relacionan con las soluciones de la ecuación están vinculados con la geometría sintética. Podemos decir entonces que esta pregunta promueve la génesis discursiva, activando la génesis semiótica, de modo que se active el plano

Sem-Dis; los componentes del plano epistemológico corresponden a: *representamen*, ecuación de primer grado de dos variables; referencial, el lugar geométrico que corresponde a una recta en el plano cartesiano; y artefactos, las maneras de solucionar el sistema.

Las preguntas de devolución que se le hacen al profesor al presentar ecuaciones con una o dos incógnitas en $\mathbf{R}^2$, están relacionadas con la cantidad de soluciones que estas tienen y con su gráfica.

En la segunda tarea, se activa la génesis semiótica. Esta pregunta pone en relieve el plano cognitivo, en el cual los procesos de visualización, construcción y de prueba dan sentido a las ecuaciones, representándolas gráficamente. Para indicar que el sistema representa a dos rectas coincidentes, paralelas o secantes. Luego se hace la pregunta *¿Cómo se representan en el plano estas ecuaciones?* Con el propósito de activar esta génesis.

La tercera tarea permite la interacción del plano epistemológico con el plano cognitivo. Los alumnos deben representar en el plano cartesiano dos rectas cualesquiera, incluyendo el caso de rectas coincidentes. Además, deberán notar que, al tratarse de rectas oblicuas, el que la pendiente sea positiva o negativa no es relevante para su representación gráfica.

La cuarta tarea se presenta en el plano epistemológico; los alumnos deben ir a su referencial teórico para describir el conjunto solución, que corresponde a los puntos del plano que verifican las dos ecuaciones. Por ello, este conjunto puede ser vacío –en caso que las rectas sean paralelas no coincidentes–, o estar formado por un punto, o ser una recta –cuando las ecuaciones son equivalentes–.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Como principal hallazgo, hemos comprobado que el Álgebra lineal de la formación inicial no está presente en el ETM-idóneo de los profesores participantes del estudio. Así, su polo referencial proviene principalmente de los textos escolares y los apoyos que entrega el MINEDUC. Por ejemplo, las soluciones de un sistema no homogéneo no se vinculan con funciones lineales ni con transformaciones del espacio; además, la respuesta experta que ellos presentan a la tarea 1 está en estrecha relación con lo que aporta el programa del MINEDUC (2016, p.31), sin observar que la función de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}$ dada por $f(x, y) = a_1x + a_2y$ que tiene como gráfica un plano en $\mathbf{R}^3$.

Los participantes declaran que la operatoria vinculada a los procedimientos algebraicos se convierte en un obstáculo didáctico para la comprensión del conjunto solución de un SEL, lo cual se puede soslayar al apoyarse en visualizaciones y significados geométricos.

De esta forma, entendemos que están debilitadas la génesis discursiva y semiótica, y que la génesis instrumental se reduce al manejo correcto de símbolos sin un significado geométrico ni base teórica.

En términos generales, la metodología de *Lesson Study* nos parece una metodología apropiada para la formación continua, pues permite abordar de manera colaborativa una tarea que sobrepasa la capacidad de un individuo al trabajar aisladamente. Sobre todo cuando su formación inicial se enfocó en potenciar los aspectos teóricos del álgebra lineal sin conectarlos con ideas elementales de la geometría o los sistemas de ecuaciones lineales (Agencia de calidad de la Educación, 2016; Dorier, 2000; Robinet, 1986). En los casos estudiados, esa metodología permite cada vez establecer el plano epistemológico con claridad.

El fundamento teórico de Didáctica de la Matemática y los elementos de Ingeniería Didáctica sobre los cuales estos estudios se realizaron permiten una discusión más profesional y fructífera, una comprensión más clara de los fenómenos que se deben abordar, y una anticipación más competente de las reacciones de los alumnos en las clases.

Por su parte, el marco del ETM permite clarificar dónde se sitúa el profesor en su desempeño y cómo este puede errar en su cometido por no distinguir entre su ETM-personal y su ETM-idóneo. Esto último, que se había ya reportado anteriormente (Montoya, Mena-Lorca y Mena-Lorca, (2014), esta vez se comprobó permanentemente en las discusiones y presentaciones que el grupo en estudio realizó reportando el avance y la materialización de su proyecto.

REFERENCIAS

Agencia de Calidad en la Educación. (2016). *Estudios sobre Formación Inicial Docente*. Santiago: Agencia de Calidad en la Educación. Recuperado el 3 de enero de 2018 de http://www.agenciaeducacion.cl/wpcontent/uploads/2016/02/Formacion_inicial_docente_en_Chile.pdf

Artigue, M. (2014). Didactic Engineering in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 159-162). Netherlands: Springer.

Borja, I. (2015). Conjunto solución a un sistema de ecuaciones lineales: Una mirada desde la perspectiva de la teoría APOE. (Tesis Doctoral no publicada). CINVESTAV-IPN, México.

De Vries, D. y Arnon, I. (2004). Solution–What does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. In M. Johnsen Høines and A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the international Group for Psychology of Mathematics Education*, 2, (pp. 55-62).

Dorier, J. L. y Sierpinska, A. (2002). *The teaching and learning of mathematics at university level*. Recuperado el 03 de enero de 2018 desde https://link.springer.com/content/pdf/bfm%3A978-0-306-47231-2%2F1.pdf.

Dorier, J.- L. (2000). Recherche en histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions. Les cahiers du Laboratoire Leibniz, N° 12. Grenoble: Laboratoire Leibniz-IMAG.

Estrella, S., Mena-Lorca, A., y Olfos, R. (2018). Lesson Study in Chile: a very promising but still uncertain path. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin, and A. Takahashi (Eds.). *Mathematics lesson study around the world: Theoretical and methodological issues*. Cham: Springer.

Fernández, M. (2010). Investigating how and what prospective teachers learn through microteaching Lesson Study. *Teaching and Teacher Education, 26*(2), 351-362.

Harel, H. (1989). Learning and Teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*, 139-148

Isoda, M., Arcavi, A., y Mena-Lorca, A. (Eds.). (2012). *El Estudio de Clases japonés en Matemáticas*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso. (Tercera edición).

Korthagen, F. (2007). The gap between research and practice revisited. *Educational Research and Evaluation: An International Journal on Theory and Practice*, *13*(3), 303-310.

Korthagen, F. (2010). How teacher education can make a difference. *Journal of Education for Teaching*, *36*(4), 407-423.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*(4), 181-197.

MINEDUC. (2007). *Fortalecimiento de la Formación Inicial Docente. 1998-2001.* Santiago: Ministerio de Educación y Universidad Central.

MINEDUC (2015). *Curriculum Nacional*. Revisado el 3 de enero de 2018 desde http://www.curriculumnacional.cl/

MINEDUC (2016). *Programas de Estudio*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación. Revisado el 3 de enero de 2018 desde http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-34359_programa.pdf

Montoya, E., Mena-Lorca, A., y Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*(4-I), 181-197.

OCDE. (2004). *Revisión de políticas educacionales. Chile.* París: Organización para la Cooperación y el desarrollo Económicos.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire. *Cahier de Didactique des Mathématiques 29*, (pp. 1-103), IREM de Paris VII

Rodríguez M., Mena-Lorca A., Mena-Lorca J., Vásquez-Saldías P. y Del Valle M. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales. *Enseñanza de las Ciencias 37*(1)71-92.

Saiz, O.; Blumentahl, B. (2017). *Matemática tercero medio*. Santiago de Chile: Ediciones Cal y Canto.

Schön, D. (1987). Educating the reflective practitioner: Toward a new design for teaching and learning in the professions. San Francisco: Jossey-Bass.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of the students' thinking in algebra. En J.-L.Dorier (Ed.), *On teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stake R.E. (2007). *Investigación con estudio de casos.* Ediciones Morata. Madrid, España.

Vásquez, P., Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2015). El álgebra lineal en el currículo y en la formación inicial. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez (Eds.), *Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp.405-409), Villarrica, Chile.

Vásquez, P., Mena-Lorca, A. y Mena-Lorca, J. (2016). Construcción de un espacio de trabajo matemático idóneo en álgebra lineal: *episteme* versus currículo. En F. Rodríguez, R. Rodríguez y L. Sosa (Eds.), *Investigación e Innovación en Matemática Educativa* (pp.204-209). Oaxaca, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a student's understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 435-457.

COMPRENSIÓN DEL USO DE LAS HERRAMIENTAS TEÓRICAS Y OPERATORIAS EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO Y EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL PROFESOR

Paula Verdugo-Hernández[a] y Gonzalo Espinoza-Vásquez[b]

[a]Universidad Adventista de Chile, Chillán, Chile, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

paulaverdugo@unach.cl y gonzalo.espinoza.v@gmail.com

Este trabajo considera los marcos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) para estudiar la relación entre el uso de las herramientas teóricas y operacionales y el conocimiento de la estructura de las matemáticas. Para ello se estudia una tarea propuesta y desarrollada por un profesor universitario, en la cual el uso de teoremas permite evidenciar el conocimiento movilizado por la actividad matemática que requiere su resolución. Concluimos que la complementariedad entre los subdominios del MTSK y componentes del ETM permite describir cómo el profesor utiliza dichas herramientas y cuál es el rol de ellas dentro de su conocimiento especializado.

Palabras clave: *ETM, MTSK, Herramientas, Conexiones, Sucesiones de números reales.*

INTRODUCCIÓN

La comprensión de un fenómeno depende de la óptica con que este se observe o, en el caso de las investigaciones, el marco teórico que se elija para su estudio. En ese sentido, la complementación entre distintos enfoques podría proveer una visión global del fenómeno de acuerdo a los elementos teóricos que se consideren (Godino et al., 2013). La vinculación entre teorías permite dar una perspectiva amplia del fenómeno o robustecer el análisis de tareas que se realice del mismo. Por ejemplo, para conseguir la conexión entre teorías, Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) muestran diferentes estrategias que permiten establecer dicha conexión, entre ellas la estrategia de combinar diferentes elementos de las teorías para realizar dicho vínculo.

Los marcos teóricos que consideramos en este trabajo corresponden al Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) y al Espacio de Trabajo Matemático (ETM), que buscan comprender el conocimiento del profesor de matemáticas y la actividad matemática en el desarrollo de un problema, respectivamente. Ambos marcos, aunque poseen orientaciones diferentes, han sido utilizados de manera conjunta en el análisis de la práctica del profesor de matemáticas (e.g., Espinoza-Vásquez, 2016; Flores-Medrano et al., 2016; Vasco et al., 2016; Zakaryan, Ribeiro y Espinoza-Vásquez, 2016) avanzando en las líneas propuestas por cada marco mediante la combinación de sus elementos al momento de realizar los análisis. Existen varios trabajos que buscan establecer relaciones y conexiones entre el MTSK y el ETM (ver Gómez-Chacón, Kuzniak, Nikolantonakis, Philippe y Vivier, 2016). En ellos se postula que el estudio de estas relaciones posibilita profundizar en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y las acciones de enseñanza que este conocimiento sustenta en un esquema más amplio en el cual se incorpora el saber sabio y los espacios de trabajo personales de los estudiantes, así como las diferencias entre planos y génesis.

Por ejemplo, el trabajo de Vasco et al. (2016) estudia el conocimiento especializado de un profesor universitario sobre el álgebra lineal y el espacio de trabajo matemático ETM idóneo durante una sesión de clases sobre la multiplicación de matrices. El conocimiento evidenciado permite explicar las génesis que el profesor privilegia en el trabajo matemático que propone. Los autores concluyen que "el MTSK del profesor parece explicar en parte el trabajo matemático que propone en el aula, esto es, el ETM idóneo del profesor" (p. 236). Así, el análisis con ambos marcos ayuda a comprender de mejor manera la actividad matemática que propicia el profesor y cómo se explica a partir de la comprensión de su conocimiento.

Ambos marcos permiten analizar la actividad matemática del profesor; el ETM desde la óptica del ETM idóneo del profesor y el MTSK desde el conocimiento especializado que sustenta dicha práctica (e.g., Flores-Medrano et al., 2016; Vasco et al., 2016) o centrándose en uno de los ETM del profesor – personal o idóneo- y en subdominios particulares del MTSK (e.g., Zakaryan et al., 2016; Espinoza-Vásquez, Ribeiro y Zakaryan, 2018). Se observa que el profesor es uno de los elementos que permite la articulación entre estos marcos (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016). Por ejemplo, el trabajo de Flores-Medrano et al. (2016) muestra cómo el análisis de la práctica de aula del profesor desde la perspectiva de ambos marcos permite comprender mejor la actividad matemática que propicia el profesor y cómo se puede interpretar desde su conocimiento especializado. No obstante, son pocos los trabajos que abordan la relación más estrecha entre los componentes del ETM y las categorías de los subdominios del MTSK (e.g., Espinoza-Vásquez, 2016), quedando abierta la línea de investigación que profundiza en el estudio de componentes particulares entre ambos marcos.

En el presente trabajo intentaremos abordar la relación entre los componentes de ambos marcos respecto de la función que cumplen las herramientas, teóricas y operacionales, en el ETM y cómo estas se pueden visualizar desde el MTSK para comprender la actividad matemática que busca propiciar el profesor, siguiendo una de las líneas reveladas en Gómez-Chacón, Kuzniak, Nikolantonakis et al. (2016).

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

El MTSK surge como un modelo analítico que permite estudiar el conocimiento que muestra, posee y/o declara el profesor de matemática (Carrillo et al., 2013) y propone una conceptualización para el conocimiento del profesor de matemáticas que considera tres dominios: el Conocimiento de la Matemática (*Mathematical Knowledge* - MK[1]) con los subdominios para el conocimiento de los temas, el conocimiento de la estructura de las matemáticas y el conocimiento de la práctica matemática; el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK[1]) con los subdominios para el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas; y el dominio de las Creencias sobre las matemáticas, sobre su enseñanza y sobre su aprendizaje. La inclusión de este dominio pretende generar interpretaciones cada vez más precisas de estas prácticas, pues pese a no ser vistas como conocimiento se considera que ellas permean a todos los subdominios e influencian la práctica de aula del profesor (Carrillo et al., 2018). A continuación, se describen sucintamente los subdominios que conforman los dominios MK que serán utilizados en nuestro análisis. Estas definiciones fueron extraídas de Flores-Medrano et al. (2016).

El dominio del Conocimiento Matemático abarca el conocimiento del profesor de la matemática como disciplina científica en un contexto escolar y contempla lo siguiente:

Conocimiento de los Temas (KoT[1]): Describe el qué y el cómo el profesor de matemática conoce las temáticas que enseñará. El KoT considera las conexiones intra-conceptuales que tienen lugar en la proximidad de un objeto y las conexiones que permiten, por ejemplo, vincular diferentes representaciones del mismo concepto o diferentes formas de concebir un mismo concepto. Abarca aspectos fenomenológicos y aplicaciones, definiciones, propiedades y sus fundamentos del tema, así como los registros de representación y procedimientos.

Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM[1]): Corresponde al conocimiento del profesor de las relaciones entre distintos contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013), ya sean del curso que está impartiendo o del tema de estudio con contenidos de otros cursos o niveles educativos, no como su organización curricular sino que desde una perspectiva de la temporalidad y delimitación del concepto; se trata específicamente de conexiones entre temas matemáticos (Carrillo et al., 2014). El KSM considera el conocimiento de conexiones que dan una visión secuenciadora del tema que permiten relacionar los contenidos actuales con contenidos anteriores (temporalidad): las **conexiones de simplificación** dan una visión de la matemática avanzada desde una perspectiva elemental, o relacionan los contenidos actuales con contenidos posteriores; las **conexiones de complejización** dan una perspectiva avanzada de la matemática elemental. El KSM también incluye el conocimiento de conexiones que identifican la amplitud del

[1] Las siglas utilizadas en el modelo corresponden a los nombres de los dominios y subdominios en ingles debido a que la primera presentación del modelo fue en un congreso internacional de habla inglesa.

MK: Mathematical Knowledge
KSM: Knowledge of the Structure of Mathematics
KoT: Knowledge of Topics
KPM: Knowledge of Practice in Mathematics

concepto (delimitación): el conocimiento sobre **conexiones transversales** que son las conexiones entre contenidos que posean alguna propiedad común o que los modos de pensamiento asociados a ellos contemplen una misma idea central, y las **conexiones auxiliares** del concepto con otro que sirva de ayuda en su tratamiento sin ser parte de las cualidades o red conceptual del objeto de estudio.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM[1]): comprende el conocimiento de las características de la práctica matemática sobre cómo proceder y generar conocimiento en matemáticas. Incluye el conocimiento sobre las prácticas relacionadas a la matemática en general y el conocimiento sobre las prácticas relacionadas a una temática en particular.

La división en dominios y subdominios expuestos es con fines analíticos pues éstos se presentan en forma integrada, esto es, se espera observar distintos subdominios simultáneamente durante la práctica del profesor.

Espacio de Trabajo Matemático

El Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) tiene por objetivo principal modelizar el trabajo matemático en un contexto educativo, con el fin de favorecer y mejorar las condiciones en las cuales se produce el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para definir el ETM se introducen dos planos horizontales, el plano epistemológico y el plano cognitivo, los cuales a su vez se dividen en 3 polos. El plano epistemológico está constituido por los polos del referencial (formado por las propiedades, teoremas y definiciones), el representamen (signos semióticos), y artefactos (materiales o simbólicos). El plano cognitivo está constituido por los polos de visualización, construcción y prueba. Ambos planos están conectados mediante distintas génesis:

- Una *génesis instrumental* que permite hacer operatorios a los artefactos en el proceso constructivo.
- Una *génesis semiótica* basada en los registros de representación semióticos que asegura a los objetos tangibles del ETM su estatus de objetos matemáticos operatorios.
- Una *génesis discursiva* de la prueba que da sentido a las propiedades para ponerlas al servicio del razonamiento matemático.

Es importante señalar que el ETM no debe ser visto como la unión de las componentes de ambos planos, sino que más bien como articulaciones activadas por al menos dos génesis. De este modo, según Kuzniak y Richard (2014), el Espacio de Trabajo Matemático cuenta con tres planos verticales, los cuales se activan por medio de una determinada tarea, cada uno definido por la presencia de dos génesis: Semiótico-Instrumental [Sem-Ins]; Semiótica-Discursiva [Sem-Dis] e Instrumental-Discursiva [Ins-Dis] (Kuzniak y Richard, 2014).

Se identifican tres tipos de ETM: el ETM de referencia, del cual depende la organización esperada del espacio de trabajo, el que se define sólo sobre la base de criterios matemáticos; el ETM idóneo, que consiste en el acondicionamiento y organización del ETM de referencia, con el fin de convertirlo en un espacio de trabajo efectivo e idóneo en una institución educativa dada con una función definida; el ETM personal, que reside en la manera en que el ETM idóneo es utilizado por los estudiantes y también por sus profesores. Cada individuo se apropia y ocupa su propio ETM personal con sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas (Kuzniak, 2011). Además, se deben considerar los siguientes tres paradigmas:

- **Análisis-Geométrico/Aritmético** (AG), que permite interpretaciones, con implícitos, nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real.
- **Análisis-Calculatorio** (AC) en el que las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.
- **Análisis-Real** (AR) caracterizado por un trabajo que considera la aproximación y abiertos, incluso lo topológico; definiciones y propiedades son establecidas teóricamente permitiendo un "trabajo ε" específico de este paradigma cotas, desigualdades, “lo despreciable”.

También se utilizará el término de *herramienta* (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016) para referirnos a aquellas componentes del plano epistemológico que tienen un uso potencial para resolver un problema dado. En particular, utilizaremos las *herramientas teóricas* (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016) que sirven para el razonamiento basado en la lógica y en las propiedades de los objetos matemáticos, las cuales pertenecen al referencial de la tarea que deseamos resolver, por ejemplo, en el referencial de las sucesiones se puede decir que los criterios de convergencia corresponden a este tipo de herramientas. Asimismo, utilizamos el término *herramientas operatorias* (Verdugo-Hernández, 2017) para referirnos a aquellas que se requieren para resolver cierta tarea, pero que no forman parte del referencial teórico al cual pertenece dicha tarea. Por ejemplo, para abordar una demostración de convergencia podríamos requerir aplicar propiedades del orden de los números reales.

A partir de lo anterior, consideramos la pregunta: ¿Cuál es la función de las herramientas teóricas y operacionales en el ETM y cómo pueden ser comprendidas desde el conocimiento de conexiones en el MTSK?, abordando una de las líneas abiertas de investigación declaradas en (Gómez-Chacón, Kuzniak, Nikolantonakis et al., 2016) sobre los subdominios o elementos de MTSK que parecen ser influyentes en la construcción de los ETM variados.

METODOLOGÍA

En este trabajo, estudiamos la ejecución de una tarea matemática por parte de un profesor a la luz del ETM y del MTSK. Para ello adoptamos un paradigma interpretativo bajo una metodología de corte cualitativa (Denzin y Lincon, 2000). Se trata de un estudio de caso del tipo instrumental (Stake, 2007), en el que el sujeto de estudio es un profesor universitario con grado de magister y doctor en matemática, con más de 10 años de experiencia en docencia universitaria. Al momento de la investigación, el profesor ejercía docencia en un curso de Cálculo Integral en el que enseña, entre otros, el tema de sucesiones. Este curso se ubica en un segundo año de una carrera universitaria en Chile.

Los datos de esta investigación son parte de la tesis doctoral de Verdugo-Hernández (2017). De entre ellos se ha extraído un instrumento de evaluación propuesto por el profesor participante del estudio, que pretende medir el grado de comprensión de los estudiantes sobre el tema de sucesiones. De esta evaluación hemos seleccionado una pregunta junto con la respuesta experta del profesor. La selección de esta pregunta y respuesta se basa en que estas aportan evidencias acerca del uso de las herramientas desde la perspectiva del ETM y es factible observar el conocimiento especializado del profesor en el dominio del Conocimiento Matemático.

El análisis de la pregunta y su desarrollo se ha realizado considerando los tipos de herramientas: teórica y operacional, que se definen desde el ETM en relación al dominio del conocimiento matemático del modelo MTSK debido a que en él se considera el conocimiento de conexiones entre conceptos matemáticos.

Complementariedad entre ETM y MTSK

El profesor propone un problema sobre sucesiones, basado en un referencial propio de este objeto matemático, utilizando las nociones de acotamiento y monotonía, activando de manera general el plano [Sem-Dis]. Por otro lado, prevalece el paradigma AC debido a las nociones involucradas que son propias del análisis.

Una de las riquezas de esta tarea, es que el docente induce a aproximar $\sqrt{a}$ (la sucesión converge a $\sqrt{a}$), resaltando la aplicación de las sucesiones que consiste en la aproximación de números reales, aspecto que es fundamental en el estudio de éstas. (Verdugo-Hernández, 2017). Lo anterior evidencia que el docente insta a los estudiantes a realizar un trabajo en el dominio del Análisis, posicionado en el paradigma AC y con elementos del paradigma AR, lo que se observa en la idea de aproximación.

A continuación, presentamos la pregunta propuesta por el docente a sus estudiantes y el desarrollo realizado por él mismo, evidenciando la forma en la cual esperaría que sus estudiantes respondan.

PREGUNTA: Para $a > 0$ y $s_1 > 0$ se define la suceción (s_n) mediante la recurrencia:

$$s_{n+1} = \frac{{s_n}^2+a}{2s_n} \forall\, n > 1$$

a) Demuestre que la sucesión (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow$ (s_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.
b) Demuestre si $s_1 > \sqrt{a}$ entonces la sucesión (s_n) es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$.
c) Usando las partes anteriores, concluya que si $s_1 > \sqrt{a}$ entonces la sucesión (s_n) es decreciente y acotada inferiormente.
d) Concluya que la sucesión (s_n) es convergente y calcule su límite.

Tabla 1: Encabezado de la pregunta propuesta por el profesor.

En la Imagen 1 se observa que el profesor presenta la equivalencia entre dos características de la sucesión (monotonía y acotamiento). En términos del ETM, se evidencia la utilización de herramientas operacionales como las propiedades de las desigualdades de los números reales y la relación de orden. Asimismo, se observa el uso del principio de inducción matemática para probar que la sucesión es acotada inferiormente por cero. En términos del MTSK, es posible observar el conocimiento del profesor sobre la resolución de inecuaciones y el rol de la simbología en la comunicación de su argumento cuando incluye la equivalencia entre las líneas escritas o el cuantificador universal para indicar que la propiedad es válida en todo el conjunto de los naturales. También se observa el conocimiento sobre de conexiones auxiliares entre la función raíz cuadrada como operador que preserva el orden y la sucesión cuando emplea las propiedades de la raíz en la demostración.

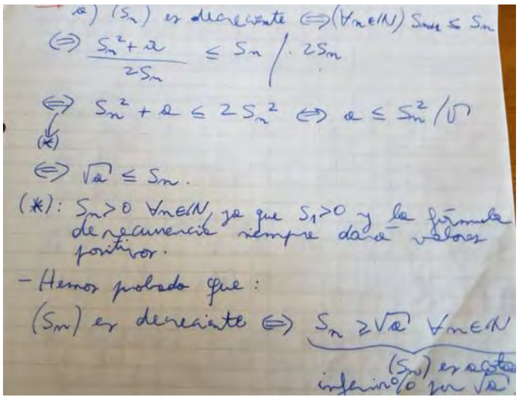


Imagen 1: Resolución parte *a*)

Transcripción Imagen 1:

a) (s_n) es decreciente $\Leftrightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N})\ s_{n+1} \le s_n$

$\Leftrightarrow \frac{{s_n}^2+a}{2s_n} \le s_n / 2\, s_n$

$\Leftrightarrow {s_n}^2 + a \le 2{s_n}^2$

$\Leftrightarrow a \le {s_n}^2 \,/\, \surd$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} \le s_n$

(*): $s_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, ya que $s_1 > 0$ y la fórmula de recurrencia siempre dará valores positivos.

- Hemos probado que:

(s_n) es decreciente $\Leftrightarrow \underbrace{s_n \ge \sqrt{a}\ \forall\, n \in \mathbb{N}}_{(s_n)\text{ es acotado inferiormente por }\sqrt{a}}$

Imagen 1: Resolución parte a) y transcripción.

En la Imagen 2, se puede observar que nuevamente el profesor recurre al principio de inducción como ayuda en la demostración del acotamiento de la sucesión. En esta sección también se observa el rol de los conectores lógicos como símbolos que le permiten al profesor estructurar la demostración como es el caso de las equivalencias e implicaciones utilizadas. Puesto que el principio de inducción no es un concepto asociado directamente a las sucesiones, su uso por parte del profesor es interpretado como conocimiento de una conexión auxiliar entre las sucesiones y este principio.

El profesor también utiliza herramientas operacionales como los cambios de signos de las funciones cuadráticas, estableciendo de este modo una conexión transversal entre la resolución de la inecuación y la función cuadrática respecto a los cambios de signos que tiene una función cuadrática en una variable y la resolución de una inecuación cuadrática en una variable; ambos conceptos pueden ser pensados del mismo modo en que se piensan los signos del producto de dos números reales cualesquiera.

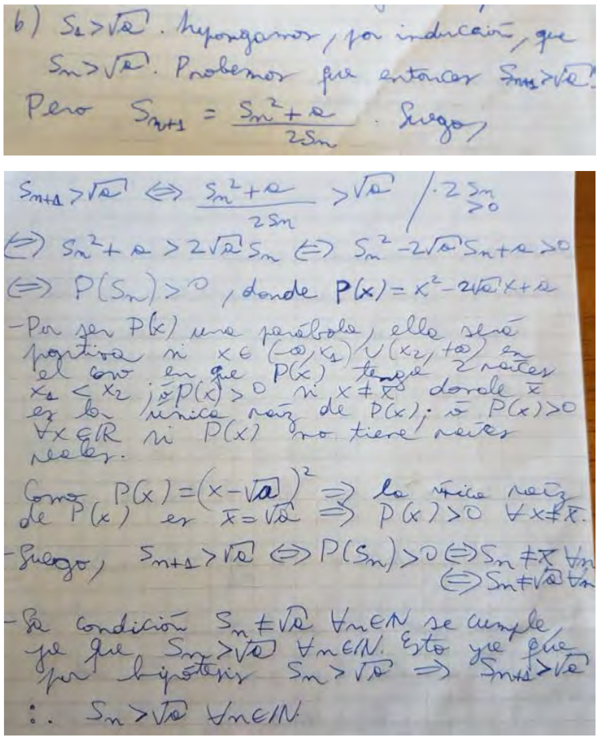


Imagen 2: Resolución parte *b*)

Transcripción Imagen 2:

b) Sea $s_1 > \sqrt{a}$. Supongamos, por inducción, que $s_n > \sqrt{a}$. Probemos que entonces $s_{n+1} > \sqrt{a}$.

Pero $s_{n+1} = \frac{{s_n}^2+a}{2s_n}$. Luego,

$s_{n+1} > \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{{s_n}^2+a}{2s_n} > \sqrt{a} \ /\cdot 2s_n > 0$

$\Leftrightarrow {s_n}^2 + a > 2\sqrt{a}\, s_n \Leftrightarrow {s_n}^2 - 2\sqrt{a}\, s_n + a > 0$

$\Leftrightarrow$ P$(s_n) > 0$, donde $P(x) = x^2 - 2\sqrt{a}x + a$

- Por ser $P(x)$ una parábola, ella será positiva si $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ en el caso en que $P(x)$ tenga 2 raíces $x_1 < x_2$; ó $P(x) > 0$ si $x \neq \bar{x}$ donde $\bar{x}$ es la única raíz de $P(x)$; ó $P(x) > 0$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ si $P(x)$ no tiene raíces reales.

Como $P(x) = \left(x - \sqrt{a}\right)^2 \Rightarrow$ la única raíz de $P(x)$ es $\bar{x} = \sqrt{a} \Rightarrow P(x) > 0\ \forall x \neq \bar{x}$.

- Luego,

$s_{n+1} > \sqrt{a} \Leftrightarrow P(s_n) > 0 \Leftrightarrow s_n \neq \bar{x}\ \forall\, n$

$\Leftrightarrow s_n \neq \sqrt{a}\ \forall\, n$

- La condición $s_n \neq \sqrt{a}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple, ya que $s_n > \sqrt{a}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Esto ya que por hipótesis $s_n > \sqrt{a} \Rightarrow s_{n+1} > \sqrt{a}$

$\therefore s_n > \sqrt{a}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Imagen 2: Resolución parte b) y transcripción.

De manera simultánea, se observa que la implementación de la inducción requiere del análisis de una función cuadrática y el estudio de sus raíces. La función cuadrática tampoco es parte del tema de sucesiones, pero, al igual que la inducción, presta ayuda en la demostración requerida. De esto se tiene otra conexión auxiliar entre la función cuadrática, sus raíces y la sucesión.

Para la resolución de ambas partes, a) y b), las herramientas y conexiones utilizadas evidencian un cambio de dominio del Análisis al Álgebra, ya que, partiendo de enunciados en el primer dominio, se resuelven las tareas en el segundo dominio.

Notemos que en la equivalencia $s_n^2 - 2\sqrt{a}\, s_n + a > 0 \Leftrightarrow P(s_n) > 0$, el profesor muestra una conexión de la desigualdad con la función cuadrática $P(x) = x^2 - 2\sqrt{a}x + a$, en donde se evalúa $P(x)$ en $x = s_n$, lo cual es posible dado que s_n es un número real. Alternativamente, el profesor podría haber realizado el estudio de los signos de la parábola en forma gráfica, sin embargo creemos que ha privilegiado el análisis en un contexto algebraico con el fin de resaltar la demostración por sobre la visualización, prefiriendo así la génesis discursiva por sobre la semiótica.

En las resoluciones de las partes c) y d), desde el ETM, el profesor continúa activando la génesis discursiva, pero esta vez sin recurrir a cambios de dominio. Asimismo, prevalece un trabajo guiado en el paradigma AC con elementos del paradigma AR, reflejados en las nociones involucradas (sucesiones monótonas y acotadas y convergencia). En la parte c), el profesor vuelve a utilizar los conectores lógicos para redactar el desarrollo. A pesar de que el profesor mezcla el lenguaje natural con la simbología matemática, se observa que conoce el rol de las implicaciones para comunicar los resultados y que las conclusiones de las dos partes anteriores le permiten concluir sobre el decrecimiento y acotamiento de la sucesión. Se observa que la construcción de este breve argumento se fundamenta en los resultados anteriores, por tanto, es muestra de conocimiento sobre las formas de construir una demostración.

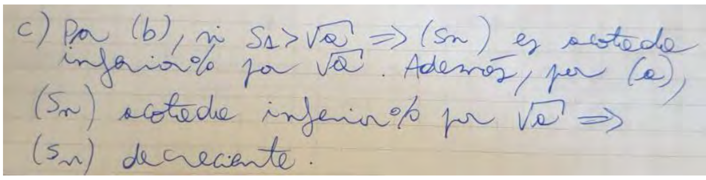

c) Por (b), si $S_1 > \sqrt{a} \Rightarrow (S_n)$ es acotada inferior% por $\sqrt{a}$. Además, por (a), (S_n) acotada inferior% por $\sqrt{a} \Rightarrow$ (S_n) decreciente.

Imagen 3: Resolución pregunta *c*)

Transcripción Imagen 3:
Por (*b*), si $s_1 > \sqrt{a} \Longrightarrow (s_n)$ es acotada inferiormente por $\sqrt{a}$. Además, por (*a*), (s_n) acotada inferiormente por $\sqrt{a}$
$\Longrightarrow (s_n)$ decreciente.

Imagen 3: Resolución parte c) y transcripción.

Por último, en la parte *d*) se destaca el uso de una herramienta teórica del referencial de las sucesiones, lo cual es considerado dentro del conocimiento del profesor sobre el tema.

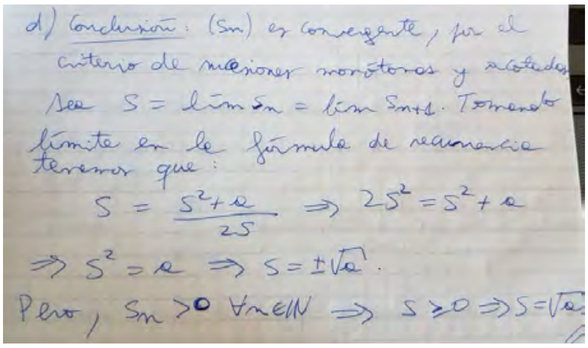

d) Conclusión: (S_n) es convergente, por el criterio de sucesiones monótonas y acotadas. Sea $S = \lim S_n = \lim S_{n+1}$. Tomando límite en la fórmula de recurrencia tenemos que:
$S = \frac{S^2+a}{2S} \Rightarrow 2S^2 = S^2 + a$
$\Rightarrow S^2 = a \Rightarrow S = \pm\sqrt{a}$.
Pero, $S_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S \geq 0 \Rightarrow S = \sqrt{a}$

Figura 4: Resolución pregunta *d*)

Transcripción Figura 4:
Conclusión:
(s_n) es convergente, por el criterio de sucesiones monótonas y acotadas.
Seas $s = \lim s_n = \lim s_{n+1}$. Tomando límite en la fórmula de recurrencia tenemos que:

$$s = \frac{s^2 + a}{2s} \Longrightarrow 2s^2 = s^2 + a$$

$\Longrightarrow s^2 = a \Longrightarrow s = \pm\sqrt{a}$.
Pero, $s_n > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow s \geq 0 \Longrightarrow s = \sqrt{a}$

Imagen 4: Resolución parte d) y transcripción.

Además del conocimiento del profesor sobre los símbolos y conectores lógicos para la redacción de la demostración, se tiene en esta última parte que el profesor recurre a conocimientos sobre criterios de convergencia, propiedades del límite de una sucesión y la resolución de ecuaciones cuadráticas para resolver la tarea. Todos estos son conocimientos de temas diferentes: sucesiones y ecuaciones. En este caso, la resolución de la ecuación le sirve de herramienta para determinar el valor del límite de la sucesión y es considerado como conocimiento de una conexión auxiliar entre sucesiones y ecuaciones. Asimismo, en términos del ETM, se utiliza una herramienta teórica que permite pasar al límite en la fórmula de recurrencia, lo cual induce un trabajo que se enmarca en el paradigma AC, ya que se aplica la regla que dice que las sucesiones s_{n+1} y s_n convergen al mismo límite.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

A partir de la combinación de elementos de ambos marcos teóricos fue posible dar una doble interpretación del conocimiento que pone en práctica y manifiesta el profesor al desarrollar una tarea en el tema de sucesiones. En efecto, a pesar de las diferencias en las orientaciones de cada marco, esta doble mirada sobre el uso de las propiedades, teoremas, procedimientos y simbologías nos permitió identificar tipos de conexiones y tipos de herramientas de manera simultánea.

Las evidencias aquí expuestas nos sugieren que las conexiones auxiliares están relacionadas con las herramientas operatorias. Debido a esta identificación desde ambas perspectivas, se puedo establecer que aquello que el profesor usaba al servicio del trabajo con sucesiones como una herramienta operatoria determinaba una conexión auxiliar con el tema de las sucesiones. El principio de inducción, la resolución de ecuaciones y las propiedades de ciertas funciones se identifican como herramientas y conexiones de manera simultánea.

Estos resultados revelan que en este uso de herramientas y el establecimiento de conexiones, el profesor acude a nociones de otro referencial. Esto indicó un cambio de dominio, del Análisis al Álgebra, sin ser necesariamente consciente el profesor de ello.

Cabe señalar, que cuando se habla de acotamiento implícitamente estamos pensando en un elemento del paradigma AR, pero al trabajar con conexiones auxiliares y transversales la actividad del docente se puede focalizar en un cambia de dominio. Se observa que el ETM distingue entre dos tipos de herramientas que el profesor utiliza en su desarrollo, mientras que el MTSK distingue tipos de conexiones entre conceptos. En nuestro análisis se pudo describir cómo el profesor utiliza las herramientas operatorias que dispone y que son parte de su conocimiento del tema de sucesiones o de otros temas, identificando cuál es el rol de ellas dentro de su conocimiento especializado. Esto atiende a la pregunta que guía nuestro trabajo y nos permite concluir que el análisis en conjunto ha posibilidad complementar los resultados obtenidos desde cada modelo, concretando la relación entre las herramientas del ETM y las conexiones interconceptuales contempladas en el MTSK. Esto último permite avanzar en el diálogo entre ambos marcos.

Por otro lado, el análisis de la resolución de la tarea nos conduce a pensar que un buen dominio de las herramientas, en el contexto del ETM y su relación con el conocimiento de las conexiones en el contexto del MTSK, cobra relevancia para el profesor al estructurar el ETM idóneo de modo que sus estudiantes logren abordar exitosamente la tarea. El conocimiento de estas conexiones involucra el dominio de contenidos anteriores o posteriores al actual, así como también saber cómo estos se conectan al momento de resolver una tarea.

Consideramos que la relación aquí presentada entre ambos marcos, ETM y MTSK, mostró, por una parte, que la tarea matemática sigue siendo un elemento que permite avanzar en la comprensión de dicha relación entre teorías (Espinoza-Vásquez, 2016) y, por otro lado, permite precisar el conocimiento sobre las conexiones entre temas para resolver una tarea, lo cual implica hacer uso de las herramientas teóricas y operacionales en esta resolución. Particularmente, las herramientas operatorias del ETM fueron asociadas con las conexiones auxiliares del KSM. Sin embargo, esto no significa que la relación entre estos dos conceptos (herramientas y conexiones) se limite a estos resultados, más bien harán falta otras investigaciones que describan otro tipo de relaciones entre las herramientas operacionales y teóricas con las conexiones consideradas en el KSM del MTSK.

Finalmente, consideramos que esta investigación se puede ampliar, por ejemplo, al estudio de la práctica del profesor durante la enseñanza de un objeto, cuando plantea tareas que pueden influenciar la actividad matemática del estudiante y así acercar el estudio del MTSK y de la actividad matemática del profesor al estudio del ETM personal del estudiante. Además, queda abierta la búsqueda de otras relaciones entre componentes específicos de ambos modelos de modo que se fortalezca el dialogo entre ellos.

REFERENCIAS

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)*, 2985–2994.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. doi: 10.1080/14794802.2018.1479981

Denzin, N. y Lincoln, Y. (Eds.) (2000). *The handbook of qualitative research*. London: Sage.

Espinoza-Vásquez, G. (2016). Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard y L. Vivier (Eds.), *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 439–450). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Espinoza-Vásquez, G., Ribeiro, M, y Zakaryan, D. (2018). Avance en la comprensión de las relaciones entre el ETM idóneo y el MTSK del profesor. *Journal of Educational Research, MENON*, 4, 146-161.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L.C., Muñoz-Catalán, M. y Liñán, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *Bolema, 30*(54), 204–221.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2810-2819). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., Nikolantonakis, K., Philippe, R. y Vivier, L. (2016). Espacio de Trabajo Matemático. en I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, R. Philippe y L. Vivier (Orgs.), *Actas Quinto Simposio Internacional ETM*. Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., y Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *Bolema*, *30*(54), 1-22.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24. Recuperado de http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, *48*(6), 861–874. http://doi.org/10.1007/s11858-016-0773-0

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime*, *17*(4.1), 17–26.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MTSK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti, *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 3185-3194), Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Vasco-Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *Bolema*, *30*(54), 222–239.

Verdugo-Hernández, P. (2017). *Espacio de Trabajo Matemático del Análisis: Enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad.* (Tesis Doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso: Valparaíso.

Zakaryan, D., Ribeiro, C. M., y Espinoza-Vásquez, G. (2016). Relaciones entre el conocimiento del tema (MTSK) y los ETM idóneo y personal. En I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis y L. Vivier (Eds.), *Actas del Simposio Espacio de Trabajo Matemático 5* (pp. 467-475). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

TRES ESTADOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE UNA MAESTRA EN FORMACIÓN

Itziar García-Honrado[a], Edelmira Badillo[b] y Josep Maria Fortuny[b]

[a]Universidad de Oviedo, [b]Universitat Autònoma de Barcelona, España

garciaitziar@uniovi.es, Edelmira.Badillo@uab.cat, JosepMaria.Fortuny@uab.cat

El objetivo de este trabajo es estudiar el proceso de aprendizaje a lo largo de la resolución de tareas matemáticas, que implican exploración, generalización de patrones geométricos y reformulación de contenidos matemáticos en un contexto artístico. Se analiza el proceso de aprendizaje de una maestra en formación a través de la distinción entre los estados de exploración, generalización y reformulación conceptual en un experimento de enseñanza. El análisis revela que en el proceso de aprendizaje se distinguen acciones en los estados de exploración y generalización de patrones vinculados a la visualización y al establecimiento de propiedades geométricas. Además, en este proceso se evidencian indicios de modificación de su conocimiento matemático especializado inicial.

***Palabras Clave**: Generalización, Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, Experimento de enseñanza, Contenido matemático, Abstracción reflexiva.*

INTRODUCCIÓN

Uno de los principales objetivos de la didáctica de las matemáticas es promover el aprendizaje de las mismas en los distintos niveles educativos a través de tareas que permitan generar actividad matemática en el aula. Es importante contextualizar las tareas, en este caso diseñamos una tarea a partir del análisis matemático de la obra artística “Aritmetic Composition” de Theo van Doesburg en la que se han encontrado varias regularidades matemáticas (Walter, 2001; Pim, 2001). Esta tarea favorece el desarrollo de procesos matemáticos (argumentación, generalización, representación matemática, etc.) adaptados a distintos niveles educativos. En la actualidad, los autores de esta publicación junto con otros miembros de sus grupos de investigación están desarrollando distintos experimentos de enseñanza a partir de la citada obra de arte para promover el aprendizaje matemático en entornos de resolución de problemas en contextos artísticos de alumnos de Primaria, Secundaria y Universidad (con profesores en formación). En concreto, este trabajo se centra en profesores en formación.

El conocimiento del contenido matemático es común en distintos modelos de conocimiento de profesorado (Shulman, 1987; Ball et al, 2008; Carrillo et al., 2017), además de estar presente en los programas de formación inicial que se basan en el desarrollo profesional (Sullivan y Wood, 2008; Silverman y Thompson, 2008). Así es, que el foco de esta comunicación apunta en la caracterización del conocimiento del contenido matemático que pone en juego una maestra en formación cuando se enfrenta a la resolución de tareas.

La pregunta de investigación de este trabajo es: ¿Cómo se puede promover en maestros en formación el aprendizaje de contenidos matemáticos a través de la resolución de tareas matemáticas en un contexto artístico?

El experimento de enseñanza que llevaremos a cabo con el fin de estudiar el proceso de aprendizaje de profesores en formación se estructura en tres fases: diseño, experimentación y análisis retrospectivo.

Dentro de la primera fase, prestamos especial atención al diseño de la tarea, para el cual, basándonos en Abstracción Reflexiva de Piaget (Piaget, 1977 y 2001), consideramos tres estados: exploración, generalización de patrones geométricos y reformulación de contenidos matemáticos.

En el transcurso del artículo iremos especificando y ejemplarizando las diferentes características de cada uno de estos estados. En concreto, para el segundo estado, el de generalización, recurriremos al constructo de Trayectoria Hipotética de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004).

La segunda fase del experimento la realizaremos con una maestra de Primaria recién graduada, que continúa su formación estudiando el Grado de Maestro en Educación Infantil, como se detallará posteriormente, se realizarán las tareas correspondientes a los tres estados en un contexto de aula.

En relación a la última fase del experimento, el análisis retrospectivo, nos apoyaremos fundamentalmente en la teoría relativa el análisis cognitivo sobre la comprensión de la geometría de Duval (2006) para estudiar cómo se promueve ese aprendizaje a través de la consideración de actividades de transformación y cómo tenemos evidencias de su existencia.

MARCO TEÓRICO

Como hemos adelantando en la introducción, el marco teórico se apoyará en tres teorías distintas: La abstracción reflexiva de Piaget, las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) y la teoría cognitiva del aprendizaje de la geometría de Duval, en concreto la noción de actividad trasformadora. A continuación, explicaremos brevemente en las características de cada una de ellas en las que apoyaremos nuestro estudio.

La Abstracción Reflexiva

Los pilares teóricos de esta comunicación están relacionados con la Abstracción Reflexiva Piaget (1977, 2006). Teoría en la que se apoya, tanto la teoría de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, como la teoría de cognitiva de Duval. Según la Abstracción Reflexiva de Piaget, a través de varios estados, el alumno desarrolla nuevas estructuras cognitivas a partir de sus conocimientos previos. Las acciones de un estado se entienden como objetos de reflexión en otro estado, lo que contribuye a la generación de nuevo conocimiento, nuevas estructuras. Finalmente, se recoge un último estado de reflexión en el que se realiza una reorganización del conocimiento en el que se produce una abstracción que se entiende como una construcción cognitiva.

Las Trayectorias Hipotéticas de aprendizaje

Son modelos teóricos para el diseño de la instrucción en las que se distinguen los siguientes componentes: el objetivo de aprendizaje, las tareas de aprendizaje y el proceso de aprendizaje hipotético. Este último se refiere a la predicción de cómo el pensamiento y la comprensión de los estudiantes evolucionan en el contexto de las actividades de aprendizaje (Simon, 1995). Se destaca especialmente la importancia de la tarea, su diseño, los objetivos de aprendizaje, los conocimientos previos de los estudiantes y el proceso de aprendizaje.

Según Simon y Tzur (2004) el diseño de las THA se basa en la Abstracción Reflexiva de Piaget. Las trayectorias de aprendizaje indican diferentes niveles de sofisticación por los que los estudiantes pueden pasar transformando sus ideas intuitivas a una comprensión más formal de los contentos matemáticos. Los niveles, cada vez más sofisticados de razonamiento matemático, evidencian aspectos del proceso de la comprensión de un contenido específico.

Las THA constituyen un recurso instructivo muy eficaz para la enseñanza. Proporcionan al profesorado recursos relevantes para acompañar a cada alumno en el logro de su aprendizaje. Muestran también el estado actual de aprendizaje del alumnado y lo que le falta para lograr su progreso cognitivo a través de una secuencia de estados de aprendizaje.

Teoría Cognitiva sobre la comprensión de la Geometría

Partiendo de la base de la importancia de las representaciones para el análisis de la actividad matemática (Piaget, 1923 y 1967) y profundizando en las estructuras mentales del individuo, Duval (1996 y 2006) profundiza en el estudio de las estructuras cognitivas concretas desarrolladas en los procesos matemáticos. El enfoque cognitivo surge poniendo en oposición las representaciones mentales con las semióticas. A través de las distintas representaciones semióticas de objetos matemáticos se puede analizar la actividad matemática. En concreto, en geometría consideramos dos sistemas de representación: lo figural y el numérico. Las transformaciones semióticas de las representaciones de los objetos matemáticos pueden ser internas, dentro de un mismo sistema de representación, o externas entre los dos distintos sistemas de representación, en este último caso hablaremos de conversiones. Tanto las transformaciones internas como las externas permitirán constatar tanto las movilizaciones de nuevos conocimientos matemáticos como la posibilidad de dar cabida a nuevos conocimientos y, por ende, analizar el proceso matemático seguido con el fin de alcanzar estadios cada vez más abstractos.

METODOLOGÍA Y DISEÑO DEL EXPERIMENTO

La distinción entre los tres estados de exploración, generalización y reformulación es la base de diseño de las tareas que formarán parte del experimento. Como hemos comentado en el apartado anterior esta distinción está relacionada con la Abstracción Reflexiva.

Existe una falta de consenso en la comunidad de investigación con respecto al significado de estos términos. La diferencia epistemológica que existe entre estos tres estados, la podemos resumir en términos generales, en la Tabla 1.

I.Exploración	II.Generalización	III. Reformulación
1. Observar e Interpretar (mirar el mundo real con lentes geométricas). 2. Representar (diversos lenguajes para expresar observaciones). 3. Analizar (identificar objetos geométricos a partir de la observación). 4. Conectar (elementos geométricos identificados con otros mediante propiedades o atributos matemáticos)	5. Modelizar (encontrar una estructura matemática). 6. Interpretar (dar significado a figuras o transformaciones). 7. Expresar (parte explicativa del proceso de modelización). 8. Conjeturar (hallar una afirmación formal a partir de un descubrimiento).	9. Aprehensión discursiva (relación entre la visualización y la argumentación: Acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas, en nuestro caso algébricas). 10. Aproximación Deductiva (Uso de razonamiento deductivo, validación mental, uso proposiciones lógicas para validar una conjetura).

Tabla 1. Características de los tres estados

El experimento consta de 3 sesiones, cada una relacionada con un estado. En la primera sesión se plantean tareas de exploración para la identificación de los elementos matemáticos de una obra de arte (Figura 1). La segunda sesión se centra en tareas de generalización de patrones geométricos. Finalmente, la tercera sesión tiene como objetivo la reformulación de los contenidos matemáticos.

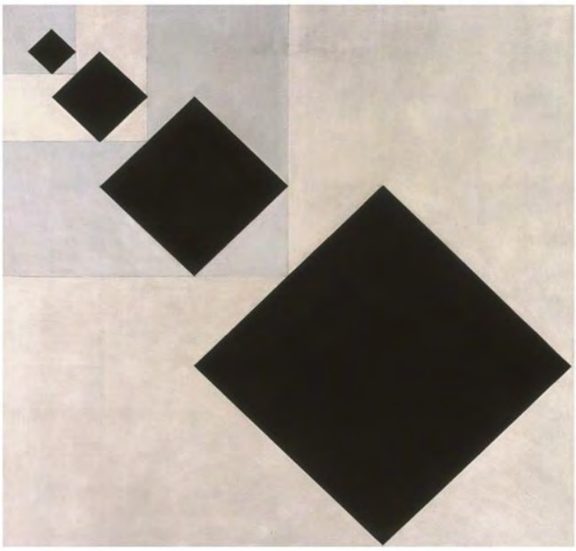


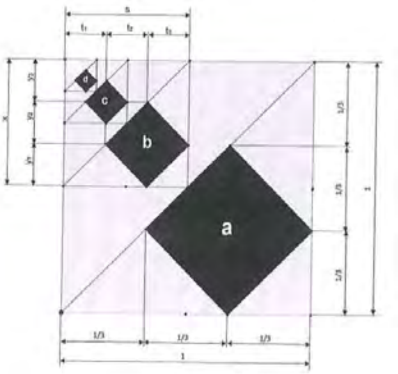
Figura 1. Arithmetic Composition. Theo van Doesburg, 1929-1930

La primera sesión se estructura en tres tareas encaminadas a identificar los conocimientos previos de los profesores en formación y favorecer un primer acercamiento al análisis matemático de la obra de arte. La tarea 1 y 2 perseguían identificar y relacionar intuitivamente contenidos geométricos en el contexto artístico. La tarea 3, planteada para reconocer intuitivamente la relación entre el área de los cuadrados, a partir de la visualización del cuadro. En las tareas 1, 2 y 3 se plantean las siguientes preguntas: observa el cuadro por primera vez y enumera las sensaciones que le trasmite (T1); identifica los elementos matemáticos y las relaciones intuitivas que visualizas en la obra artística (T2); y explica cómo crees que el autor construyó la obra de arte (T3). La sesión 1 permite conocer los conocimientos matemáticos previos de los que se parte para, según Simon y Tzur (2004), construir la THA e involucran las características del estado de exploración (ver Tabla 1, puntos 1 a 4).

La sesión 2 se estructura en 4 tareas que forman parte de la THA (Tabla 2), validada en (García-Honrado et al., 2018) cuyo objetivo de aprendizaje es reconocer la generalización de patrones en la construcción de la secuencia geométrica de las figuras que aparecen en una obra artística (Figura 1). Concretamente, la tarea 4, buscaba encontrar la relación entre los cuadrados de distinto color a partir de razonamientos matemáticos ligados a la visualización de las figuras del cuadro. Las tareas 5, 6 y 7 pretendían que los profesores en formación argumentaran las relaciones entre áreas, las expresaran algebraicamente y llegaran a la generalización del patrón geométrico, en el sentido de los estadios 1 y 2 de Callejo y Zapatera (2017). Además, involucran las características del estado de generalización (ver Tabla 1, puntos 4 a 7).

<table>
<tr><td>Tarea de aprendizaje</td><td>Proceso hipotético de aprendizaje</td></tr>
<tr><td>

Tarea 4: A partir de la obra de arte de la Figura 1, se ha construido la imagen que se muestra a continuación (la información que se incluye puede ayudar a resolver las tareas 5, 6 y 7).



Completa los datos que faltan en la figura, encontrando los valores de X, y1, y2, y3, s, t1, t2, t3. Justifica tu respuesta.

</td><td>

Estadio 1. Coordinación de la estructura espacial y la estructura numérica (a partir de las cotas) en la identificación de la secuencia de longitudes de los lados de los cuadrados grises involucrados en la obra artística.

</td></tr>
<tr><td>

Tarea 5: (a) En el cuadro gris grande de la imagen anterior, ¿cuántas figuras "a" pueden colocarse sin superponerse?

(b) Dentro de la figura negra "a", ¿cuántas figuras negras "b" podrías colocar?

</td><td>

Establecimiento de relaciones entre las áreas de los cuadrados negros de la Figura 1, coordinando la estructura espacial y la numérica de los cuadrados de las secuencias de los cuadrados negros.

</td></tr>
<tr><td>

Tarea 6: En la imagen anterior,

(a) Calcula el área de la figura negra "a".

(b) Calcula el área de la figura negra "b".

(c) Calcula el área de las figuras negras "c" y "d".

</td><td>

Cálculo del área de los cuadros negros de la secuencia relacionando el valor del área de un cuadrado con el valor del área del anterior, lo que propicia la búsqueda de una regularidad funcional en el cálculo de esas áreas.

</td></tr>
</table>

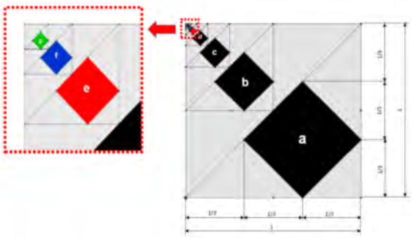
Tarea 7: Si continuáramos la secuencia de las figuras negras podríamos dibujar otras, tal y como se muestra en ampliación siguiente:  ¿Sabrías calcular las áreas de las nuevas figuras "e", "f" y "g"? Explica cómo lo has hecho.	**Estadio 2.** Abstracción de la coordinación espacial y numérica para el establecimiento de la relación funcional entre el área de los cuadros negros.

Tabla 2. Tareas y proceso hipotético de aprendizaje

Las tareas de la segunda sesión, consisten en repetir los patrones de medidas del cuadro, en la primera tarea (T4), buscando la relación lineal entre los lados de los cuadros grises que se indican y sus divisiones. La tarea 5 consiste en buscar la realción entre las áreas de dos cuadros consecutivos de la sucesión de cuadrados negros, a esta conclusión se puede llegar de varias formas, no obstante, es común aplicar Pitágoras para calcular el lado de cada cuadrado negro y a partir de este dato, calculando su cuadrado llegar al área. La tarea 6 va en caminada a reconocer que la relación entre las áreas de cuadros consecuitivos es siempre de ¼. La última tarea de esta sesión (T7) consiste en generalizar la esta relación al continuar la secuencia de cuadrados negros.

Finalmente, en la tercera sesión se plantean las tareas 8 y 9, centradas en la reformulación de las ideas iniciales los elementos matemáticos. En la tarea 8 se pide que se identifiquen qué conceptos matemáticos aparecen en el cuadro, teniendo en cuenta todas las relaciones entre los elementos del cuadro. En la tarea 9 se pide que se indiquen otras situaciones de enseñanza en las que aparezcan los mismos conceptos. Estas dos tareas, involucran las características del estado de reformulación (Tabla 1, puntos 9 y 10).

EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS

Realizamos el experimento de enseñanza sobre exploración, generalización de patrones geométricos y reformulación de contenidos matemáticos en un contexto artístico con 25 profesores de grado de educación infantil (aunque había alguno de Primaria). En concreto, estudiaremos el caso de una alumna del aula, Patricia, para ello, mostraremos un análisis de las acciones recogidas en sus protocolos escritos en los tres estados.

En la primer estado, caracterizamos su conocimiento matemático inicial sobre los elementos matemáticos de la obra artística: identificación de figuras geométricas, clasificación de polígonos, elementos de un cuadrado (polígonos), medida de longitudes y de área de las figuras geométricas, relación entre el área de los cuadrados del mismo color y de diferentes color, relación entre el perímetro de los cuadrados del mismo color y de diferentes color, generalización del patrón geométrico de crecimiento de los cuadrados (área y perímetro), teorema de Pitágoras, homotecia, relaciones de proporcionalidad, entre otros. En relación al segundo estado, se analizaron las respuestas a las tareas de la sesión 2, lo que evidenció su comprensión sobre la generalización de patrones. Finalmente, en relación al tercer estado se analizaron las respuestas a las tareas de la sesión tres, lo que pone de manifiesto cambios en el conocimiento matemático.

A continuación, mostramos ejemplos del análisis realizado de las tareas 3 (Ejemplo 1) y 5 (Ejemplo 2) del primer estado y la tarea 7 (Ejemplo 3) del segundo estado.

EJEMPLO 1: FALTA DE COORDINACIÓN ENTRE LA ESTRUCTURA ESPACIAL Y NUMÉRICA.

Patricia reconoce la *coordinación entre la estructura numérica y espacial* realizada por el autor de la obra artística, tanto en la construcción gráfica que propone (Figura 2) como al indicar: *"los cuadrados negros los construyó* [se refiere al autor de la obra artística] *en base a los cuadrados grises, puesto que cada cuadrado gris lo dividió en 9 cuadrados pequeños y desde la derecha y desde abajo coges una 3ª parte del propio lado hacia la izquierda, otra 2ª parte del propio lado hacia arriba y hacia la izquierda y dos terceras partes en las mismas direcciones que las anteriores teniendo los cuatro vértices"*.

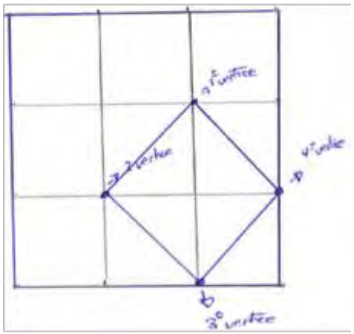


Figura 2: Croquis hecho por Patricia en el primer estado

Patricia *no reconoce la relación* entre las áreas del cuadro gris y el negro correspondiente, al no coordinar la estructura espacial con la numérica, al indicar que: *"cada cuadrado gris es una cuarta parte del cuadrado gris posterior al igual que el cuadrado negro es una cuarta parte del cuadrado negro posterior, y también el cuadrado negro es una cuarta parte del cuadrado gris en el que se encuentra"*. Este razonamiento podría estar influenciado por la idea errónea de que el cuadro negro es un giro de 90º del cuadrado gris siguiente de la sucesión (¼ del gris grande), ya que en la tarea inicial afirma *"que hay movimientos en el plano"* (Godino et al., 2002). Lo cual nos permite inferir que Patricia a partir de una percepción geométrica errónea asocia una relación numérica incorrecta.

EJEMPLO 2: COORDINACIÓN ENTRE LA ESTRUCTURA NUMÉRICA Y GRÁFICA.

En la tarea 3, observamos una falta de coordinación entre la estructura espacial y numérica. Sin embargo, en contraste con el análisis de la tarea 5, muestra la coordinación entre la estructura numérica y gráfica que evidenciamos en las dos partes en las que se subdivide su respuesta: una numérica y otra relacionada con la representación gráfica.

Patricia hace uso de la *estructura numérica* a través del cálculo del lado del cuadrado negro más grande de la figura por medio del Teorema de Pitágoras. Patricia calcula el lado del cuadrado “a” tal y como se indica a continuación:

$$h^2 = \frac{1^2}{3} + \frac{1^2}{3},\ h = \sqrt{\frac{1^2}{3} + \frac{1^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.47$$

A través del cálculo previo, Patricia se apoya en la estructura espacial afirmando que en el cuadro entran 4 de esos cuadrados y “Se pueden colocar cuatro figuras “a” puesto que el lado de cada cuadrado a es aproximadamente la mitad. Pero [el cuadrado gris] no se completaría totalmente como que sobraría algo de espacio.” Por tanto, evidenciamos una coordinación entre lo espacial y numérico.

EJEMPLO 3: ABSTRACCIÓN DE LA RELACIÓN ENTRE LA ESTRUCTURA ESPACIAL Y LA NUMÉRICA.

El análisis de la tarea 7 en el ejemplo 3, lo subdivinimos en tres partes, la primera en la que abstrae la relación, la segunda donde establece y explicita la relación funcional y la tercera en la que comprueba esa relación.

En la primera parte Patricia es capaz de *abstraer la relación* entre la estructura espacial y la numérica entre las áreas de dos cuadros negros consecutivos:

> *“Puesto que cada figura es una cuarta parte del anterior el lado es la mitad del anterior. Podrías calcular las áreas de las siguientes figuras dividiendo la siguiente área entre cuatro puesto que es 1/4 del área anterior”.*

En la segunda parte *establece la relación funcional* que explicita en una expresión algebraica del cálculo del área el término general, que permite obtener el valor del área de un elemento arbitrario de la progresión geométrica (Figura 3)

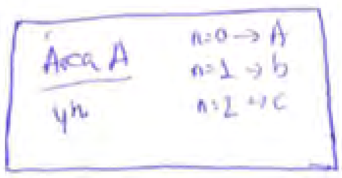


Figura 3: Relación funcional

Finalmente, en la tercera parte, explica el significado del término general relativo a los cuadrados negros *"La fórmula general se consigue sabiendo que el área de un cuadrado es una cuarta parte del área anterior. Por lo tanto, tomando como referencia el Área de A debemos dividir cada área entre 4 elevado a n, donde n es el número del cuadrado siendo n=0 para A [nombre del cuadrado negro más grande], n=1 para b [nombre del cuadrado negro que sigue en la sucesión al cuadrado A] y así sucesivamente"*.

Con este ejemplo evidenciamos que se produce una abstracción de la coordinación espacial y numérica para el establecimiento de la relación funcional entre el área de los cuadros negros y emerge el pensamiento algebraico (Radford, 2000).

Las acciones de las actividades de las tareas permiten coordinar las diferentes acciones y avanzar, podemos observar un progreso en diferentes estados.

ANÁLISIS RETROESPECTIVO

En el primer estado Patricia hace *una representación d*el cuadrado gris grande y el cuadrado negro correspondiente. Esta representación le permite visualizar y establecer la relación geométrica entre el área del cuadrado gris grande con su correspondiente cuadrado negro (Figura 2).

En el segundo estado, la acción realizada en el primer estadio junto con las cotas proporcionadas en el enunciado de la tarea 4, permite a Patricia avanzar en las estructuras de generalización de patrones, apoyándose tanto en la estructura espacial como en la numérica, o en términos de Duval utilizando los sistemas de representación numérico y figural. Coordina las acciones sobre las relaciones de las estructuras espacial y numérica de la secuencia de los cuadrados negros, estableciendo relaciones entre sus áreas, como se evidencia en las respuestas dadas a la tarea 5 (Ejemplo 2), manifestándose una conversión de lo numérico a lo figural, en términos de Duval (2006). Apoyándose en lo anterior, Patricia muestra indicios de que inicia la búsqueda de una regularidad funcional a partir del cálculo del área de la sucesión de los cuadrados negros cuando indica que *"se podría calcular el área de las figuras dividiendo la siguiente área entre cuatro puesto que es 1/4 del área anterior*" (Ejemplo 3). Finalmente, abstrae reflexivamente realizando acciones de coordinación estableciendo una relación funcional entre el área de los cuadros negro mediante la coordinación espacial y numérica ya que su respuesta a la tarea 7, afirma que *"la fórmula general se consigue sabiendo que el área de un cuadrado es una cuarta parte del área anterior. Por lo tanto, tomando como referencia el Área de A debemos dividir cada área entre 4 elevado a n, donde n es el número del cuadrado siendo n=0 para A, n=1 para b y así sucesivamente*" (Tabla 2, parte 2 y 3). Por lo tanto, Patricia se encuentra en el estadio 2 del proceso de aprendizaje de la THA tal como se indica en la Tabla 2, lo que podemos interpretar como un cambio de estado de exploración a generalización, además de evidenciar un desarrollo cognitivo que hace a la alumna romper con un pensamiento aritmético basado en lo numérico y figural para dar paso a un nivel de pensamiento algebraico mostrando un dominio en el uso de los signos y la comprensión de sus significados para lograr la expresión del término general.

Finalmente, en el tercer estado, Patricia además de observar cuadrados como lo hacía en la primera sesión, es capaz de observar otro tipo de figuras geométricas como triángulos. Esto podría estar influenciado por la activación del esquema de conocimiento del triángulo rectángulo conectado a la necesidad de usar el teorema de Pitágoras en el cálculo del área de los cuadrados negros (Chinnappan y Lawson, 2005). Lo anterior, se evidencia en la respuesta de Patricia a la tarea 8*: Teniendo en cuenta todas las relaciones entre los elementos del cuadro, identifica qué conceptos matemáticos aparecen*: *"... puesto que podemos dividir el cuadro en pequeños cuadraditos y ver gráficamente las medidas"*. Patricia también establece una transferencia de contenidos (Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996). Esto se evidencia en la medida que va incorporando al razonamiento numérico aspectos de razonamiento geométrico; es decir, Patricia va siendo capaz de desarrollar una conversión de distintos registros en los que se evidencia su conocimiento matemático.

Por otro lado, Patricia muestra que se ha producido una modificación respecto de sus conocimientos iniciales (Figura 2) estableciendo una conexión correcta entre el razonamiento numérico con el geométrico que inicialmente era erróneo. Es decir, especifica las características del estado de reformulación descritos en la Tabla 1. Por ejemplo, cuando al resolver la tarea 5 indica *"...la relación que encontramos entre los cuadrados de distinto color es que entran 4,5 cuadrados negros de los más grandes que aparecen en el cuadrado gris que aparece más grande"*.

Otra evidencia de cambio de su conocimiento en uso es cuando modifica sus ideas iniciales erróneas sobre la visualización de giros en los cuadrados negros de la obra artística, al incorporar la idea intuitiva de homotecia hablando de "*zum*". Este cambio se puede ver cuando al resolver la tarea 7, afirma: *"En cuanto al movimiento [se refiere a movimientos en el plano] no pueden ser de traslación ni de giro puesto que se modifica el tamaño de cada cuadrado comparándolo con los otros, es un movimiento de zum o alejarse"*.

Para resumir esta discusión, el proceso de aprendizaje comienza cuando el alumno establece un objetivo (por ejemplo, para completar una tarea en particular) y recurre a las acciones disponibles (contenidos) para lograr el objetivo. Inicialmente, el alumno usa estas acciones en forma secuencial. Sin embargo, a través de la reflexión sobre su actividad, el alumno puede llegar a coordinar esas acciones en una única acción de nivel superior (contenido). En el transcurso de la participación en las tareas Patricia creo una nueva abstracción, una coordinación de acciones de estructuras numéricas y gráficas. En este sentido, de acuerdo con los marcos de la Abstracción Reflexiva y la actividad transformadora de Duval una abstracción matemática se puede considerar como el producto de la reflexión sobre una relación actividad-efecto. Simon, Tzur, Heinz y Kinzel (2004) utilizaron el efecto para indicar como una segunda actividad se puede coordinar con una primera, análogamente con lo que se conoce como fase metacognición en un proceso de resolución de problemas. Tzur y Simon (2004) propusieron utilizar el efecto en referencia a lo que el sistema mental de un alumno monitorea y advierte como seguir la actividad mientras se desarrolla. Tzur (2007) escribió: *"El efecto se refiere a cualquier parte de la experiencia de los alumnos que identifican como la que sigue a la actividad"* (p.276). Tal descripción parece invitar a la interpretación tanto de la abstracción reflexiva y la noción de actividad transformadora, podemos considerar el estado de reformulación como un efecto de secuencia de tareas del estado de generalización y este a su vez como un efecto de las tareas del estado de exploración.

CONCLUSIÓN

En este artículo hemos desarrollado una descripción de las características de los tres estados, importantes en el diseño de una secuencia de tareas destinada al proceso de generalización y reformulación de un contenido particular. Hemos caracterizado y representado la transición de la exploración a la generalización y la reformulación y hemos presentado un extracto de datos analizados para demostrar y explicar nuestra comprensión de cómo se produce la transición de un estado exploratorio a un estado de generalización y reformulación. En este sentido hemos evidenciado el proceso del aprendizaje matemático de una maestra en formación a lo largo de diferentes tareas diseñadas a partir de la obra *Arithmetic Composition the Theo van Doesburg*. Tras la implementación de la secuencia de tareas y el posterior análisis del conocimiento manifestado por la maestra en formación en las respuestas a dichas tareas, hemos identificado cambios en su conocimiento matemático. Patricia incorpora razonamientos geométricos y numéricos en la interpretación de los elementos y las relaciones matemáticas de la obra artística, lo que le ha permitido modificar las ideas matemáticas erróneas que mostraba inicialmente.

Un desafío significativo es continuar estudios análogos que nos permitan generar datos y análisis cualitativo de los mismo que pueden ser la base para una mayor elucidación teórica de las transiciones entre los estados en los que se requiere contenido involucrado en estadios previos

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Callejo, M. L. and Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*. 20, 4, 309-33.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras-González, L. y Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, 22, 185-205.

Chinnappan, M. y Lawson, M. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 197-221.

Duval, R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES 16(3), 349–382.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 61, Issue 1–2, 103–131.

García-Honrado, I., Clemente, F., Vanegas, Y., Badillo, E. y Fortuny, J. M. (2018). Análisis de la progresión de aprendizaje de una futura maestra. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXII (pp. 231-240). Gijón: SEIEM.

Godino, J. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. España: Proyecto EDUMAT (recuperado el 14 de junio del 1019 de www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/)

Hershkowitz, R., Parzysz, B. y Van Dermolen, J. (1996). Space and shape. In Bishop & others (Eds.), International Handbook of Mathematics Education (Part 1, pp.161-204). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Piaget, J. (1923). La pensée symbolique et la pensée de l'enfant. Archives de Psychologie, 18, 273-304.

Piaget, J. (1967). Logique et Connaissance Scientifique: le Courants de l'Épistémologie Scientifique Contemporaine, Paris, Presses Universitaries de France.

Piaget, J. (1977 y 2001). Studies in reflecting abstraction. Sussex: Psychology Press (Edited in 1977 by Presses Universitaires de France).

Pim, D. (2001). Some Notes on Theo van Doesburg (1883-1931) and his Arithmetic Composition 1. *For the learning of Mathematics*, 21, 2, 31-36.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis *Educational Studies in Mathematics 42(3): 237–268*.

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education*, 11(6), 499-511.

Simon M.A. y Tzur, R., (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical thinking and learning*, 6(2), 91–104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. y Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. Journal for Research in Mathematics Education, 35(5), 305-329.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.

Sullivan, P. y Wood, T. (2008). The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development. Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.

Walter, M. (2001). Looking at a Painting with a mathematical Eye. *For the learning of Mathematics*. 21, 2, 26-30.

AVANZANDO HACIA UN MODELO PARA LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE MATEMÁTICA

Elisabeth Ramos Rodríguez

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Elisabeth.ramos@pucv.cl

Una de las problemáticas existentes en la formación de profesores es encontrar mecanismos que permitan trabajar con docentes que buscan evolucionar para mejorar su práctica y conocimiento profesional. Esta problemática fue abordada en los Simposium ETM4 y ETM5 desde cuestiones como ¿es posible avanzar en un modelo para la formación de profesores? Fruto de la investigación y experiencia se presenta un modelo de formación para programas de Desarrollo Profesional Docente efectivos para profesores de matemática que les permita ganar eficacia en su desempeño, para luego operativizarlo en un programa desarrollado en Chile con propósito de buscar coherencia y complementariedad entre lo teórico y empírico.

Palabras clave*: Programa efectivo, Enseñanza y aprendizaje, Desarrollo profesional, Formación de profesores.*

INTRODUCCIÓN Y PROBLEMATICA

No cabe duda que una de las tareas más relevante de la Educación Matemática es el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas y, en consecuencia, impulsar procesos formativos que lo potencien (Cardeñoso, Flores y Azcárate, 2001). Esta premisa se ha ido consolidando a través de grupos de investigación en torno al Desarrollo Profesional Docente (DPD) del profesor de matemática, que se manifiestan en diversos Handbook en torno a esta temática (por ejemplo, English, & Kirshner, 2015; Swoder, 2007). El objetivo de este estudio es avanzar en esta línea proponiendo un modelo para programas de DPD efectivos para profesores de matemática.

Los cambios en las prácticas de los docentes, derivados de los programas de DPD en los que participan, dependen de las oportunidades que estos presentan para construir (o reconstruir) el conocimiento de los contenidos y la pedagogía, en un entorno que apoya y fomenta la toma de riesgos y el acto de reflexionar (Swoder, 2007). Por ello los modelos que subyacen a dichas propuestas formativas "deben ofrecer oportunidades de desarrollo profesional a los profesores y motivarlos a desarrollar los conocimientos, habilidades y disposiciones que necesitan para enseñar bien las matemáticas" (Swoder, 2007, p. 160-161). Lamentablemente, se evidencia que muchos programas de DPD ofrecidos no son efectivos, es decir, no logran impactar en la enseñanza del docente y en los aprendizajes de sus alumnos (Capp, Crawford, & Constas, 2012; Garet et al., 2011 en matemática). Esto incita contar con modelos que apunten a la efectividad de los programas de DPD, cuya calidad se define según su relación con la mejora de la práctica docente y del aprendizaje de sus estudiantes (Bautista y Ortega-Ruíz, 2015), claves del DPD.

Fruto de la investigación y experiencia, este escrito tiene por objetivo presentar un modelo para programas de DPD efectivos para profesores de matemática, de manera de otorgar permita a diferentes actores como los investigadores, formadores de profesores o instituciones educativas comprender mejor el DPD de los profesores de matemáticas, de manera de proponer programas que repercutan en la mejora de la práctica del docente y en el aprendizaje de sus alumnos, contribuyendo a su proyección el aula y en relación a sus pares. Para ello se definen tres objetivos específicos:

1) identificar en la literatura especializada elementos que apoyan la concreción de programas de DPD efectivos para profesores de matemática.
2) construir un modelo para programas de DPD efectivos a la luz de los elementos detectados en el punto 1.
3) mostrar elementos del diseño e implementación de un programa de DPD para docentes de matemáticas, formulado a la luz del modelo propuesto, de manera de observar coherencia y complementariedad entre el modelo teórico y la puesta en juego de él en el programa implementado.

MARCO CONCEPTUAL

El sustento teórico de este estudio se centra en dos ideas claves: los programas de DPD efectivos y los modelos de programas de DPD, los que se detallan a continuación.

Programas de DPD efectivos

El DPD se concibe como un proceso de aprendizaje y crecimiento continuo y personal, en el cual el docente participa por propia voluntad, adquiriendo gradualmente confianza, autonomía, profundización en sus conocimientos y habilidades para mejorar sus prácticas de manera de abordar los desafíos de aprendizaje de los estudiantes (Bautista y Ortega-Ruíz, 2015). En esta concepción se puede destacar la práctica del profesor y el aprendizaje de sus alumnos, elementos claves para contar con programas de DPD efectivos, ya que estos se definen de acuerdo a la relación entre este y la mejora de la práctica de los docentes y del aprendizaje de sus alumnos.

Para diseñar programas de formación que apoyen el DPD es necesario considerar la tendencia actual en suministrar conocimientos a los docentes para mejorar su actuación, lo que, aunque suele coincidir con las expectativas de los docentes asistentes a dichos programas, con intención de resolver sus problemas de la práctica, luego repercute de manera superficial en su práctica docente y en el DPD de los asistentes (Ramos-Rodríguez, 2014). Se hace necesario encontrar modelos para programas de formación que permitan trabajar con profesores que están evolucionando para mejorar su práctica, ganando eficacia en su desempeño profesional y en la calidad del aprendizaje de sus alumnos.

En la literatura internacional se pueden identificar variedad de estudios centrados en determinar características o principios de un programa de DPD efectivo. Por ejemplo, Cortés, Taut, Santelices, & Lagos (2011), en Chile; Desimone y Pak (2017), en Estados Unidos; y el conocido informe Cockcroft (1982), en Inglaterra. Aun así, no se cuenta con un consenso sobre estos principios (Guskey, 2003). Para este estudio, se considerarán los principios de programas efectivos planteados por Desimone y Pak (2017):

- **Principio 1, enfoque de contenido**: actividades que se centran en el contenido de la materia y en cómo los alumnos aprenden ese contenido.
- **Principio 2, aprendizaje activo**: oportunidades para que los profesores observen, reciban comentarios, analicen el trabajo de alumnos o hagan presentaciones, en lugar de pasivos escuchando conferencias.
- **Principio 3, coherencia**: contenido, metas y actividades consistentes con el plan de estudios y metas escolares, conocimiento y creencias de los maestros, necesidades de los estudiantes y políticas y reformas de la escuela, el distrito y el estado.
- **Principio 4, duración sostenida**: actividades de DPD que están en el programa durante el año escolar e incluyen 20 horas o más de tiempo de contacto.
- **Principio 5, participación colectiva**: maestros del mismo grado, materia o escuela participan juntos en actividades de DPD construyendo comunidad de aprendizaje.

Modelos formativos existentes

Se adopta la definición de modelo de formación de profesores como lo concibe Loya (2008): una propuesta teórica que incluye conceptos de formación, de enseñanza, de prácticas educativas, entre otros elementos. "Se caracteriza por la articulación entre teoría y práctica, en la manera en que se abre o disminuye la relación entre una y otra y en cómo se desarrolla según las finalidades educativas" (Loya, 2008, p.2).

En la literatura se puede encontrar diversas propuestas de modelos formativos de profesores. Levy y Puig (2001) mencionan que los modelos de formación permanente del profesorado se desarrollan alrededor de dos grandes tipologías:

a) cursos que se centran en temas muy específicos o sobre nuevas orientaciones curriculares. Si bien estos temas importantes y relevantes para el profesorado, tienden a ser modalidades alejadas de su práctica, por lo que la formación se arriesga a ser algo externo, algo que el profesorado tendrá que integrar luego, por su cuenta, a su espacio de actuación. De este modo:

   Aunque en los cursos se fundamenten teóricamente las nuevas propuestas, éstas quedan reducidas al plano del discurso y no acostumbran a incorporarse a la práctica cotidiana de las clases (o sólo se integran las técnicas o recursos concretos, sin cambiar las concepciones). Únicamente en el caso de que dicho discurso coincida con el de los asistentes al curso, éstos podrán transformar su teoría y su práctica. Por eso los cursos sólo son útiles para una minoría reducida del profesorado, es decir, para aquéllos que ya comparten el marco teórico de referencia (p.271).

b) Dispositivos formativos que se realizan en el mismo establecimiento escolar, centradas en el planteamiento de temáticas susceptibles de interesar por todo el profesorado, lo que da muchas ventajas en relación a la anterior, ya que considera el contexto e interés del profesor. Sin embargo, tienden a mirar aspectos psicopedagógicos de la enseñanza obviando en muchas ocasiones la reflexión epistemológica y la psicopedagógica en relación con el área del saber, lo que probablemente conlleve a un cambio superficial de la práctica de enseñar.

Dentro de las propuestas de modelo que sigue estando presente en diferentes latitudes y contextos, destaca el modelo MPRA (diacrónico de Modelo de Razonamiento Pedagógico y Acción) de Shulman (1987) (Fernández, 2014), el cual pretende desarrollar el conocimiento práctico (requerido para la enseñanza) de los docentes o futuros docentes. Shulman (1987) afirma que un curso de formación docente debe partir con un dispositivo en forma de "texto", un libro de texto, guión u otro material que el profesor o futuro profesor deseen comprender. A partir de este dispositivo, se realiza un ciclo a través de actividades de comprensión, transformación, instrucción, evaluación y reflexión. En este modelo la reflexión es un punto relevante para el éxito el desarrollo del conocimiento del docente.

En esta diversidad de modelos de formación, se observa que cada uno de ellos manifiesta elementos diferenciadores, dependiendo del foco de atención de los investigadores que están detrás de la génesis del modelo. Hay algunos pensados para disciplinas específicas, como las Ciencias (Levy y Puig, 2001), otros centrado en la formación inicial de profesores de matemática (García, 2000) o por ejemplo, el modelo de Aprendizaje realista de Esteve y Alsina (2010), fundamentado en la Educación Matemática Realista de Freudenthal. Cada modelo tiene su particularidad y características que lo define. Por ejemplo, los elementos principales que rigen al modelo realista (Esteve y Alsina, 2010) son: 1) el punto de partida son los interrogantes que emergen de la misma práctica y que el maestro en formación experimenta en un contexto real de aula; 2) la formación realista pretende fomentar una reflexión sistemática; 3) el aprendizaje es un proceso social e interactivo; 4) se distinguen tres niveles en el aprendizaje (Gestalt, Esquema y Teoría), y se trabaja en los tres niveles: se guía el proceso de reflexión, individual y grupal, a través de un acompañamiento colaborativo por parte del formador; y 5) se fomenta la autonomía y la construcción autorregulada de competencias profesionales.

En esta perspectiva, el modelo que presenta este estudio se centra en la formación de profesores de matemáticas, el cual se construye a la luz de los principios de programas de DPD efectivos, lo que otorga el carácter innovador a la investigación.

RESULTADOS

El estudio tiene tres resultados, correspondientes con objetivos específicos planteados.

Primer resultado parcial, elementos teóricos y empíricos

Este apunta al objetivo específico 1: identificar en la literatura especializada elementos que apoyan programas de DPD efectivos para profesores de matemática.

Se ha identificad soportes teóricos de programas de DPD diseñados e implementados (figura 1) en torno a la formación inicial y continua en nuestra Universidad.

Figura 1: Resumen de cursos de formación realizados

Una década en la formación de docentes de primaria, secundaria y universitaria ha permitido contar con una mirada más profunda sobre qué elementos fortalecen su DPD. Destacan entre ellos tareas matemáticas escolares, la investigación sobre la propia práctica y la reflexión, los cuales se analizarán desde la perspectiva de los cinco principios de programas de DPD efectivos propuestos por Desimone y Pak (2017).

i. Las **tareas matemáticas escolares** (TME), entendidas estas como aquellas propuestas para el alumno, que implican una acción de él (actividad) frente a las matemáticas y que el profesor planifica como instrumento para el aprendizaje o la evaluación del aprendizaje (Moreno y Ramírez-Uclés, 2016). Estas pueden ser analizadas desde distintas ópticas, una de ellas se ilustra en la figura 2.

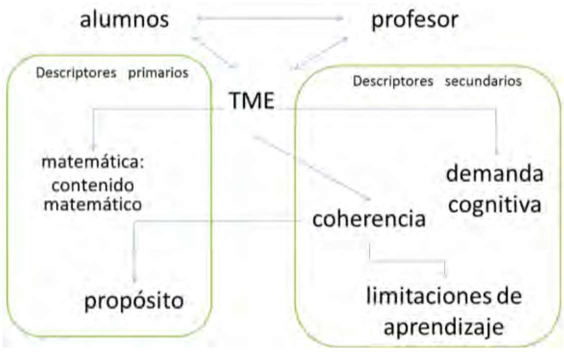


Figura 2: Caracterización de TME (Ramos-Rodríguez, Valenzuela y Flores, 2019)

Esta caracterización incluye varias ideas que apoyan el tercer principio de programas de DPD efectivos, propósito, limitaciones de aprendizaje y “coherencia” (en el sentido del grado en que la TME se adecua al objetivo propuesto).

Respecto a las TME, en Chile se ha desarrollado la metodología ARPA (Acrónimo de Activando Resolución de Problemas en las Aulas) (http://www.arpamat.cl) para introducir, dentro de las TME, la resolución de problemas en las aulas. También se ha venido consolidando en el DPD como una estrategia con foco en el docente y su conocimiento de la matemática, a través del cual se crean oportunidades para que se profundice en el conocimiento sobre un contenido específico, considerando en paralelo el conocimiento didáctico de ese contenido (Felmer y Perdomo-Díaz, 2017). Esto da presencia al primer principio de programas de DPD efectivos.

Una herramienta poderosa que permite al profesor seleccionar, diseñar y secuenciar tareas matemáticas escolares de manera de fortalecer aprendizajes de los alumnos es el **análisis didáctico** (Rico, Lupiáñez, y Molina, 2013), que implica realizar cinco subanálisis: análisis conceptual, de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación. En Ramos-Rodríguez, Valenzuela y Flores (2018) se muestra cómo el análisis didáctico ha sido un dispositivo en la formación inicial y continua que permite al docente o futuro docente focalizarse y profundizar en el conocimiento de la matemática y mejorar su práctica, lo que apunta nuevamente al primer principio de Programas de DPD efectivo: foco en el contendido.

ii. **La investigación sobre la propia práctica**. Ésta permite intervenciones significativas en los contextos de trabajo del docente, está orientada a solucionar problemas de la práctica referidas a la enseñanza o aprendizaje de un contenido (cobrando presencia del primer principio, enfoque en el contenido, y el tercer principio, referido a las necesidades de los estudiantes), y ayuda a identificar estrategias para afrontarlos y, al mismo tiempo, tiene un efecto formativo de largo alcance en los profesores (Ponte, 2014), pues involucra un tiempo oportuno de trabajo para su realización, lo que favorece la presencia del quinto principio.

La investigación es una herramienta de transformación de las prácticas educativas, una de las mejores vías para la formación profesional en la sociedad, por lo que su explotación tiene una marcada tendencia internacional, tanto en didáctica de la matemática, como en didáctica general, observándose como un elemento clave en los programas de DPD (Ponte, 2014). En esta línea se cuenta con el **Estudio de Clases**, herramienta metodológica formativa poderosa que emerge desde Japón (Isoda, Arcavi y Mena, 2012), que otorga sistematicidad y rigurosidad a los procesos formativos y que estimula elementos claves como la investigación sobre la propia práctica (Ponte, 2014), colaboración entre pares, conexión con la práctica y focalización en el estudiante (Elliot, 2004), otorgando presencia a los principios de programas efectivos.

iii. La **reflexión sobre la práctica** (Schön, 1983) y la **reflexión sistemática** (por ejemplo, a través del modelo ALaCT de Korthagen, 2017) que dan sentido a las problemáticas de aula. Los cambios en las prácticas de los docentes, derivado de los programas de DPD en los que participan, depende de las oportunidades que se le presentan en un entorno que apoya y fomenta la toma de riesgos y el acto de reflexionar (Swoder, 2007), dando protagonismo a la creación de actitudes de reflexión de, sobre y en la práctica (Schön, 1983). La reflexión sistemática se robustece a partir de la socialización con pares y formadores, discutiendo sus puntos de vistas para formar una visión más acabada sobre los problemas que abordan (Ramos-Rodríguez, 2014). Esto hace permite la presencia del principio 2 (aprendizaje activo) y 5 (participación colectiva) e programas efectivos.

   Por otro lado, la reflexión para, en y desde la práctica (Schön, 1983) permite contar con un aprendizaje responsable de los docentes, apoya la profundización del contenido disciplinario y didáctico (principio 1), está presente en las comunidades de aprendizaje (principio 2), da oportunidades de aprendizaje, y es más enriquecedora en programas de duración prolongada (principio 4) (Ramos-Rodríguez, 2014).

Los elementos teóricos mencionados han sido puestos en juego en los programas de DPD mencionados en la figura 2 y aportan de una u otra forma a contar con los principios de programas de DPD efectivos. Como se ha mencionado, en Ramos-Rodríguez (2014), Ramos-Rodríguez, Flores y Ponte (2017) y Ramos-Rodríguez, Valenzuela y Flores (2019), se constata que permiten fortalecer y apoyar el DPD.

Segundo resultado parcial, el modelo

Este resultado se enmarca en el objetivo específico 2: construir un modelo para programas de DPD efectivos a la luz de los elementos detectados en el resultado parcial anterior. Se propone este modelo con elementos que emergen de la didáctica de la matemática y de la psicología (figura 2). El modelo se ha denominado “átomo-TP”, pues alude a una metáfora del átomo y la relación entre teoría y práctica.

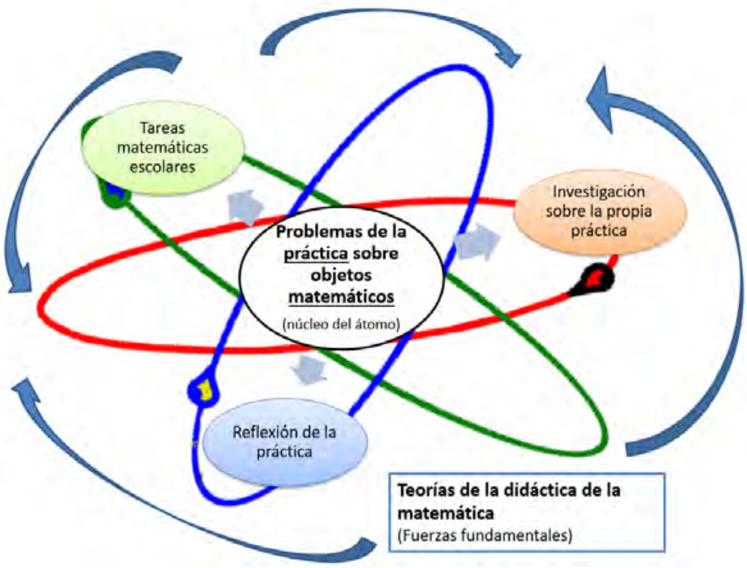


Figura 2: Modelo del "Átomo-TP" para programas de DPD efectivos en la formación del profesorado de matemática

La *metáfora del átomo*, que considera a este como la unidad más pequeña en que un elemento puede ser dividido sin perder sus propiedades, posee un núcleo en su centro y electrones girando a su alrededor. El átomo se ve representado como el elemento esencial de un programa de DPD donde los electrones que giran alrededor son los elementos del modelo, y los problemas de la práctica sobre un objeto matemático representa su núcleo (que representan protones y neutrones). Esto otorga un carácter dinámico al modelo, interrelacionando los elementos (electrones) y su centro (núcleo), considerando además las teorías de la didáctica de la matemática que hacen el papel de las fuerzas fundamentales en un átomo (mantienen unido a los electrones y núcleo). La naturaleza de este centro otorga presencia al principio 1, foco en el contenido.

La *teoría y la práctica* están presenten desde el docente que se involucra en un problema de su práctica que implica un objeto matemático, centro del modelo. Este problema tiene que ver con situaciones complejas de enseñanza y aprendizaje de la matemática, por lo que cobra presencia el principio 3. La teoría se hace presente por medio de los "electrones" que giran en torno al núcleo. Uno de ellos, la investigación sobre la propia práctica, para profundizar en la matemática y su relación con la práctica. También se tiene a las tareas matemáticas escolares, que permiten enfrentar los problemas de la práctica detectados desde el diseño de clases. Por último, un componente infaltable del modelo, presente en otros modelos estudiados por su relevancia en la formación de profesores, se tiene a la reflexión, la cual puede ser abordada desde la reflexión para, de y sobre la práctica (Schön, 193) o la reflexión sistemática (Korthagen 2017). La teoría también está presente a partir de las teorías de la didáctica de la matemática que hacen el papel de las fuerzas fundamentales en un átomo (mantienen unido a los electrones y núcleo).

Tercer resultado parcial, operativizando el modelo

Este resultado es fruto del objetivo específico 3 de este estudio: mostrar elementos del diseño e implementación de un programa de DPD para docentes de matemáticas, formulado a la luz del modelo propuesto, de manera de observar coherencia y complementariedad entre el modelo teórico y la puesta en juego de él en el programa implementado.

El modelo propuesto se ha operativizado en los últimos programas de DPD dictados en nuestra institución académica (en los niveles educativos de enseñanza primaria, secundaria y universitaria) para evidenciar de qué forma el modelo propuesto favorece que el programa sea efectivo. Se ha indagado en uno de los participantes de uno de los programas de DPD mencionados, el resultado de ello se desarrolla a continuación.

Por tercer año consecutivo se lleva a cabo un programa de DPD para docentes de matemática, donde se considera el modelo átomo-TP. Este programa propone un curso de formación cuyo objetivo es "apoyar al docente en su desarrollo profesional desde la participación de un Estudio de Clases con una reflexión desde el análisis didáctico y el estudio de TME". Bajo este paragua, se tiene presente los tres constructos que rodean al núcleo del átomo-TP: reflexión, TME e investigación sobre la propia práctica.

En el curso, se considera como reactivo inicial la identificación de un problema de su práctica relativo a la enseñanza y el aprendizaje de un objeto matemático (núcleo del átomo), el cual se denomina "problemática". Posterior a ello, se provoca en los docentes el diseñar, implementar y analizar, de manera colaborativa, una clase (proceso de Estudio de Clases) que aborde su problemática. Estos momentos se llevan a cabo en un entorno colaborativo donde pares y formadores apoyan el refinamiento de la clase en pro de los aprendizaje de los alumnos.

En todo el proceso los formadores provocan ciclos de reflexión desde el modelo ALaCT de Korthagen (2017), a nivel marco (mirando todo el curso) y micro (en algunas sesiones) en sus participantes, como por ejemplo, en torno al diseño de TME que apunten a mitigar la problemática.

Como el análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013) permite profundizar en la matemática y su enseñanza, en paralelo al Estudio de Clases, se plantea a los docentes llevar a cabo este análisis en relación al objeto matemático implicado en su problemática. Esto favorece la profundización del contenido matemático en juego (núcleo del átomo) y análisis de TME en torno a este. Para avanzar hacia una reflexión fundamentada se incluyen elementos didácticos, como limitaciones de aprendizaje, obstáculos epistemológicos (que emergen de teorías de la didáctica de la matemática).

Llevar a cabo el análisis didáctico sobre un objeto matemático implicado en una problemática de su práctica, puede llevar a los docentes a enfrentarse a una “investigación sobre su propia práctica”, donde puede identificar un problema de su práctica y buscando cómo enfrentarlo a partir de los cinco análisis que implica el análisis didáctico, de manera de diseñar y analizar una clase que aborde dicho problema. De esta forma en el curso se articula el análisis didáctico, la reflexión sistemática, la investigación sobre la propia práctica y el Estudio de Clases (figura 3).

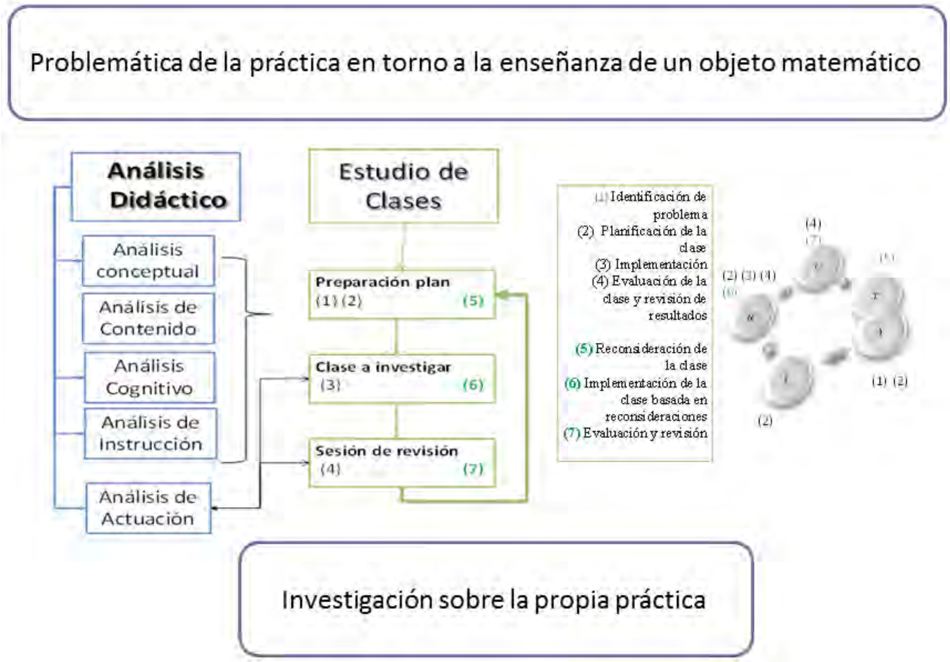


Figura 3: Articulación análisis didáctico, reflexión sistemática y Estudio de Clases

Si bien estos elementos dan un aspecto organizativo de las sesiones y contenidos del curso, lo relevante de ellos es mucho más que eso. Tiene que ver con los cimientos matemáticos y didácticos implicados en el proceso. Así, por ejemplo, el análisis didáctico (que involucra diseño y análisis de TME) y la reflexión permiten que el docente tenga una mirada más profunda de la matemática a enseñar (Ramos-Rodríguez, 2014; Ramos-Rodríguez, Valenzuela y Flores, 2018).

Para poder observar la efectividad del curso formativo se observa su impacto en la mejora de la práctica de los profesores participantes y en el aprendizaje de los alumnos de estos docentes (Bautista y Ortega-Ruíz, 2015).

En Ramos-Rodríguez y Corrial (2016) se ilustra cómo la versión del año 2016 de este programa de DPD tuvo impacto en la práctica de una docente novel partícipate en él, al generar cambios en sus propuestas de enseñanza, estimulando el desarrollo de estrategias propias, conceptos y representaciones matemáticas. Al indagar en su rendimiento en la Evaluación Docente[1], ella calificó en Competente[2] siendo la primera vez que la rinde, lo que indica un buen rendimiento de su parte. Por otro

[1] Sistema de Evaluación del Ministerio de Educación de Chile que busca promover el desarrollo profesional y asegurar el cumplimiento de estándares para un desempeño de calidad de los profesores con objeto de mejorar los aprendizajes de los estudiantes (MINEDUC, 2016).
[2] Escala ascendente: Insuficiente, Básico, Competente y Destacado.

lado, para indagar sobre el impacto del programa de DPD en esta misma profesora, en relación a los aprendizajes de sus alumnos, se averiguan aspectos de sus rendimientos en la prueba nacional SIMCE para estudiantes del país. Los alumnos mejoraron su rendimiento: 305 puntos (escala de 200 a 380 aproximadamente) en el año anterior a la participación de la docente en el programa y 328 puntos en el año siguiente a la rendición del curso formativo.

CONCLUSIONES

Se ha mostrado la génesis de un modelo para programas que apoyan el desarrollo profesional del docente de matemática, construido a la luz de principios de programas efectivos (Desimone, & Pak, 2017). Se pretende continuar avanzando en esta línea de investigación, observando las particularidades del modelo y cómo se materializa en otros programas de DPD, mirando plausibles diferencias que puede haber en su concreción en los diferentes contextos y niveles educativos de primaria, secundaria y superior. Hay que tener presente la necesidad de tener una continua vigilancia frente a los elementos que conforman este modelo. Es necesario tener más estudios pilotos controlados y aleatorios, efectivos y no efectivos, de manera de proporcionar evidencia emergente que ayude a conformar nuestra comprensión de cómo el modelo del Átomo-TP puede transformarse en base para programas de DPD efectivo de profesores de matemática. Este estudio da un paso en esta dirección.

Este modelo puede ser ampliado a otras áreas disciplinarias, teniendo cuidado en cómo se abordarán los constructos que lo conforman. Así, por ejemplo, al referirse a las TME en el caso de la matemática se está mirando elementos como la demanda cognitiva (Smith, & Stein, 2011), concepto que surge y evoluciona dentro de la didáctica de la matemática, empleado incluso para promover otro de los constructos del modelo: la reflexión (ver, por ejemplo, "Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice" de Stein y Smith, 1998).

Se espera proporcionar una posición fundamentada y precisa respecto a modelos para la formación del profesorado, de manera de poder entender de mejor forma qué elementos favorecen al docente en su desarrollo profesional con propósito de abrir caminos hacia una educación de calidad.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado con el financiamiento de: a) Vicerrectoría de Investigación y Estudios Avanzados de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, proyecto 039.315/2018; b) DAAD (Servicio Alemán de Intercambio Académico) desde la Universidad de Bielefeld, proyecto 57335022, "Fortalecimiento de la formación inicial desde la conexión entre la teoría y la práctica".

REFERENCIAS

Bautista, A. y Ortega-Ruíz, R. (2015). Teacher professional development: International perspectives and approaches. *Psychology, Society and Education, 7*(3), 240-251.

Capps, D. K., Crawford, B. A., & Constas, M. A. (2012). A review of empirical literate on inquiry professional development: Alignment with best practices and a critique of the findings. *Journal of Science Teacher Education, 23*(3), 291-318.

Cardeñoso, J., Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada, España: Universidad de Granada.

Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts: Report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools*. London: Her Majesty Stationery Office.

Cortés, F., Taut, S., Santelices, V. y Lagos, M.J. (2011). *Formación continua en profesores y la experiencia de los Planes de Superación Profesional (PSP) en Chile: Fortalezas y debilidades a la luz de la evidencia internacional. Encuentro anual de la Asociación Chilena de Políticas Públicas*. Santiago, Chile: MINEDUC.

Elliot, J. (2004). Using research to improve practice: the notion of evidence-based practice. In C. Day, & J. Sachs (Eds.), *International handbook of the continuing professional development of teachers* (pp. 264-290). Milton Keynes: Open University Press.

Fernández, C. (2014). Knowledge base for teaching and Pedagogical Content Knowledge (PCK): some useful models and implications for teachers' training. *Problems of Education in the Twenty First Century, 60*, 79-100.

English, L. D., & Kirshner, D. (Eds.) (2015). *Handbook of international research in mathematics education*. New York: Routledge.

Esteve, O. y Alsina, A. (2010). Hacia el desarrollo de la competencia profesional del profesorado. En O. Esteve, K. Melief y A. Alsina (Eds.). *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 7-18). Barcelona: Octaedro.

Felmer, P. y Perdomo-Díaz, J. (2017). Un programa de desarrollo profesional docente para un currículo de matemática centrado en las habilidades: la resolución de problemas como eje articulador. *Educación Matemática, 29*(1), 201-217.

Garet, M. S., Wayne, A. J., Stancavage, F., Taylor, J., Eaton, M., Walters, K., Song, M., Brown, S., Hurlburt, S., Zhu, P., Sepanik, S., & Doolittle, F. (2011). *Middle School Mathematics Professional Development Impact Study: Findings after the*

Second Year of Implementation (NCEE 2011-4024). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Guskey, T. R. (2003). What makes professional development effective? *Phi delta kappan, 84*(10), 748-750.

Isoda, A., Arcavi, A. y Mena A. (2012). *El estudio de clases japonés en matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Korthagen, F. (2017). Inconvenient truths about teacher learning: towards professional development 3.0. *Teachers and teaching, 23*(4), 387-405.

Levy, M. I. C. y Puig, N. S. (2001). Fundamentos de un modelo de formación permanente del profesorado de Ciencias centrado en la reflexión dialógica sobre las concepciones y las prácticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 19*(2), 269-283.

Loya, H. (2008). Los modelos pedagógicos en la formación de profesores. *Revista Iberoamericana de Educación, 46*(3), 1-8.

Moreno, A. y Ramírez-Uclés, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Org.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 243-254). Madrid: Pirámide.

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de Matemática: Perspectivas atuais. Em J.P da Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp.343-358). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ramos-Rodríguez, E. (2014). *Reflexión Docente sobre la Enseñanza del Álgebra en un Curso de Formación Continua* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Ramos-Rodríguez, E. y Corrial-Ayala, C. (2016). ¿Qué cualidades de profesor experto tiene un profesor novel? respondiendo desde la reflexión sobre la práctica. En *II Jornada Internacional y V Jornada Nacional de Enseñanza de las Ciencias* (pp. 202-208). Valparaíso: Universidad de Playa Ancha.

Ramos-Rodríguez, E., Flores, P. y Ponte, J.P. (2017). Práctica y reflexión de profesores de matemáticas chilenos bajo la perspectiva del Estudio de Clases. *Quadrante, XXVI*(2), 69-97.

Ramos-Rodríguez, E., Valenzuela, M. y Flores, P. (2019). El análisis didáctico como herramienta en la formación inicial y continua de profesores de matemática. En R. Olfos, E. Ramos y D. Zakaryan (Eds.), *Formación de profesores: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática*. Valparaíso (en edición).

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Schön, D. (1983). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Madrid: Paidós.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(4), 268-275.

Swoder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.157-223). Charlote, NC: NCTM.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of a new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

DEL TRABAJO MATEMÁTICO DEL AULA AL CONOCIMIENTO DEL FORMADOR

Luis C. Contreras, José Carrillo, Nuria Climent, Miguel Á. Montes

Universidad de Huelva, España

lcarlos@uhu.es, carrillo@uhu.es, climent@uhu.es, miguel.montes@ddcc.uhu.es

El trabajo matemático generado a raíz del planteamiento de un problema sirve de base para la reflexión sobre los espacios de trabajo matemático en dos entornos educativos: un aula de Secundaria y la formación inicial de profesores. En el segundo, el formador pretende que sus estudiantes aprendan a enseñar matemáticas, lo que supone la resolución del mismo problema que en el aula de Secundaria y su uso como herramienta formativa. En este uso del problema como herramienta formativa, el fenómeno didáctico es un trabajo que concierne a la didáctica de la matemática. En este trabajo describimos los espacios de trabajo matemáticos idóneos y personales de ambos profesores, el conocimiento matemático especializado implicado y las relaciones entre los citados espacios de trabajo y conocimientos.

Palabras clave*: trabajo matemático, formación inicial, conocimiento especializado, resolución de problemas, relaciones ETM-MTSK.*

INTRODUCCIÓN

Como señalan Kuzniak y Richard (2014), un espacio de trabajo matemático se concibe como un medio para comprender los fenómenos didácticos que se desarrollan cuando un colectivo de individuos está inmerso en actividades de resolución de problemas matemáticos. En el caso que nos ocupa analizaremos esos fenómenos desde la perspectiva de tres agentes diferentes: un formador de profesores, un profesor de secundaria y sus estudiantes. La acción se desenvuelve en un aula de 2º de Educación Secundaria (alumnos de 13-14 años). En esa aula se desarrolla un trabajo matemático gestionado por un profesor (Pedro) pudiéndose diferenciar cuatro espacios de trabajo matemático (en este caso, geométrico): el de referencia e idóneo de Pedro y los personales de Pedro y de los estudiantes. Pedro, sobre la base de su ETM de referencia y de su conocimiento (nos fijaremos en su conocimiento especializado, MTSK), genera su ETM idóneo, el cual influye en el desarrollo de los ETM personales de los alumnos, que, a su vez, van modificando, con la intervención del MTSK de Pedro, su ETM idóneo en el transcurso del proceso de enseñanza y aprendizaje (ver Gómez-Chacón, Romero y Carrillo, 2015).

Trasladando la mirada al aula de formación inicial del profesorado de Educación Secundaria, observamos que también se genera un trabajo matemático, que es la base de un trabajo sobre la enseñanza y el aprendizaje matemático, ambos gestionados por un formador, Lucas. Se tiene aquí también los ETM de referencia e idóneo de Lucas. Y podemos describir la generación de los diferentes ETM de modo similar a lo realizado en el aula de Secundaria, ejerciendo un papel esencial el MTSK de Lucas.

Mientras que en la primera situación el conocimiento del profesor puede considerarse desde la perspectiva del MTSK, en la segunda aparecen elementos de conocimiento sobre los que conviene reflexionar y que, aun siendo específicos de la matemática, trascienden los subdominios del MTSK. Además de conocimiento matemático y didáctico del contenido relativo a la enseñanza y aprendizaje del contenido en Educación Secundaria (el que quiere que construyan sus estudiantes para profesor), el formador necesita conocimiento sobre, por ejemplo, cómo construyen ese conocimiento especializado los profesores en formación. En esta segunda actividad, emergen dos tipos de espacios de trabajo matemático, aquel donde el problema matemático sirve para construir MTSK de los futuros profesores, y los posibles espacios de trabajo matemático que podrían generarse en las aulas de Secundaria (ver Gómez-Chacón, Carrillo, Oktaç, Espinoza-Vásquez y Henríquez-Rivas, 2017). El objetivo de esta investigación es describir los ETM mencionados, los conocimientos especializados implicados y las relaciones entre ellos.

MARCO TEÓRICO

Espacio de trabajo matemático

La noción de espacio de trabajo matemático (ETM) servirá para comprender las diferencias entre las génesis y los ETM idóneos de profesor y formador (ver Kuzniak y Richard, 2014). La articulación entre los planos epistemológico y cognitivo de un ETM (figura 1) se produce mediante las génesis semiótica (asociada a las representaciones de los objetos matemáticos, que relaciona el representamen del objeto matemático y su visualización), instrumental (que hace operatorios los artefactos -mediadores entre objetos y sujeto- en el proceso constructivo) y discursiva (que dota de sentido a definiciones y propiedades mediante su puesta al servicio de la argumentación y el razonamiento).

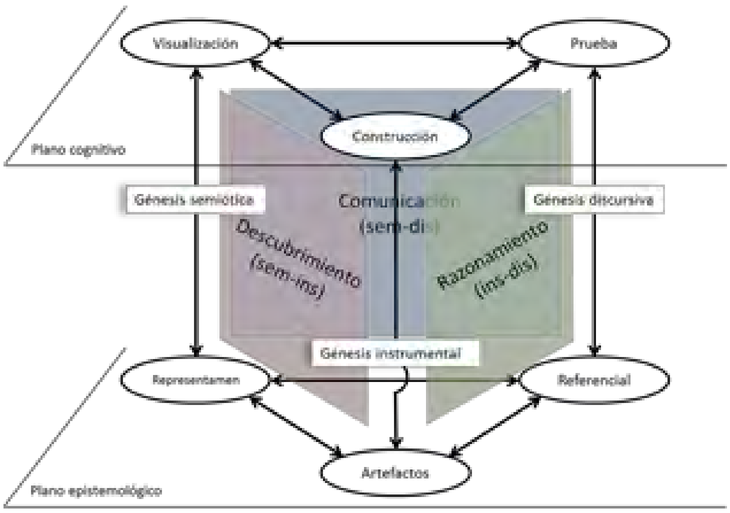


Figura 1: Planos, polos y génesis del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, & Richard, 2014)

Los planos verticales representan la articulación de varias génesis y se podrían conectar con las fases del trabajo en una tarea matemática: descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016).

Conocimiento del profesor

Usaremos el modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK) (Carrillo, Montes, Contreras y Climent, 2017; Carrillo et al., 2018) para analizar el conocimiento de Pedro. La figura 1 muestra el modelo MTSK con sus dominios y subdominios. En Carrillo et al. (2017) puede consultarse una extensa presentación al respecto.

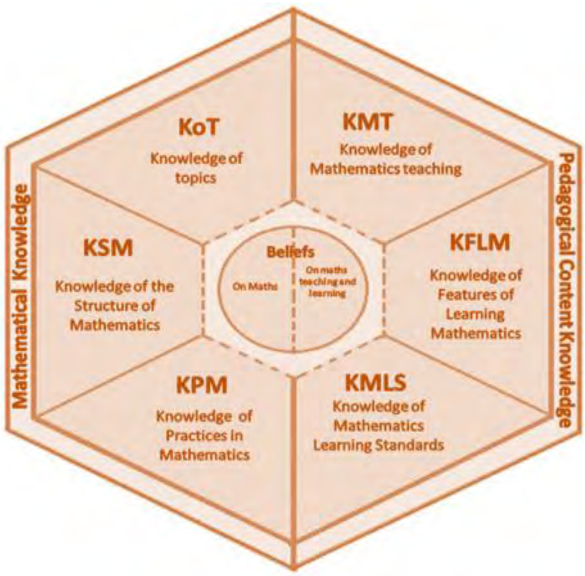


Figura 2: Modelo MTSK

El conocimiento de los temas (KoT) es el conocimiento disciplinar sobre la fenomenología y aplicaciones de un contenido, los procedimientos, las definiciones, propiedades y sus fundamentos, y los diferentes registros de representación. El conocimiento de conexiones entre contenidos matemáticos es la esencia del conocimiento de la estructura matemática (KSM). La estructura sintáctica forma parte del conocimiento de la práctica matemática (KPM), que consiste en el conocimiento del profesor sobre cómo explorar y generar conocimiento matemático, como la argumentación o procesos asociados a la resolución de problemas (heurísticos).

Forman parte del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) el conocimiento de la potencialidad matemática de recursos materiales o virtuales, el conocimiento de estrategias de enseñanza, técnicas, tareas y ejemplos, junto con el conocimiento de teorías personales o formales de enseñanza. El conocimiento de las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático, el relativo a fortalezas y debilidades asociadas al aprendizaje, el conocimiento de teorías personales o formales sobre el aprendizaje de contenidos matemáticos, y el conocimiento sobre las expectativas e intereses que suelen tener los estudiantes en relación con esos contenidos matemáticos, configuran el subdominio del conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). En el subdominio denominado conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) se diferencia entre el conocimiento acerca de lo que se espera aprendan los alumnos y el conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, ambos para un contenido concreto y un nivel específico, así como el conocimiento de posibles secuenciaciones del contenido.

El modelo MTSK considera que la especialización procede del hecho de ser un conocimiento que se usa o necesita en y para la enseñanza de la matemática. La inclusión de las creencias y concepciones permite comprender mejor el conocimiento del profesor. No obstante, creencias y concepciones no serán objeto de interés aquí.

Conocimiento del formador

Como señalan Bestwick y Chapman (2013) es necesario prestar más atención al conocimiento requerido por los formadores de profesores de matemáticas, pues no parece evidente una traslación inmediata de modelos de conocimiento del profesor a modelos de conocimiento del formador, al ser diferentes los contenidos que ambos enseñan. Sin embargo, como sugieren Zaslavsky y Leikin (2004), para comprender las características del conocimiento didáctico de ese contenido, podría utilizarse una adaptación de la triada de enseñanza de Jaworski (1992) que considera tres elementos implicados en la creación de oportunidades de aprendizaje matemático: la gestión del profesor del aprendizaje (i.e. su papel en la creación del entorno de aprendizaje, mediante el establecimiento de normas, por ejemplo), su sensibilidad hacia los estudiantes (su conocimiento de estos y la atención a sus necesidades) y el mantenimiento del desafío matemático (los retos que ofrece a los estudiantes para generar pensamiento matemático). Esta triada pretende dar sentido a la práctica de enseñanza de la matemática. En su traslado a la formación de profesores, el contenido desafiante sería el objeto de enseñanza y aprendizaje en la formación (para estos autores, la triada), la sensibilidad se dirigiría hacia los futuros profesores y sus formas de aprendizaje, y la gestión se referiría a diseño y gestión de tareas formativas. Esta será la perspectiva con la que miraremos el conocimiento de Lucas.

METODOLOGÍA

Debido al propósito exploratorio de la investigación, en la que se pretende describir conocimientos, espacios de trabajo matemático y relaciones entre ellos, se diseña un estudio de casos instrumental (Stake, 2003) y se realiza un análisis de contenido desde una perspectiva interpretativa (Bardin, 1998), utilizando las herramientas analíticas de MTSK (descriptores de los subdominios) y ETM (fundamentalmente las génesis).

Pedro y Lucas poseen una dilatada experiencia (más de 30 años en ambos casos) y están habituados a ser analizados a partir de entrevistas y grabaciones de sus clases.

El enunciado del problema formulado por Pedro a sus alumnos es: *"Vamos a clasificar triángulos rectángulos. Llama b y c a sus catetos, con b mayor o igual que c. Se trata de clasificar estos triángulos rectángulos según sus lados en función del valor de la altura relativa a la hipotenusa"*.

Los datos de este estudio vienen dados por la observación de la clase de Secundaria en la que Pedro implementa este problema y una entrevista posterior. En el caso del formador, se considera una entrevista en la que se le muestra el problema y se le pide reflexionar sobre sus posibilidades en formación inicial de profesores de Secundaria.

EL ANÁLISIS DE LOS CASOS

El problema en el aula de Secundaria

Comenzaremos por lo sucedido en el aula de Pedro.

Para diferenciar nuestro análisis del desarrollo de la sesión, indicaremos entre corchetes los comentarios analíticos sobre lo que acontece en el aula de Secundaria.

Pedro formuló el problema y dijo a sus alumnos que lo intentaran resolver individualmente. Enseguida se produce el siguiente diálogo:

Ana:	Los triángulos pueden ser escalenos, isósceles o equiláteros.
Pedro:	Muy bien, pero ahora tenéis que clasificar solo los triángulos rectángulos. ¿Es válida la misma clasificación?
Ana:	Claro ¿por qué no?
Ramón:	Los triángulos equiláteros tienen todos los ángulos iguales, así que un triángulo rectángulo no puede ser equilátero.
Pedro:	Eso es. Entonces ¿de qué tipo puede ser un triángulo rectángulo?
Ana:	Pues rectángulo, no es ni acutángulo ni obtusángulo.
Ramón:	El profesor nos está pidiendo que digamos si los triángulos rectángulos pueden ser escalenos o isósceles, pues equiláteros no pueden ser.
Pedro:	Bien, pero yo os estoy pidiendo algo más.
Inés:	Nos pides que digamos para qué valores de la altura el triángulo rectángulo es isósceles y para qué valores es escaleno ¿no?
Pedro:	Efectivamente.
Ana:	¿Y cómo podemos saberlo? No nos has dado datos.
Pedro:	Sí, os estoy diciendo que los catetos miden b y c.

[Se observan dificultades para aplicar correctamente los criterios combinados de clasificación de triángulos. Asimismo, parece que la inexistencia de datos numéricos concretos dificulta la generación de un discurso (una prueba).]

Pedro dice que sigan trabajando individualmente teniendo en cuenta la discusión anterior. Al cabo de 5 minutos, un alumno, David, pasa a la pizarra y dibuja un triángulo rectángulo de catetos 2 y 2 y otro de catetos 2 y 1, generándose el siguiente diálogo:

David: Se ve que en el triángulo isósceles la altura coincide con la mitad de la hipotenusa y en el escaleno es menor. ¿Es esto lo que nos pides?

Pedro: ¿Pensáis que David ha resuelto el problema?

Inés: Sí, creo que sí. Cuando la altura es la mitad de la hipotenusa, entonces el triángulo es isósceles, cuando es menor, es escaleno.

Pedro: ¿Creéis que eso es lo que ha hecho David? A mí me parece que lo que David ha dicho es que, si el triángulo es isósceles, entonces la altura es la mitad de la hipotenusa, y que si el triángulo es escaleno, la altura es menor que la mitad de la hipotenusa.

David: Es lo mismo ¿no, profesor?

Pedro: No sé, ¿qué decís?

Ana: Yo no veo la diferencia.

Daniel: Yo no estoy seguro de que la altura dibujada por David esté bien. ¿Puedo pasar a la pizarra?

Pedro: Claro.

[Pedro está interesado en que sus alumnos profundicen en el plano de comunicación, donde interaccionan las génesis semiótica –el uso que hacen de las representaciones geométricas de los triángulos para visualizar los diferentes casos – y discursiva, diferenciando los dos sentidos de las implicaciones lógicas, lo que se relaciona con el KPM de Pedro respecto a la práctica de probar]

Daniel dibuja en la pizarra el triángulo de la figura 3.

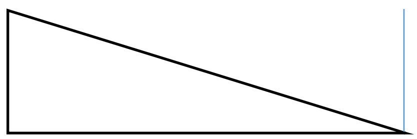


Figura 3: Dibujo de la altura por Daniel

Pedro le pide que reflexione sobre la altura dibujada, continuando la conversación:

Daniel: Tenemos la hipotenusa, cogemos un vértice y trazamos la perpendicular.

Ramón: El vértice tiene que ser el opuesto a la hipotenusa, no uno de la hipotenusa.

Daniel: Es igual, entonces me sale el otro cateto.

Rosa: No, porque el otro cateto no es perpendicular a la hipotenusa, es perpendicular a la base.

Pedro: ¿Lo comprendes, Daniel? Recuerda lo que hemos visto en clase. No debes confundir vertical con perpendicular. La altura relativa a la hipotenusa debe formar un ángulo recto con la hipotenusa, no con otro lado. Además, hay que trazarla desde el vértice opuesto, o sea, el vértice donde está el ángulo recto. ¿Comprendes ahora que David dibujó bien las alturas?

Daniel: Sí, sí, creo que sí, las alturas no tienen por qué ser perpendiculares a la base.

Pedro: Os recuerdo también que los triángulos tienen 3 bases. […] Si ponemos un lado en la horizontal, entonces una altura coincidirá con la vertical. Pero volvamos a lo que os había preguntado. ¿Qué ha mostrado David?

Inés: David ha puesto un ejemplo en el que la altura es la mitad de la hipotenusa y otro en el que es menor.

Pedro: Reflexionemos. Estoy preguntando si es lo mismo decir "cuando un triángulo rectángulo es isósceles, la altura relativa a la hipotenusa coincide con la mitad de esta" que decir "cuando la altura relativa a la hipotenusa coincide con la mitad de esta, entonces el triángulo es isósceles". Aparte tenemos que pensar si, para argumentar esto, basta con un ejemplo.

Andrés: No son la misma cosa.

Pedro: De acuerdo. ¿Lo veis todos?

[El ETM personal de Daniel va cambiando a lo largo de la actividad. No parece que se trate de errores en la instrumentalización de los artefactos para trazar perpendiculares (génesis instrumental), sino que la aplicación de la definición de altura se ve obstaculizada con imágenes prototípicas consolidadas previamente. Pedro es consciente del origen del error (confusión vertical-perpendicular) (mostrando su KFLM). Asimismo, Pedro insiste en la diferencia entre los dos sentidos de las implicaciones (KPM), debido a su interés por favorecer la génesis discursiva]

Los alumnos asienten y Pedro les dice que continúen trabajando y que se trata de llegar a saber, dado un valor de h, si el triángulo correspondiente es escaleno o isósceles. Algunos alumnos, como había supuesto el profesor en la entrevista, plantean varias ecuaciones (ahora usan las letras dadas a los catetos) y no consiguen obtener ningún resultado, pero María dice lo siguiente:

María: Los dos triángulos que forma la altura dentro del triángulo rectángulo isósceles también son isósceles, por lo que la altura es igual a la mitad de la hipotenusa. Si ahora reduzco el cateto c, la altura es más pequeña. Así que creo que lo tengo.

Pedro: ¿Cómo puedes decirlo entonces?

María: Pues si la altura es igual que la mitad de la hipotenusa, el triángulo es isósceles.

Pedro: ¿No puede ser escaleno o equilátero?

María: Equilátero nunca puede ser. Si fuera escaleno, entonces la altura sería menor que la mitad de la hipotenusa.

Pedro: Bien. ¿Lo entendéis? Ahora sí sabemos que decir isósceles equivale a decir que la altura es la mitad de la hipotenusa y decir escaleno equivale a decir que la altura es menor que la mitad de la hipotenusa. ¿De acuerdo? El razonamiento de María no se basa en un ejemplo, sino en un argumento válido para cualquier valor de b y c.

[El uso dinámico de la representación de los triángulos por parte de María le ayuda a generar su discurso. Pedro valida esta resolución y subraya la equivalencia de condiciones (KPM).]

Posibilidades del problema en la formación inicial de profesores de Secundaria

Nos centraremos ahora en el análisis que realiza Lucas de las posibilidades del problema en la formación inicial. Al preguntarle al respecto, resulta interesante ver cómo incardina este problema en un contexto formativo, partiendo del hecho de que todos los triángulos son inscriptibles. Lucas realiza un análisis de las posibilidades que tiene el problema, con la mirada puesta en los estudiantes de Secundaria, poniendo de relieve tanto su conocimiento como el que quisiera construir en un profesor.

Lucas: Una cuestión que es frecuente abordar en la Educación Secundaria es la inscriptibilidad de los triángulos, que no es más que una consecuencia de que por tres puntos del plano pase una única circunferencia. Me parece interesante poner de relieve algunos conocimientos que pueden ser de utilidad al profesor de matemáticas al hilo de la resolución de este problema.

A los conocimientos matemáticos que se evidencian en el discurso de Lucas añadimos los conocimientos que desearía construir en los futuros profesores, que, en este caso, no son solo matemáticos, por eso le pedimos que los hiciera explícitos.

Lucas: Este problema nos permite mostrar la utilidad de GeoGebra para ayudar a construir relaciones geométricas como la que he señalado antes. Una vez determinados tres puntos libres, la construcción de los segmentos que los unen y sus mediatrices nos determinan el candidato a centro de la circunferencia. Esto da al profesor una herramienta para mostrar a sus estudiantes que la circunferencia construida pasa también por los otros dos puntos y, además, al mover cualquiera de los puntos elegidos al comienzo, le permite mostrar cómo varía la posición del centro de la circunferencia (circuncentro) dependiendo del tipo de triángulo que generan. Ello le brinda un criterio para clasificar triángulos que debería añadirse a los dos criterios más comunes. Todos estos criterios deben conjugarse para permitir las relaciones entre propiedades y evitar errores de exclusión que los profesores han de saber que son comunes (como afirmar que un triángulo rectángulo no puede ser isósceles). Además, les muestra que se pueden hacer clasificaciones con criterios diferentes a los comunes.

Parece que el punto de mira de Lucas siempre está situado en el estudiante de Secundaria y que ello le proporciona oportunidades para pasar del conocimiento a construir en el estudiante al conocimiento que desearía construir en el futuro profesor. El primero es conocimiento matemático; el segundo conocimiento especializado de los futuros profesores. Así, evidencia su interés por poner de relieve las posibilidades de Geogebra como recurso para hacer geometría dinámica, a través de la construcción de relaciones entre conceptos que considera que han de ir más allá de un mero conocimiento procedimental que sabe que caracteriza muchas prácticas educativas en geometría; piensa que así puede ayudar a los futuros profesores a comprender las dificultades que ello puede generar en sus estudiantes. Esto nos permite identificar una primera diferencia en algunos elementos del conocimiento de Lucas (en relación con los evidenciados en el caso de Pedro): se observa una mayor amplitud en el abanico de relaciones entre conceptos. El conocimiento didáctico de Lucas va más allá de las posibilidades de Geogebra (que sería KMT de MTSK) para superar las dificultades de los estudiantes (que sería KFLM de MTSK), muestra sensibilidad hacia el aprendizaje de los futuros profesores, evidenciando que conoce modos de pensamiento habituales de estos sobre la geometría (que sería conocimiento sobre las características del aprendizaje de los futuros profesores). El aparente circunloquio que utiliza Lucas en relación con el problema en cuestión está motivado por su interés en construir en el futuro profesor conocimiento sobre las características de aprendizaje de sus estudiantes, como nos muestra cuando le preguntamos por la relación de lo anterior con el problema.

Lucas: Una situación particular [...] es el caso de los triángulos rectángulos (cuando el circuncentro se sitúa sobre el lado de mayor longitud). El profesor ha de tomar conciencia de que es posible que los alumnos no se den cuenta [...] de la posición precisa del circuncentro en ese caso (punto medio de la hipotenusa), al haber dejado atrás el hecho de ser punto de la mediatriz correspondiente. Se construye una circunferencia y un diámetro (como la mediatriz de una cuerda cualquiera, lo que supone volver a mostrar el significado del concepto de mediatriz y una de sus múltiples aplicaciones) y, tras elegir un tercer punto libre, se construye un triángulo; GeoGebra nos indicará que el valor del ángulo opuesto al diámetro es de 90º. [...] al mover el punto libre sobre la circunferencia se observará que el ángulo recto no varía, mostrando todos los triángulos rectángulos inscritos, permitiendo conjeturar que "todos los triángulos inscritos en una circunferencia, uno de cuyos lados sea un diámetro, son rectángulos". Esto permite [...] presentar a sus estudiantes un resultado potente. Me gusta mostrarles el valor constructivo de la demostración usando que el valor de un ángulo inscrito es la mitad del arco que abarca.

Esto nos da la oportunidad de ver las dos perspectivas de Lucas. El conocimiento matemático que desearía construir en hipotéticos estudiantes de Secundaria genera el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el aprendizaje de los estudiantes que quiere construir en los futuros profesores (MTSK de estos) y cómo lo haría. Lucas muestra así conocimiento sobre la enseñanza de subdominios de MTSK (conocimiento sobre la enseñanza del contenido de la formación).

Para Lucas, el problema es una oportunidad para relacionar un importante elenco de conocimientos geométricos del que forma parte el propio resultado del problema:

Lucas: […] Esto nos sitúa ante otra oportunidad de establecer un criterio para clasificar triángulos según sus lados, reforzando las relaciones entre propiedades a que antes hemos hecho referencia y permitiendo resolver el problema […].

Por otro lado, la resolución del problema no es ni el objetivo, ni el punto de partida del discurso de Lucas, sino más bien el organizador que, desde su perspectiva, permitiría al futuro profesor construir un conjunto de conocimientos relacionados que les posibilite el trabajo con sus futuros alumnos. Las líneas que siguen vuelven a mostrarnos que el problema es para Lucas un recurso para construir distintos elementos del conocimiento del futuro profesor (conocimiento sobre la enseñanza del contenido de la formación, donde dicho contenido es la matemática como objeto de enseñanza y aprendizaje y puede representarse con la triada de Jaworski).

Lucas: La exclusión del equilátero enriquece las relaciones entre clasificaciones, a la vez que permite al profesor acudir a resultados anteriores (suma de los ángulos interiores de un triángulo) como justificación. A partir de ahí, mover el punto libre por la circunferencia ayuda a los estudiantes a conjeturar que, a mayor valor de la altura relativa a la hipotenusa, el triángulo obtenido tendrá mayor área y que el de área máxima es el isósceles (cuando ese punto se sitúa sobre la mediatriz de la hipotenusa). Es ahora cuando el profesor puede mostrar que el valor máximo de la altura es la mitad de la longitud de la hipotenusa y la mitad de la diagonal del cuadrado inscrito (pudiendo establecerse una relación entre la altura relativa a la hipotenusa y el cateto, que es la misma que entre el radio y el lado del cuadrado inscrito), siendo escalenos el resto de los triángulos.

Hay dos aspectos que destacan en el discurso: un conocimiento sobre estrategias de enseñanza de un contenido (matemático, pero también de recursos para su enseñanza, de dificultades de los estudiantes y de aspectos sintácticos), y un conocimiento de relaciones entre esos contenidos. Asimismo, hay una sensibilidad constante hacia el futuro profesor y su conocimiento. Es decir, como hemos señalado antes, Lucas muestra conocimiento sobre la enseñanza de MTSK, de características de aprendizaje de los profesores, junto con conocimiento sobre las relaciones interconceptuales implicadas. Por otro lado, Lucas está sugiriendo a los futuros profesores claves para las génesis instrumental y discursiva para la construcción de sus ETM y el de sus futuros estudiantes. En ese sentido, percibimos la doble transferencia de conocimiento (Olanoff, 2011) del formador hacia los estudiantes pasando por el profesor como uno de los elementos que caracterizan el conocimiento del formador.

REFLEXIONES FINALES

Dos entornos alrededor de un problema geométrico (la implementación del problema en un aula de secundaria, y la reflexión sobre su uso en la formación inicial de profesores de Secundaria) nos han permitido diferenciar los ETM idóneos de Pedro y Lucas. Lucas muestra su ETM idóneo (como formador) que tiene características diferentes del ETM idóneo de Pedro como profesor, que también nos muestra su ETM personal. El ETM idóneo de Lucas tiene como referentes tanto a los futuros profesores, como a los posibles estudiantes de esos profesores y, de alguna manera, deja ver su ETM personal en la medida en que alude a la resolución de la tarea.

El ETM idóneo del docente varía según los conocimientos de sus estudiantes, lo que demanda la institución y los objetivos de enseñanza (Henríquez y Montoya, 2015). En este caso, la diferencia de objetivos marca la diferencia entre los ETM. El contenido que enseña Pedro es contenido matemático, y su conocimiento puede ser analizado con el modelo MTSK. Lucas pretende que los futuros profesores construyan su MTSK, con énfasis en que establezcan conexiones ricas entre contenidos matemáticos. Ese énfasis en las relaciones aporta evidencias de un conocimiento matemático rico en conexiones, lo que podría suponer un KSM del formador de mayor alcance y profundidad que el que despliega Pedro en el aula de Educación Secundaria. Al conocimiento matemático y didáctico referido al aula de Secundaria de Lucas se añaden elementos de conocimiento didáctico del contenido de la formación: conocimiento sobre las características del aprendizaje de los profesores en formación y conocimiento sobre la enseñanza de MTSK, mostrándose útil la adaptación de la triada sugerida por Zaslavsky y Leikin (2004).

Por otro lado, Lucas utiliza pruebas pragmáticas (manipulativas), mientras que Pedro utiliza pruebas intelectuales (argumentativas), lo que podría permitir diferenciar los dos paradigmas bajo los que trabajan: geometría natural y geometría axiomática y formal, respectivamente. Quizás por ello, en Lucas se observan génesis instrumental (con visualización dinámica) y discursiva, y en Pedro génesis semiótica y discursiva.

Hemos visto cómo el KPM y KFLM de Pedro se movilizan y posibilitan la activación del plano de comunicación. Por otro lado, el KPM de Pedro y su conocimiento de un recurso para el aprendizaje de la geometría, junto con conocimiento sobre las características del aprendizaje de los profesores en formación y conocimiento sobre la enseñanza de MTSK, le permiten la potencial activación del plano de razonamiento. Futuras investigaciones deberán profundizar en las relaciones que se han puesto de manifiesto, particularmente en cómo los ETM de los estudiantes de Secundaria pueden constituirse en uno de los referentes que permita al formador diseñar entornos potentes de construcción de conocimiento profesional.

REFERENCIAS

Bardin, L. (1998). *L'analyse de contenu*. Paris: Presses Universitaires de France - Le Psychologue.

Beswick, K., & Chapman, O. (2013). Mathematics teacher educators' knowledge. In A. M. Lindmeier, & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, (p. 215). Kiel, Germany: PME.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L.C., & Climent, N. (2017). Les connaissances du professeur dans une perspective basée sur leur spécialisation: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *22*, 185 - 205.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Gómez-Chacón, I.M., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 1-22.

Gómez-Chacón, I.M., Romero, I., & Carrillo, J. (2015). Genése et développement du travail mathématique: rôle de l'enseignant, du formateur et des interactions. *Actas Cuarto Simposio ETM* (pp. 399-417).

Gómez-Chacón, I.M., Carrillo, J., Oktaç, A., Espinoza-Vásquez, G., & Henríquez-Rivas, C. (2017). Genése et développement du travail mathématique: le rôle du professeur, du formateur et des interactions. *Actas Quinto Simposio ETM* (pp. 385-411).

Henríquez, C., & Montoya, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 51-70.

Jaworski, B. (1992). Mathematics teaching: What is it? *For the Learning of Mathematics*, *12*(1), 8-14.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *RELIME*, *17*(4), 5-15.

Olanoff, D. (2011). Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Case of Multiplication and Division of Fractions. *Mathematics Disertations*. Paper 64.

Stake, R.E. (2003). Case Studies. En N.K. Denzin & Y. Lincoln (Eds), *Strategies of Qualitative Inquiry* (2nd ed) (pp. 134-164). London: Sage.

Zaslavsky, O., & Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*, 5-32.

RELACIÓN ETM-MTSK: CONEXIONES ENTRE LA GÉNESIS SEMIÓTICA Y EL CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS

Carolina Henríquez-Rivas[a], Gonzalo Espinoza-Vásquez[b]

[a]Universidad de Talca, Chile, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

cahenriquez@utalca.cl, gonzalo.espinoza.v@gmail.com

El presente trabajo propone avanzar en la relación entre los constructos ETM y MTSK, estableciendo como foco de interés una conexión específica, la génesis semiótica y el conocimiento de los temas, respectivamente. Para estos efectos hemos considerado los análisis de la práctica matemática de un profesor en el aula y cómo sus conocimientos son utilizados para la enseñanza. Finalmente, reflexionamos respecto al sentido que hemos dado a estos análisis en una perspectiva teórica.

Palabras clave: *Génesis semiótica, Conocimiento de los temas, Funciones, Profesor.*

INTRODUCCIÓN

Desde que se abre un espacio al modelo para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) en pasados Simposios del ETM (Flores-Medrano, Montes, Carrillo, Contreras, Muñoz-Catalán y Liñán, 2016), comienza el interés por estudiar las relaciones entre ambos constructos, ETM y MTSK, posicionando al profesor como un elemento mediador para dicho vínculo (Vasco-Mora, Climent, Escudero-Ávila, Montes y Ribeiro, 2016). Asimismo, se posiciona la *tarea* matemática como otro elemento que permite la articulación o diálogo entre los constructos (Espinoza-Vásquez, 2016). De este modo, se avanza en establecer relaciones entre los distintos ETM y diferentes subdominios del MTSK (Zakaryan, Ribeiro y Espinoza-Vásquez, 2016).

Un aspecto pendiente se encuentra en la profundización de las relaciones entre los componentes de cada constructo, ya sea desde el estudio teórico de sus posicionamientos, o desde la práctica mediante el análisis del quehacer profesional del profesor. El objetivo de esta contribución es avanzar en las relaciones que se han establecido entre los modelos ETM y MTSK (e.g., Espinoza-Vásquez, 2016; Vasco-Mora et al., 2016) como marcos que permiten, por una parte, dar una doble mirada a un mismo fenómeno para comprenderlo con mayor profundidad a la que se lograría con el estudio de solo uno de los modelos, y por otro lado, comprender cómo se relacionan dos elementos específicos de cada modelo: la génesis semiótica del ETM y el conocimiento de los temas en el MTSK. La elección de estos elementos responde a la línea de investigación que Espinoza-Vásquez (2016) plantea como abierta para profundizar en las relaciones entre los marcos. En este sentido, el presente trabajo aborda la pregunta *¿Cómo interactúan el ETM y el MTSK en el análisis de un mismo fenómeno?* Y, específicamente *¿Cómo se hacen visibles las conexiones teóricas dadas por la génesis semiótica del ETM y el KoT del MTSK en la práctica del profesor?*

MARCO TEÓRICO

La hipótesis teórica de partida en el presente trabajo se basa en las contribuciones entre ETM y MTSK.

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK)

El MTSK es una conceptualización para el conocimiento del profesor de matemáticas y un modelo analítico que permite estudiar el conocimiento que muestra, posee y/o declara el profesor de matemática y, también, sirve de herramienta metodológica en el estudio de la práctica docente (Carrillo et al., 2014). El MTSK considera dos grupos de conocimiento: el *Conocimiento Matemático* (MK), que corresponde al conocimiento que tiene el profesor de la matemática como disciplina científica en un contexto escolar y el *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK), que corresponde al conocimiento del profesor sobre los objetos matemáticos como objetos de enseñanza-aprendizaje. Cada uno de estos dominios se ha dividido en subdominios, los que permiten caracterizar el conocimiento del profesor. Se añade un dominio para las *Creencias* sobre la matemática, sobre su enseñanza y su aprendizaje, considerando que ellas permean a todos los subdominios (Carrillo et al., 2014). La presente contribución aborda el *Conocimiento del Tema* (KoT), que corresponde al conocimiento del profesor sobre el contenido matemático que debe enseñar y deben aprender los alumnos, pero con una profundización mayor a este.

Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

El constructo de los *Espacios de Trabajo Matemático* (ETM) definido como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas (Kuzniak, 2011). La presente contribución privilegia el análisis sobre la *génesis semiótica* del ETM, las nociones de *circulación* entre las componentes del ETM (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2014) y de *planos verticales* (Kuzniak y Richard, 2014).

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

La metodología de investigación es cualitativa, se trata de un *Estudio de Caso,* del tipo diseño de caso simple con una unidad de análisis (Yin, 2009). Se analiza la práctica matemática de un profesor de Educación Media (*ETM idóneo* del profesor). Los datos fueron recolectados mediante la videograbación para el concepto *función* en Octavo año de Educación Básica (13-14 años). Se realizaron transcripciones identificando: intervenciones del profesor (P), tareas propuestas e intervenciones de los estudiantes, basadas en el análisis de contenido (Bardin, 1996).

Se seleccionó un episodio de la primera clase en donde el profesor define, implícitamente, la tarea de construir la representación gráfica cartesiana de una función afín. La selección de este episodio se basa en la presencia de diferentes tipos de representaciones que son utilizadas por P, se identificaron los aspectos que permiten evidenciar su conocimiento acerca de los registros de representación semiótica y cómo desarrolla dicha actividad. Esto significó no ahondar en aspectos que daban cuenta de otros conocimientos especializados del profesor y la activación de otras génesis.

EXTRACTO DE LOS RESULTADOS

En el siguiente extracto, P inicia el desarrollo de la tarea, construir la representación gráfica de $f(x)=x+1$.

P: La representación gráfica va a ser un conjunto de puntos [...] va a estar formado, el gráfico de una función, como los elementos (x,y), porque necesito puntos que pertenezcan el x al conjunto de partida, el y al conjunto de llegada y donde la segunda coordenada sea necesariamente la imagen de la primera.

P calcula imágenes de elementos del dominio de f para determinar puntos del plano que pertenecen al gráfico de la función. Para ello selecciona y evalúa los elementos del dominio en la expresión algebraica dada para la función, obteniendo las imágenes respectivas. Con este procedimiento, P obtiene pares de números que posteriormente utilizará como puntos en el plano para graficar la función $f(x)=x+1$, vinculando lo algebraico, lo numérico y lo cartesiano de la función. Todo lo anterior da cuenta del privilegio por la génesis semiótica para enfrentar la tarea y del conocimiento sobre procedimientos y representaciones del tema. A continuación, P evidencia la relación entre las imágenes de la función con los puntos de su gráfico (ver anexo 1).

P: ¿Qué hacía esta function [$f(x)=x+1$]? Al que entraba le sumaba 1, entonces yo podría encontrar la imagen de un montón de puntos, valores que yo le asigne al x. En particular, elegí asignarle al x el 1, el 0 y el -1 [...]¿Qué encontramos? Que la imagen del 1, al pasar por la función me daba 2, la imagen del 0 era el 1 y la imagen del -1 era el 0, entonces esto lo podemos asociar a un punto del plano cartesiano donde los puntos del plano cartesiano que pertenecen al gráfico son de la forma $(x, f(x))$, o sea que la segunda coordenada es la imagen de la primera, entonces por eso lo asociamos a esas coordenadas.

En la intervención, P muestra la función como un proceso de entrada-salida cuando señala que "Al [número] que entra le suma 1" o cuando dice "el 1, al pasar por la función me da 2". Este significado de la función apoya el proceso de construir la representación gráfica de la misma mediante la obtención de puntos que pertenecen a su gráfico. El proceso de obtener imágenes queda relacionado al procedimiento numérico/algebraico para graficar la función y al conocimiento de su representación cartesiana. Este tratamiento conforma un *artefacto simbólico* al ejecutar dicha tarea y, en el trabajo se da una interacción entre los planos [*Sem-Dis*] e [*Sem-Ins*], dado por las explicaciones, el trabajo semiótico y artefacto simbólico involucrados. Cabe resaltar que las explicaciones dadas en lenguaje natural no son registradas en la pizarra, pareciera no ser relevante para P este registro semiótico.

DISCUSIÓN Y COMENTARIOS FINALES

En una perspectiva general, se ha considerado una hipótesis de partida que relaciona las contribuciones mutuas entre ETM y MTSK. Esta posición nos lleva a explorar cómo la génesis semiótica se desarrolla en el KoT del profesor cuando se exponen diferentes representaciones de la función. El análisis en conjunto permite identificar que en la activación por la génesis semiótica intervienen distintos tipos de conocimientos especializados, identificables mediante las categorías del KoT. Asimismo, el cómo se relacionan estos conocimientos pueden ser interpretados a la luz del trabajo en los distintos planos verticales del ETM, en nuestro caso, iniciando en la génesis semiótica.

El objetivo de este trabajo es avanzar en la comprensión de las interacciones de los dos marcos, particularmente mediante el estudio de la relación entre el aspecto semiótico que ambos constructos contemplan. En este sentido, fue posible observar que la génesis semiótica es la entrada al trabajo matemático que el profesor propició en la clase analizada. También, se observó que el reconocimiento de distintas categorías de conocimientos en el KoT permitieron pormenorizar las interacciones entre los planos que involucran la activación de la génesis semiótica.

Desde una perspectiva metodológica, fue necesario identificar la tarea que activa el ETM *idóneo* de P y el análisis de contenido desde el MTSK, lo que permitió combinar y profundizar en la comprensión del conocimiento que P manifiesta, lo cual es un avance en la relación entre ETM y MTSK. Además, por la extensión y profundidad de este trabajo, se privilegiaron aspectos asociados al conocimiento del tema y a la génesis semiótica quedando abierta la posibilidad de incluir otros subdominios, como por ejemplo el *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas*, que inciden en la elección de las representaciones que el profesor muestra a sus estudiantes. Asimismo, queda abierta la idea de profundizar en el estudio de otras prácticas en el aula que privilegian otro tipo de relaciones entre MTSK con componentes del ETM y sus génesis, o bien, considerar el *enfoque multidimensional* de herramientas e instrumentos en el trabajo matemático (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016).

AGRADECIMIENTOS

Espinoza, G. agradece Beca Doctorado nacional folio 21150897. Henríquez, C. agradece el apoyo del proyecto FID TAL.1758.

REFERENCIAS

Bardin, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid, España: Akal Ediciones.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Espinoza-Vásquez, G. (2016). Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función. En I. M. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard, y L. Vivier (Eds.), *Espacio de Trabajo Matemático. Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 439–450). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L.C., Muñoz-Catalán, M. y Liñán, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Boletín de Educación Matemática*, *30*(54), 204–221.

Henríquez-Rivas, C. y Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 51-70.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A., y Richard, P., (2014). Espacios de trabajo matemático: Puntos de vista y perspectivas. *Relime*, *17*(4-1), 5-15.

Kuzniak, A., Nechache, A. y Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Educación Matemática, 48,* 861-874.

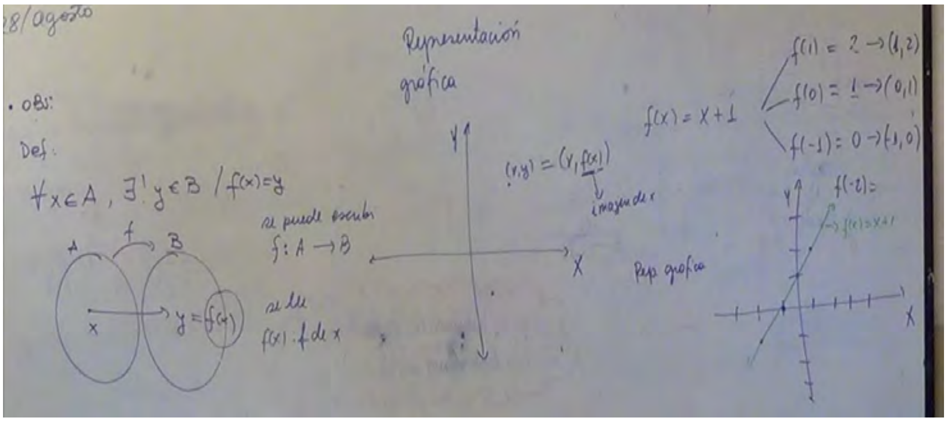
Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, J. y Mena-Lorca A. (2014). Circulación y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Relime, 17*(4-I), 181-197.

Vasco-Mora, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., y Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Bolema*, *30*(54), 222–239.

Yin, R. K. (2009). *Case study research. Desing and methods (4th ed)*. Thousand Oaks: SAGE Publications INC.

Zakaryan, D., Ribeiro, C. M. y Espinoza-Vásquez, G. (2016). Relaciones entre el conocimiento del tema (MTSK) y los ETM idóneo y personal. En I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis y L. Vivier (Eds.), *Actas del Simposio Espacio de Trabajo Matemático 5* (pp. 467-475). Florina, Grecia: University of Western Macedonia.

Anexo 1: Registro escrito en la pizarra por P.



LA NUMERATION *SECIMALE* EN FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRE

Annette Braconne-Michoux[a], Konstantinos Nikolantonakis[b], Laurent Vivier[c]

[a]Université de Montréal, Québec, [b]Université de Macédoine Ouest, Grèce, [c]Université Paris Diderot, France

annette.braconne-michoux@umontreal.ca, knikolantonakis@uowm.gr, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

***Mots-clés** : Base six, Formation initiale, Professeur de primaire*

INTRODUCTION

La numération décimale est une des notions clés de l'enseignement primaire, quel que soit le pays. Son enseignement s'étend sur l'ensemble du premier degré, y compris la maternelle, et même au collège. Du point de vue de l'apprentissage des élèves, les difficultés sont nombreuses, que ce soit dans le travail des nombres proprement dit ou bien dans leurs applications : compréhension du codage, aspects ordinal et cardinal, numération orale, les techniques des quatre opérations de base, les critères de divisibilité, les rationnels (fractions et décimaux), les mesures de grandeurs (longueur, aire, volume, masse, capacité, etc.), les nombres réels et leurs approximations ($\sqrt{2}$ et π notamment), etc. Par ailleurs, Chambris (2010) a mis en évidence l'importance des unités de numération, en lien avec le système métrique.

Tous ces points sont à travailler pour les futurs professeurs des écoles, les premières notions étant particulièrement cruciales étant donné qu'elles constituent un enjeu de l'apprentissage de toute première importance.

L'objet de cette étude est d'enrichir l'ETM personnel de la numération décimale des futurs professeurs d'écoles afin qu'ils puissent élaborer à leur tour des ETM idoines pour leurs élèves qui soient riches du point de vue mathématique. Pour cela, nous avons élaboré un premier ETM idoine en formation s'appuyant sur la base six.

METHODOLOGIE – UNE SEQUENCE LONGUE SUR LA NUMERATION SECIMALE

Tempier (2013) s'est appuyé sur les travaux de Chambris (2010) sur les unités de numération pour proposer une situation permettant de travailler, en CE2 (grade 3), la numération décimale des grands nombres. Nous avons repris cette situation en l'adaptant à la base sept (Nikolantonakis et Vivier, 2016) puis six et, depuis plusieurs années, nous la proposons en France (en troisième année de licence MIASHS, parcours Professorat des Ecoles, L3-PE, de l'université Paris Diderot) et en Grèce (Faculté pédagogique de Florina, Université de Macédoine Ouest). En 2018, de janvier à avril, partant de la même situation en base six qui a fait ses preuves de robustesse depuis 2013, c'est toute une séquence de 8 séances de 3h qui a été proposée aux étudiants en formation initiale de la L3-PE. Les contenus ont balayé toutes les notions exposées ci-dessus :

- S1 : la situation de Tempier adaptée à la base six, codage, aspects ordinal et cardinal, unités de numération, additions
- S2 : la numération orale en base six, les problèmes additifs (Vergnaud, 1990)
- S3 : les techniques de l'addition et de la soustraction en base six (les tables), les problèmes multiplicatifs (Vergnaud, 1990)
- S4 : *Evaluation 1* ; la multiplication et la division en base six (les tables)
- S5 : mesurer des longueurs, construction d'une droite numérique en base six avec des sous-multiples du mètre, nommer les multiples et sous-multiples en lien avec la numération orale
- S6 : mesurer/calculer des aires (carré, triangle, disque), approximations de $\sqrt{2}$ et π en base six, conversions de et vers la base dix
- S7 : *Evaluation 2*, différents types de représentations (dont la base de numération) des objets mathématiques, fractions
- S8 : arithmétique, nombres premiers (crible d'Erathostène pour obtenir les nombres premiers inférieurs à $1000=6^3$, PGCD, PPCM, ouverture sur les autres bases de numération
- *Evaluation finale*

Le choix de la base six provient de plusieurs propriétés : la proximité phonétique entre six et dix ; il n'y a pas besoin de nouveau chiffre pour coder (c'est une difficulté cognitive de premier ordre, Nikolantonakis et Vivier, 2013) ; six n'est pas trop *petit* (il n'y a pas une expansion rapide du nombre de chiffres) ; six=2×3 et dix=2×5 ont un ensemble de diviseurs de même structure (ce qui donne des critères de divisibilité identiques avec des conséquences identiques sur les écritures dans le système de numération de position des fractions).

Pour le futur professeur, la numération décimale est un acquis naturalisé, presque incarné (qui ne voit pas « dix » dans 10 ou « douze » dans 12 ?). Il est à noter que l'ETM idoine élaboré en formation ne repose en aucun cas sur la base dix. Même si les étudiants ont des connaissances en base dix (qu'ils utilisent), le contrat didactique instauré exclut jusqu'en S6 tout recours explicite à la base dix.

RESULTATS

Il s'agit d'une première situation d'exploration de cette séquence longue sur la numération sécimale. L'élaboration de l'ETM idoine s'est faite au fil des séances, en fonction du travail des étudiants et en s'appuyant sur les liens sémiotiques et cognitifs entre les numérations décimale et sécimale. Les données recueillies sont : les observations et les notes de fin de séances par le formateur ainsi que les productions des trois évaluations.

Plus spécifiquement, on peut considérer, et ce sont nos hypothèses, que les numérations en base six et dix constituent deux ETM distincts. L'ETM$_{dix}$ est bien maitrisé techniquement mais nécessite une compréhension mathématique et didactique plus profonde pour de futurs professeurs d'école. La grande proximité des étudiants avec la base dix constitue un obstacle pour cet enrichissement nécessaire des ETM$_{dix}$ personnels, pour une meilleure compréhension, ce qui a potentiellement des conséquences négatives pour leur futur métier. Ainsi, nous essayons de comprendre si la constitution d'un ETM$_{six}$ éloigné des connaissances des étudiants ne serait pas favorable à cet enrichissement : d'abord développé de manière parallèle cet ETM$_{six}$ est si proche de l'ETM$_{dix}$ que l'on peut attendre des retombées en termes de compréhension et de maitrise conceptuelle de ce dernier.

Avec la méthodologie employée, il est difficile d'avoir des résultats probants. Néanmoins, l'implication et la compréhension d'une grande majorité d'étudiants permet d'affirmer que cet ETM$_{six}$ est tout à fait accessible pour de futurs professeurs d'écoles en quelques séances. La mise en perspective avec l'ETM$_{dix}$ et les aspects plus didactiques de leur formation sont perçus comme particulièrement riches pour le formateur.

PERSPECTIVES

Après cette première application de la situation que l'on pourrait qualifier de *sauvage* – c'est-à-dire sans une méthodologie bien cadrée –, nous la reprenons en 2019 avec une élaboration, une méthodologie et une prise de données mieux cadrées (les séances sont animées par deux formateurs). Les premiers résultats confirment la première expérimentation. La question centrale restant, pour nous, d'identifier les retombées pour la base dix de notre situation pour de futurs professeurs d'école.

REFERENCES

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30, 317–366.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base, *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA,* volume 30, número 54, 23-44.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis, *MENON: Journal of Educational Research*, Full article: issue 2a, 99-114

Tempier, F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*, Thèse de doctorat de l'université Paris VII.

Tempier F., Chambris C. (2017). Concevoir une ressource pour l'enseignement de la numération décimale de position, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37/2-3.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2.3, 133-170.

KINDERGARTEN AND PRIMARY TEACHERS' INTERPRETATIVE KNOWLEDGE AND MWS IN THE CONTEXT OF A MEASUREMENT TASK

Miguel_Ribeiro[a], Alessandra Rodrigues de Almeida[b]

[a]State University of Campinas – UNICAMP, Brazil, [b]Pontíficia Universidade Católica de Campinas, PUCCAMP, Brazil

When aiming at contributing to students understanding what they do and why they do it at every time, performing connections within and between topics, one of the core aspects of teachers' practices concerns interpreting students' productions and comments. Such interpretation allows to have the reasoning sustaining such productions as a starting point for the future discussions. The knowledge grounding such practice has been termed as Interpretative Knowledge. Particularly, it corresponds to the knowledge grounding giving sense to pupils' answers, in particular to 'non-standard' ones (that differ from those teachers would expect), or answers that contain errors (Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014).

The Interpretative Knowledge is intrinsically related with the nature and content of the teachers' specialized knowledge in the particular subdomain of the content knowledge. Thus, it is situated in the scope of the mathematical activity a teacher needs to develop "as part of his/her own cognitive process" in order to, afterwards, be able to ground in a mathematically adequate way the decision making in and for teaching with a particular starting point – the students possible reasoning. It refers to a deep and wide mathematical knowledge that enables teachers to support students in building their mathematical knowledge starting from their own reasoning and productions, no matter how not standard or incorrect they might be. IK completes the knowledge of typical errors or solutions strategies, with the knowledge of possible source for typical or a-typical error, and the knowledge of possible use of errors in the sense that Borasi (1987) developed.

Teachers' knowledge is thus perceived as specialized also concerning the content knowledge, besides the pedagogical knowledge and such specialization is considered following the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (Carrillo et al., 2018) conceptualization. The space in which the development of these core elements of teachers' practices (Interpretative Knowledge and MTSK) needs to occur is perceived as being influencing and influenced (in an intertwined manner) by the Mathematical Working Spaces – MWS (e.g., Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016).

When developing research focusing on better understanding the content of teachers' Interpretative and Specialized Knowledge, and conceptualizing tasks for developing such knowledge, the personal and suitable MWS assume a major role. In that sense the content of (what comprises) such personal and suitable MWS, at each situation and related with each particular topic, is perceived both as a starting and end point of the movement elaborated in and for the conceptualization of the tasks for teacher education as well as during the implementation process itself. Considering that teacher education need to focus on where it is most needed (Ribeiro & Carrillo, 2011), that teachers' knowledge is one of the factors that most influences students results (e.g., Carnoy & Arends, 2012); that Measurement is one of the (many) topics in which students and teachers reveal difficulties (e.g., Policastro, Almeida, & Ribeiro, 2017) and that Measurement can be considered a way for connecting both Geometry and Numbers (two other problematic topics in students and teachers knowledge), it seems a natural foci of attention.

A focus on developing pupils' knowledge and understanding on Measurement should thus start since kindergarten and in order to be able to do so, teacher education should allow teachers to develop mathematically demanding practices associated with powerful learning opportunities (in Hiebert and Grouws, 2007 sense). As research focusing on kindergarten teachers' knowledge on Measurement and its impact on students' performance (Grossman, 2010) is still scarce, we assume such foci of research (and education) aiming at ground, in an elliptical intertwined growing way, the task conceptualization and implementation with the nature and content of the teachers personal and suitable MWS and the teachers Interpretative and Specialized knowledge on Measurement in and for supporting the development of pupils' mathematical knowledge.

Considering that most research on Measurement focus mainly on the students and their reasoning and (mis)understandings and/or representations, aiming at shifting the focus in order to contribute for the improvement of students understanding and results, we have designed a research project involving teachers and prospective teachers from kindergarten to upper secondary and focusing on teachers Interpretative and Specialized Knowledge in the scope of Measurement. Here we discuss a particular case of one of such contexts – a professional development context involving kindergarten and primary teachers. This particular context refers to a 40 hours professional development course (five Saturdays during 3 months) in which participated 11 teachers and one prospective teacher (nine kindergarten teachers, one primary teacher, one lower secondary teacher and one prospective teacher). All the moments have been audio and video recorded – focusing both the plenary discussion as well as the small group work (one camera focusing each group), and in the scope of this work we focus on one particular task designed in order to access and develop teachers' knowledge on the connections between Geometry and Numbers (Clements & Sarama, 2007) and on possible ways for implementing tasks with students that would allow them to develop such knowledge. Such tasks for teacher education have as a starting point a set of students' productions aiming at discussing the content of teachers Interpretative Knowledge (grounded in their Specialized Knowledge), and data has been analized just after each course meeting independently by each research team member focusing on what can considered mathematical critical situation in order to allow to provide refined foci of attention on the following course meeting. Along the process one of the emergent elements of discussion has been related to the content and role of the teachers personal and suitable MWS in and for giving sense to the reasoning involved in the students' productions under discussion and the mathematical aspects sustaining such reasoning.

ACKNOWLEDGEMENTS

This research has been partially supported by the grant 2016/22557-5, São Paulo Research Foundation (FAPESP) and is part of the activities of the project CONICYT PCI/Atracción de capital humano avanzado del extranjero, nº 80170101 (Chile).

REFERENCES

Borasi, R. (1987). Exploring Mathematics through the Analysis of Errors. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 2-8.

Carnoy, M, & Arends, F. (2012). Explaining mathematics achievement gains in Botswana and South Africa. *Prospects*, 42(4), 453–468

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education, to appear.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 461–555). New York: Information Age Publishing.

Grossman, P. L. (2010). Learning to Practice: the design of clinical experience in teacher preparation. *Nea Policy Brie.*

Hiebert, J., & Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (371-404). NCTM: Information Age Publishing.

Jakobsen, A., Ribeiro, M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*, 135–150.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Space in schooling: an introduction. ZDM Mathematics Education, 48(6), 721-737.

Policastro, M.S., Almeida, A.R. & Ribeiro, M. (2017). Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil dos anos iniciais no tema de medida de comprimento e sua estimativa. Revista *Espaço Plural, 18*, 123-154.

Ribeiro, M., & Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th PME* (Vol. 4, pp. 41-48). Ankara, Turkey: PME.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA SOBRE DIVISIÓN DE FRACCIONES

Macarena Valenzuela-Molina[a, b] y Elisabeth Ramos-Rodríguez[a]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso; [b]Universidad Alberto Hurtado, Chile

mvalenzuelamolina@gmail.com, Elisabeth.ramos@pucv.cl

Examinamos el conocimiento especializado de FP de primaria al diseñar tareas matemáticas para la división de fracciones. Desde el enfoque cualitativo evidenciamos que estos profesores en formación tienen un cambio en el MTSK, planteando tareas que en un inicio no envuelven división de fracciones, luego de realizar un análisis didáctico, diseñan tareas de estructura multiplicativa para la división de fracciones. Nos cuestionamos el enfrentar la formación inicial de profesores, para que desarrollen herramientas para el diseño de tareas que involucren diversos conceptos basales.

INTRODUCCIÓN

El diseño de tareas para la división de fracciones es un escenario apto para diagnosticar el MTSK de los futuros profesores (FP) de Educación Primaria. Diversos estudios (Ma, 2010; Liñán, Barrera, & Infante, 2014) han detectado debilidades conceptuales y procedimentales en relación al conocimiento matemático y didáctico de FP sobre el tema. A partir de estos antecedentes y la dificultad en la comprensión de la división de fracciones (Blömeke, Suhl, & Kaiser, 2011; Ramos-Rodríguez, Reyes-Santander & Valenzuela-Molina, 2017), nuestro objetivo es describir el conocimiento especializado del FP de matemática al diseñar tareas matemáticas para la división por fracciones.

MARCO DE REFERENCIA

El modelo del Conocimiento especializado del Profesor de Matemática (MTSK) (Carrillo, Climent, Montes, Contreras, Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Vasco-Mora, Rojas, Flores, Aguilar-González, Ribeiro, & Muñoz-Catalan, 2018) conforma el marco referencial del estudio, dado que permite describir la forma con la que las futuras profesoras manifiestan conocimiento especializado, al explicitar los diferentes elementos del conocimiento puesto en juego por la FP.

ELEMENTOS METODOLÓGICOS

Nos enmarcamos en el paradigma cualitativo-descriptivo, (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), cuyos sujetos informantes son tres estudiantes de séptimo semestre de la carrera de Educación Primaria en Chile (un grupo de trabajo) dentro de una asignatura en su formación. Se lleva a cabo un análisis de contenido (Flick, 2004), cuyas categorías se basan en el marco de referencia, utilizando los dominios y sub-dominios propuestos para el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018).

En este informe hemos recogido datos de dos momentos de la asignatura, al inicio del curso se solicita al grupo que proponga una planificación que contemple una tarea matemática sobre división de fracciones de acuerdo a un propósito que ellos establecen: comprender la división de fracciones por medio del inverso multiplicativo. Posteriormente las FP profundizan los contenidos matemáticos y didácticos sobre fracciones a través del análisis didáctico del tema, exponiendo frente a pares y formadora sus avances, recibiendo retroalimentaciones. Esto nos lleva al segundo momento de recogida de datos donde el grupo debe presentar la planificación, considerando los aportes que recibieron al realizar y exponer el análisis didáctico.

RESTULADOS

Se analiza el enunciado de la tarea matemática propuesta en la planificación inicial de las FP: *Pablo tiene $\frac{3}{4}$ de frambuesas para rellenar panqueques. Él sabe que cada panqueque necesita $\frac{3}{2}$ de las frambuesas que tiene ¿Cuántos panqueques logra rellenar con las frambuesas?* Se observa un conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT) débil, pues la tarea no satisface el propósito de la clase, pretendiendo que los estudiantes comprendan la división de fracciones desde el inverso multiplicativo. Sin embargo, la tarea se resuelve con una multiplicación, ya que la fracción $\frac{3}{2}$ opera al $\frac{3}{4}$, por lo tanto, no hay división de fracciones.

De la planificación de clases de las FP después de que estas realizan el análisis didáctico del tema, extraemos la tabla 1, donde además de proponer el enunciado de la tarea presentan respuestas esperadas, posibles formas de responder de los estudiantes.

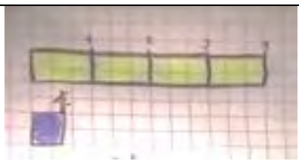
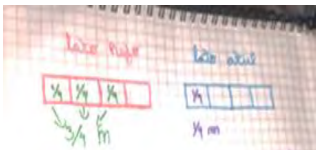
Problema propuesto	**Respuesta esperada 1**	**Respuesta esperada 2**	**Respuesta esperada 3**
Un lazo rojo mide $\frac{3}{4}$ m de largo. Un lazo azul mide $\frac{1}{4}$ m de largo. ¿Cuántas veces cabe el largo del lazo azul en el largo del lazo rojo?	 "Multiplico la cinta morada por 8 veces $\frac{1}{2} * 8 = 4$"	"Al multiplicar un cuarto por 3 veces me da el siguiente resultado: $\frac{1}{4}$ *metro por* 3" 	Entender que la división se realiza por medio del recíproco de la fracción divisora o su inverso multiplicativo.

Tabla 1: Extracto de planificación, TME y respuestas esperadas

En la respuesta esperada 1 y 2 se evidencia Conocimiento de los Temas (KoT) sobre representaciones, ya que se muestra la representación pictórica y simbólica. En la respuesta esperada 2 y 3 se observa un conocimiento sobre procedimiento de resolución de la división de fracciones, como la multiplicación por el inverso multiplicativo.

Respecto al MTSK se ha evidenciado un cambio en la propuesta de tareas para la división de fracciones, específicamente en el sub-dominio de la Enseñanza de la Matemática KMT, en la coherencia de las tareas con el objeto matemático que se pretende y las respuestas esperadas para su resolución que proponen las FP. Como también un avance en el KoT, al considerar procedimientos adecuados para la estructura multiplicativa que dan origen a una división de fracciones.

CONCLUSIONES

A la luz del análisis podemos observar que las FP en una primera instancia no toman cuidado en la coherencia entre la tarea planteada y el objeto matemático propuesto. Sin embargo, después de realizar el análisis didáctico del tema se observa que el grupo tuvo un avance en relación al MTSK, lo que podría evidenciar la posible especialización de su conocimiento al proponer diferentes respuestas esperadas de los estudiantes, por ejemplo, misma conclusión de Liñán y colaboradores (2014).

Estos resultados nos deben permitir tomar decisiones respecto a la formación inicial docente, reflexionando frente al ¿qué?, y ¿cómo? desarrollar estrategias de diseño y planificación de los FP de manera que puedan mejorar su MTSK, en relación a la interpretación de la estructura multiplicativa desde la división de fracciones.

REFERENCIAS

Blömeke, S., Suhl, U., & Kaiser, G. (2011). Teacher education effectiveness: Quality and equity of future primary teachers' mathematics and mathematics pedagogical content knowledge. *Journal of Teacher Education, 62*, 154-171.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalan, M.C. (2018). *The Mathematics Teacher Specialised Knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education 20*(3), 236-253, citado como Carrillo, et al. (2018)

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Liñán, M., Barrera, V., & Infante, J. (2014). Conocimiento especializado de los estudiantes para maestro: la resolución de un problema con división de fracciones. *EA, Escuela Abierta*, *17*, 41-63.

Hernández, R., Fernández, C., & Batista, P., (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales: la comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU*. Santiago: Academia Chilena de Ciencias.

Ramos-Rodríguez, E., Reyes-Santander, P., & Valenzuela-Molina, M. (2017). Conocimiento sobre fracciones de futuros profesores, un estudio de casos en torno a las nociones básicas. En V. Meriño, Y. Chirinos, L. Camejo, y C. Martínez (Comp.), *Gestión del conocimiento. Perspectiva multidisciplinaria* Vol. 6, (pp. 187-207). Falcón, Venezuela: Colección Unión Global.

SÍNTESIS DEL TEMA 4
ROL Y USO DE TAREAS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO

Alain Kuzniak[a], Charlotte Derouet[b], Carolina Henríquez[c]

[a]Université de Paris, France, [b]Université de Strasbourg, France,
[c]Universidad de Talca, Chile

alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr, charlotte.derouet@espe.unistra.fr,
cahenriquez@utalca.cl

El propósito del grupo de trabajo del tema 4 es analizar y discutir preguntas sobre el rol de las tareas en la construcción del trabajo matemático personal de los estudiantes en el aula con el apoyo de su profesor. Este problema general es abordado a partir de preguntas particulares, algunas de las cuales se formulan en el marco teórico y metodológico de los ETM. Sin embargo, estas problemáticas también pueden ser formuladas y abordadas desde otros marcos metodológicos y teóricos. El trabajo desarrollado en torno a estas preguntas se basa en estudios cualitativos que abordan los contextos de enseñanza y aprendizaje de dominios específicos (geometría, análisis, probabilidades, etc.). También, se consideran posibles articulaciones entre dominios matemáticos, así como con otras disciplinas científicas, como la física. Los niveles educativos considerados también son muy variados e incluyen la educación secundaria, la educación universitaria y también la formación del profesorado.

COMUNICACIONES

- Macarena Flores-González (Francia y Chile) : *L'activité et le travail mathématique dans une tâche géométrique.*
- Carolina Guerrero Ortiz y Carolina Henríquez Rivas (México y Chile): *El rol de las tareas y diferentes heurísticas de solución: Una discusión entre modelización y ETM.*
- Leslie Jimenez, Romina Menares y Pomareda (Chile): *Tareas que activan espacios de trabajo matemático completo en estudiantes de pedagogía.*
- Claudia Reyes (Francia y México): *Espacios de Trabajo Matemático en la modelización de un Movimiento Circular Uniforme: experimentación vivencial con estudiantes de último año de liceo (17 18 años).*
- Alfredo Martínez Uribe, François Pluvinage y Luis Manuel Montaño Zetina (México): *Una propuesta de esquema de espacios de trabajo fisicomatemático: aplicación al contexto de la dinámica*
- Miguel A. Rodríguez, Marcela Parraguez y Patricia Vásquez (Chile): I*nterpretando estrategias en la resolución de problemas: Un estudio de caso*
- Philippe Hoppenot (Francia) : *Etude des ETM personnels d'étudiants non mathématiciens – Domaine de définition d'une fonction composée.*

- Denis Tanguay, Analía Bergé et Gustavo Barallobres (Canadá) : *Genèse sémiotique et passages discret-dense-continue.*
- Charlotte Derouet et Blandine Masselin (Francia y Alsacia) : *Travail mathématique en contexte de démarche de modélisation. Le cas d'une tâche de modélisation probabiliste "Le jeu du lièvre et de la tortue".*

PÓSTERS

- Saúl Ernesto Cosmes Aragón (Chile): *El rol de las tareas de modelización en la formación de los ingenieros: un acercamiento al ETM idóneo.*
- Diego Francisco Vilotta (Argentina): *Una construcción progresiva del modelo exponencial en la formación de profesores analizada desde los ETM.*

PREGUNTAS ABORDADAS

Diversas preguntas fueron el objeto de ponencias para este tema y se discutieron en base a las comunicaciones de los interesados.

Sobre la utilización de tareas matemáticas en diversas perspectivas de investigación. La discusión mostró la necesidad de especificar los métodos utilizados y desarrollados para la investigación sobre el diseño de tareas y la observación de su implementación. También apareció que debían considerarse diferentes perspectivas metodológicas dependiendo de la naturaleza del trabajo matemático estudiado: trabajo personal, trabajo idóneo. Algunas investigaciones también toman en cuenta puntos de vista complementarios que se relacionan con la profesión del profesor en cuanto a la gestión de la clase. Otros también están interesados en las motivaciones de los estudiantes y el impacto de los efectos sobre la inversión en su trabajo. Parece necesario, cada vez, determinar claramente las preguntas de investigación destinadas a utilizar de manera óptima y de manera complementaria las teorías como las de la actividad o los ETM.

Sobre el trabajo matemático efectivo de los alumnos. La observación y el análisis de las actividades en el aula y los enfoques individuales de resolución de problemas permiten examinar y caracterizar las tareas, su evolución y su adaptación en un contexto escolar. En esta perspectiva, es particularmente importante desarrollar ciertos puntos, tales como:

- La toma en cuenta por el profesor de las actividades de sus alumnos para adaptar y modificar las tareas.
- La necesidad de proporcionar explicaciones que permitan comprender el funcionamiento del trabajo personal de los estudiantes. Esto implica poder volver a las preguntas iniciales de investigación al proponer una síntesis de la investigación que surge de las observaciones.

- Los estudios también muestran una debilidad general en la implementación de la génesis discursiva. Este último, en el mejor de los casos, se deja solo a la iniciativa y a cargo del profesor.

Sobre el rol determinante de ciertas tareas particulares. La investigación en didáctica de las matemáticas ha puesto en evidencia ciertas tareas particulares que son decisivas en la elaboración de un trabajo matemático coherente y elaborado: tareas emblemáticas, situaciones fundamentales, secuencia de problemas. Las discusiones sobre este punto fueron particularmente ricas y condujeron a algunas observaciones:

- La necesidad de identificar y proponer este tipo de tareas específicas para la investigación y la enseñanza. Las tareas emblemáticas parecen ser particularmente interesantes, pero su estatus emblemático debe definirse explícitamente en la investigación que las utiliza.
- La integración de estas tareas en el proceso experimental de estudio del trabajo matemático de los estudiantes requiere una reflexión sobre los medios necesarios para su implementación.

Además, apareció un punto sobre la particularidad de los análisis a priori en la teoría de los ETM. Estos parecen diferentes de los análisis propuestos, por ejemplo, en el marco de la TSD, pero ¿cuál es exactamente su especificidad? Parece que la importancia dada a la articulación entre los aspectos cognitivos y epistemológicos del trabajo lleva a centrarse en el trabajo efectivo de los alumnos y a considerar el análisis a priori como un primer y rápido paso, sin embargo, esencial, que no puede existir y justificarse por sí solo.

La noción de trabajo matemático completo también fue cuestionada. Parece importante distinguir esta noción de completud del trabajo matemático de la noción de trabajo coherente o correcto. El trabajo se llama "completo" con referencia a los diagramas del ETM y las diferencias de génesis que se activan. Esto no significa que toda tarea ofrecida a los estudiantes deba ofrecer un trabajo completo, porque también pueden ser tareas rutinarias que desarrollen ciertas habilidades técnicas. Por otro lado, una rica enseñanza de las matemáticas supone la implementación de tareas que probablemente desarrollen un trabajo matemático completo, para evitar limitar al alumno a un simple trabajo de ejecutor.

Sobre las tareas de modelización.

Cada vez más, las matemáticas basan su legitimidad escolar en una estrecha interacción con problemas del mundo real. Es en estas condiciones que las tareas de modelización se han vuelto cada vez más importantes en los currículos escolares. Además, su implementación en clase desafía la naturaleza misma de las matemáticas en juego.

Esta pregunta queda en gran medida por explorar en futuros simposios. Sin embargo, los participantes identificaron algunos puntos que consideran importantes para equilibrar las actividades matemáticas con las actividades no matemáticas para evitar desviaciones actuales en las actividades de modelización que descuidan el trabajo matemático.

También se discutieron las perspectivas sobre la conexión entre el ETM y el ciclo de modelización. El modelo de Blum es esencialmente un modelo cognitivo y cíclico. Parece que los ETM introducen un fuerte componente epistemológico en este ciclo. Esto permite precisar el lugar exacto de las matemáticas y también mostrar la complejidad del fenómeno de la matematización. No se trata solo de ejecutar y refinar un solo modelo, sino que a menudo implica la coordinación de varios modelos que se refieren a dominios (matemáticos o no) que pueden ser diferentes.

OTROS TEMAS DE DISCUSIÓN

Los problemas específicos relacionados con las tareas y su diseño en contextos que no son matemáticos se encuentran entre los temas transversales discutidos y se formulan aquí en forma de pregunta:

- ¿Cómo abordar los cambios de dominio (o de disciplina) desde la perspectiva del diseño de tareas en el ETM? ¿Cómo los diferentes componentes y génesis del ETM se adaptan en función de las tareas formuladas? ¿Cómo describir este tipo de cambios, en el plano epistemológico y en el plano cognitivo?
- ¿Cómo tener en cuenta y describir los paradigmas de dominios diferentes? ¿Cómo tener en cuenta los juegos entre diferentes disciplinas (física, ingeniería, etc.)?
- En relación con el análisis de tareas, ¿cómo y por qué articular la teoría de los ETM con otras teorías/perspectivas? En este caso, ¿qué aspectos se toman en cuenta con teorías como APOE, la *Modeling theory* o la teoría de la actividad?

Además, el vínculo entre la enseñanza y la investigación se ha elevado porque no es fácil transponer tareas diseñadas para la investigación en tareas de la vida en las aulas. Así,

- ¿Cómo podemos proponer tareas ricas que lleven a un trabajo completo pero que sean difíciles de implementar cuando los estudiantes no tienen suficiente conocimiento sobre los elementos del referencial que deberían usar? ¿Cómo el profesor puede servir de mediador en estos casos?
- ¿Cuándo es útil para el profesor utilizar tareas que favorecen un ETM completo? ¿En situaciones de bloqueo? ¿O cuando quiere hacer avanzar el tiempo didáctico?
- En caso de dificultad o bloqueo en la ejecución de una tarea determinada, ¿cómo favorecer y cómo seleccionar tareas accesibles para los estudiantes?

SYNTHESE DU THEME 4

ROLE ET USAGE DES TACHES DANS LE TRAVAIL MATHEMATIQUE

Alain Kuzniak[a], Charlotte Derouet[b], Carolina Henríquez[c]

[a]Université de Paris, France, [b]Université de Strasbourg, France, [c]Universidad de Talca, Chile

alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr, charlotte.derouet@espe.unistra.fr, cahenriquez@utalca.cl

Le but du groupe de travail sur le thème 4 est d'analyser et de discuter des questions concernant le rôle des tâches dans la construction du travail mathématique personnel des élèves en classe avec l'appui de leur enseignant. Ce problème général est abordé à partir de questions particulières, dont certaines sont formulées dans le cadre théorique et méthodologique des ETM. Cependant, ces problématiques peuvent également être formulées et traitées à partir d'autres cadres méthodologiques et théoriques. Les travaux développés autour de ces questions s'appuient sur des études qualitatives qui abordent les contextes d'enseignement et d'apprentissage de domaines spécifiques (géométrie, analyse, probabilités, etc.). Ils envisagent aussi des articulations possibles entre domaines mathématiques, ainsi qu'avec d'autres disciplines scientifiques, comme la physique. Les niveaux d'enseignement considérés sont également très variés et se rapportent à l'enseignement secondaire, l'enseignement universitaire et également la formation des enseignants.

LES COMMUNICATIONS

- Macarena Flores-González (France et Chili) : *L'activité et le travail mathématique dans une tâche géométrique.*
- Carolina Guerrero Ortiz y Carolina Henríquez Rivas (Mexique et Chili): *El rol de las tareas y diferentes heurísticas de solución: Una discusión entre modelización y ETM.*
- Leslie Jimenez, Romina Menares y Pomareda (Chili): *Tareas que activan espacios de trabajo matemático completo en estudiantes de pedagogía.*
- Claudia Reyes (France et Mexique): *Espacios de Trabajo Matemático en la modelización de un Movimiento Circular Uniforme: experimentación vivencial con estudiantes de último año de liceo (17 18 años).*
- Alfredo Martínez Uribe, François Pluvinage y Luis Manuel Montaño Zetina (Mexique): *Una propuesta de esquema de espacios de trabajo fisicomatemático: aplicación al contexto de la dinámica*
- Miguel A. Rodríguez, Marcela Parraguez y Patricia Vásquez (Chili): *Interpretando estrategias en la resolución de problemas: Un estudio de caso*

- Philippe Hoppenot (France) : *Etude des ETM personnels d'étudiants non mathématiciens – Domaine de définition d'une fonction composée.*
- Denis Tanguay, Analía Bergé et Gustavo Barallobres (Canada) : *Genèse sémiotique et passages discret-dense-continue.*
- Charlotte Derouet et Blandine Masselin (France) : *Travail mathématique en contexte de démarche de modélisation. Le cas d'une tâche de modélisation probabiliste "Le jeu du lièvre et de la tortue".*

LES AFFICHES

- Saúl Ernesto Cosmes Aragón (Chili): *El rol de las tareas de modelización en la formación des ingenieros: un acercamiento al ETM idonéo.*
- Diego Francisco Vilotta (Argentina): *Una construcción progresiva del modelo exponencial en la formación de profesores analizada desde los ETM.*

QUESTIONS ABORDÉES

Différentes questions faisaient l'objet de l'appel à communication pour ce thème et ont fait l'objet de discussions s'appuyant sur les communications des intervenants.

Sur l'utilisation des tâches mathématiques dans diverses perspectives de recherche. La discussion a montré la nécessité de bien préciser les méthodes utilisées et développées pour les recherches sur la conception des tâches et l'observation de leur mise en œuvre. Il est également apparu que différentes perspectives méthodologiques devaient être envisagées en fonction de la nature du travail mathématique étudié : travail personnel, travail idoine. Certaines recherches prennent aussi en compte des points de vue complémentaires qui portent sur le métier de professeur avec la gestion de la classe. D'autres s'intéressent aux motivations des élèves et à l'impact des affects sur l'investissement dans le travail. Il apparaît nécessaire, à chaque fois, de bien déterminer les questions de recherches visées pour utiliser au mieux et de manière complémentaire des théories comme la théorie de l'activité ou celle des ETM.

Sur le travail mathématique effectif des élèves. L'observation et l'analyse des activités de classe et des approches individuelles de résolution de problèmes permettent d'examiner et de caractériser les tâches, leur évolution et leur adaptation dans un contexte scolaire. Dans ce cadre, il est notamment important de développer certains points, tels que :

- La prise en compte par le professeur des activités de ses élèves pour les adapter et les modifier.
- La nécessité de dégager des explications qui permettent de comprendre le fonctionnement du travail personnel des élèves. Cela suppose de pouvoir revenir vers les questions initiales de recherche et de proposer une synthèse qui se dégage des observations.

- Les études montrent aussi une faiblesse générale de la mise en œuvre de la genèse discursive. Cette dernière est, dans le meilleur des cas, laissée à la seule initiative et charge de l'enseignant.

Sur le rôle déterminant de certaines tâches particulières. Les recherches en didactique des mathématiques ont mis en évidence certaines tâches particulières qui sont déterminantes dans l'élaboration d'un travail mathématique cohérent et élaboré : tâches emblématiques, situations fondamentales, séquence de problèmes. Les discussions sur ce point ont été particulièrement riches et ont débouché sur certains constats :

- La nécessité d'identifier et de proposer ce type de tâches particulières à la fois pour la recherche et l'enseignement. Les tâches emblématiques apparaissent comme particulièrement intéressantes, mais leur statut emblématique doit être explicitement défini dans les recherches qui les utilisent.
- L'intégration de ces tâches dans le processus expérimental d'étude du travail mathématique des élèves suppose une réflexion sur les moyens nécessaires pour leur mise en œuvre.

Par ailleurs, un point est apparu sur la particularité des analyses a priori dans la théorie des ETM. Celles-ci apparaissent différentes des analyses proposées, par exemple dans le cadre de la TSD, mais quelle est exactement leur spécificité ? Il semblerait que l'importance donnée à l'articulation entre les aspects cognitifs et épistémologiques du travail conduise à privilégier le travail effectif des élèves et à considérer l'analyse a priori comme une première et rapide étape, essentielle cependant, qui ne peut exister et se justifier seule.

On s'est également interrogé sur la notion de travail mathématique. Il apparaît important de distinguer cette notion de complétude du travail mathématique de la notion de travail cohérent ou correct. Le travail est dit "complet" en référence aux diagrammes des ETM et aux différences genèses qui sont activées. Cela ne signifie pas que toute tâche proposée aux élèves doit proposer un travail complet, car il peut aussi s'agir de tâches routinières développant certaines habiletés techniques. En revanche, un enseignement riche des mathématiques suppose la mise en œuvre de tâches susceptibles de développer un travail mathématique complet pour éviter de confiner l'élève à un travail de tâcheron.

Sur les tâches de modélisation. De plus en plus, les mathématiques fondent leur légitimité scolaire sur une interaction étroite avec les problèmes qui se posent dans le monde réel. C'est dans ces conditions que les tâches de modélisation ont pris une place de plus en plus importante dans les programmes scolaires. Par ailleurs, leur mise en œuvre en classe remet en question la nature même des mathématiques en jeu.

Cette question reste largement à explorer lors des prochains symposiums. Cependant, les participants ont précisé certains points qui leur semblent importants pour asseoir un équilibre entre activités mathématiques et activités non mathématiques de façon à éviter certaines dérives actuelles des activités de modélisation qui négligent tout travail mathématique.

Des perspectives sur la connexion entre l'ETM et le cycle de modélisation ont également été abordées. Le modèle de Blum est essentiellement un modèle cognitif et cyclique. Il apparaît que les ETM permettent d'introduire une forte composante épistémologique dans ce cycle. Cela permet notamment de bien préciser la place exacte des mathématiques et aussi de montrer la complexité du phénomène de mathématisation. Celui-ci ne se résume pas à faire fonctionner et à raffiner un seul modèle, mais, le plus souvent, il suppose la coordination de plusieurs modèles renvoyant à des domaines (mathématiques ou non) qui peuvent être différents.

AUTRES SUJETS DE DISCUSSION

Les problèmes spécifiques concernant les tâches et leur conception dans des contextes qui ne sont pas mathématiques font partie des questions transversales discutées et sont formulés ici sous forme de questions :

- Comment aborder les changements de domaine (ou de discipline) dans la perspective de la conception des tâches dans l'ETM ? Comment les différentes composantes et genèses des ETM sont-elles adaptées en fonction des tâches formulées ? Comment décrire ces types de changements sur le plan épistémologique et sur celui des processus cognitifs ?
- Comment prendre en compte et décrire les paradigmes de domaines différents ? Comment prendre en compte les jeux entre disciplines différentes (physique, ingénierie, etc.) ?
- En relation avec l'analyse des tâches, comment et pourquoi articuler la théorie des ETM avec d'autres théories/perspectives ? Dans ce cas, quels aspects sont pris en compte avec des théories comme APOE, la *Modeling theory* ou la théorie de l'activité ?

Par ailleurs, le lien entre enseignement et recherche a été soulevé, car il est n'est pas aisé de transposer des tâches conçues pour la recherche en tâches vivantes dans les classes. Ainsi,

- Peut-on proposer des tâches riches qui entraînent un travail complet, mais qui sont difficiles à mettre en place quand les élèves n'ont pas suffisamment de connaissances sur les éléments du référentiel qu'ils doivent utiliser ? Comment l'enseignant peut-il servir alors de médiateur dans ces cas ?
- Quand est-il utile pour l'enseignant d'utiliser des tâches qui favorisent un ETM complet ? Dans des situations de blocage ? Ou lorsqu'il souhaite faire avancer le temps didactique ?
- En cas de difficultés ou de blocage dans l'exécution d'une tâche donnée, comment favoriser et comment sélectionner des tâches accessibles pour les élèves ?

L'ACTIVITE ET LE TRAVAIL MATHEMATIQUE DANS UNE TÂCHE GÉOMÉTRIQUE

Macarena Flores González

Université Paris Diderot, France

prof.macarena.flores@gmail.com

Nous avons comme objectif d'analyser les liens entre la Théorie de l'Activité –TA (avec une approche des recherches françaises) et celle des ETM, à partir de l'importance des tâches et de l'activité dans le travail mathématique. Grâce à la TA nous arrivons à analyser l'activité effective des sujets, élèves et professeurs, dans les processus d'enseignement et d'apprentissage dans une classe de géométrie de 3e en collège. Grâce à la situation du calcul de l'aire d'une pyramide dans une tâche complexe, nous croiserons une analyse en termes de TA et une analyse en terme d'ETM : cela nous permet d'avoir un regard au niveau micro (celui de la tâche elle-même) et un autre au niveau macro (celui du travail mathématique et de l'activité développés par la classe).

Mots Clés *: Théorie de l'Activité, Espaces de Travail Mathématique, tâche.*

INTRODUCTION

Quand on veut étudier les processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, l'analyse des pratiques de l'individu qui agit sur une situation mathématique est essentielle. Le système didactique est tellement complexe que l'on a besoin d'analyses au niveau global, et d'autres plus précises. Nous nous plaçons dans l'idée que le cadre des Espaces de Travail Mathématique (ETM) et le cadre de la Théorie de l'Activité (TA), vont nous permettre de donner aux analyses un regard macro mais aussi micro du travail mathématique d'un sujet faisant face à une tâche mathématique, et pourront nous donner un regard précis de l'activité mathématique développée par un sujet (ou un groupe d'individus), lors de la réalisation de la tâche. De ce fait, la TA permettra un renforcement des analyses cognitives avec des aspects qui ne sont pas pris en compte dans l'ETM, et les ETM pourront nous apporter des analyses épistémologiques qui ne sont pas prises en compte dans la TA.

La Théorie de l'Activité à partir de l'approche de la didactique française

La Théorie de l'Activité est un cadre qui se base sur une idée cognitiviste des processus d'enseignement et d'apprentissage, qui s'appuie sur les travaux initiés par des psychologues comme Leontiev (1984) (élève de Vygotski), Nosulenko et Rabardel (2008). Pour pouvoir utiliser cette théorie en didactique des mathématiques, ces travaux ont ensuite été complétés par des didacticiens des mathématiques (Robert, 1998 ; Rogalski, 2008). Ils donnent la possibilité d'un regard permettant de caractériser l'activité mathématique des élèves, ainsi que l'activité des enseignants en invoquant la double approche ergonomique et didactique des pratiques des enseignants (Robert & Rogalski, 2002, 2005). Ce cadre met en avant les approches de

Piaget et Vigotsky de façon non contradictoire et complémentaire, en incluant des analyses des sujets dans leur individualité, et dans un niveau d'interactions entre eux. En effet, comme Rogalski (2008) le signale concernant l'élève, la théorie piagétienne permet une analyse épistémologique des objets mathématiques en jeu, en identifiant les liens entre l'activité et l'apprentissage développemental. La théorie de Vygotski permet de prendre en compte les interventions didactiques de l'enseignant dans la zone proximale de développement (ZPD). La double approche analyse les médiations de l'enseignant, entre les connaissances et le sujet élève, pour appuyer l'activité des élèves avec la notion de niveau de conceptualisation (Vandebrouck, 2018).

Nous entendrons par activité *« ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche »* (Rogalski, 2003, p.349), c'est-à-dire ses actes extériorisés et inférences, ses décisions, hypothèses, manières de gérer son temps, son état personnel, etc. De ce fait, lorsque la tâche est réalisée, une part de l'activité est déjà finalisée. La notion de tâche est au cœur de ce que l'on comprend comme activité. Pour faire une analyse la plus précise possible de cette activité, il faudrait pouvoir analyser la tâche du prescripteur et celui qui la réalise. Finalement l'activité de l'élève sera étudiée à travers l'analyse de sa résolution (la tâche effective). Ainsi, dans la Théorie de l'Activité, nous pourrons identifier l'activité des élèves de façon individuelle (déduite à partir de l'observation des traces de la réalisation de la tâche), mais aussi l'activité de la classe (déduite à partir des interactions entre les élèves de la classe, y compris les élèves et l'enseignant) (Ibid., p. 354). Quand nous parlons des activités accomplies par les élèves, nous ferons référence aux *Activités effectives* (pour tous, *a maxima*, ou *a minima*) qui peuvent être analysées dans certains cas, grâce aux traces écrites des sujets.

LA THÉORIE DE L'ACTIVITÉ ET LES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

La tâche, en étant importante pour l'activité mathématique développée par l'élève, est aussi essentielle pour concevoir et analyser le travail mathématique mis en œuvre par un sujet. Kuzniak, Tanguay et Elia (2016) précisent que les mathématiques enseignées ne vont pas être seulement un ensemble de propriétés et d'objets qui pourront être manipulés, elles sont avant tout une activité humaine. Il est donc nécessaire de comprendre cette activité réalisée par des sujets individuels mais aussi en communauté. Quand une tâche mathématique est donnée et que l'élève (ou le professeur) fait face à sa résolution, le sujet met en place un travail mathématique. L'ETM (Kuzniak, 2011) permet d'analyser le travail d'un sujet d'une façon cohérente et de décrire l'espace de travail en prenant en compte les éléments épistémologiques (*plan épistémologique*), mais aussi la manipulation de ces éléments par un sujet, en caractérisant leurs aspects cognitifs (*plan cognitif*). Les liens qui existent entre ces deux plans se décrivent à partir des genèses (ou dimensions[1]) : la

[1] La dimension fait référence au lien entre composants de façon fixe ou immobile, alors que la genèse fait référence à un développement du sujet et de la prise en compte de l'ETM comme espace dynamique.

genèse sémiotique, la genèse instrumentale et la genèse discursive. Pour caractériser ce travail il est pertinent de regarder les tensions et relations de ses genèses grâce aux plans verticaux ([Sem-Dis], [Ins-Dis] et [Sem-Ins] (Kuzniak & Richard, 2014)) activés aux différents moments des épisodes analysés. Ainsi, les plans épistémologique et cognitif, sont fondamentaux pour la construction d'objets mathématiques à travers des tâches (ou problèmes) mathématiques. En effet *« les tâches déclenchent un processus cognitif chez les élèves, et de ce fait activent l'espace de travail dans lequel elles sont intégrées. Par conséquent, ces tâches favorisent la connaissance de l'ETM dans lequel elles sont proposées »* (Nechache, 2016, p.77). Dès lors, pour l'ETM, la tâche est un élément crucial du travail mathématique. On peut analyser les interactions entre les genèses qui vont être activées pour mener à un travail mathématique *complet*[2] (Kuzniak, Nechache et Drouhard, 2016) dans un scénario privilégié ; et quand on résout une certaine tâche, elle pourra provoquer des circulations du travail mathématique. Ainsi, Derouet (2016) affirme que le fait de pouvoir décrire ces circulations, nous permet d'avoir une *relecture globale des activités possibles des élèves.*

Ce cadre définit également trois types d'ETM : de référence (utilisé pour la communauté d'individus), idoine (celui qui est adapté dans une institution avec une fonction précise, où on voit l'importance de l'enseignant) et personnel (de l'utilisateur qui le construit progressivement, de façon opératoire ou non). Nous croyons que certains liens directs entre la TA et les ETM pourront se décrire d'une part à partir des ETM idoines, car les tâches vont contribuer à l'évolution de l'ETM idoine *destiné à améliorer la réalité pédagogique* (Kuzniak et al. 2016, p.729). D'autre part, ces liens pourraient se décrire à travers la caractérisation des interactions entre les ETM personnels des élèves. Ce scénario (en se présentant d'une façon usuelle dans les cours de mathématique) cherche à décrire un ETM que nous avons besoin de connaître et de caractériser à partir des interactions entre les sujets : un possible *ETM de la classe* (qui pourrait être obtenu grâce à l'activité collective développée).

La notion de tâche pour la TA et pour les ETM

Pour la TA en didactique, quand nous parlons de « tâche », nous ferons référence au *« but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions »* (Rogalski, 2003, p. 349). Ce but sera celui de l'activité[3]. Rogalski (Ibid.), identifie les tâches du côté du prescripteur et du côté du réalisateur. Dans celles du prescripteur nous trouvons la *tâche prescrite* et la *tâche attendue ; et* de la part du réalisateur, on trouve la *tâche redéfinie* et la *tâche effective*. L'activité du sujet sera déterminée pour cette dernière, car c'est ce que le sujet a véritablement effectué. Dans la TA nous identifions deux

[2] Deux conditions sont nécessaires : il faut d'une part que les deux plans horizontaux (cognitif et épistémologique) soient bien en relation, et d'autre part, que les circulations entre plans verticaux soient mises en place par l'activation des différentes composantes afin de rendre compte d'une diversité dans le travail mathématique mis en place par le sujet.

[3] Le but de l'activité concerne une représentation mentale du résultat qui aura l'activité.

autres niveaux des tâches, ainsi nous trouvons les *tâches simples et isolées* et les *tâches complexes*. Dans le premier cas, il s'agit des tâches qui ne nécessitent pas d'adaptation des connaissances, et les tâches complexes sont celles qui nécessitent des différentes adaptations[4], l'utilisation variée de TICE, ou encore, une diversité des méthodes éventuellement à choisir (Robert et Vandebrouck, 2014, p. 2). Ces tâches complexes vont mettre en jeux des sous-activités de reconnaissance, liées aux outils et notions mathématiques à mettre en fonctionnement (adaptations A1 et A6) ; et/ou d'organisation du raisonnement (A4 et A5) ; et/ou des sous-activités de traitement (A2 et A3).

Kuzniak et al. (2016) affirment que dans l'ETM on pourrait concevoir une étude des tâches pour savoir comment le champ mathématique est structuré (en faisant une étude fine des types de tâches, leurs techniques et connaissances théoriques). Ainsi, en prenant en compte la définition de Sierpinska (2004) adaptée aux ETM, la tâche mathématique est « *tout exercice, question ou problème réalisé dans un temps limité et dans un contexte donné* » (Nechache, 2017, p. 72). Ainsi, dans les ETM on considère les exigences de la tâche (cognitives et épistémologiques) qui définissent trois catégories des tâches en concordance avec des travailleurs sujet, à savoir : 1) *Tâches simples* qui ont un faible niveau d'exigence, leur résolution se fait à partir des procédures simples et ne nécessite pas des interactions entre les trois dimensions de l'ETM. Le travailleur-sujet associé est un *Tâcheron*. 2) *Tâches standard*, qui ont un niveau d'exigence moyen et pour lesquelles les procédures de résolution ne sont pas indiquées dans la tâche mais elles sont disponibles dans l'ETM idoine et l'ETM personnel. Ici, au moins un des plans verticaux doit être activé. Le travailleur-sujet associé est un *Technicien* 3) *Tâches riches* qui possèdent un haut niveau d'exigence. Pour les résoudre, les techniques ne sont pas nécessairement apprises ou pas disponibles dans l'ETM idoine et personnel. Elles déclenchent des interactions des différents plans verticaux, une mobilisation de l'ensemble des outils (sémiotique, technologique et théorique), et permettent de développer un travail mathématique complet. Ainsi le travailleur-sujet associé est un *Ingénieur* (Ibid.).

Par la suite, nous présentons une proposition d'articulation pour l'analyse de la tâche du point de vue des deux approches théoriques et en analysant à la fois l'écart entre ce qui est attendu et ce que l'élève réalise effectivement (pour la TA), et les types de tâches ainsi que les travailleurs sujets (pour les ETM).

[4] Robert (2008) définit sept types d'adaptations des connaissances concernant les tâches complexes : de *reconnaissance* (A1) ; d'*introduction d'intermédiaires* (A2) ; des *mélanges de plusieurs cadres ou notions, mises en relation ou interprétation*, *changements de points de vue* (A3) ; d'*introduction d'étapes* par rapport aux calculs ou raisonnements (A4) ; *utilisation des questions précédentes* dans un problème (A5) ; l'*existence de choix* (A6) ; et le *manque des connaissances nouvelles* (A7). (Robert, 2008, p.50).

EXEMPLE DE LA PYRAMIDE

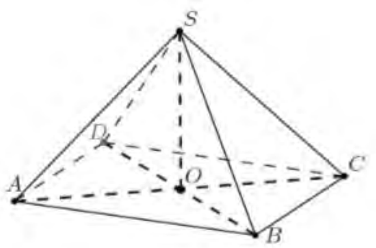
En ce qui concerne la tâche prescrite, elle est centrée sur le calcul du volume et de l'aire latérale d'une pyramide de base carrée, en considérant comme données les longueurs du côté du carré et la hauteur de la pyramide (Figure 1).

L'idée centrale est de faire travailler la disponibilité des connaissances des élèves acquises l'année précédente celle où la situation a été implémentée (dans ce cas, la notion de pyramide comme objet). Pour la tâche attendue, il s'agit de mobiliser différents savoirs déjà connus par les élèves (dans la géométrie plane et la géométrie dans l'espace) afin de produire un apprentissage dans un environnement papier crayon.

L'énoncé de l'exercice de l'épisode « pyramide »

La pyramide du Louvre schématisée ci-contre est une pyramide régulière de 21 mètres de hauteur et de base carrée de 35 mètres de côté.

1) Calculer le volume de cette pyramide.



2) Calculer la superficie de verre nécessaire pour construire les faces latérales de cette pyramide (on convient que les faces sont totalement recouvertes de verre).

Figure 1 : Tâche prescrite à analyser

Dorénavant, pour faire nos analyses, nous prendrons en compte les analyses qui ont été travaillées dans l'étude de Benzekry, Guignard, Lévi & Vivier (2013).

ANALYSE PRÉALABLE DE LA TÂCHE

La première question est une tâche simple et isolée, car il s'agit d'appliquer la formule de volume de la pyramide, c'est pour cette raison que désormais, nous nous en tiendrons à l'analyse de la deuxième. Les stratégies considérées sont :

Stratégie 1 : Calculer SA (ou une autre arête) dans le triangle SAO que l'on voit dans la figure. Ensuite, on doit calculer la demi-diagonale AO de la base. En sachant que le triangle SAB est isocèle, on calcule sa hauteur SH. On calcule l'aire SAB et on en déduit que la multiplication par 4 nous donnera le résultat.

Stratégie 2 : Il s'agit d'une construction d'une figure qui n'est pas tracée, le triangle SOH (H est le milieu d'un côté du carré de la base). On calcule la hauteur SH, puis l'aire de SAB. On en déduit l'aire demandée comme dans la stratégie 1.

Du point de vue de la Théorie de l'Activité c'est une tâche complexe, c'est-à-dire, qu'elle a besoin des sous-tâches et d'adaptations. Ainsi on analyse la tâche du point de vue du réalisateur élève à partir des sous-tâches associées :

- *De reconnaissance des formules et propriétés* comme un outil mathématique (volume de la pyramide, aire du triangle, théorème de Pythagore, entre autres).

- *D'organisation du raisonnement* : ordre des procédures pour calculer l'aire des faces de la pyramide.
- *Des traitements* géométriques, algébriques et numériques.
- *De changements de point de vue* (on peut tracer des figures à l'intérieur de la pyramide).

Du point de vue des ETM c'est une tâche standard et par conséquent, le travailleur-sujet est un Technicien. Le travail fort dans le plan cognitif est fait par la *visualisation* à partir du *representamen* de la pyramide. Les formules viendront à servir d'artefact symbolique. La construction de figures ou de tracés auxiliaires pourrait être mise en amont (plans privilégiés [Sem-Ins] et [Sem-Dis]). La dimension discursive viendra jouer son rôle lors de la justification des procédures pour la construction géométrique et la production des calculs. On trouve des outils théoriques (les formules) et des outils sémiotiques (la figure de la pyramide et les *déconstructions dimensionnelles* (Duval, 1999, 2005) possibles). Les procédures ne sont pas indiquées dans la tâche, mais elles sont disponibles dans les ETM (idoine et personnel des élèves).

ANALYSE *A POSTERIORI* DE LA TÂCHE

La tâche a été donnée dans une classe de 18 élèves de troisième (14 - 15 ans) dans un établissement ECLAIR. L'enseignant indique qu'il veut faire résoudre la tâche par ses élèves, celle-ci lui semble réalisable par ses élèves. Il n'y a pas d'enjeu de synthèse pour institutionnaliser des résultats dans le cours, et ce travail ne débouche slur aucune évaluation. Nous avons utilisé comme données l'enregistrement en vidéo de la séance et les productions écrites des élèves.

Pour faire l'analyse *a posteriori*, la séance est découpée en épisodes d'analyse (chaque épisode étant défini par une sous-tâche) et on étudie les différentes activités mathématiques effectives des élèves dans ces épisodes. Ce découpage nous permet d'analyser également l'activité de l'enseignant en considérant les types de médiations : *médiation procédurale directe* et *indirecte* (MPD et MPI respectivement) qui seront les apports qui modifient la tâche ou la situation en jeu ; et *médiation constructive* (MC) celle qui est orientée vers l'élève, est un apport entre l'activité et la construction des connaissances. Concernant l'élève, nous observons si les interventions et actions sont dans leur zone proximale *de développement* (ZPD), en signalant les proximités discursives dominantes. C'est-à-dire des *proximités horizontales* (PH) pour lesquelles le travail fait est local sur une formule ou le sens d'un théorème (ne change pas le niveau de généralité) ; des *proximités descendantes* (PD) que l'on peut utiliser dans un exercice, dans des démonstrations générales pour lesquelles les élèves ont déjà développé une activité ; et des *proximités ascendantes* (PA) pour lesquelles à partir des activités possibles, la généralisation est centrale et aboutit à l'expression, définition, ou démonstration d'une propriété (Vandebrouck & Robert, 2014). Dans le même découpage, nous arrivons alors à caractériser l'ETM idoine effectif, en décrivant les circulations présentes dans chacun des épisodes et les plans verticaux qui ont été privilégiés, de même que des outils utilisés : sémiotiques, théoriques, technologiques.

Ainsi, nous analysons l'activité de l'enseignant en lien avec l'ETM idoine, grâce à la mise en œuvre de la tâche. De la part de l'élève, nous inférons l'*activité collective* des élèves (grâce à l'enregistrement de la vidéo), et les traces de leurs activités individuelles qui ont eu lieu grâce aux productions écrites.

Nous présentons ci-après, un extrait de l'analyse *a posteriori* en utilisant les deux cadres :

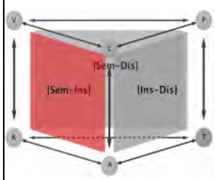
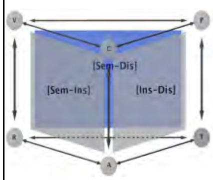
Temps/ épisodes	**Activité collective des élèves**	**Activité de l'enseignant**	**Circulation ETM idoine effectif**
8 min 4e : Calcul de SH (2e sous-tâche)	22'46 : un élève dit, « OSH » 22'57 : on revient au travail personnel. 25'24 : *AO c'est la moitié de OH.* 26'44 : Parce qu'il est rectangle 27'03 : Parce que c'est la hauteur de la pyramide 27'57 : H0 et CB sont parallèles ? 28'00 : Thalès 29'26 : Donc on fait théorème de Pythagore sur SHO *Proximité dominante: PA	*22'56 :* Fait un schéma en dessinant le triangle OSH MPI : 26'30 : « *est-ce que vous avez identifié le triangle avec lequel on va travailler ?* ». Il trace SOH. « *Il est intéressant pour une raison, pour quelle raison ?* » MPC : 26'46 : « *pourquoi il est rectangle ?* » MPD : 27'10 : « *très bien, ça vient perpendiculairement* » il trace HOS en codant l'angle droit. MPI : 27'59 « *oui, ça serait quelle propriété ?* » MPD : parle des diagonales, O c'est le milieu de [AC], H c'est le milieu de [AB], donc, c'est la droite des milieux. MPD : 29'02 : « *Comment est-ce qu'on peut trouver la mesure de HO ? peut être que si je prolonge par là, je vais mettre un point R* » donc il dit HR=BC=AD. MPD 30'25: l'enseignant complète la figure du triangle avec les mesures de SOH et explique que OH est la moitié de BC, car OR=BC.	Plans verticaux privilégiés : 1) [Sem-Ins] 2) [Sem-Dis]

Tableau 1 : extrait de l'analyse *a posteriori* entre TDA et ETM.

Pour analyser l'activité des élèves de façon individuelle, nous avons procédé à une analyse des traces dans les productions écrites des élèves (basée sur l'analyse faite par Benzekry et al. (2013)). Parmi les 18 productions, 16 sont assez similaires. Pour la question 1 il paraît que tous les élèves ont bien répondu, et par rapport à la question 2, 1 élève qui utilise la stratégie 1 sans la finir (E1), 16 qui utilisent la stratégie 2 (sauf E1 et E15), et un élève (E15) qui utilise une stratégie erronée. On note que 7 élèves développent le même travail mathématique de l'ETM idoine et 4 sont très proches.

La genèse sémiotique a été activée à travers des dessins de patrons (E2, E6, E8, E9, E11). Une vue de dessus (E14) et des déconstructions dimensionnelles sont faites, notamment 7 triangles SOH, 6 triangles SAB et un triangle SOA. Concernant les connaissances mobilisées par les élèves, on trouve que 13 sur 18 mobilisent le Théorème de Pythagore, avec une similitude dans les valeurs approchées pour SH (10 élèves utilisent la valeur approchée 27,3). Deux élèves utilisent SH$\approx 27{,}3$ sans avoir des calculs pertinents. Un élève produit des calculs après avoir écrit la valeur approchée de SH. Cela nous permet d'affirmer que les productions des élèves ne sont pas suffisantes pour inférer l'activité des élèves. Comme le signalent Benzekry et al. (2013), *l'analyse des productions écrites montre ainsi leur insuffisance pour comprendre ce qui s'est joué en classe et le recours à la vidéo se justifie naturellement afin d'avoir un complément d'information nécessaire* (p.128).

RÉSULTATS

En termes de TA on dit que l'enseignant a donné des médiations dans tous les épisodes, et la majorité des médiations qu'il fait sont de type procédural : elles sont soit directes (10), soit indirectes (8) – seulement 2 sont à visée constructive. L'enseignant guide la résolution de la tâche (en l'orientant vers la stratégie 2) plutôt qu'entrer dans une activité *a maxima* pour les élèves. Les élèves se contentent d'ailleurs d'attendre l'aide. Ainsi, l'enseignant réduit la tâche pour les élèves, et leur activité semble être *a minima*. Les productions des élèves nous permettraient d'analyser les traces des activités possibles qui ont eu lieu ; mais nous avons vu que l'on ne pouvait pas avoir accès à l'activité complète de l'élève, nous n'avons accès qu'à ses actions.

À partir des ETM on note que 7 élèves développent le même travail de l'ETM idoine et 4 sont très proches. La plupart des productions écrites montrent une copie de ce que les élèves ont vu dans l'ETM idoine car on note que ce qu'ils écrivent est très proche de ce que l'enseignant a fait sur le tableau. Cela nous amène à dire globalement, que cela ne représente ni les activités individuelles ni les ETM personnels. La tâche était prescrite comme standard, néanmoins, comme elle a été pilotée par l'enseignant, on pourrait dire que pour certains élèves la tâche a été réduite à des tâches simples. Ainsi, le travailleur sujet devienne un *tâcheron* (et non un technicien).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

En ce qui concerne la tâche donnée, nous disons que les élèves perdent de vue la tâche et le but initial de la tâche ; finalement la situation est réduite à résoudre un nombre spécifique de sous-tâches sans un but final. Nous pensons que la tâche complexe qui a été donnée, n'a pas était exploitée en tant que telle, car la tâche effective n'est pas complétée par les élèves, et en fait, c'est l'enseignant qui est beaucoup intervenu en modifiant le scénario de résolution.

L'analyse de la tâche nous permet de fournir une analyse dans les deux cadres choisis de façon complémentaire et cohérente, en analysant l'écart (ou la correspondance) entre ce qui est attendu et ce qui se réalise effectivement de la part des élèves, et ce que l'on a comme ETM idoine potentiel et comme ETM idoine effectif. L'ETM personnel des élèves et les activités qu'ils développent montrent une forte influence et dépendance de l'ETM idoine.

L'activité développée par l'enseignant provoque des proximités n'aboutissant apparemment pas à des activités *a maxima* chez les élèves. On infère ainsi leur *activité collective*, et les traces des *activités individuelles* qui ont eu lieu grâce aux productions écrites.

Dans cet exemple, nous avons manqué d'un scénario adéquat pour analyser des possibles influences entre ces deux activités. L'activité collective pourra éventuellement décrire cet *ETM de la classe* intimement connecté à l'ETM idoine effectif. D'autre part, la notion de médiation et celle de proximité peuvent nous aider à comprendre et à caractériser l'activité collective des acteurs dans une classe de mathématique traditionnelle. Cela nous apporte des pistes pour nous situer dans la construction des connaissances en prenant en compte l'aspect social de l'enseignement et la construction l'apprentissage.

En conclusion, nous voyons que les deux cadres théoriques ont des éléments qui sont bien en complémentarité et les liens entre eux sont manifestes avec au cœur la tâche mathématique comme élément essentiel ; car dans chaque genèse des ETM les deux cadres partagent des éléments. Par exemple dans les médiations travaillées de type à visé constructive dans la TA, nous pourrions dire que les proximités seraient ascendantes, en termes d'ETM cela nous montre un lien avec la genèse discursive et le composant preuve dans le plan cognitif. Nous pensons qu'il serait possible d'étudier cela plus en profondeur dans un autre type de scénario. Concernant la genèse instrumentale, elle est présente dans les deux cadres, nous pensons que dans un scénario avec un logiciel dynamique par exemple, nous pourrions détailler plus pertinemment leurs liens. Ainsi, nous envisageons d'analyser plus en profondeur les liens entre les deux cadres théoriques, de façon telle qu'ils puissent nous permettre de répondre aux questions que nous nous posons à partir de cette première analyse. Par exemple, l'enseignant privilégie un dialogue avec les élèves qui semblent être dans une activité *a maxima*; mais comment les faire avancer dans leurs apprentissages en s'appuyant sur leurs proximités (ascendantes ou descendantes) qui puissent permettre de construire des connaissances ? Et comment les élèves qui ont une activité *a minima* peuvent aller vers une activité *a maxima* en interaction avec l'ETM idoine ? Ainsi finalement nous pensons que l'articulation des deux cadres aide à enrichir les analyses des processus d'enseignement et d'apprentissage.

REMERCIEMENT

Ce travail a été financé principalement grâce à BECAS CHILE - Doctorado en el extranjero convocatoria 2016, CONICYT (Folio : 72170523).

REFERENCES

Benzekry, B., Guignard, M., Lévi, M-C., & Vivier, L. (2013, juin). *Créer des ressources pour la formation initiale professionnelle des enseignants de mathématiques à partir de sujets d'oral du CAPES*. Actes du 20ème colloque CORFEM, Grenoble.

Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en ouvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral.* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot. Paris.

Duval, R. (1999). *Representation visión and visualisation : cognitive functions in mathematical thinking*, VBasic issues learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st North American Conference of the International Group for Psychology in Mathematics Education (PME-NA) 1, pp. 311–336). Cuernavaca, México: Morelos.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10, 5–53.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17* (Número especial tomo I), 29-39.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J.-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM - Mathematics Education, 48*(6), 861-874.

Kuzniak, A, Tanguay, D & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling : An introduction. *ZDM-Mathematics Education,* 48(6). 721-737.

Leontiev, A. (1984). *Activité Conscience Personnalité*. Moscou : Editions du progrès (1ère Edition, 1975, en russe).

Nechache, A. (2016). La vali*dation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*. Thèse de doctorat). Université Paris Diderot.

Nechache, A., (2017). Les catégorisations des taches et du travailleur-sujet : un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*, 67-90. IREM de Strasbourg.

Nosulenko, V. et Rabardel, P. (2008). Ergonomie, psychologie et travail dans les pays de l'ex. URSS : histoire et spécificités du développement, Dans M.F. Dessaigne, I. Gaillard (Eds.), *Des évolutions en ergonomie*. Toulouse, OCTARES.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 18*(2), 139-190.

Robert, A. (2008). Laisser chercher les élèves ? Les faire travailler en petits groups ? L'Ouvert, No. 117, Publication de l'IREM de Strasbourg.

Robert, A. et Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignant de mathématiques : Une double approche. *Revue Canadienne de l'Enseignement des Sciences, des Mathématiques et des Technologies, 2*(4), 505-528.

Robert, A. et Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of mathematics teacher's activity. An exemple in a French 10th-grade class. *Educational Studies in Mathemtics, 59*, 269-298.

Rogalski, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques. La pensé sauvage, 23*(3), 343-388.

Rogalski, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Des compléments sur les théories de l'activité et du développement, pour l'analyse des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. Dans F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants* (p. 23-30 & p. 429-459). Toulouse : Octarès.

Vandebrouck, F. et Robert, A. (2014). *Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des taches complexes.* Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz Nº10, Janvier.

Vandebrouck, F. (2018). Activity Theory in French Didactic Research. In : Kisier G., Forgasz H., Graven M., Kuzniak A., Simmt E., Xu B. (eds) Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. (679-698) ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

EL ROL DE LAS TAREAS Y DIFERENTES HEURÍSTICAS DE SOLUCIÓN: UNA DISCUSIÓN ENTRE MODELIZACIÓN Y ETM

Carolina Guerrero-Ortiz[a], Carolina Henríquez-Rivas[b]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, [b]Universidad de Talca, Chile

c_cguerrero@yahoo.com.mx, cahenriquez@utalca.cl

La presente comunicación aborda una discusión entre la Modelización y los Espacios de Trabajo Matemático. Como punto de partida, se consideran tareas que admiten diversas heurísticas de solución y cuestionamos los tránsitos por el ciclo de modelización cuando el trabajo matemático se relaciona a un paradigma cercano a la realidad. El análisis muestra cómo el conocimiento matemático y extra-matemático que posee un individuo influye en el tipo de trabajo matemático que desarrolla poniéndose en juego diversos componentes cognitivos y epistemológicos. También resaltamos en las características de ciertas tareas y cómo esto incide en el trabajo matemático que se podría desarrollar. De este modo, aportamos con los análisis a la discusión teórica, que involucra a ambas perspectivas.

Palabras clave: *Modelación, Espacio de Trabajo Matemático, Tarea, Matemática.*

INRODUCCIÓN

En el contexto de la *modelización y aplicaciones* en educación matemática, uno de los principales temas de investigación es el estudio de los procesos que desarrolla un individuo para dar respuesta a problemas que se plantean en la vida real (Kaiser, Blum, Borromeo & Stillman, 2011; Borromeo, 2006), donde el conocimiento de las matemáticas y del mundo juegan un papel fundamental (Blum, 2011). El tipo de conocimientos que involucra la solución de una tarea puede determinar la manera en que un individuo transita por el ciclo de modelización (Girnat & Eichler, 2011). Aunque existen diferentes maneras para representar el ciclo de modelización, aún hacen falta perspectivas que abarquen una gama más completa de modelos, además de los ya reconocidos: modelos explicativos y predictivos (Doerr, Ärlebäck & Misfeldt, 2016).

En relación a la modelización, uno de los principales temas de investigación se orienta al diseño y análisis de tareas de enseñanza para favorecer la construcción y el desarrollo de habilidades matemáticas (Kaiser, Blum, Borromeo & Stillman, 2011). Este aspecto se ha abordado a través de la caracterización de las actividades que se plantean en el aula de clases, de acuerdo a los enfoques realista, socio-cultural, educativo, cognitivo, etc. En cuanto a las características y demanda cognitiva de las tareas para el aprendizaje de las matemáticas (Henningsen & Stein, 1997) se ha determinado que, para que una tarea favorezca el desarrollo de razonamiento y conocimiento matemático, debe permitir diversas representaciones, múltiples estrategias de solución y formas de comunicación matemática; además de potenciar diferentes estrategias de razonamiento. Particularmente en modelización aún hace falta profundizar en la comprensión de los procesos matemáticos que tienen lugar cuando un individuo se enfrenta a este tipo de actividades.

Por otro lado, el constructo teórico *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM) permite describir y caracterizar el trabajo matemático que desarrolla un individuo, a partir de una tarea específica (Kuzniak & Richard, 2014; Gómez-Chacón, Kuzniak & Vivier, 2016). Con este enfoque es posible describir cómo en la solución de una tarea se articulan elementos de tipo epistemológico y cognitivo, mostrando las circulaciones entre las componentes del ETM activadas (Henríquez-Rivas & Montoya-Delgadillo, 2015). De este modo, el rol de la tarea en el ETM cobra gran importancia, pues el trabajo matemático no solo depende de los conocimientos que posee el individuo, sino de lo que demanda la tarea y cómo ésta es formulada. Asimismo, en el ETM se debe profundizar respecto a tareas que involucran un amplio espectro de posibilidades de solución que dependen de quien resuelve y que podrían ir desde un paradigma de trabajo más concreto, a uno más formal y abstracto.

En este trabajo, a partir del análisis de las heurísticas de solución asociadas a tareas y del trabajo matemático que es favorecido, proponemos una discusión relativa a la modelización y el ETM, especialmente cómo estas perspectivas interaccionan para comprender el trabajo matemático que emerge de la modelización. En cuanto a la modelización, se aborda la distinción entre modelo real y matemático, y desde el ETM analizamos qué tipos de aspectos epistemológicos y cognitivos son activados y articulados en el trabajo. Para ello se identifica en el ETM que, dependiendo de los conocimientos y las experiencias de quien resuelve, la brecha existente entre el modelo real y el modelo matemático podría ser más o menos amplia y, por ende, el trabajo matemático podría estar más cerca o lejos del modelo real. De esta forma, nos cuestionamos cómo se articulan estas dos aproximaciones dependiendo del tipo de tarea y las heurísticas de solución que emergen.

Las preguntas de investigación que orientan este trabajo, en relación al tránsito entre el mundo de la realidad y el mundo de las matemáticas en la resolución de una tarea específica, son:

- *¿Cómo los conocimientos asociados a la realidad que se ponen en juego al resolver una tarea e influyen en el proceso de modelización?*
- *¿Cómo los conocimientos asociados a las matemáticas que se movilizan al resolver una tarea influyen en el proceso de modelización?*

Para dar respuesta a estas preguntas, primero presentamos los elementos teóricos en que se apoya la discusión. Luego, proponemos dos tareas, sus análisis y algunos resultados de las experimentaciones de las tareas, en diversos contextos de aplicación.

MARCO CONCEPTUAL

Algunos aspectos fundamentales en la Modelización

Es necesario precisar lo que se entiende por modelización y por problema matemático (Blum, 1993). En el primer caso, la situación y los cuestionamientos pertenecen a una parte del mundo real y generan la aparición de algunos métodos para obtener resultados matemáticos. El mundo real es comprendido como todo aquello fuera del mundo de las matemáticas. Mientras que los problemas matemáticos son comprendidos como aquellas situaciones generadas dentro del mundo de las matemáticas. Puede suceder que los problemas matemáticos emergen de una situación, pero en su proceso de resolución son abstraídos de la realidad. También se conceptualiza la modelización como un medio para el desarrollo de habilidades matemáticas (Maaß, 2006) y socio-críticas (Barbosa, 2006), entre otras. El estudio del tránsito que desarrolla un individuo para dar respuesta a ciertos cuestionamientos cuando se enfrenta a una tarea de modelización, es uno de los principales temas de investigación en educación matemática (Kaiser, Blum, Borromeo & Stillman, 2011).

Consideramos la perspectiva modelización planteada por Borromeo (2006). En esta perspectiva se hace énfasis en la fase del Modelo de la situación o Representación mental de la situación (MRS). Borromeo (2006) considera que los estilos de pensamiento de un individuo (visual, analítico y combinación de estos) influyen en la transición del mundo real al mundo de las matemáticas. El proceso de modelización involucra las siguientes fases: *Situación Real*, que es la situación de inicio; con esta información el individuo se forma una *Representación Mental de la Situación,* luego la situación es idealizada lo cual da lugar al *Modelo Real*; la situación es trasladada al mundo de las matemáticas por un proceso de matematización, obteniendo un *Modelo Matemático*; de aquí se sigue el trabajo matemático en el mundo de las matemáticas para dar lugar a *Resultados Matemáticos*; estos resultados luego son interpretados en términos de la situación real (*Resultados Reales*) y validados de acuerdo a la representación mental de la situación.

El paso de la situación real a la representación mental de la situación está dada por simplificaciones inconscientes de la tarea y la preferencia del individuo sobre cómo abordar dicha tarea. En el paso de la MRS al Modelo Real, las simplificaciones son más conscientes, debido a que algunas decisiones son tomadas e influencian la forma de filtrar la información. El Modelo Real es construido a nivel interno y se puede observar a través de las declaraciones de los individuos y los primeros bocetos y fórmulas que usan. El paso del Modelo Real al Modelo Matemático se caracteriza por el progreso matemático haciendo uso de conocimientos extra-matemáticos asociados a la tarea. En la fase de Modelo Matemático las declaraciones de los individuos se asocian más a las matemáticas. En este trabajo, entenderemos los modelos como sistemas conceptuales en concordancia con Lesh y Doerr (2003), los que pueden tener su origen o ser externalizados a través del trabajo con materiales concretos, bocetos visuales, diagramas o símbolos matemáticos.

Espacio de Trabajo Matemático (ETM)

El ETM se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas, se constituye por los planos, *cognitivo* y *epistemológico*, en relación con los contenidos matemáticos del dominio en juego (Kuzniak, 2011). El término *circulación* denota cómo las génesis (semiótica, instrumental y discursiva), componentes y planos se ponen en juego (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca & Mena-Lorca, 2014; Henríquez-Rivas & Montoya-Delgadillo, 2015). La presente contribución privilegia las idea de circulación en los análisis del ETM, a partir de la representación del ciclo de modelización.

METODOLOGÍA

La metodología es de tipo cualitativa, específicamente Estudio de Caso (Yin, 2003; Stake, 2007), pues nos permite interpretar y analizar en detalle la complejidad del caso de estudio. Consideramos un estudio de casos instrumental, ya que los casos que se analizan se emplean como un apoyo sobre el objeto de estudio. Se proponen dos tareas, "Las baldosas de Teresa" y "Cuidemos el agua", para cada tarea presentaremos extractos de heurísticas hipotéticas y posteriormente mostraremos los análisis de las experimentaciones de dos casos de estudio (uno por tarea).

Sujetos y recogida de datos

Las tareas que se presentan aquí han sido implementadas en diversos contextos, estudiantes de Pedagogía en matemáticas y matemáticos profesionales. Para cada tarea se describen aspectos generales de heurísticas hipotéticas de solución y un análisis de acuerdo a la modelización y ETM. Para la primera tarea, se presentan los análisis de un matemático, quien fue seleccionado por disponer de un robusto referencial teórico, lo cual nos permite profundizar en el modelo matemático en términos de modelización y en las características de su ETM *personal*. En la segunda tarea, seleccionamos el caso de un profesor en formación inicial, pues su trabajo exhibe variaciones a las condiciones iniciales de la tarea, lo que evidencia un ETM *personal* distinto al previsto inicialmente. Además, este caso exhibe un error en el trabajo, lo cual resulta interesante de analizar.

Ambos casos nos permiten profundizar respecto a las características que poseen ciertas tareas, y su relación con el ETM *personal* y la distancia entre los modelos real y matemático según la modelización. Cabe señalar que presentamos los análisis del ciclo de modelización y ETM mediante figuras, solo para las heurísticas de tarea 1, dada la extensión del presente escrito.

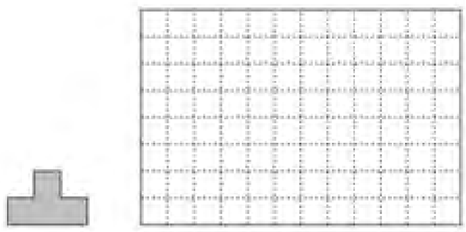
Las tareas fueron implementadas en el segundo semestre de 2017 (tarea 1) y primer semestre del 2017 (tarea 2). En el caso del matemático, la experimentación se llevó a cabo en su lugar de trabajo y, en el caso del profesor en formación inicial en la institución donde desarrolla sus estudios. Los métodos de recolección de datos implican la observación no participante y el registro de las producciones escritas de cada informante.

Las tareas

La primera tarea llamada “Las baldosas de Teresa” forma parte de un conjunto problemas llamados *puzzles de polyminoes* (Golomb, 1994), que involucran elementos de la geometría combinatoria y presentan pocos métodos generales de solución. En particular, abordamos el estudio del *T-tetromino* para embaldosar un tablero. Las diversas combinaciones en que pueden organizarse los T-tetrominoes en un tablero y los métodos de ordenamiento, favorecen el desarrollo de diversas heurísticas de solución. La tarea 1 se propone de la siguiente manera.

Tarea 1: Las baldosas de Teresa[1]

El piso del baño de la casa de Teresa tiene forma rectangular y está embaldosado con baldosas cuadradas. El piso tiene exactamente 8×12 de estas baldosas, como muestra la figura. A Teresa le gustaría renovar el piso de su baño y usar sólo baldosas en forma de T, que están hechas de cuatro baldosas alineadas como muestra la figura. ¿Es posible embaldosar el piso usando estas baldosas?



La otra tarea titulada “Cuidemos el agua”, se trata de una situación abierta, en donde el resolutor debe buscar estrategias para dar respuesta a la pregunta. Estas estrategias pueden ir desde la medida del caudal de agua, hasta el planteamiento de modelos para obtener una respuesta generalizada. La tarea 2 se propone como sigue.

Tarea 2: Cuidemos el agua[2]

¿Has pensado cuánta agua empleas en la ducha de la mañana? Busca la manera de responder suponiendo todo lo que consideres necesario. Genera una propuesta de ahorro de agua.

ANÁLISIS DE LAS HEURÍSTICAS HIPOTÉTICAS

A continuación, se describen elementos de las heurísticas hipotéticas para cada tarea y los análisis de algunas de estas que consideran las perspectivas de Modelización y ETM. En el caso de la tarea 1, se considera una heurística que muestra un trabajo más cercano al mundo real y, en la tarea 2, un trabajo que involucra aspectos del mundo matemático.

1 Tarea facilitada por la iniciativa ARPA, http://www.arpamat.cl/nuestra-iniciativa/ .
2 Esta tarea ha sido tomada y modificada de Blomhoj (2004).

Heurísticas hipotéticas de la tarea 1

De los análisis identificamos 4 heurísticas de solución que involucran diversas circulaciones en el ETM y según el ciclo de modelización. Estas heurísticas contemplan:

1) Razonamiento intuitivo en el embaldosado por ensayo y error, lo cual y no implica conocimientos matemáticos conscientes por parte del individuo, sino que acomodar las piezas en el tablero.
2) Búsqueda de un ordenamiento con atención en la pieza (T-tetromino). Por ejemplo, ubicar los T-tetrominoes de afuera hacia adentro, de abajo hacia arriba, etc. Esta estrategia, en algunos casos podría no conducir a una solución si se dejan espacios cuadrados.
3) Construcción y ordenamiento de un patrón mínimo de 4x4, conformado por cuatro T-tetrominoes para cubrir el embaldosado. Una vez construido el patrón, este se puede ordenar en el tablero por su repetición, o bien, por la aplicación de isometrías al patrón.
4) Construcción, ordenamiento y combinaciones del patrón, con atención en las posibilidades de ordenamiento del patrón y las piezas que lo componen. Por ejemplo, al contar el patrón de 4x4 con repetición, se tienen dos posibilidades, de manera que en un rectángulo de lado 8x12 se tienen 6 posibles ocupaciones, es decir, $2^6 = 64$ posibilidades de ordenamiento. Otras formas de cubrir el embaldosado consideran los ordenamientos de los T-tetrominoes al interior del patrón, lo cual entrega otras dos posibilidades más de ordenamiento, también, está la conformación de otros patrones.

Para los análisis en las perspectivas teóricas, se considera la heurística 1, pues nos ofrece la posibilidad de reflexionar sobre la actividad matemática cuando los conocimientos de quien resuelve están próximos a un paradigma de trabajo natural o físico, que involucra intuición y, los aspectos matemáticos explícitamente involucrados tienen una menor presencia, quedando así el ETM asociado a la tarea como fuera del mundo de las matemáticas en el ciclo de la modelización.

En la perspectiva del ciclo de modelización destacamos las fases como siguen: la situación real está dada por el enunciado del problema, considerando el embaldosado y la pieza como una parte de la realidad. Con esto, el individuo establece la imagen como una representación mental sobre la tarea a resolver. Al inicio podría o no considerar completar el embaldosado, ya que la atención está puesta en el acomodamiento de las piezas. Esta idea o modelo del mundo real se puede definir o refinar, a la luz de lidiar con la solución a la tarea, para determinar la elección del ordenamiento de la pieza. Las actividades realizadas en esta estrategia se dan de manera intuitiva y ligadas a una acción cercana a la realidad, lo cual no favorece el tránsito hacia la matematización. De este modo, no se observa un razonamiento propiamente matemático y el trabajo del individuo queda ligado a la realidad.

Este tipo de trabajo en la perspectiva de la circulación entre las componentes del ETM, privilegia en el plano cognitivo, el proceso de visualización que se clasifica de tipo *icónico* (Duval, 2005), pues la actividad se relaciona con la percepción visual y operaciones concretas del mundo real sin un orden específico, para encajar las piezas de un modo conveniente. En este caso, el *T-tetronomino* funciona como un *artefacto material* (Rabardel, 1995), y no es concebido como un objeto matemático, pues solo se utiliza para construir el ordenamiento en la configuración final. Luego, el plano vertical privilegiado es [*Sem-Ins*]. Se destaca la ausencia de argumentaciones o de un razonamiento discursivo que considera definiciones o propiedades matemáticas, en alusión a la componente referencial, el proceso de prueba y la génesis discursiva.

La siguiente figura (1) muestra de manera articulada, el ciclo de modelización descrito anteriormente y la circulación entre las componentes del ETM. Se destaca que la estrategia de resolución privilegia fases de modelación asociadas al mundo real, y el ETM está próximo a la realidad.

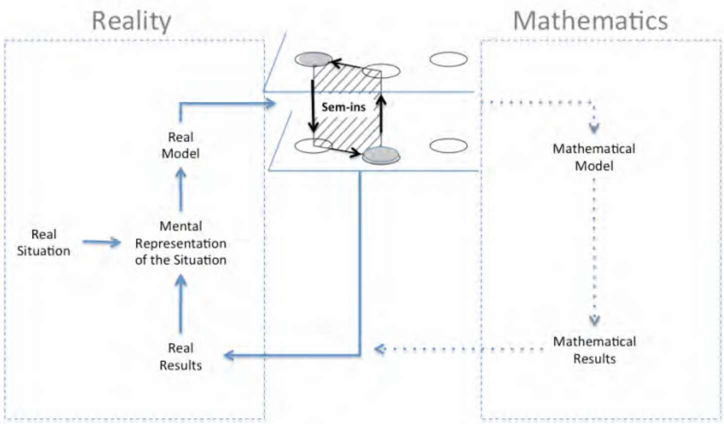


Figura 1: Análisis del ciclo de modelización y ETM en heurística de tarea 1

En la caracterización teórica de esta heurística sólo algunos elementos de modelización y de ETM se manifiestan, ya que el trabajo en el mundo real no es matematizado, y en el ETM, el trabajo privilegia la visualización usando la pieza como artefacto material que no se justifica.

Heurísticas hipotéticas de la tarea 2

1) Razonamiento intuitivo respecto a la cantidad de líquido que fluye, en este caso el individuo puede realizar suposiciones considerando el tiempo de ducha y el líquido que fluye, aquí la respuesta está asociada a una estimación.
2) Razonamiento que considera situaciones específicas, por ejemplo, tiempo que demora en salir agua caliente, tiempo de lavado y enjuague, etc. También pueden considerarse, la medición del líquido utilizando un balde o mediante un venturímetro. Estas consideraciones implican algunos cálculos cercanos a la experiencia quien resuelve.

3) Construcción de modelos sencillos que están asociados a la sistematización de lo desarrollado en el punto anterior. Una posible respuesta es determinar que la cantidad varía en forma lineal con respecto al tiempo (Blomhoj, 2004).

4) Construcción de modelos matemáticos más sofisticados que implican un cambio de dominio, este cambio dominio puede involucrar conocimientos de mecánica de fluidos.

Para los análisis de la tarea 2, será contemplada la heurística 3, pues el trabajo matemático se desarrolla dentro del mundo matemático en la modelización. En relación con el ciclo de modelización, las fases pueden presentarse como sigue: la *Situación real*, está dada por la situación tal cual se presenta en el texto; de aquí el individuo se crea una imagen mental sobre la situación, esto involucra por un lado hacerse consciente de las características de la situación, por ejemplo, observar el caudal, el tiempo de ducha, agua fría o caliente, etc. De aquí emerge un *modelo real*, el cual será observado a través de las primeras externalizaciones que el individuo desarrolle, este modelo se apoya en la simplificación e idealización realizada en la fase anterior. En estas dos fases (MRS y RM) es posible que el individuo genere posibles estrategias para responder a la pregunta. Dichas estrategias de solución pueden ser apoyadas en el uso de elementos de la realidad, por ejemplo, recoger el agua y medir el volumen en relación al tiempo o plantear algún modelo matemático que ayude a describir y predecir la cantidad de líquido utilizado. En este último caso procede a la matematización dada por la selección y asociación de información relevante con variables y relaciones matemáticas, en nuestro caso elementos como el tiempo, flujo constante y caudal son relevantes. Con esta información se procede a la construcción del modelo matemático, el cual puede ser dado por la ecuación del caudal $C=vA$, donde C es el caudal, v la velocidad de líquido y A el área transversal de la tubería. En el caso de tratarse de la toma de datos experimental se puede construir un modelo representado gráficamente, el cual si se trata de un flujo constante tendría un comportamiento lineal. En ambos casos el modelo obtenido permite obtener resultados o conclusiones matemáticas que dan información sobre la situación real y permiten predecir cómo se comportará la situación en el tiempo.

En relación a la circulación en el ETM, consideramos que la génesis semiótica es activada los objetos se representan con números o expresiones algebraicas. Las mediciones son parte de las estrategias, uso de artefactos, materiales o simbólicos como una fórmula, que dependen de los conocimientos puestos en juego, para la construcción de un modelo. De este modo, el trabajo se desarrolla activando componentes del plano vertical [*Sem-Dis*] esencialmente. Si lo que se emplea es una ecuación específica, como la del caudal, se trata de un saber de la componente referencial, que luego se utiliza como un artefacto simbólico (Rabardel, 1995) en el desarrollo algebraico. Es decir que, en ese caso el trabajo además activa dicha componente del ETM.

RESULTADOS

En la fase de experimentación, la tarea 1 fue desarrollada por 5 matemáticos, en 2017, con experiencia en investigación, quienes participaron en distintos momentos de forma individual. Se selecciona el trabajo de uno de los participantes (P1), por presentar una variación en relación a la heurística analizada a priori, y por las características propias del investigador matemático, quien declara trabajar en Teoría de nudos y representaciones. La tarea 2 fue desarrollada por 45 estudiantes de pedagogía en matemáticas, quienes la resolvieron en forma individual. En un primer análisis se encontró que las estrategias de solución varían entre un razonamiento cercano a lo intuitivo y un razonamiento dirigido hacia la construcción de modelos sencillos. De esto, se seleccionó la producción de un participante (E1), quien muestra tener algún conocimiento sobre el caudal, concepto que abordan en las clases de física.

Análisis de tarea 1: el caso de un matemático (P1)

Esta estrategia considera el tablero dividido en bloques, con el fin de contar sus combinaciones. P1 define tres estrategias iniciales: dividir el tablero en bloques verticales de 4x8, bloques cuadrados de 4x4 y bloques de 12x4, cada uno con 2^3, 2^6 y 2^2 posibilidades de combinar los bloques. Luego, organiza los tres tipos de bloques para encontrar nuevas posibilidades, focalizándose en el número de combinaciones que se generan. Para 2^4, encuentra un caso de combinaciones de dos bloques 4x8 y dos de 4x4 y, otro bloque de 12x4 y tres de 4x4. Para 2^5 encuentra dos casos, un bloque de 4x8 vertical u horizontal con 4 bloques de 4x4. P1 no menciona cómo se organizan los T-tetrominoes para conformar los bloques y asume que existen dos combinaciones para cada caso, es decir, su interés no es la conformación del bloque, sino sus posibilidades de combinación como se muestra en la figura (2).

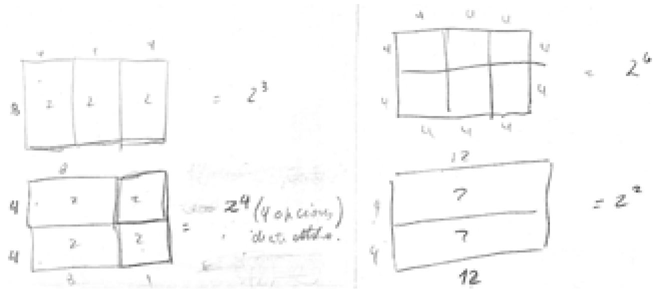


Figura 2. Producción de P1

P1 se apoya en la situación inicial para realizar todo el trabajo matemático, y una vez obtenidas las combinaciones para el llenado del tablero, no muestra una confrontación con la situación que dió origen a su trabajo, esto debido a que una vez que determina un camino de solución, se ocupa de la organización matemática del mismo. Por lo cual, sólo se observa el tránsito de la realidad al mundo de las matemáticas en un sentido.

El ETM personal de P1, inicialmente se desarrolla en el dominio geométrico, pues los bloques son considerados como rectángulos y cuadrados que embaldosan el tablero. El proceso de visualización y los tratamientos a los bloques activan el plano [Sem-Ins]. Luego, el trabajo involucra el cambio de dominio (Kuzniak, 2014), hacia la combinatoria en el estudio del ordenamiento de los bloques. En esta fase se activa el plano [Sem-Dis], pues existe un trabajo semiótico que involucra tratamientos figurales y números para representar potencias, lo que además activa la componente referencial. P1 no justifica ni prueba su trabajo, por tanto el proceso de prueba del plano cognitivo no se activa. Se observa un cambio contínuo entre dominios (geometría y combinatoria), cuando considera diversas combinaciones de bloques, lo cual se representa en la Figura (3).

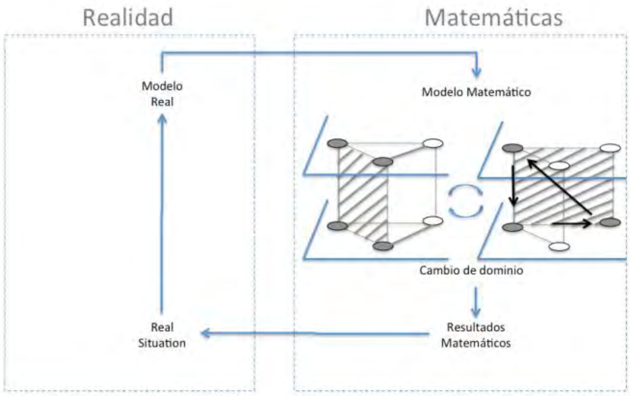


Figura 3: Análisis en las perspectivas de modelización y ETM

Análisis de tarea 2: el caso de un futuro profesor (E1)

E1 comienza identificando información la información relevante del problema, por ejemplo el tiempo de ducha, la altura de la ducha y tiempo necesario para regular la temperatura del agua. Estos aspectos pueden ser relacionados con la experiencia particular del individuo, pues en algunas situaciones la cantidad de agua depende de la presión con que llega a ciertas zonas. Estas consideraciones pueden ser asociadas a las fases de modelo mental de la situación y modelo real, en el ciclo de modelización.

Posteriormente E1, señala explícitamente que para conocer la cantidad de agua utilizará la fórmula del Caudal. Para ello hace un estimado de la cantidad de orificios en la regadera y su diámetro (0.1 cm). De aquí podemos observar que E1 no construye un modelo matemático, sino aplica un modelo matemático el cual ya conoce. Es decir, en nuestro análisis no se identifica un proceso de matematización, más bien se trata de un saber de la componente referencial del ETM que se activa. El trabajo de E1 a partir de esta fase se desarrolla en el mundo matemático, donde el modelo matemático tiene un carácter predictivo. Si bien E1 comete un error al interpretar la fórmula para el caudal, su trabajo se desarrolla mediante la sustitución de datos en la expresión utilizada para determinar una respuesta, lo que en la perspectiva del ETM implica el uso de una fórmula como una herramienta semiótica, aun cuando esta presenta errores. De esta manera, la circulación según el ETM personal de E1 activa la componente referencial al considerar una fórmula (errónea) específica, luego el plano [*Sem-Ins*], lo que se evidencia en la siguiente Figura (4).

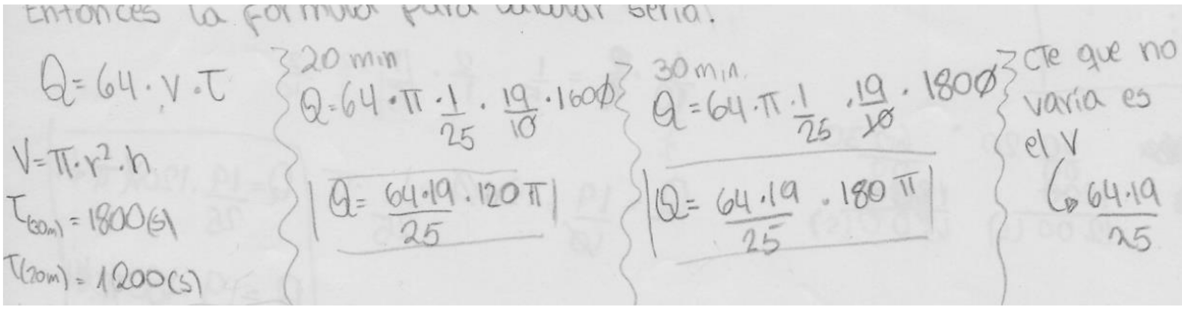


Figura 4. Producción de E1.

Esta estrategia está más relacionada a un razonamiento que considera situaciones específicas, con lo cual E1 busca obtener una respuesta a la pregunta sin determinar ni justificar un método que le permita generalizar sus resultados. Pareciera ser que la estrategia de E1 está más cercana a la realidad, en el sentido de la practicidad, lo que se vincula con un paradigma de trabajo concreto o real.

DISCUSIÓN

De los análisis que se muestran considerando las perspectivas de modelización y ETM, se destaca la contribución para cada una de estas y valoramos cómo cada constructo favorece en la profundización de estos. Por un lado, para la modelización, el ETM permite profundizar en la articulación de aspectos epistemológicos y cognitivos del trabajo matemático, incluso la posibilidad de identificar errores en el trabajo matemático y caracterizarlos. Y, por otra parte, para el ETM, la modelización permite hacer visibles fases de una resolución de una tarea, que en el ETM quedan invisibles. Un aspecto relevante en este caso es que en modelización los objetivos de la tarea (construcción de modelos descriptivos o predictivos y desarrollo de habilidades) favorece que los elementos matemáticos sean más o menos visibles, en algunos casos quedando el desarrollo a nivel de construcción interna en el individuo.

Nos resulta particularmente interesante y punto de discusión, el cómo según las heurísticas y conocimientos del resolutor, el trabajo matemático está más o menos cercano a la realidad en términos de modelización y, si un objeto empleado puede o no ser concebido como un modelo matemático. Las heurísticas que en éste trabajo se analizan nos permiten cuestionar estos aspectos, además involucran un amplio espectro de soluciones, unas ligadas a un trabajo intuitivo y otras con un ETM *personal* con un referencial más robusto.

Al retomar las preguntas formuladas inicialmente: *¿Cómo los conocimientos asociados a la realidad que se ponen en juego al resolver una tarea influyen en el proceso de modelización?* Y, *¿Cómo los conocimientos asociados a las matemáticas que se movilizan al resolver una tarea influyen en el proceso de modelización?* De los análisis resaltamos las características que el trabajo con cada tarea involucra y cómo el ETM se encuentra más o menos próximo a un paradigma de trabajo del mundo real o concreto, o bien, más cercano a un paradigma de trabajo más abstracto y formal. En el caso de la tarea 1, observamos que la brecha en el proceso entre el modelo real y matemático depende de los conocimientos matemáticos de quien resuelve, lo que no implica hacer variar la tarea, esto se constata en las heurísticas analizadas. Asimismo, en los análisis de esta tarea, observamos que los conocimientos del resolutor influyen en el proceso de modelización. Luego, en la tarea 2, las características del ETM *personal* exhibido y, por ende, la brecha entre el modelo real y matemático, van a depender de los conocimientos y la variación que el individuo realiza a la tarea y a sus condiciones iniciales en el mundo real. De este modo, reconocemos dos tipos de tareas que, en un análisis en profundidad, nos permiten caracterizar sus variaciones en términos de modelización y de ETM.

En las tareas analizadas, si bien el proceso de modelización puede generar un modelo tan complejo como variables se consideren en la situación y conocimiento tenga el individuo que resuelve, cabe señalar que la riqueza de ambas tareas está en las habilidades que desarrollan los estudiantes al resolverlas. En el caso de la tarea 1, cuando es abordada por estudiantes de nivel básico, se promueve el desarrollo de habilidades visuales y espaciales, o bien, cuando es resuelta por un individuo con un espectro de conocimientos matemáticos más amplio, se pueden dar *cambios de dominio*, como es el caso de M1. En el caso de la tarea 2 el objetivo puede orientarse al desarrollo de habilidades matemáticas y socio-críticas. En ambas tareas los modelos que emergen pueden ser descriptivos o predictivos, dependiendo del objetivo de la tarea.

En ambas perspectivas se ven involucrados conocimientos asociados al mundo real (extra-matemático) y al mundo de las matemáticas, en relación con la interpretación de objetos de la realidad en términos matemáticos. Esta discusión teórica abre posibilidades a otras investigaciones y estudios empíricos que aborden la relación Modelización y ETM, así como el estudio de tareas específicas. Quedan abiertas las siguientes preguntas, que abordaremos en una investigación posterior: *¿Cómo es el tránsito de la realidad al mundo de las matemáticas cuando la resolución de una tarea puede abarcar un amplio espectro de conocimientos que dependen del individuo? Y, en concreto ¿Cómo son las circulaciones entre las componentes del ETM cuando un individuo resuelve una tarea de modelización?*

Nos quedan ideas abiertas para profundizar en los procesos de modelización y el ETM *personal* cuando los conocimientos de quien resuelve, provienen de un paradigma cercanos a lo concreto o físico, por ejemplo, en contextos de nivel parvulario o básico. Cabe recordar que tradicionalmente las perspectivas de modelización (Kaiser & Sriraman, 2006) han considerado tareas que destacan en su resolución una separación entre el mundo real y el mundo matemático. La noción de modelo adoptada en esta investigación nos permitió replantearnos la separación entre estos mundos, lo cual aparentemente está relacionado con un trabajo que involucra un paradigma más cercano a la realidad.

Un estudio que relaciona Modelización y ETM se podría desarrollar en relación al paradigma privilegiado según las heurísticas de resolución. Por ejemplo, en el caso particular de la heurística presentada sobre la solución de la tarea 2, se podría discutir si esta se encuentra en un dominio analítico y la posible existencia de tránsito entre paradigmas (Montoya Delgadillo & Vivier, 2016).

En relación con las tareas, en esta investigación identificamos dos tipos; una en la que las heurísticas de solución no modifican las condiciones de la tarea, y otra, en las que las condiciones de la tarea cambian de acuerdo a los conocimientos y la heurística de quien resuelve. Indagar en este tipo de categorías de tareas (u otras) es pertinente de estudiar, tomando en cuenta otras variables que aquí no se han considerado y que podrían afectar en los análisis teóricos, como el tiempo, las condiciones de realización, uso de materiales, etc. Finalmente, analizar qué sucede en un ciclo completo de modelización y sus implicancias en las circulaciones en el ETM es un punto que se puede abordar como continuidad de esta investigación.

AGRADECIMIENTOS

C. Henríquez-Rivas agradece el financiamiento a los proyectos "Un Compromiso de Calidad y Excelencia en la FID: Relevando el Sello Innovador de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Talca, TAL 1758" y FONDEF ID14I20338.

C. Guerrero-Ortiz agradece la financiación a los proyectos semilla 2018/ PUCV y EDU2017-84276-R.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barbosa. J. (2006). Mathematical Modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. ZDM, 38(3), 293-301.

Blomhoj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. National Center for Mathematics Education. Suecia, 145-159.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. Descargado el 19-11-10 de http://oai.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2009051227366/1/BlumModelling1993.pdf

Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 15–30). Dordrecht: Springer.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86–95.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5–53.

Girnat, B. & Eichler, A. (2011). Secondary Teachers' Beliefs on Modelling in Geometry and Stochastics. In: Kaiser, G.; Blum, W., et al. (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (v.1, pp. 75-84). Springer Netherlands. DOI 978-94-007-0910-2.

Henningsen, M. & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 28(5), 524–549.

Huincahue Arcos, J., Borromeo-Ferri, R., & Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las ciencias, 36*(1), 99-115

Golomb, S. (1964). *Polyominoes. Puzzles, patterns, problems and packings.* United Kingdom: Princeton University Press.

Henríquez-Rivas, C. & Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 51-70.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo, F., & Stillman, G. (2011). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – Preface. In: Kaiser, G.; Blum, W., et al. (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling (v.1, pp. 1-5). Springer Netherlands. DOI 978-94-007-0910-2.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A. (2014). Travail mathématique et domaines mathématiques. *Revista Latinoamericana de matemática educativa, 17*(4-II), 385-399.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de matemática educativa, 17*(4-I), 5-15.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving*. In R. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving. Mahwah (pp. 3–33).New York: Lawrence Erlbaum Associates Inc.

Maaß K. (2006). What are modelling competences? *ZDM, 38*(2), 113-142.

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, J. & Mena-Lorca A. (2014). Circulación y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de matemática educativa, 17*(4-I), 181-197.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical working space and paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM, 48*, 739-754.

Gómez-Chacón, I. Kuzniak, A. & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los espacios de trabajo matemáticos. *Bolema, 30*(54), 1-22.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Yin, R. (2003). *Case Study Research. Design and Methods*. London: SAGE Publications.

TAREAS QUE ACTIVAN UN TRABAJO MATEMÁTICO COMPLETO EN ESTUDIANTES DE PEDAGOGÍA

Leslie Jiménez[a], Romina Menares[b] y Rolando Pomareda[a]

[a]Universidad de Chile, [b]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

jpleslie@uchile.cl, romina.menares@uv.cl, rpomared@uchile.cl

En el presente trabajo mostramos tres tareas adaptadas de aquellas que se suelen proponer en un curso de Álgebra y Geometría en primer año de formación inicial de profesores, las cuales, entre otras cosas, tienen la particularidad de ser potenciales portadoras de un trabajo matemático completo (tareas emblemáticas en el ETM). En esta contribución presentamos el análisis de estas tres tareas, candidatas a ser tareas emblemáticas, antes de ser implementadas en el curso de primer año de la carrera de Pedagogía en Matemáticas en una universidad chilena.

Palabras claves: *Tareas emblemáticas, Trabajo matemático completo, Formación Inicial de Profesores.*

INTRODUCCIÓN

A nivel universitario, la investigación educativa se ha ocupado del aprendizaje matemático y de los procesos de enseñanza por más de 25 años, intentando identificar y superar tanto las dificultades que los alumnos encuentran, como las disfunciones del sistema educativo. Diversos autores (Artigue, 2003; Winslow y Gronbaek, 2014; Tall, 1991) han estudiado y expuesto el problema de la *brecha* (*gap*) que se produce entre la enseñanza media y el primer año de universidad en el área matemática. Nuestra preocupación pone en su centro al estudiante futuro profesor, los cuales experimentan además una doble brecha al volver al colegio como profesores (identificada como *doble discontinuidad de Klein*) (Winslow y Gronbaek, 2014).

Esta contribución se enmarca en un proyecto que tiene como objetivo principal, tomar medidas para mermar la brecha Liceo-Universidad para quienes inician sus estudios de formación inicial de profesores de matemáticas. Este proyecto ha comenzado a realizarse con estudiantes futuros profesores de primer año del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile. En este contexto de trabajo, consideramos que uno de los factores que influye en la mantención de la brecha es que en el primer año de Universidad se propone un trabajo matemático altamente cargado a la demostración, al razonamiento deductivo y al tratamiento de objetos en lenguaje formal, dejando de lado procesos de razonamiento inductivo y la intuición.

Presentaremos en esta contribución tres tareas creadas al alero del proyecto, donde analizamos las posibles estrategias que los profesores en formación adoptarían de acuerdo a sus conocimientos previos. Estas tareas forman parte de una batería más amplia cuyo objetivo fundamental es permitir al estudiante pasar por procesos de descubrimiento y exploración en lugar de ir directamente a la demostración. En concreto, se proponen tareas potencialmente portadoras de un trabajo matemático completo, es decir candidatas a ser resueltas involucrando procesos semióticos, de instrumentalización y discursivos.

TAREAS EMBLEMÁTICAS Y EL ETM

Es conocido que, en una actividad matemática, el modelo del ETM considera la articulación entre las dimensiones cognitiva y epistemológica a través de las génesis semiótica, instrumental y discursiva (Kuzniak, 2011). Esto genera la aparición de tres planos verticales: [Sem-Ins], [Sem-Dis] y [Ins-Dis] (Richard y Kuzniak, 2014; Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016). Nuestra primera intención es que los estudiantes circulen por estos tres planos al realizar una actividad matemática, la cual se iniciará en el momento que se les entrega una tarea.

Basándonos en la investigación sobre la Teoría de Actividad (Vandebrouck, 2013), en este trabajo consideramos una tarea como *un problema matemático posible de resolver en un tiempo determinad*o, y una actividad como *la acción de realizar una tarea*. Siguiendo esto, los autores Kuzniak y Nechache (2016), han investigado sobre el rol de las tareas en la conformación de los ETM mediante el análisis de lo que han denominado *tareas emblemáticas*.

Las tareas emblemáticas cumplen con las siguientes 3 condiciones:

(1) Ser potencialmente portadoras de un trabajo matemático completo; es decir, que exista una relación genuina entre los planos cognitivo y epistemológico. Esto es, que exista una vinculación entre todos los planos verticales y dimensiones.

(2) Pertenecer al ETM idóneo, en otras palabras, ser parte de las tareas que se han propuesto primero en los posibles ETM idóneos definidos en las clases, y

(3) Estar disponible en los ETM de referencia, es decir, beneficiarse de su idoneidad para el trabajo matemático al que se refiere la institución de educación.

El objetivo principal de esta comunicación es mostrar tres tareas candidatas a ser emblemáticas para ser abordada por estudiantes de primer año de formación inicial de profesores. Entregaremos argumentos, mediante un análisis a priori, del por qué afirmamos que son candidatas a cumplir tales características.

CONTEXTO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este trabajo mostramos parte de la primera y segunda fase de la investigación, que corresponden a la selección y reformulación de tareas que pertenecen al ETM idóneo de la institución donde son implementadas, con su respectivo análisis a priori. El caso corresponde a un curso-taller de Álgebra y Geometría I de primer año de formación inicial de profesores del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Chile (carrera de *Pedagogía en enseñanza media en Matemáticas y Física*). El taller de este curso representa un complemento de la cátedra del mismo, y es de carácter obligatorio y presencial. El curso-taller tiene 1,5 horas de duración, en el cual los estudiantes trabajan sobre una lista de tareas o una tarea específica dada por el profesor. El trabajo se organiza en grupos de no más de 4 personas. Está liderado por un académico del Departamento y 5 profesores-ayudantes, estudiantes de años superiores de la misma carrera. Estos tienen la misión de ser guías mediadores del trabajo de los estudiantes.

La primera fase de la investigación, corresponde a recopilar el material usado años anteriores (desde el 2016, año que comenzó el taller), como apuntes escritos por el profesor formador, evaluaciones, guías o listas de tareas propuestas por el/los docente/s del curso. En la segunda fase seleccionamos las tareas candidatas a ser emblemáticas, parte de esta selección corresponde a tareas clásicas del curso (aquellas que usualmente se proponen), en los distintos contenidos del mismo, para ser analizadas a priori y ver en qué plano(s) y dimensión se mueven. Para escogerlas, antes de entrar en los análisis teóricos, buscamos observar en cada una de estas tareas el uso de distintas propiedades matemáticas, intercambio de representaciones entre los objetos y/o bien, variedad de herramientas a utilizar, vistos bajo nuestra experiencia. Hacemos un análisis de los conocimientos previos que poseen los estudiantes del curso para abordar la tarea e identificamos las distintas heurísticas estudiando el trabajo matemático desde el punto de vista de las circulaciones que se generan en los planos verticales del ETM.

De estas tareas, hemos elegido 3 para presentar en este trabajo.

EL ANÁLISIS DE LAS TAREAS

Como hemos dicho anteriormente, en este artículo mostramos tres tareas candidatas a ser tareas emblemáticas. Nos preocupamos de argumentar nuestra afirmación para cada tarea elegida, para ello evidenciamos que se cumplen las condiciones (1), (2) y (3) de la definición de tareas emblemáticas (Kuzniak y Nechache, 2016). Observamos que debido a la naturaleza de la tarea elegida (adaptada del material de años anteriores del curso), tenemos que las condiciones (2) y (3) se satisfacen claramente. Por esta razón, en este análisis desarrollamos solamente la verificación de la condición (1).

Tarea 1: Un número natural se llama p-especial, con p primo, si es divisible por p, el cuadrado de p y el cubo de p. Decida si es verdadero que para que un número sea 3-especial, la suma de sus dígitos debe ser divisible por 9. Justifique su respuesta.

Contextualización

La tarea se plantea en un contexto de clase donde los estudiantes demuestran distintos criterios de divisibilidad usando congruencias. La idea de esta tarea fue que los estudiantes utilizaran el mismo procedimiento usado para demostrar los criterios, pero de manera indirecta.

Conocimientos previos

Antes de plantear la tarea, se estudió congruencias módulo n, el algoritmo de división de Euclides, el resto de una división de enteros, expansión de un número entero en base 10.

Posibles respuestas

En primer lugar, por la forma en que es planteada la tarea, se solicita decidir si la afirmación es cierta o no, el estudiante deberá comenzar experimentando para convencerse de su respuesta. El estudiante podría, por ejemplo, realizar una tabla de doble entrada (y en este caso habría un proceso semiótico de conversión) donde anota los múltiplos de 27 y la suma de los dígitos. Luego de experimentar con varios números, decide que la afirmación es cierta, por lo que comienza a buscar una justificación.

Una posible estrategia es que los estudiantes utilicen el grupo finito Z9, de congruencias módulo 9, para manipular los restos del número divisible por 27, esto es, sea

$$n = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

divisible por 27. Entonces

$$n \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \ (mód\ 9).$$

Así

$$n = 9k + a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0\,,$$

para algún k en Z. Como n es divisible por 27, se tiene que:

$$9k + a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 27\mathrm{m}.$$

Luego

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 27m - 9k = 9\,(3m - k),$$

por lo que la suma de los dígitos ($a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$) de n es divisible por 9.

Para esta respuesta, los estudiantes representan el número n en su expansión decimal e identifican la necesidad de considerar los restos de cada término de dicha expansión al dividir por 9. Identificamos esta parte del trabajo como una articulación de procesos semióticos y discursivos, por lo que se releva el plano [Sem-Dis]. La utilización de la congruencia módulo 9 nos entrega evidencias sobre la presencia de procesos de instrumentalización (se aplica de manera algorítmica para todas las potencias de 10 consideradas), lo que deja ver la activación del plano [Sem-Ins] (cuando se articula la instrumentalización con procesos semióticos de tratamiento, donde *n* aparece primero como congruente a una expresión módulo 9 y luego aparece igual a una expresión que considera al resto). También se observa la activación del plano [Ins-Dis] cuando se obtienen conclusiones acerca de los restos luego de aplicar la congruencia módulo 9. En lo que sigue, identificamos una constante articulación de procesos semióticos, instrumentales y discursivos, por lo que afirmamos que para esta actividad, el estudiante circula por todos los planos verticales del ETM, lo cual implica que (1) se cumple.

Notar que una segunda estrategia es que el estudiante manipule la tabla fijándose en el incremento de la unidad y la decena del número cada vez que se suma 27. Acá hace uso de un razonamiento inductivo, pues puede asumir que la suma de los dígitos es 9 (es decir 2+7) y luego explora lo que sucede al sumar 7 unidades y 2 decenas, realizando el canje correspondiente.

Tarea 2: Usando la definición y lo que ya se ha estudiado sobre los valores y el comportamiento de la razón trigonométrica $Sen\alpha$ para un ángulo agudo α cualquiera (incluyendo el del ángulo recto $\alpha = 90º$). Defina $Sen\theta$, para todo ángulo obtuso θ. ¿Diría usted que esta razón trigonométrica está *bien definida*? ¿Por qué?

Nota: diremos que $Sen\theta$, para todo ángulo obtuso θ está bien definida si no hay dos valores de $Sen\theta$ distintos para un mismo ángulo θ, y si para ángulos cercanos a 90, el valor de $Seno$ es cercano a 1.

Contextualización

Como innovación, por primera vez el curso de Álgebra y Geometría I se inició con trigonometría, debido a que actualmente en el plan común del currículo nacional de matemáticas de enseñanza media en Chile ya no se contempla este contenido, y éste era necesario para el curso de Física sucediendo el paralelo.

Todo el trabajo relacionado con razones trigonométricas que se realizó en el curso, se hizo utilizando el círculo unitario, a diferencia de como clásicamente se abordaba el tema en los programas de enseñanza media, donde solo se hacía uso del triángulo rectángulo sin considerar el círculo.

La idea de presentar esta tarea a los estudiantes fue para que ellos mismos construyeran la definición de *Seno* para ángulos obtusos, lo cual tradicionalmente era función del profesor en su cátedra.

Conocimientos previos

Antes de plantear la tarea, se estudió medición de ángulos, trigonometría en el triángulo rectángulo, razones trigonométricas para ángulos agudos definidas e interpretadas geométricamente en el círculo unitario e identidades trigonométricas para ángulos agudos.

Posibles respuestas

Para definir $Sen\alpha$ para un ángulo agudo α cualquiera (incluyendo el del ángulo recto $\alpha = 90º$) se usó el círculo unitario centrado en (0,0) y un triángulo rectángulo construido a partir del ángulo α. Se espera que debido a cómo está planteada la tarea, y la nota en ella, que los estudiantes usen estas dos herramientas para atacar el problema.

Primero, pensamos que el estudiante debería identificar un ángulo obtuso cualquiera en el círculo unitario. Se podría ayudar de un dibujo como el dado en la siguiente figura.

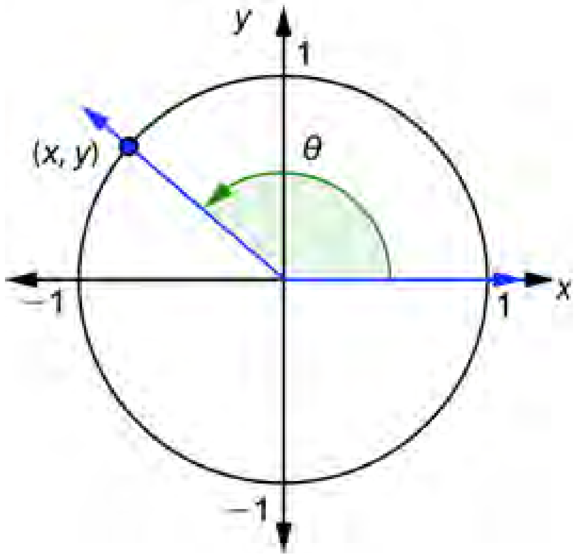


Figura 1. Representación de un ángulo obtuso cualquiera

Luego, debería relacionar el ángulo obtuso θ con algún ángulo agudo en el círculo unitario. Para esto pensamos que se debiera ayudar de una figura como la de abajo:

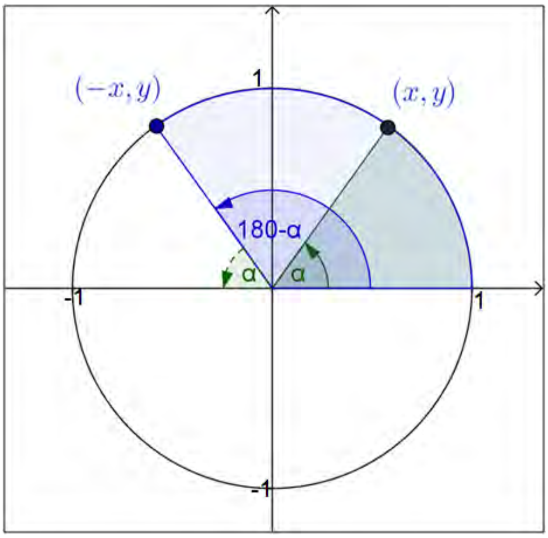


Figura 2. Interpretación geométrica de Sen α

Esto le permitirá definir la razón trigonométrica requerido usando la simetría de la figura y la interpretación geométrica del $Sen\alpha$ dada en la figura anterior. El estudiante debiera concluir que dado un ángulo obtuso θ existe un ángulo agudo cuyo vector que lo representa en el círculo tiene la misma coordenada y en la ordenada. Debería llegar a que este ángulo agudo es $180º - \theta$.

Así, debiera definir $Sen\theta := Sen\theta$).

Para responder que este cociente está bien definido, debiera, primero, notar que el único ángulo agudo que satisface las condiciones requeridas según la simetría de la figura es$180º - \theta$. Así el cociente tomará un sólo valor, y no dependerá de alguna posible elección de ángulo aguda, ya que éste es único. Por otro lado, el estudiante debiera notar que definiendo así el $Sen\theta$, al pasar del primer cuadrante al segundo cuadrante (de ángulos agudos a obtusos) los valores de los cocientes trigonométricos dado por Sen se "pegan bien", es decir no hay saltos en la definición. En lenguaje más técnico se dan cuenta que están construyendo así una función Sencontinua (que sepan el concepto de continuidad no es un requisito para resolver el problema, pero de hecho el pedir que una cantidad se comporte continuamente parece ser bastante intuitivo).

Para esta respuesta, la utilización del círculo unitario permite visualizar y representar los ángulos agudos y obtusos. Luego, el uso de herramientas semióticas, tales como el trazado de un radio del círculo y triángulos permite identificar la activación del plano [Sem-Ins]. Identificamos el cambio de representación de los ángulos como una articulación de procesos semióticos y discursivos, por lo que se releva el plano [Sem-Dis]. También se observa la activación del plano [Ins-Dis] cuando se obtiene la definición requerida luego de hacer uso de la herramienta círculo y la construcción de de los radios necesarios para observar la relación entre el ángulo obtuso y su compañero en el primer cuadrante. Identificamos así una constante articulación de procesos semióticos, instrumentales y discursivos, por lo que afirmamos que para esta actividad, el estudiante circula por todos los planos verticales del ETM, lo cual implica que (1) se cumple.

Tarea 3: Sea $h(x)$un polinomio con coeficientes en R de grado 2 o 3. Pruebe que si$h(x)$ es reducible entonces $h(x)$ tiene raíces en R.

Contextualización

Antes de presentar los conocimientos previos que los estudiantes traen al enfrentarse a la tarea, nos parece importante señalar que en una clase previa al taller se abordó el siguiente resultado: "*si un polinomio con coeficientes reales tiene raíces en los reales, entonces es reducible*".

Luego de desarrollada la tarea por parte de los estudiantes, se plantea la pregunta: "*si un polinomio con coeficientes en los reales es reducible, ¿es cierto entonces que tiene raíces reales?*". La intención de la tarea 3 fue que los estudiantes reconocieran que en los casos de polinomios de grado 2 o 3 la respuesta a la pregunta es afirmativa, sin embargo, no es cierto para todos. En un principio, cuando la pregunta general fue planteada, los estudiantes presentaron muchas dudas y se mostraron no convencidos con la respuesta, de hecho, generó una extensa discusión en la clase.

Dada la situación descrita, la tarea fue planteada como un primer acercamiento para responder a la pregunta más general.

Conocimientos previos

Previo a plantear la tarea, se estudió la definición de un polinomio con coeficientes en $\boldsymbol{R}$ y de su grado, definición del producto de dos polinomios y su grado respectivo, definición de polinomio reducible e irreducible, raíz de un polinomio y la proposición: "*si un polinomio con coeficientes reales tiene raíces en **R**, entonces es reducible*".

Posibles respuestas

Se puede comenzar por el caso más sencillo: considerar el polinomio $h(x)$ de grado 2. Como él o ella debe asumir que $h(x)$ es reducible (por hipótesis), entonces tiene la información de que existen polinomios no constantes que son factores de $h(x)$, digamos $p(x)$ y $q(x)$ de grado mayor o igual que uno. Lo anterior es una definición de polinomio reducible y, para enunciarla, debe ser parte del *referencial teórico* del alumno. El estudiante podría cuestionarse si existen solo esos divisores o hay más, y si es así, podría observar casos particulares de números naturales y convencerse de que, si es reducible, siempre podrá escribirse como la multiplicación con dos factores. Entonces tiene que: $h(x) = p(x)q(x)$.

Hasta acá se puede detectar un trabajo que privilegia el plano [Sem-Dis], pues por un lado se representa el polinomio $h(x)$ como el producto de dos factores, y por otro, la posibilidad de realizar este tratamiento en el registro algebraico la entregan los fundamentos que la definición de *polinomio reducible* comporta.

Luego el estudiante debe reconocer las características de los factores $p(x)$ y $q(x)$. Como $h(x)$ tiene, en este caso, grado 2, no hay más posibilidades que los factores tenga grado 1 cada uno. Para concluir lo anterior, debe formar parte de su *referencial teórico* que *la suma de los grados de los factores es igual al grado del producto*. Esto último se interpreta como una activación de la génesis discursiva, pues existen elementos del referencial teórico y conclusiones que de ahí provienen.

Por último, el estudiante puede representar alguno de los factores (sin pérdida de generalidad, $p(x)$) como $p(x) = ax + b$, donde a es distinto de cero. Entonces, puede concluir que si $p(\alpha) = 0$, para algún α real, entonces $h(x)$ tendrá alguna raíz real. Puede plantear entonces la ecuación $ax + b = 0$ y resolverla, llegando a que $\alpha = \frac{-b}{a}$. Podemos decir que la ecuación actúa como un instrumento simbólico, pues su uso permite encontrar una raíz para $h(x)$. Notemos que la génesis instrumental no se presenta de manera aislada. En efecto, por un lado se tienen elementos de la génesis discursiva (cuando se afirma que si $p(x)$ tiene raíz real, entonces $h(x)$ también tiene raíz real), y por otro lado existen tratamientos en el registro algebraico (conversión de la representación $p(x) = ax + b$ a la ecuación $ax + b = 0$). Por lo anterior, concluimos que en esta parte se puede evidenciar la activación de los planos verticales [Sem-Ins] e [Ins-Dis].

Para el caso en que $h(x)$ sea un polinomio reducible de grado 3, el estudiante debe reflexionar acerca de los posibles divisores. Como 3=1+2, y sabemos que es parte de su *referencia teórico* que l*a suma de los grados de los factores es igual al grado del producto*, se tiene que al menos uno de los divisores de $h(x)$ tiene grado 1. Siguiendo los mismos argumentos anteriores, se puede concluir que $h(x)$ tiene al menos una raíz real. En este caso, el estudiante explora nuevamente en el grado del polinomio y en las posibilidades para sus divisores. Se da cuenta, además, que una vez que consigue un polinomio de grado 1 como factor de $h(x)$, entonces el problema se reduce al caso anterior. Podemos decir que, en esta parte se coordina el plano [Sem-Dis] a toda la actividad expuesta en la primera parte.

Otra posibilidad es que el estudiante represente $h(x) = ax^2 + bx + c$ y divida por un polinomio de grado 1 como $p(x) = mx + n$. Puede así encontrar condiciones para que la división sea exacta y concluir que entonces existirá una raíz real para $h(x)$. Esta resolución, sin embargo, puede traer dificultades por la cantidad de variables en juego. La génesis predominante en este trabajo es la instrumental y la articulación con otras génesis aparecerá cuando reflexione acerca de la dependencia entre los coeficientes y utilice las hipótesis (tendrá que el resto al dividir, debe ser 0). Para este tipo de resolución, puede ser dificultoso extender los resultados al polinomio de grado 3, pues serán aún más las variables en juego.

Finalmente, otra posible estrategia es que el estudiante, sin separar en los casos en que el polinomio $h(x)$ sea de grado 2 o 3 y hacer todo el análisis por cada uno, directamente recurra a argumentos que tienen relación con los números 2 y 3, esto es, que el estudiante reflexione acerca de la descomposición aditiva de tales números: 2=1+1, y 3=1+2 o 3=1+1+1. En cualquiera de los casos, $h(x)$ tendrá algún factor de grado 1, y se podrán utilizar los argumentos antes descritos para concluir que $h(x)$ tiene alguna raíz real. En este trabajo nuevamente se activan los tres planos verticales del ETM.

En conclusión, para la actividad matemática motivada por la tarea 3, podemos afirmar que se articulan y coordinan todos los planos verticales del ETM, por lo que la condición (1) de las tareas emblemáticas, se cumple.

CONCLUSIONES

En nuestra opinión, las 3 tareas propuestas generan *potencialmente* un trabajo matemático completo. Es decir, sugieren *a priori* la activación de las 3 génesis: semiótica, instrumental y discursiva, junto con una articulación entre los 3 planos verticales en el modelo del ETM. En este contexto, consideramos que estas 3 tareas (y en general las tareas que queremos incorporar a nuestra batería) promueven el uso de objetos, técnicas y propiedades utilizadas en la enseñanza media, e incorporan paulatinamente nuevos objetos, herramientas y referentes teóricos que son abordados en la universidad (en particular en la formación inicial de profesores), así como también formas de manipularlos, de manera de aportar en la disminución de la brecha liceo-universidad. En particular, podemos observar en los análisis de las tareas mostradas en este trabajo, que estas permiten trabajar estrategias distintas y complementarias al de hacer el salto inmediato a razonamientos deductivos, sin dejar de lado el desarrollo de la demostración, y el uso de objetos en lenguaje formal.

DISCUSIÓN

Comenzando desde la base que la intención de la institución universitaria en la cual se realiza este proyecto es formar a profesores reflexivos, que sean capaces de proponer y adaptar problemas que movilicen el intelecto de sus alumnos, nos resulta relevante diseñar tareas que permitan que el profesor en formación conozca y haga uso de distintos tipos de razonamientos, no limitando su pensar sólo hacia el razonamiento de tipo deductivo. Lo anterior es un aporte también hacia la validez que el futuro profesor entrega a las estrategias que se adoptan para resolver un problema y que se escapan de la matemática formal.

Un tema que genera un intercambio de opiniones contrarias es si dada una tarea, tenemos suficiente información para saber cómo será resuelta. De ningún modo nuestro trabajo pretende concluir algo en ese respecto. En este sentido, es importante destacar que estamos proponiendo aquí una lista de tareas que *potencialmente* sean portadoras de un trabajo matemático en el cual se promueva *a priori* activar una relación genuina entre los planos cognitivo y epistemológico en el desarrollo de la misma, es decir en el momento de realizarse la acción de resolver dicha tarea. Un análisis *a posteriori* es necesario para completar este trabajo y concluir si nuestra propuesta es en la práctica coherente con nuestro estudio inicial. Realizar este análisis representa nuestro paso a seguir.

Con respecto a la elección y redacción de las tareas que proponemos para nuestra batería, cabe señalar en primer lugar que sin lugar a dudas son perfectibles. En segundo lugar, decir que la elección inicial de las mismas (que luego analizamos *a priori)*, se hace desde nuestra intuición y experiencia tanto en el estudio de la matemática como en docencia universitaria, buscando en ellas su potencial en el uso articulado de objetos, herramientas y referenciales teóricos para ser llevada a cabo por un sujeto. Una vez elegidas las tareas candidatas, se analizan desde el lente del ETM y se identifican el/los tipos de representamen usados, las herramientas y su naturaleza, los referenciales, y en qué medida se ve una articulación de los mismos juntos con las dimensiones cognitiva y epistemológica. Además, cada tarea que es candidata a ser emblemática debe satisfacer las condiciones (2) y (3), de estar en ETM idóneo y de referencia. En los ejemplos que hemos dado, se espera que los estudiantes usen lo que han aprendido en el curso, en particular, que movilicen sus conocimientos acerca de congruencias, trigonometría y polinomios, respectivamente. Lo anterior no es un asunto menor; considerando que las tareas son diseñadas para ser implementadas por profesores del curso y que la intención es que estas tareas perduren en el tiempo y puedan ser replicadas, es relevante que el docente reconozca esta tarea, la valide y no la considere ajena a sus objetivos y programa del curso.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2003) ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X (2).*

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathematique et ses genses, Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 19-24.

Kuzniak, A., Tanguay, D., Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: An introduction. *ZDM, 48(6),* 721-737.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines : existence et usages. *Cinquième symposium des Espaces de Travail Mathématiques, Florina, Grèce.*

Richard, P.R. & Kuzniak, A. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3) (número especial).

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20(2),* 5–24.

Vandebrouck, F. (Ed.). (2013). Mathematics classrooms students' activities and teachers' practices. Rotterdam: Sense Publishers.

Winslow, C. & Gronbaek, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *RDM Newsletters, 34 (1)*, 59-86.

PARADIGMAS DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO EN CINEMÁTICA: ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN

Claudia Gabriela Reyes Avendaño

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot, France

clau25@ciencias.unam.mx

El objetivo de la presente comunicación es mostrar parte de los paradigmas del Espacio de Trabajo en Cinemática (ETC) y su funcionamiento en articulación con el ciclo de modelización de Blum y Leiss. Para ello, se considera un fragmento del análisis y resultados de una experimentación, realizada con estudiantes de ultimo año de liceo (17-18 años). La actividad está compuesta de una tarea de modelización matemática, de un fenómeno de Movimiento Circular Uniforme (MCU), en donde los objetos matemáticos tratados, principalmente, son las funciones seno y coseno.

Palabras clave: *Modelización matemática, Espacio de Trabajo en Cinemática (ETC), Paradigmas del ETC, Cinemática.*

INTRODUCCIÓN

Desde el nacimiento de la teoría Espacio de Trabajo Matemático (*ETM*) (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016)**,** se ha observado un creciente interés por el uso de este marco teórico-metodológico para el análisis y diseño de diferentes situaciones en el ámbito de la investigación en didáctica de las matemáticas. El perfeccionamiento y desarrollo de la teoría, dentro de la matemática y en otras disciplinas afines, ha mostrado que la dialéctica que emerge en los diferentes *ETMs* (geometría, probabilidad, análisis…) conduce hacia una visión más amplia de los objetos o situaciones motivo de estudio. Como resultado de lo anterior, se ha reforzado la idea de que la circulación que se genera entre los planos del *ETM*, en un dominio o varios, permite observar un mismo objeto o situación a través de diferentes registros de representación (Duval, 1995; Arzarello 2006) favoreciendo la visualización y significación de los objetos matemáticos tratados. Por otro lado, a lo largo de la historia de las matemáticas, hemos observado cómo el estudio de fenómenos de movimiento de objetos sólidos (cinemática) originó la evolución o el nacimiento de elementos y conceptos matemáticos, por ejemplo: Oresme, en su obra *Tractatus de latitudinibus formarum* (1482), da indicios de lo que se puede considerar como gráficas de funciones, asociando el cambio físico con figuras geométricas; Galileo Galilei, en su libro *discursos y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias (1638)*, también, contribuyó a la construcción de la idea de función, introduciendo lo numérico en representaciones gráficas y, sobre todo, expresó las leyes de movimiento incorporando ideas de variación directa e indirectamente proporcional; Newton y Leibniz se consideran los creadores del Cálculo, aunque el trabajo que los llevó a su invención presenta algunas diferencias. En el trabajo de Newton (el único que mencionaremos en ese artículo) se aprecia una orientación física, en la que el concepto de velocidad es fundamental. Es decir, Newton tenía una visión mecanicista, al considerar el tiempo como noción universal y a las variables dependientes de él como cantidades que "fluyen" de forma continua y poseen velocidad de cambio (Ruiz, 1994). De igual manera, hemos comprobado cómo la matemática ha dado a la física las bases y las pruebas para consolidarse como una ciencia experimental cada vez más precisa. Uno de muchos ejemplos de esto, es la teoría de Relatividad de Einstein, que tiene como base la abstracción y formalismo matemático los cuales prueban, describen y predicen fenómenos físicos no evidentes. En este sentido, estas dos disciplinas aunadas a procesos de modelización comparten objetos, nociones y pruebas importantes de las que podemos hacer uso en situaciones dentro de la didáctica de las matemáticas.

Partiendo de lo dicho anteriormente, el trabajo que se presenta a continuación está dividido en dos partes principales (i) la teórica que da sustento a este trabajo, en la que se incluye una introducción a los paradigmas del *ETC* (los cuales se desprenden de una investigación más amplia y próxima a ser publicada) y (ii) la dialéctica que se genera entre estos paradigmas con el ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007) en el análisis a priori de las actividades y en el desarrollo del trabajo realizado por los estudiantes en la actividad de modelización propuesta.

MARCO TEÓRICO

El diseño y análisis de la actividad de modelización desarrollada, en esta experimentación, fue realizada considerando las fases del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007), el funcionamiento del marco teórico-metodológico *ETM* y los paradigmas del *ETC*. A continuación se da una breve descripción de estos elementos teóricos.

El espacio de trabajo matemático

El *ETM* (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) es un marco teórico-metodológico que articula dos planos horizontales: **el epistemológico,** donde están contenidos los objetos propios de la matemática, su naturaleza, fundamentos, métodos y el modelo matemático en donde se encuentran inmersos; y **el cognitivo,** que se refiere al sujeto y al uso que les da a esos objetos. Es decir, se refiere a procesos tales como el aprendizaje, visualización, razonamiento, construcción, prueba, etc. Estos planos se articulan a través de las génesis **semiótica**, **instrumental** y **discursiva** las cuales emergen de 6 componentes fundamentales: 3 en el plano epistemológico: *representamen, artefactos* y *referencial teórico*; y 3 en el cognitivo: *visualización, construcción* y *prueba*. Es decir, la componente **representamen** (en el sentido de Peirce 1978 y el enfoque semiótico de Duval 2004) está unida al proceso cognitivo **visualización** por la *génesis semiótica*. El **artefacto**, que puede ser material o simbólico, está ligado al proceso cognitivo **construcción** a través de la *génesis instrumental* inspirada en la concepción de Rabardel (1995). Finalmente, el **referencial,** conformado por elementos teóricos, está ligado al proceso cognitivo **prueba** en el sentido de Balacheff (1987).

La interdependencia que existe entre las génesis, da vida a los planos verticales: Semiótico-Instrumental [Sem-Ins], Instrumental-Discursivo [Ins-Dis] y Semiótico-Discursivo [Sem-Dis] (figura 1).

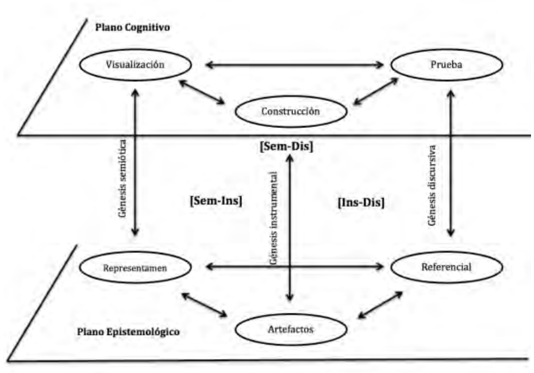


Figura 1: Esquema de los planos verticales del ETM (Kuzniak & Richard, 2014)

Paradigmas del ETC

La noción de paradigma juega un papel muy importante en el *ETM*. En primer lugar, debemos considerar que Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003) parten de la definición general de paradigma de Kuhn (1971) "*El conjunto de creencias, técnicas y valores compartidos por un grupo científico determina la forma correcta de plantear y comenzar la resolución de un problema*" y la trasladan al contexto de la didáctica en el ETM_G, donde los paradigmas tiene la función de guiar y/o caracterizar el trabajo matemático generado en la resolución de una tarea. Posteriormente, esta idea se expande a otros dominios, dentro del *ETM*, por ejemplo: probabilidad, análisis, algebra, etc. En este sentido y considerando que la Cinemática es un dominio que ha estado presente en el desarrollo de ciertos objetos matemáticos y que la matemática es fundamental dentro de la Física, a continuación introducimos algunos elementos de los paradigmas del *ETC*, que ayudarán a entender su uso y funcionamiento en la situación didáctica planteada.

CI (paradigma de lo real), En este paradigma se dan explicaciones basadas en la observación de la recreación del fenómeno físico, por ejemplo ¿cómo es el movimiento? Hacia arriba, hacia abajo, hacia los lados, rápido, lento, se frena, etc. Estas explicaciones están dadas bajo una estructura cognitiva la cual no tiene como sustento un conocimiento matemático profundo de la situación o carece de él. Es decir, el razonamiento está basado en aspectos esencialmente sensoriales: intuición, visualización, manipulación, etc. los cuales pueden surgir de la experimentación momentánea o de vivencias pasadas. El trabajo realizado en este paradigma se enfoca en percibir las variables físicas de la situación sin darles una connotación conceptual. Los artefactos, comúnmente, utilizados en este paradigma son objetos materiales, que toman el status de instrumentos, al recrear movimientos o situaciones que pertenecen a la cinemática.

En CI, el representamen se refiere a signos tangibles del movimiento que pueden ser percibidos con nuestros sentidos y tiene que ver con las características del mismo. Algunos ejemplos son: el cambio de posición de un objeto en términos de trayectoria y sentido (hacia arriba, abajo, un lado, en círculo, recto…); ritmo de movimiento (rápido, lento); distancia (cerca, lejos); etc. Igualmente se pueden hacer comparaciones (más rápido, más lento, menos pesado…). Por otro lado, también se puede considerar la información cualitativa de las representaciones gráficas en el sentido que Nicole Oresme les da en su obra *Tractatus de configurationibus qualitatum (1482)* en donde reflexiona sobre la variación de las magnitudes a través de la visualización de las gráficas del movimiento.

En este paradigma, regularmente, se hacen descripciones, explicaciones e inferencias cualitativas basadas en el empirismo y pragmatismo que surgen de la experimentación y bagaje anterior. La prueba o validación, en CI, es en el sentido de prueba pragmática de Balacheff (1987) donde se da la confrontación de argumentos y razonamientos producto de la experimentación misma. Esta validación está ligada a la acción y a la experiencia, contiene una carga significativa de saberes prácticos y las justificaciones se dan a través de material concreto o de representación del objeto. En este sentido, el discurso esperado es producto de las intuiciones, experiencias y saberes personales.

El inicio de la transición de este paradigma al siguiente se da cuando se quiere medir y cuantificar lo que se está observando. En este momento, los aspectos sensoriales, que guían la recreación de la situación, ya no son suficientes. El aspecto cualitativo cede su lugar, no solo a la cuantificación de las variables sino también a la interpretación del conjunto numérico qua arroja tal cuantificación.

CII (paradigma de la medida y cuantificación) En este paradigma se puede, o no, recrear la situación en una experimentación, al igual que CI. Sin embargo, es fundamental contar con la información adecuada de la situación estudiada para que se pueda comenzar un proceso de idealización del fenómeno que dirija a CIII. Es decir, en CII se busca que el movimiento sea medido y esté expresado y analizado en términos de elementos, variables, conceptos, propiedades, leyes, etc. que pertenezcan al dominio de la física y de las matemáticas, de tal manera que se pueda obtener información cuantitativa como: la velocidad, aceleración, trayectoria, etc. En este sentido, en CII el uso de objetos matemáticos es inevitable, sin embargo, su uso no es en un sentido formal, axiomático-deductivo, sino con la única finalidad de medir y cuantificar el fenómeno. El tipo de razonamiento esperado requiere del desarrollo de habilidades algebraicas y aritméticas en el uso de las ecuaciones de movimiento; interpretación de gráficas de forma cuantitativa; cambios en los registros de representación, etc. Los artefactos en este paradigma pueden ser materiales o simbólicos: software, materiales para la experimentación, instrumentos de medición, esquemas, formulas, gráficas, etc. Es importante mencionar que, el simple hecho de trabajar con ciertos artefactos no produce automáticamente la transición entre paradigmas. Es el trabajo y la intencionalidad con que se usen los elementos del *ETC* (los artefactos, conocimiento, signos, etc.) lo que determina el paso.

En CII, el representamen (signo) toma el estatus de objeto conceptual, en el sentido de Bunge (1983), es decir, que dichos objetos existen en determinados contextos. Mientras que en CI se habla de las características del movimiento de los objetos materiales a partir de la percepción que se tiene de él, en CII hay un cambio de signo, dejan de estar relacionados con los sentidos y se transforman en variables representadas simbólicamente. También emerge una interiorización de los objetos conceptuales con la finalidad de usarlos para cuantificar las variables asociadas al movimiento, sin que haya, necesariamente, una reflexión sobre su naturaleza.

La transición hacia CIII se da cuando se hace necesario un razonamiento sobre la naturaleza de los objetos conceptuales y en donde el trabajo matemático formal es fundamental.

CIII (Paradigma de la formalización e idealización) es la formalización de la situación en términos de objetos matemáticos, es decir, el saber sabio dirige este paradigma. Se formulan pruebas intelectuales (Balacheff, 1987) caracterizadas por un razonamiento que incluye cadenas de argumentos en lenguaje simbólico con el propósito de producir más conocimiento. En CIII se prescinde de los objetos materiales y de la experimentación física, en todo caso se hace uso de experimentación mental. En este paradigma se hace evidente la relación que existe entre los conocimientos matemáticos formales y las leyes y conceptos físicos involucrados. Por ejemplo: en la deducción de las ecuaciones de movimiento; en el uso de objetos como la derivada de una función R en R^2 o R^3, que se interpreta como una velocidad (o vector velocidad); integrales, etc. Los instrumentos en este paradigma son simbólicos. El discurso en CIII tiene que estar sustentando en principios, leyes, teoremas tanto de la física como de la matemática, bajo un razonamiento hipotético deductivo como elementos fundamentales de la demostración.

La modelización

Para esta investigación consideramos la definición que dan Lesh y Harel (2003, p.159) de “modelo”

> “Los modelos son sistemas conceptuales que generalmente tienden a expresarse utilizando una variedad de medios de representación interactivos, que pueden incluir símbolos escritos, lenguaje hablado, gráficos por computadora, diagramas o gráficos en papel, metáforas basadas en la experiencia, etc. Sus propósitos son construir, describir o explicar otros sistemas”

La modelización puede ser vista como un proceso compuesto por un conjunto de fases o pasos que siguen los estudiantes de forma ordenada y cíclica. Para Schmidt (2010) la modelización matemática se refiere al uso de las matemáticas para resolver problemas, que pueden ser abiertos, y que pertenecen a la realidad. Schmidt también menciona que la definición puede variar en función de las características y objetos considerados, por ejemplo, la naturaleza del contexto de la tarea o el modelo utilizado. Tomando en cuenta lo anterior y la naturaleza de nuestro trabajo consideramos pertinente el uso del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007) principalmente, porque las fases que considera son las que nos proporcionan la información necesaria en nuestra investigación.

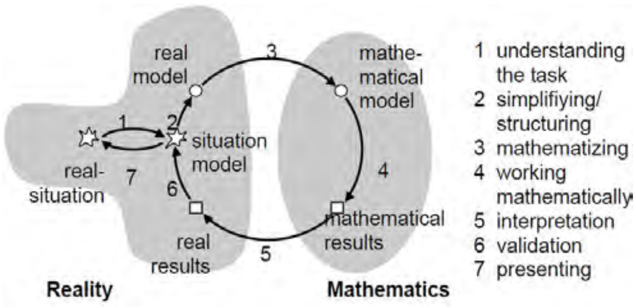


Figura 2: Esquema del ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007)

El ciclo de modelización de Blum y Leiss (2007), figura 2, es un ciclo compuesto de 7 fases: (1) **comprensión/construcción**, se refiere a entender y concebir una situación, en el mundo real, que pueda ser abordada matemáticamente; (2) **simplificación/estructuración**, en esta fase se debe hacer un reconocimiento de las variables a considerar y métodos de resolución; (3) **matematización**, es donde se identifican los objetos matemáticos, las variables y las condiciones que se deben tomar. Esta fase vive entre el resto del mundo y la matemática, pues necesita de ambas para poder ser concebida; (4) **trabajo matemático**, se hace explicita la relación que existe entre las variables, se formulan y se resuelven problemas, se hacen hipótesis, etc. (5) **interpretación**, en esta fase se busca dar sentido a los resultados matemáticos obtenidos con la situación real; (6) **validación**, se prueban los resultados matemáticos con la situación real; (7) **Exposición**, se da cuenta del proceso y funcionamiento del modelo obtenido. Es importante notar que en la fase 6 y 7 pueden surgir preguntas que cuestionen el modelo obtenido y en consecuencia surja la necesidad de comenzar nuevamente el ciclo considerando los nuevos cuestionamientos.

ETC y ciclo de modelización

La forma en que se utilizaron estos elementos teóricos en el trabajo de investigación es el siguiente:

1) En primer lugar, los paradigmas del *ETC* y el ciclo de modelización fueron utilizados en el diseño de la actividad con la intención de generar una dialéctica entre estos elementos teóricos que ayudara a los estudiantes, no solo a transitaran por todas las fases del ciclo de modelización, sino también a que incitaran una circulación entre planos en el *ETC* de tal manera que las funciones seno y coseno, y su relación con el MCU emergiera de forma natural.

2) En segundo lugar, el ciclo de modelización y los paradigmas del *ETC* se utilizaron para el análisis y caracterización del trabajo realizado por los estudiantes.

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS DE UNA SESIÓN

La experimentación se realizó en la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) con un grupo de 30 alumnos de último año de liceo, interesados en estudiar alguna carrera científica o ingeniería. Se realizó un análisis cualitativo del *ETM* personal de los estudiantes utilizando tanto sus reproducciones escritas, como las filmaciones de las realizaciones experimentales. Algunos de los conocimientos previos de los alumnos son: Matemáticas IV y V (Álgebra y Geometría Analítica), la mitad del curso de Matemáticas VI (Cálculo diferencial e integral), Física III (conocimientos básicos de mecánica, cinemática, termodinámica y electromagnetismo) y medio curso de Física IV (conocimientos más profundos de la mecánica clásica). Con respecto al uso de los software, Tracker y Excel, se destinó una sesión para enseñarles su funcionamiento (ya que la mayoría de los alumnos no contaba con el conocimiento suficiente de las herramientas tecnológicas para realizar las actividades). La experimentación estuvo compuesta de tres sesiones (independientes a la sesión introductoria) que se describen brevemente a continuación:

En la primera (50 min) se dio a cada uno de los estudiantes un cuestionario diagnóstico. La Segunda sesión (100 min), se dividió en dos partes y se trabajó en equipos de 4 y 5 estudiantes: la primera (50 min), estuvo destinada a la experimentación y filmación de un MCU utilizando diferentes materiales (pelotas atadas a una cuerda, spinner, disco vinil…); En la segunda, los estudiantes analizaron, con Tracker, el video del movimiento que habían filmado previamente, la finalidad era obtener la representación numérica del movimiento. Finalmente, en la última sesión (100 min), se dio a los estudiantes un cuestionario para que pudieran reflexionar y continuar con el proceso de modelización.

ANÁLISIS

Considerando que en esta contribución se quiere mostrar el funcionamiento de los paradigmas del *ETC* y la dialéctica que surge con el ciclo de modelización. A continuación, se hace el análisis de la sesión 2 y dos preguntas de la sesión 3 (se escogieron estos reactivos debido a que muestran, de forma más clara, el funcionamiento de los entes teóricos), de uno de los seis equipos. En primer lugar, se muestra el análisis a priori de las preguntas analizadas y, posteriormente, el análisis de las respuestas.

Análisis a priori

Primera tarea, sesión 2

1. **Realicen la filmación de un movimiento circular uniforme (considerando dos radios diferentes) con el material proporcionado y analícenlo con el programa Tracker.**

Esta tarea tuvo la finalidad de activar las tres primeras fases del ciclo de modelización (comprensión de la tarea, simplificando/estructurando y matematizando) al poner en juego los conocimientos básicos de los estudiantes, concernientes al MCU y del funcionamiento del software.

En la primera parte de la tarea (realizar y filmar el movimiento, fase 1 y 2), se quería que los alumnos activaran el plano [Sem-Ins] del *ETC* haciendo uso de los artefactos materiales (spinner, disco vinyl, molinillo de viento, cámara, etc) como instrumentos para producir el fenómeno de movimiento (signo). En el desarrollo de esta actividad se esperaba que las intervenciones de los estudiantes, estuvieran basadas en el desarrollo mismo de la experiencia, paradigma CI. No esperábamos que argumentaran de manera conceptual, ni física ni matemáticamente, sino que estuvieran ocupados en una reproducción “adecuada” (con base en sus conocimientos previos) del movimiento. Por otro lado, queríamos que este acercamiento, los llevará a considerar algunos elementos básicos del referencial teórico en su forma natural, que tienen origen en la percepción visual y que toman forma a través del discurso de los estudiantes cuando intentan explicar lo que está sucediendo con el movimiento. Es decir, pueden considerar las propiedades del MCU pero no necesariamente con una argumentación formal. En este caso activando el plano [Sem-Dis] del *ETC*.

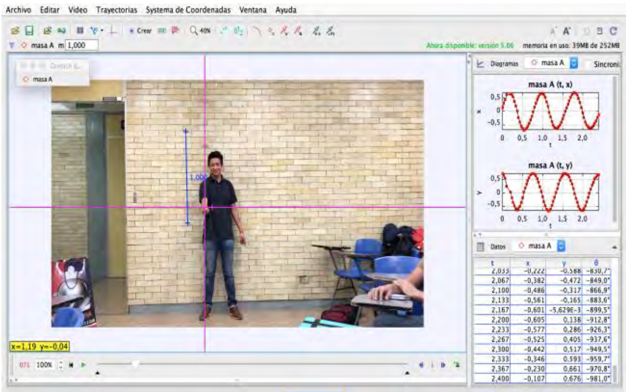


Figura 3 Interface del programa Tracker

En la segunda parte de la tarea (analizar el video con Tracker, fase 2 y 3: simplificando/estructurando y matematizando) se esperaba que los estudiantes pudieran realizar el cambio de signos asociados con la situación real, a otros que tienen que ver con su representación numérica en forma de tablas de valores, a través del software Tracker, figura 3. Consideramos que, en este cambio, los estudiantes seguirán en CI y en los planos [Sem-Ins] y [Sem-Dis], puesto que en la actividad no está previsto que realicen la medición o cuantificación de las variables involucradas en el movimiento.

Segunda y tercera pregunta, sesión 3

2. **Observen los valores que toman las coordenadas x y y. Expliquen por qué unos son positivos y otros negativos**
3. **Consideren la cantidad de datos que les permitan trazar las dos gráficas de la coordenada x y y con respecto al desplazamiento angular θ. ¿Cuáles son las funciones con las que identifican las gráficas? Explique su respuesta.**

La pregunta dos considerada, también, en la fase 3 (matematización) la ubicamos en el paradigma CI. En esta pregunta, se trabaja con las tablas de valores impresas proporcionadas por Tracker (tiempo t [s], posición en x [m], posición en y [m] y ángulo θ [grados]), figura 3. A partir de esa información, se quiere que los estudiantes visualicen la posición del objeto en su trayectoria, considerando el cambio de los valores de las componentes horizontal y vertical, correspondiente a la selección de variables de la fase 3. Esperamos que la interpretación que realicen de los datos numéricos obtenidos, les permita, eventualmente, llegar a los objetos matemáticos que, en este caso, serían las funciones seno y coseno.

La pregunta 3 tiene el propósito de inducir el cambio en el registro de representación, del tabular al gráfico y del gráfico al funcional. El primer cambio de registro, tabular al gráfico, se considera en el paradigma CI ya que los estudiantes sigue manipulando datos ligados directamente al fenómeno físico sin tener la necesidad de cuantificar ni de usar un lenguaje algebraico, sin embargo, esperamos que la elección que hagan de los datos numéricos no sea arbitraria, sino que los elijan bajo un razonamiento físico, en términos del movimiento, de tal manera que, al visualizar la representación gráfica, emerja la una primera idea de idealización del movimiento. En consecuencia, esperamos que cuando realicen el cambio de registro de representación al funcional, los estudiantes transiten a CII donde las funciones, que modelan el fenómeno, se utilizan con el objetivo de vincular las variables involucradas con los objetos matemáticos y cuantificar el fenómeno.

La activación de los planos esperada, en la pregunta 2 y 3, es la [Sem-Ins] en la dirección de la génesis instrumental, con el uso de los datos numéricos dados por Tracker, hacia la génesis semiótica, con la visualización de las gráficas que representan el fenómeno físico. También, creemos que en las filmaciones que se realicen del trabajo de cada equipo, se observe el intercambio de ideas y argumentos, como evidencia de su referencial teórico. El tipo de explicaciones y justificaciones esperadas en esta etapa son empíricas y pragmáticas, activando el plano [Sem-Dis] de lo discursivo a lo semiótico.

Análisis equipo A (disco vinyl)

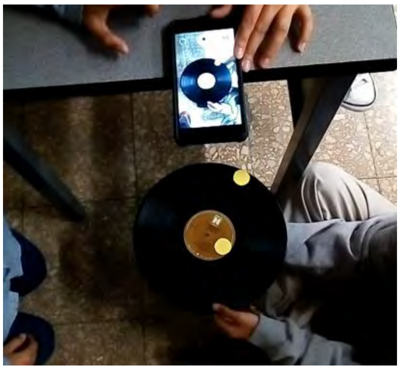


Figura 4: Dispositivo experimental del equipo A

En el análisis de las filmaciones (del desarrollo de la actividad) y reproducciones escritas del equipo A, se observa cómo los estudiantes intercambian ideas sobre el lugar y la forma más adecuada en que se filmará el MCU. La discusión que se genera, en principio, no toca los elementos del movimiento en sí mismo, más bien se ocupan en cumplir las características exigidas por el software: iluminación, nitidez del video, tomas fijas, etc. En esta primera fase de modelización (comprensión de la tarea) se observa que el equipo A, hace uso de los artefactos materiales: vinyl con el estatus de instrumento [vinyl-movimiento circular] y la cámara [cámara-filmación] con el propósito de construir el movimiento, activando el plano [Sem-Ins] del *ETC*. Una vez logradas las características requeridas por Tracker, realizan las primeras filmaciones del movimiento, lo cual evidencia la activación de la segunda fase del ciclo de modelización (simplificando y estructurando). Uno de los integrantes (*E1*) toma la iniciativa de colocar los dos puntos con diferentes radios sobre el disco *[sin pensar mucho en la ubicación y las consecuencias]* y hacerlo girar sobre la punta de uno de sus dedos (figura 4). Otro integrante del equipo (*E2*) comenta “hazlo más fuerte porque se detiene muy rápido” y “si lo hacemos muy rápido solo se puede ver una línea”.

Consideramos que en estos comentarios subyacen conceptos físicos ligados a la percepción sensorial del movimiento (signo) y a sus conocimientos previos, plano [Sem-Dis]. En el primer comentario se aprecia la idea de velocidad y de fricción que retarda el movimiento. El segundo comentario está más relacionado con la manera en que Tracker procesa la información, pero también está presente la idea de velocidad. Sin embargo, a pesar de que están realizando la experimentación, no hacen más cuestionamientos acerca del movimiento. No surgen preguntas acerca de su uniformidad, de las diferencias entre la velocidad tangencial y la velocidad angular, no perciben si se mueve el centro, etc. Esto significa que la experimentación del movimiento no lleva a los alumnos a una reflexión de las variables físicas involucradas. Sin embargo, los procesos cognitivos que ponen en juego los integrantes del equipo A, para resolver la tarea, son procesos sensoriales, lo que los sitúa en el paradigma CI.

En la segunda parte de la tarea, los estudiantes permanecen en la fase 2 del ciclo de modelización (Blum, Leiss, 2007) y transitan a la fase 3, como se había previsto, puesto que el cambio de signos con el instrumento (Tracker, tablas de valores) les permite simplificar el movimiento a un conjunto de datos agrupados, a partir de los cuales tienen la posibilidad de pasar a la fase de matematización. Como tampoco realizan cuantificación de variables ni análisis de la situación los estudiantes permanecen en CI, como se previó en el análisis a priori.

Análisis de los resultados de la segunda y tercera pregunta

Para la pregunta 2, transcribimos el intercambio de ideas y argumentos que el equipo A tuvo y que quedó registrado en la filmación:

1 E1: tenemos aquí el plano ¿no? y es un círculo *[dibuja un plano cartesiano y un círculo con centro en el origen]*, entonces la posición x aquí va a ser positiva *[señalando el primer cuadrante]* pero cuando va girando *[se observa que el giro lo hace en sentido de las manecillas del reloj, hacia el cuarto cuadrante]* x sigue siendo positiva, pero y se hace negativa ¿no? Entonces aquí *[el lápiz está señalando la parte de la circunferencia que se encuentra en el tercer cuadrante]* y se hace positiva, no, no, ¡se va haciendo positiva! bueno se acerca al positivo, pero x se hace negativa ¿pero ahora cómo lo explicamos?

Tal como habíamos previsto, *E1* intenta explicar el cambio de signos de x y y, en términos del movimiento de los puntos ubicados en el disco de vinyl, representándolo con una circunferencia en el plano cartesiano. Consideramos que la acción de *E1* tiene sustento en su referencial teórico sobre el plano cartesiano, sin embargo, no se aprecia que tenga una idea clara de cómo analizar la variación de los datos numéricos de las variables definidas por el movimiento.

2 E2: ¿cómo explicas qué?

3 E1: cómo es negativo y positivo

4 E2: son los grados de aquí a acá *[señalando los datos]*, son posi… ah no, olvídalo

5 E1: ¿cómo explicas que x y y son positivo y negativo? eso pero explicado

6 E2: ¿por qué teta está con muchos números? *[Señalando la columna de los grados en la hoja de datos obtenidos con Tracker. Hace una pausa y retoma la pregunta de su compañero E1]* porque está en diferentes partes del eje ¿no? *[refiriéndose a los signos de x y y]* del eje y y del eje x, de aquí para acá son positivos *[señalando el eje x del lado derecho del plano cartesiano]* y de aquí para acá son negativos *[señalando el eje x del lado izquierdo del plano cartesiano]* ya está.

El hecho de que *E2* se pregunte sobre la variación en los valores de teta, subyace la idea que tiene sobre el desplazamiento angular como una variable matemática relacionada con el aspecto físico, lo cual podemos considerarlo como un incipiente paso hacia el paradigma CII, caracterizado por el análisis en términos de variables y conceptos. Pero, se observa que los otros integrantes no le dan gran importancia a esta idea, por lo que permanecen en CI.

7 E1: o sea pero cómo lo redacto, ya redactado

8 E2*:* yo qué sé

9 E1: porque el círculo pasa por los cuatro planos del eje, ¿son planos estos, no? *[refiriéndose a los cuadrantes del plano cartesiano]* por los cuatros planos del eje

10 E2: no, no son planos ¿o sí?

11 E1: ¿cómo se llaman estas partes? *[hace una pequeña pausa]* cuadrantes

12 E3: pero más bien sería el punto de referencia

13 E1: Exactamente, el punto de referencia *[escribe inmediatamente]* "porque el punto de referencia pasa a través de los cuatro cuadrantes"

En este intercambio de ideas podemos observar la manera en que interactúan los estudiantes activando el plano [Sem-Dis] porque intentan responder a partir de su referencial teórico y dando como prueba pragmática la experiencia de haber ejecutado el movimiento.

El enunciado 3 pide elegir a los estudiantes una cierta cantidad de datos para trazar las gráficas de la coordenada x y y con respecto al desplazamiento angular θ. El equipo A no sigue la instrucción y en el video se escucha el siguiente intercambio de ideas:

14 E1: Pues es algo así ¿no? *[no traza la gráfica porque E4 interrumpe]*

15 E4: *[la chica haciendo el video]* era como de seno ¿no?

Es probable que *E4* haya recordado que en el análisis de datos en Tracker, éste genera la gráfica correspondiente y por esta razón habla del seno.

16 E1: ¿sí crees? O sea es algo así la función, queda así ¿no? *[no se alcanza a ver lo que traza en la hoja]*

17 E2: ¿por qué desde el cero?

18 E1: Esa es mi pregunta, es nada más de x o también de y

19 E2: De y

20 E1: Si es de x comienza de 1.5 ¿no?

21 E2: Depende si el circulito *[punto sobre el círculo]* está arriba comienza en cero, si el circulito está aquí *[señalando el punto cuando teta vale cero grados]* empieza en 1.5 si es x

En este intercambio de ideas se aprecia que *E1* y *E2* visualizan el movimiento para determinar el punto donde deben comenzar a trazar la gráfica, lo cual evidencia que tienen noción sobre lo discreto.

22 E1: entonces nada más pongo una…

23 E2 toma el lápiz, pero antes de comenzar a graficar dice: ¿pero no es con respecto a esto? *[señalando los datos que obtuvieron en Tracker, en la hoja impresa]* ¿o no?

24 E1: pues nada más hay que dibujar la función ¿no?

25 E2: ¡ay! pues en ese caso, según yo es así *[dibuja en la hoja la gráfica]*

La actividad tenía el propósito de que los estudiantes tuvieran la experiencia de transitar de lo discreto (tabla de valores) a lo continuo (gráfica de la función) a través del manejo de diferentes registros de representación. Por un momento *E2* considera hacer uso de la tabla de valores impresa (como se pedía), pero inmediatamente abandonan esta idea para enfocarse en determinar la forma global de la gráfica.

26 E1: ¿entonces quedaría así?

27 E2: yo digo porque seno de 180 y seno de 0 es cero *[dejan la gráfica de* $-rsen(\theta)$*]*

Trazan la gráfica correspondiente a la coordenada x, y la asocia con la función "$cos\theta r$", y para la coordenada y trazan la gráfica como $-y$, o sea la relaciona con la función "$-sen\theta r$", la forma en que *E1* escribe las funciones no es correcta, en términos de posición de variables. Sin embargo, en el video se nota cómo en un principio *E1* había olvidado escribir r, después, su compañero *E2* le hace la observación y *E1* por falta de espacio la coloca al final.

Figura 5: Gráficas del equipo A para responder la pregunta 3

En el diálogo se observa que hay una activación del plano [Sem-Dis] de lo discursivo a lo semiótico porque para trazar las gráficas solo hacen uso de su referencial teórico y de las pruebas pragmáticas. Aunque si hay un cambio de registro de representación, tabular al gráfico, no es claro distinguir el paso de lo discreto a lo continuo porque no toman los datos obtenidos por Tracker, solo trazan directamente la gráfica que consideran correcta. En el diálogo se nota que el estudiante *E2* percibe cómo se comporta la gráfica, a partir de la posición del punto sobre el circulo, sin embargo no corrige a *E1* cuando traza la gráfica. Finalmente, con sus conocimientos previos asignan, a las gráficas, las funciones que podrían modelar el movimiento, figura 5.

Como los estudiantes establecen explícitamente la relación entre las variables asociadas con el movimiento, utilizando lenguaje matemático, podemos decir que se encuentran en la fase 4 del ciclo de modelización, trabajo matemático. También observamos que hay un cambio de signo, de lo numérico a lo algebraico, y se aprecia la interiorización del concepto de función al asociarle una expresión simbólica al fenómeno de movimiento. Por tanto, creemos que los estudiantes dan el paso hacia el paradigma CII.

El análisis que se presenta en este trabajo es un extracto del análisis completo, la finalidad es mostrar el funcionamiento de los elementos teóricos en una situación de aprendizaje.

CONCLUSIONES

Con base en el análisis de esta experimentación, podemos decir que, en principio, el uso de los paradigmas, del *ETC*, para el diseño de la actividad y, el análisis y la caracterización del trabajo realizado por los estudiantes es funcional. La descripción de cada uno de los paradigmas favorece la categorización del trabajo, en el dominio de la cinemática y de la matemática, de tal manera que la caracterización del *ETC* personal de los estudiantes sea más precisa. También, consideramos que, en la medida en que se mejoren las actividades, éstas impactarán positivamente en la caracterización de los paradigmas del *ETC*.

El uso del ciclo de modelización de Blum y Leiss en el diseño de la actividad propició la activación de los planos del *ETC*, haciendo que los estudiantes transitaran a diferentes registros de representación. De acuerdo con Duval (1993) el uso de más de un registro de representación promueve la adquisición conceptual de un objeto matemático, en este caso el de función.

El haber considerado estas dos teorías, en conjunto, hizo que nuestro trabajo se enriqueciera. Por un lado, el ciclo de modelización nos ayudó a diseñar y analizar una actividad que diera lugar a la transición de un fenómeno real hacia su representación en el mundo de la matemática (a través de fases que consideran cambios en los registros de representación de los objetos matemáticos tratados). Por otro lado, el *ETC* nos permitió caracterizar con mayor detalle los: artefactos, representámenes, referenciales teóricos y los procesos cognitivos involucrados en cada una de las fases.

Finalmente, en el diseño y análisis de las actividades que se pondrán en práctica en un taller de 3 meses de modelización matemática, se considerarán aspectos como: intervenciones del profesor; preguntas que los ayuden, de manera más concreta, a transitar de un paradigma a otro y; una fase de exposición que retroalimente el proceso de modelización.

REFERENCES

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *9*(Extraordinario 1), 267-299.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics*, *18*(2), 147-176.

Blum, W. y Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modeling problems? In C. Haines *et al.* (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics.* (pp. 222-231). Ellis Horwood, Chichester.

Bunge (1983) Epistemologie. Paris, Ed. Maloine Collection Reherches Interdisciplinaires

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 5, No. 1, pp. 37-65).

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Lang.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Galilei, G. (1945). *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*. Losada.

Harel, G., & Lesh, R. (2003). Local conceptual development of proof schemes in a cooperative learning setting. *Beyond construcfivism. Models and modeling perspecfives on mathemafics problem solving, learning and teaching*, 359-382.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. In *Proceedings of CERME*(Vol. 3, No. 1-9).

Kuhn, S. T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de cultura económica.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737.

Oresme (1482), N., & da Parma, B. P. *Tractatus de latitudinibus formarum*. Mathaeus Cerdonis.

Peirce, C. S. (1978). *Écrits sur le signe* (Vol. 31). Seuil.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; Une approche cognitive des instruments contemporains* (p. 239). Armand Colin.

Ruiz, L. (1994). Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. *Doctorał dissertation, Universidad de Jaén*.

Schmidt, B. (2010). Modeling in the classroom motives and obstacles from the teacher's perspective. In *CERME-6–Proceedings of the sixth congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Lyon: NRP* (pp. 2066-2075).

UNA PROPUESTA DE ESQUEMA DE ESPACIOS DE TRABAJO FISICOMATEMÁTICO: APLICACIÓN AL CONTEXTO DE LA DINÁMICA

Alfredo Martínez Uribe, François Pluvinage y Luis Manuel Montaño Zetina

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México

alfymago@hotmail.com, fpluvinage@cinvestav.mx y lmontano@fis.cinvestav.mx

La intención de este artículo es presentar avances de investigación sobre una propuesta para extender la Teoría de los ETM al campo de la enseñanza y aprendizaje de la física, debido a que se ha observado experimentalmente que las componentes de los planos, epistemológico y cognitivo, se conservan con ciertas especificaciones. Se ha procedido en dos etapas. La primera consistió en diseñar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje, cuyo primer paso permitió caracterizar los esquemas conceptuales iniciales de un grupo profesores de secundaria en formación. La segunda etapa pretende esclarecer la forma en que un estudiante de física debe articular un Espacio de Trabajo Físico Matemático (ETFM), haciendo uso de sus propios dominios de conocimiento, que se reestructuran y refinan a medida que la tarea de descripción matemática se complementa. Se discute y analiza cómo se activan los procesos cognitivos, así como las relaciones e interacciones que se dan entre las componentes del ETFM cuando los estudiantes de física se enfrentan a la descripción matemática de un fenómeno físico de dinámica, relacionándolo concretamente con la primera ley de Newton o Inercia.

Palabras clave: *Espacio de Trabajo Físico Matemático, génesis semiótica, física, dinámica, Inercia*

INTRODUCCIÓN Y MARCO TEÓRICO

Se sabe que para describir matemáticamente un fenómeno físico se puede aludir a heurísticas espontáneas, visiones que aparecen de forma desconocida cuando se pretende resolver un problema, explicar un resultado o un comportamiento físico (Karam y Krey, 2015 y Sherin, 2006). Para la física entonces, el lenguaje matemático es sumamente importante, porque sirve como una herramienta de comunicación necesaria para describir un fenómeno con representaciones abstractas que se supone deben coincidir con las de todos aquellos que las conocen y las usan (Duval, 1993).

La interpretación de un fenómeno físico en particular requiere de un proceso cognitivo complejo que como algunos autores han intentado describir, comienza con la observación, que a menudo es influida por el sentido común. Por ello, es necesario entrar en un proceso de experimentación para verificar su validez (Viennot, 2002; Touma, 2009; Podoprygora, 2014). Posteriormente habrá que darle paso a un proceso de interpretación inductiva que deviene del análisis de los datos generados por la experimentación y que se transforman en distintos registros de representación semiótica, comúnmente matemáticos, con los cuales se puede construir un objeto conceptual matemático del fenómeno. Tal objeto se utiliza como modelo para describir el fenómeno físico relacionándolo con sus características, propiedades y condiciones experimentales, a lo que se le ha denominado interpretación deductiva (Touma, 2009).

Sí el modelo matemático permite explicar suficientemente el fenómeno físico, estamos en posibilidades de hacer una descripción de este, utilizando las unidades significativas de cada registro de representación. La descripción dependerá del dominio de las reglas de significado propias de cada registro como podría ser el álgebra o la aritmética.

Se tiene como propósito, indagar en los procesos cognitivos que desarrolla un estudiante de física para transitar de la observación de una situación experimental de un fenómeno físico hacia su descripción matemática. Cómo hipótesis se plantea que, si el alumno es capaz de caracterizar y conceptualizar un fenómeno físico, será capaz de describirlo, utilizando distintas formas y niveles de expresión. Para explicar cómo se llevan a cabo estos procesos cognitivos en el contexto de la dinámica se ha procedido en dos etapas de investigación. La primera consistió en diseñar una *Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA),* cuyo primer paso permitió caracterizar los *esquemas conceptuales iniciales* de un grupo de estudiantes sobre las causas del movimiento.

Se ha considerado también, que la interpretación de sucesos dinámicos requiere de la asimilación de conceptos tanto físicos como matemáticos, cuyas representaciones son utilizadas como objetos mediadores (boundary objects) en el sentido de Roth and McGinn (1998), así como la capacidad de articular distintos dominios de conocimiento entre ambas disciplinas.

Por otra parte, nos apoyamos en la *Teoría de los Campos Conceptuales* para reconocer e interpretar los *esquemas conceptuales iniciales* de un grupo de estudiantes dentro de un dominio de conocimientos. Según esta teoría del desarrollo de la complejidad cognitiva, un *campo conceptual* es un conjunto de conceptos, cuyo significado y poder explicativo se derivan de su intervención conjunta en las mismas situaciones y esquemas. También es un conjunto de situaciones y demanda de dominio progresivo de una variedad de conceptos interconectados, esquemas y representaciones simbólicas (Vergnaud, 1992).

Con la ponderación del objetivo, las actividades y la reflexión en que los alumnos se involucrarán se constituye una THA, que considera varios campos de conocimiento del docente sobre las matemáticas para lograr su implementación, como: hipótesis acerca de la comprensión del estudiante, saber teórico del docente sobre la enseñanza y el aprendizaje, conocimiento del aprendizaje con respecto al contenido matemático particular, conocimiento de representaciones matemáticas, conocimiento de otros contextos científicos, materiales y actividades (Simon, 1995).

La segunda etapa pretende esclarecer la forma en que un estudiante de física articula el Espacio de Trabajo Físico Matemático, haciendo uso de sus propios dominios de conocimiento, cuyos subdominios se reestructuran y refinan a medida que la tarea de descripción matemática se hace más compleja, donde la THA resulta útil como instrumento dinámico de investigación para relacionar la teoría con un experimento concreto de enseñanza.

METODOLOGÍA

Para enfrentar a los estudiantes con la tarea de descripción, se diseñaron 4 aparatos, cuyo diseño experimental está relacionado con el concepto de inercia. Junto con estos aparatos se consideraron otros artefactos necesarios para la experimentación, como: videos, simulaciones, aparatos de medición, software, aula experimental y hojas de trabajo. La THA propuesta contempla la posibilidad de trabajar con situaciones experimentales a distintos niveles de complejidad y grados académicos, sin embargo, las poblaciones elegidas en este estudio pertenecen a comunidades con intereses en un dominio de conocimientos común y a niveles académicos cercanos.

Primera Etapa. Diseño de la investigación

Participaron 11 estudiantes de 18 a 20 años, del cuarto semestre de la Licenciatura en Enseñanza Secundaria con Especialidad en Física, durante seis sesiones de 50 minutos. Las actividades de aprendizaje se organizaron en 3 fases: *video-reproducción* del movimiento de un oscilador armónico horizontal, *discusión plenaria* para analizar las representaciones aportadas por una simulación del caso ideal de la oscilación del sistema masa-resorte y *experimentación* con el dispositivo. En cada fase se hicieron preguntas para reconocer los esquemas conceptuales iniciales de los estudiantes. Se cuenta con videograbaciones de las sesiones, así como la transcripción de los diálogos generados durante la interacción con la simulación. El dispositivo presentado permitió a los estudiantes hacer observaciones acerca de los cambios de desplazamiento, sistema de referencia, velocidad, aceleración, masa y efecto de la fuerza ejercida horizontalmente por el resorte. Con los datos obtenidos de las preguntas planteadas en cada fase se pudieron caracterizar algunos *esquemas conceptuales iniciales* que se describen a continuación:

Esquema 1. Sistema de referencia. Permite observar que, aunque el movimiento oscilatorio es identificado prontamente por 5 de los estudiantes, hacía el final de la actividad, 8 de ellos ya no lo perciben así, debido tal vez a un conflicto cognitivo ocasionado por la observación y las preguntas planteadas. En cuanto al origen del sistema de referencia, 8 estudiantes lo ubican en alguno de los extremos del desplazamiento del resorte, lo menos recomendado para una descripción eficiente, y sólo 3 en la línea de equilibrio. En cuanto al cambio de sentido de la velocidad en el movimiento sólo un estudiante lo asocia con el signo negativo o positivo, siendo consistente con su sistema de referencia.

Esquema 2. Interpretación de la velocidad. Para la descripción del movimiento, parece reafirmarse la apreciación de que se trata de un movimiento oscilatorio, aunque 2 de ellos proponen el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Para describir cualitativamente lo que sucede con la velocidad, 8 estudiantes coinciden en que la velocidad es cero en los extremos del recorrido del resorte, sin embargo, sólo un estudiante puede advertir que la magnitud de la velocidad, es decir, la *rapidez* es máxima cuando el resorte pasa por la línea de equilibrio. Otro estudiante refirió el sentido de la velocidad de acuerdo con su signo y la línea de equilibrio. Finalmente, 7 de ellos refirieron, ya sea con palabras o con dibujos que la dirección del movimiento es horizontal.

Es necesario aclarar que, en física, algunas cantidades escalares tienen un nombre propio que las diferencia de las vectoriales, como es el caso de la *rapidez* o *celeridad* (como magnitud escalar) y la *velocidad* (como magnitud vectorial). Lamentablemente no existe un vocablo distinto para diferenciar la *aceleración* escalar de la aceleración vectorial, lo que se estila a hacer es anteponer las palabras *módulo* a la magnitud escalar, como: "*el módulo de la aceleración es…*".

Esquema 3. Interpretación de la aceleración. La apreciación de que la aceleración es máxima en los extremos del recorrido del resorte es consistente con la observación de que es cero al pasar por la línea de equilibrio para 3 estudiantes, sin embargo, los otros 8 no pueden describir cómo cambia. Se observó la tendencia a interpretar la aceleración como velocidad, lo cual es una idea previa ya detectada por Trowbridge y McDermott (1981). Finalmente, uno de los estudiantes sí refiere correctamente el signo de la aceleración con respecto al sistema de referencia situando el origen en la línea de equilibrio del desplazamiento y la fuerza aplicada por el resorte.

Esquema 4. Vectores. En esta sección los estudiantes sólo utilizaron dibujos para referirse sobre todo a la fuerza que ejerce el resorte sobre la pared y la pared sobre el resorte, aunque un estudiante sí esquematizó el efecto de la masa sobre el resorte, pero no el efecto del resorte sobre la masa. Por otra parte, la dirección de la aceleración y la velocidad no pudieron ser descritas correctamente. De la interacción con la simulación y discusión plenaria se pudo aclarar que el punto de equilibrio más adecuado a considerar es la mitad de la trayectoria del resorte y que la velocidad está cambiando en todo momento. Se discutió también que la dirección de la aceleración cambia con respecto a la fuerza aplicada y no con respecto a la dirección de la velocidad, lo cual causo mucha sorpresa para todos.

Posterior a la discusión de la simulación los estudiantes volvieron a contestar las preguntas planteadas inicialmente, con la intención de observar algunos cambios en sus esquemas conceptuales. En esta ocasión sólo asistieron 8 de los 11 alumnos que participaron originalmente. De la revisión de las respuestas se observó que no fue posible romper con la idea de que podía tratarse de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Todos fueron capaces de identificar el punto de equilibrio como origen para el sistema de referencia por medio de palabras o dibujos, sin embargo, no relacionaron el signo de la velocidad con su sentido. Tampoco se observó la posibilidad de describir cualitativamente el valor de la velocidad en los extremos y al pasar por el punto de equilibrio, aunque para la descripción cualitativa de la aceleración, 4 alumnos lo hicieron correctamente y uno más hizo referencia al signo negativo de la aceleración como desaceleración. Se observó también que 5 estudiantes siguen confundiendo la aceleración con la velocidad.

Cabe mencionar que posterior a la discusión plenaria del trabajo con la simulación, los dibujos (inscripciones) de los estudiantes fueron mucho más explícitos, ubicando con mayor precisión la línea de equilibrio y algunos dibujos de los vectores de velocidad y aceleración, adoptando la simbología propuesta (flecha con dirección, sentido y nombre; inscripción científica).

Finalmente, resulto importante observar que, en la experimentación 7 alumnos expresaron que hay un cambio en la velocidad cuando aumentan la masa del sistema, situación que pudieron notar tanto con el aparato como con la simulación, la cual les permitió a su vez analizar instantes específicos del desplazamiento. Estos estudiantes establecieron a manera de hipótesis que, a mayor masa, menor velocidad. Aunque la simulación proporcionó un ambiente rico de discusión, se decidió quitarla de la secuencia de enseñanza, debido a que requirió una mayor inversión de tiempo.

Segunda etapa de investigación. Experimento de enseñanza

Teniendo en cuenta la THA desarrollada hasta el momento y con la intención de reconocer las habilidades con las que cuentan los estudiantes y cómo articulan sus propios dominios de conocimiento en un ETFM, se aplicaron a 3 grupos de estudiantes de tercer semestre de bachillerato tecnológico (edad ~ 16 años) las siguientes pruebas: un examen diagnóstico, una sesión de actividad experimental y una evaluación.

Análisis del Diagnóstico

El diagnóstico se diseñó en dos secciones. La primera consistió en una selección y adaptación de 6 preguntas de opción múltiple, tomadas del *Force Concept Inventory*, test diseñado con la finalidad de detectar las ideas previas relacionadas con el concepto de fuerza y las leyes de Newton (Hestenes, Wells y Swackhamer, 1992).

Participaron 64 estudiantes cuyas ideas previas identificadas se muestran en la Tabla 1. Se consideró que no sólo es necesario conocer las ideas previas con respecto a los conceptos físicos, además se requiere de conocimientos matemáticos previos para poder interpretar y reconocer las relaciones entre cantidades que, en física comúnmente se encuentran en proporción formando razones externas entre sistemas de magnitudes, por lo que la segunda sección consistió en el planteamiento de 6 preguntas abiertas sobre proporcionalidad, tema de matemáticas que consideramos sumamente importante para explicar las relaciones que se dan entre variables cuando se realizan procesos de modelización matemática. En la Tabla 2 se observa que con respecto a la situación que demanda la comparación entre dos patrones de medida distintos de una misma magnitud, los estudiantes requieren reforzamiento.

Idea previa identificada	Frec. %
La aceleración es independiente del peso de los objetos	55
Los objetos pesados caen más rápido	42
La cantidad de masa determina la cantidad de fuerza de los objetos	67
Reconocen parcialmente la presencia de velocidad tangencial cuando se aplica una fuerza centrípeta	47
No advierten que cuando la acción de la fuerza centrípeta cesa, la velocidad tangencial permanece	31
El movimiento resultante de dos objetos en colisión en ausencia de otras fuerzas es la descomposición de dos movimientos, en que la velocidad inicial cambia al cambiar su magnitud y dirección	34
Para que un objeto avance a velocidad constante, la magnitud de fuerza aplicada debe ser igual a la magnitud de las fuerzas de fricción que se resisten al movimiento	22
Los objetos en movimiento deben estar siendo acompañados por una fuerza en todo momento	31
La masa parece considerarse como un factor que ocasiona que los objetos se detengan	27
Una fuerza mayor siempre determina la dirección del movimiento	41
Sólo agentes activos pueden ejercen fuerzas sobre los objetos	19

Tabla 1. Ideas previas identificadas en el análisis diagnóstico (población: 64)

Esta tarea parece haberles resultado compleja, tal vez porque se trata de razones entre distintos sistemas de magnitud (razones externas). Este tipo de razones son las que se dan entre distancia y tiempo o velocidad y tiempo, tan comunes en el estudio de la física, pero que al no ser bien interpretadas ocasionan problemas al plantear las expresiones matemáticas. El problema de mezclas planteado mostró requerir reforzamiento, aunque parece haber resultado más sencillo para los estudiantes con respecto al anterior.

Tema de la Pregunta	Adquirido	En proceso	Por reforzar	Falla en cálculos	No responde
Demanda la comparación entre dos patrones de medida distintos de una misma magnitud	0	1	55	8	36
Mezclas, situación en la que es necesario determinar la proporción entre las cantidades	33	9	17	23	17
Eficiencia de un jugador de tiros lanzados vs tiros acertados	27	32	14	14	12
Semejanza entre dos figuras	39	3	33	1	23
Proporcionalidad entre dos valores no conocidos, situación 1	0	8	55	8	30
Proporcionalidad entre dos valores no conocidos, situación 2	0	1	47	16	36

Tabla 2. Temas evaluados de conocimientos previos matemáticos en porcentajes

Cuando se solicitó el cálculo de eficiencia de un tirador, algunos estudiantes lograron expresar el problema en porcentajes, lo que les permitió expresar una respuesta correcta. En la situación de semejanza algunos estudiantes relacionaron las medidas correspondientes con un factor de proporcionalidad para expresar su respuesta. La tarea resultó más sencilla para los estudiantes, debido tal vez a que ya era conocida por cursos pasados o por ciertas prácticas cotidianas; aunque 15 de los estudiantes no hayan ofrecido ninguna respuesta. Las últimas dos preguntas resultaron nuevamente complejas para cerca de la mitad de los estudiantes, tal vez porque se trata de un problema de proporcionalidad entre dos valores que no son conocidos.

Análisis de las Actividades

Las actividades experimentales consistieron en plantear preguntas y proponer reflexiones al respecto de una situación con la cual los estudiantes debían interactuar: *oscilador armónico horizontal, ruptura de hilos, carritos que chocan y planos de Galileo* (Villa y Sierra, 2008). Se planteó un suceso físico, para observarlo, reflexionar sobre él, hacer predicciones, y finalmente llegar a conclusiones. Participaron aproximadamente 76 estudiantes de 3 grupos distintos que poco a poco se integraron a las actividades. Se cuenta con videograbaciones realizadas de cada sesión, así como con las hojas de trabajo entregadas a cada estudiante. Se ha realizado un análisis cualitativo, que consistió en un catálogo de respuestas por estudiante y actividad, que permitió elaborar en primer lugar un glosario de términos y posteriormente hacer un agrupamiento de datos por similitud de comportamiento. A continuación, se discuten los elementos gramaticales detectados.

Velocidad. Para decir cómo es la velocidad los estudiantes utilizan de manera común los adjetivos: *rápida, constante, la misma, superior, menor, disminuyendo*. Estos adjetivos le permiten al estudiante describir las características del cambio en la velocidad. Por otro lado, los adjetivos como: *horizontal y vertical*, le permiten describir las características vectoriales de la magnitud. Los estudiantes expresan que, *la velocidad puede aumentar o disminui*r de acuerdo a dos condiciones: *dependiendo de la fuerza aplicada o a consecuencia de un choque*, lo cual no implica que estén reconociendo un cambio instantáneo, ni tampoco un cambio de dirección en la cantidad de movimiento.

Aceleración. Los estudiantes reconocen a la aceleración como *el efecto de la aplicación de una fuerza* y no un constituyente de esta, al afirmar que *es ocasionada por la fuerza aplicada*, otros asumen que aceleración es lo mismo que fuerza, ignorando al parecer, la contribución de la masa. También usan expresiones como *positiva, negativa o nula*, que describen su carácter escalar.

Fuerza. Según las palabras utilizadas por los estudiantes, la fuerza tiene cierto carácter de objeto y no de acción, al considerarla *algo aplicable a los cuerpos*. Se refieren a ella como: *contraria, superior, nula*, adjetivos que asocian al carácter vectorial de la magnitud. Por otro lado, el hecho de que *pueda aumentar o disminuir* hace referencia a su carácter escalar, reconocen también su propiedad para transferir cantidad de movimiento al decir que *da impulso*.

Primera ley de Newton o Inercia. Con respecto a la primera ley de Newton, se plantearon algunos casos hipotéticos dentro de las actividades, con la intención de que el estudiante, pudiera hacer simplificaciones y posteriormente idealizaciones al respecto del movimiento de un cuerpo con velocidad constante, en ausencia de fuerzas externas a él. Para el caso en el que se considera que la masa aumenta, los estudiantes contestaron de tres maneras distintas: la primera refiere que el movimiento dependerá de la fuerza aplicada, la segunda refiere que el movimiento será más lento debido al peso y la tercera afirmación dice que el movimiento sería más lento debido a la presión.

Análisis de la Evaluación

Después de las reflexiones hechas en clase sobre los conceptos de velocidad, aceleración e inercia, motivadas por las actividades propuestas, los estudiantes realizaron una evaluación de 11 preguntas cerradas de opción múltiple y una pregunta abierta en la que se solicitó una vez más la descripción matemática de una situación experimental. Del análisis de estas preguntas y sus respectivas respuestas se han derivado algunas conclusiones preliminares como las siguientes: se podría suponer que los estudiantes reconocen bien la conservación del movimiento en situaciones en las que ellos acompañan al objeto que se mueve. Existen dificultades para relacionar la rapidez constante con la ausencia de fuerzas, lo que a su vez se relaciona con la primera ley de Newton. Se percibe que, para poder interpretar los efectos de la inercia, los estudiantes deben identificar la conservación de la cantidad de movimiento, tanto en situaciones de movimiento como de reposo.

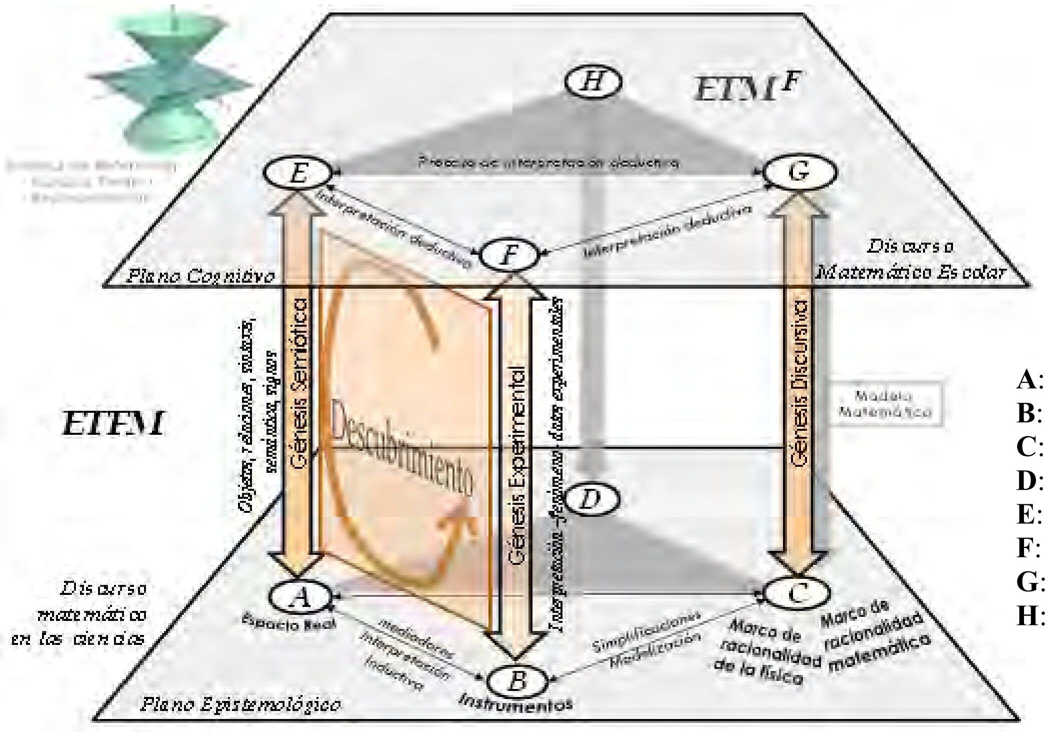
PROPUESTA DEL ETFM. DISCUSIÓN

Partiendo de la idea de que todo estudio didáctico supone la descripción de un Espacio de Trabajo para un dominio de conocimiento y que los estudios hechos en el marco de los ETM para las matemáticas se han presentado como una envoltura metodológica sobre la que será posible apoyarse para desarrollar nuevos Espacios de Trabajo en dominios específicos (Kuzniak, Montoya Delgadillo y Vivier, 2016). En este documento, se propone un Espacio de Trabajo que se visualiza dentro la enseñanza de la física al que proponemos denominar Espacio de Trabajo Físico Matemático (ETFM). El tema de estudio físico elegido aquí se encuentra en el marco de la dinámica, sin embargo, suponemos que se podría aplicar a otras ramas de la física como electricidad, óptica, etc.

En el plano epistemológico del ETM interactúan tres componentes característicos de la actividad matemática que se encuentran también en la actividad de la física: el espacio real y local, los artefactos y un sistema teórico de referencia. Como lo han descrito Kuzniak y Richard (2014) se debe entrar a un plano cognitivo personal con una estrecha relación con el plano epistemológico. En este sentido el plano cognitivo está centrado en el sujeto y en cómo se ha apropiado de los conocimientos fisicomatemáticos.

Un marco de racionalidad matemática se incluye en el ETFM dado que razonamientos matemáticos se imponen en fases deductivas de la física. Cabe mencionar que en el plano cognitivo del ETFM no siempre se busca llegar a una prueba como en el caso de la matemática pura, pero sí a la obtención de las propiedades de los modelos matemáticos utilizados y su puesta en relación con las propiedades físicas.

De modo que en el ETFM se considera como tarea fundamental el proceso de modelización, ya que interrelaciona ambos planos y se corresponde con el ciclo de interpretación inductivo-deductivo descrito por (Touma, 2009). Las etapas de investigación y los análisis descritos anteriormente nos permiten hacer una interpretación de cómo se llevan a cabo los procesos cognitivos de los estudiantes, entender cómo se relacionan las componentes del ETFM y reconocer la articulación dada entre los planos: epistemológico y cognitivo.



A: Representamen
B: Instrumentos
C: Referencial
D: Artefactos
E: Visualización
F: Experimentación
G: Demostración
H: Simulación

Figura 6. Propuesta de análisis de los procesos cognitivos en el ETFM

Se hace la interpretación con ayuda de la Figura 1, comenzando en el plano cognitivo en donde se ubica la componente denominada *Visualización*, cómo en el ETM de Kuzniak & Richard (2014), pero, considerándolo además como un esquema de interpretación del sujeto. Esta interpretación está basada en un sistema de referencia que se construye a medida que el individuo se apropia de los conocimientos que provienen del *Representamen* fisicomatemático. Este espacio real y local, ubicado en el plano epistemológico, es el soporte material de un conjunto de objetos concretos y tangibles, que en nuestro caso se refieren a las situaciones experimentales propuestas a los estudiantes. Nos interesa comprender cómo es que se les da sentido a los signos, los objetos tangibles, los conceptos, los fenómenos naturales observados y cómo están relacionadas estas representaciones.

La relación entre *Visualización* y el *Representamen* se da por medio de la *Génesis semiótica*, que se activa cuando los estudiantes tienen que observar un fenómeno con la intención de describirlo. Se trata de un proceso que parte de la *Visualización* hacia el plano epistemológico, donde el *Representamen* provee de los signos y significados que permitirán la representación geométrica del espacio y el tiempo, así como de su relación con las condiciones iniciales y finales de un suceso (Figura 2). Una enseñanza exitosa evidenciaría un dominio de elementos del *Representamen* fisicomatemático y de *Visualización.*

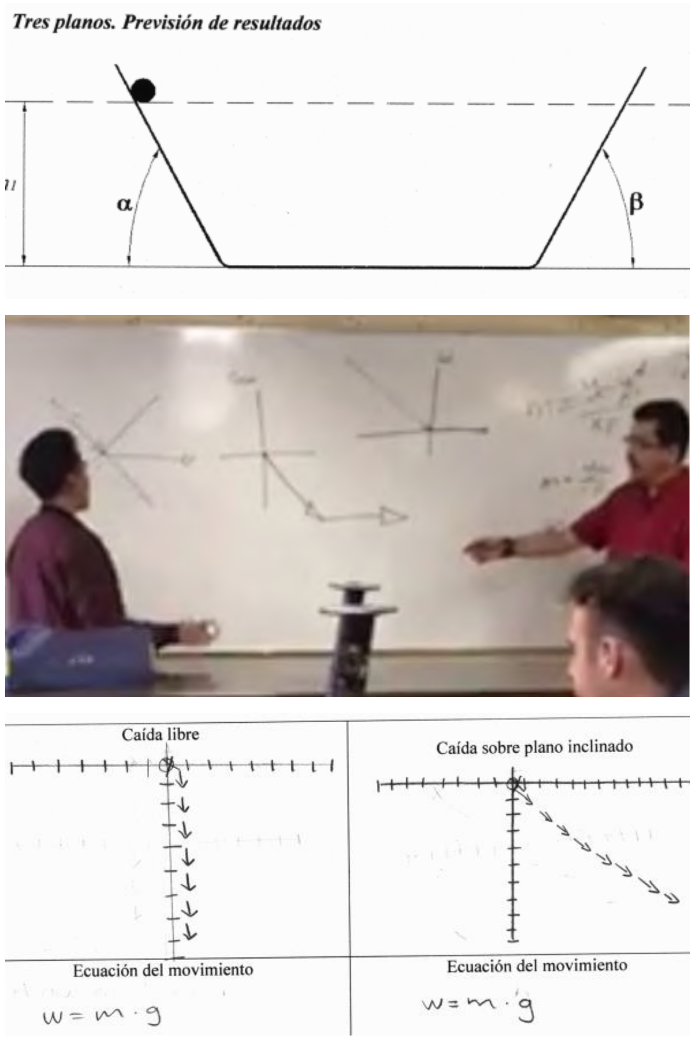


Figura 7. Relación, fenómeno observado y sistema de referencia. Planos de Galileo

Por otra parte, se reconoce que cuando se está trabajando del lado del ETFM, se da una relación entre la *Visualización* y el *Referencial* en la que se da un proceso de interpretación de la realidad a partir del marco de racionalidad de la física. En el tránsito de las relaciones descritas, se interponen los llamados obstáculos epistemológicos, las ideas previas para la física y los errores de interpretación de los principios matemáticos. Pero cuando el fenómeno ha sido abstraído por el sujeto, es posible que éste pase del lado del ETM^F, donde la realidad reemplaza por una *Simulación*, obtenida a partir del marco de racionalidad de la matemática. El surgimiento de los marcos que coinciden en el referencial como vértice, inducen a considerar una simetría entre la génesis experimental y la génesis instrumental, lo que se intentó representar en la Figura 1.

En la medida que se establece una relación libre de obstáculos entre la *Visualización* y el *Referencial*, el estudiante puede proponer expresiones matemáticas que se ajustan mejor al *Representamen.* Entonces los *Artefactos* (software, videos, simulaciones, aparatos, dibujos) adquieren un papel importante como mediadores semióticos de interpretación inductiva del suceso (Moreno, 2014), además de ofrecer la posibilidad de hacer simplificaciones (Figura 3). De este modo, la *Génesis experimental* se activa cuando se quiere explicar el fenómeno físico a partir de los datos obtenidos por medio de los *instrumentos*, dando lugar al proceso de *Modelización*. Es por ello que consideramos que las interacciones descritas, evidencian una posible circulación en la pared de *Descubrimiento*.

Entonces planteamos como hipótesis que sí se establece una relación sin obstáculos entre la *Visualización* y el *Representamen* por medio de los registros de representación semiótica (RRS) y sus sistemas matemáticos de signos, al tiempo que la abstracción permite validar la *Modelización*; se estará en posibilidades de interactuar con la *Génesis Discursiva*, para proponer argumentaciones y comunicar resultados. Estas argumentaciones podrán servir para validar modelos matemáticos que describan cada vez mejor un fenómeno físico, que podrá ser probado o demostrado posteriormente.

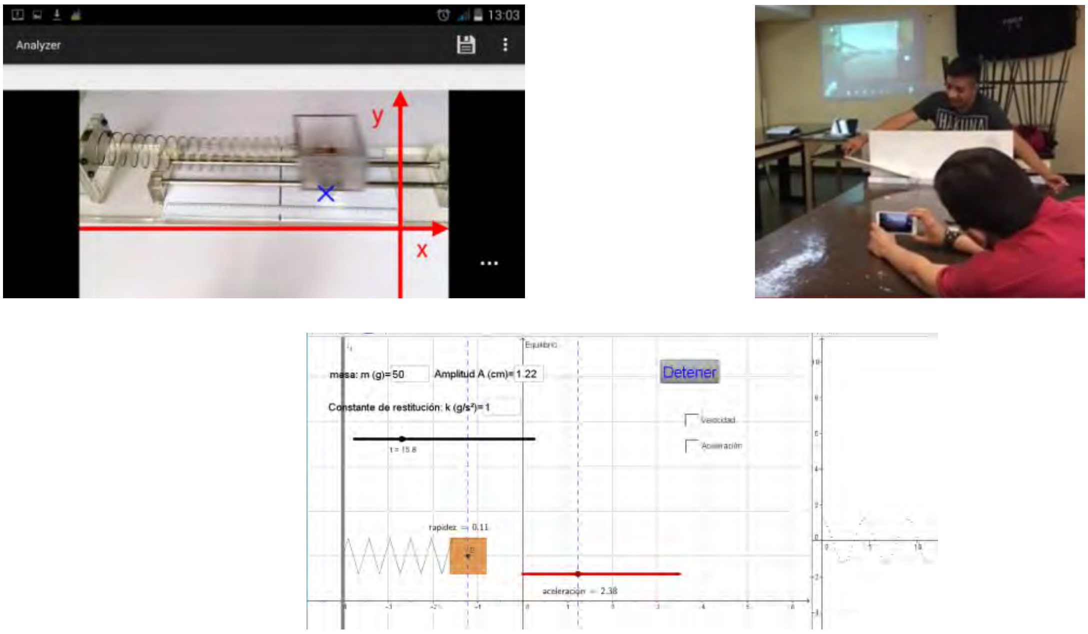


Figura 8. Artefactos: aparatos, software, videos, simulaciones

CONCLUSIONES

Se ha confirmado que los esquemas conceptuales iniciales de los estudiantes son fundamentales para identificar rupturas que deben ser aprovechadas para una oportuna intervención didáctica que tome en cuenta las relaciones y procesos que surgen dentro del ETFM, lo que a su vez contribuirá a la producción de argumentaciones enfocadas a validar modelos matemáticos que puedan representar cada vez mejor, la realidad.

Los obstáculos epistemológicos que se presentan en un caso como ideas previas para la física o en otro como errores de interpretación de las propiedades y objetos matemáticos, limitan de manera importante las relaciones entre los distintos componentes y el desarrollo de procesos en el ETFM.

Consideramos que el ETFM está presente, así como sus componentes y relaciones, cuando un individuo enfrenta la tarea de descripción matemática de un fenómeno físico. Sin embargo, se hace necesaria la extensión de este estudio para adentrarnos en tareas específicas de modelización y reconocer las relaciones que emergerán entre los componentes del ETFM aquí descrito.

En la *Modelización*, los componentes tanto físicos como matemáticos deben ser considerados al realizar tareas que impliquen un trabajo matemático en la física. Los hallazgos del presente estudio nos permiten suponer que, de su lado, la *Simulación* se inserta en un ETM^F que es una parte del ETFM, obtenida al idealizar las condiciones reales o al reemplazarlas por condiciones más simples de estudiar matemáticamente. Es decir que el ETM^F usa los objetos con las reglas provenientes de la física y adquiere un funcionamiento autónomo.

REFERENCIAS

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et le fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (5), 37- 65

Hestenes, D., Wells, M., y Swackhamer, G. (1992). Force concept inventory. *The physics teacher*, 30(3), 141-158.

Karam, R., y Krey, O. (2015). Quod erat demonstrandum: Understanding and explaining equations in physics teacher education. *Science & Education*, 24(5-6), 661-698.

Kuzniak, A., y Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(4).

Moreno-Armella, L. (2014). *Educación Matemática: Del signo al pixel*. Colombia. Universidad Industrial de Santander.

Podoprygora, N. (2014). Organization and realization of the experimental cycle of scientific cognition at Physics study. *Latin American Journal of Physics Education*, 8(1): 13-21

Roth, W. M., & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: Toward a theory of representing as social practice. *Review of educational research*, 68(1), 35-59.

Sherin, B. (2006). Common sense clarified: The role of intuitive knowledge in physics problem solving. *Journal of research in science teaching*, 43(6), 535-555.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics education*, 114-145.

Touma, G. (2009). Une étude sémiotique sur l'activité cognitive d'interprétation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 14: 79–101.

Trowbridge, David E. y McDermott, Lillian C. (1981). Investigation of student understanding of the concept of acceleration in one dimension. *American Journal of Physics*, 49(3): 242-253

Vergnaud, G. (1992). Conceptual Fields, Problem Solving and Intelligent Computer Tools. En L. M. De Corte E. (Ed.), *Computer-Based Learning Environments and Problem Solving. 84*, págs. 287-308. Berlin, Heidelberg: Springer.

Viennot, L. (2002). *Razonar en física: la contribución al sentido común*. Madrid. Antonio Machado.

Villa, J., y Sierra, C. (2008). Explicación con experimentos sencillos y al alcance de todos de la primera ley de Newton (la ley de la inercia), así como la diferencia entre inercia e inercialidad. *Latin American Journal of Physics Education*, 2(3), 241-245.

EL ROL DE LAS OPERACIONES DEL ESPACIO VECTORIAL EN LA CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS LINEALMENTE INDEPENDIENTES (DEPENDIENTES)

Marcela Parraguez[a], Raúl Jiménez[b], Miguel Rodríguez[c]

[a]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [b]Universidad Católica del Norte, [c]Universidad de Playa Ancha, Chile

marcela.parraguez@pucv.cl, rjimen@ucn.cl, mrodriguez@upla.cl

La investigación que se reporta a continuación utiliza la Teoría APOE como marco teórico y metodológico para explicar el rol de las operaciones de un espacio vectorial sobre un cuerpo (o campo) en la construcción de conjuntos linealmente independientes/dependientes, en el contexto de los paradigmas algebraicos. Las tres componentes del ciclo de investigación de APOE –análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de datos– determinan la estructura general del estudio. Resultados obtenidos indican que el rol de las operaciones del espacio vectorial en la construcción de dichos conjuntos está vinculada a acciones sobre objetos concretos cuyos procesos son encapsulados en objetos abstractos, todo ello a través del vector cero.

Palabras Claves: *conjuntos linealmente independientes/dependientes, Teoría APOE, Paradigmas algebraicos.*

INTRODUCCIÓN

El álgebra lineal (AL) es un área de las matemáticas que tiene implicaciones dentro y fuera de éstas: como en el análisis funcional, las ecuaciones diferenciales, la investigación de operaciones, las gráficas por computadora, la ingeniería, por nombrar algunas. Por otro lado, las conexiones del AL con otras áreas de las matemáticas relevan la importancia de investigar aquellos procesos cognitivos que se movilizan en el aprendizaje de esta disciplina en nuestro país, Latinoamérica y otras latitudes. En Chile hemos venido investigando en esta temática (Rodríguez, Parraguez y Trigueros, 2018, Roa-Fuentes, Parraguez, 2017; Parraguez y Yáñez, 2017; García y Parraguez, 2017; Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016; Parraguez y Uzuriaga, 2014; Parraguez, 2013; Parraguez y Oktaç, 2010), tomando en cuenta las dificultades intrínsecas que dichos tópicos generan en un aprendiz del AL.

Específicamente en este artículo nuestro propósito es describir en profundidad, desde una perspectiva cognitiva, relaciones entre los conceptos linealmente independientes/dependientes desde las operaciones de suma y multiplicación por escalar del espacio vectorial al cual se corresponden. Ello mediante la construcción de *objetos abstractos* vía la interiorización de *acciones concretas*.

ANÁLISIS TEÓRICO DE LA ESTRUCTURA ESPACIO VECTORIAL

Los diferentes tipos de estructuras algebraicas, están sujetos a la naturaleza de las propiedades que se cumplen para una operación en un conjunto dado. Así, los espacios vectoriales son una estructura algebraica donde se definen dos operaciones, que a diferencia del anillo y del campo, una de esas operaciones relaciona elementos de dos conjuntos.

Sean dos conjuntos no vacíos V (cuyos elementos son vectores) y K, donde K es un campo. En V se definen dos operaciones:

(a) **Suma de vectores**: Hay una función fija de $+ : V\times V\to V$, anotada por $(x,y) \to (x+y)$ y que satisface 5 axiomas (Poole, 2011, p. 447), para todo $x, y, z \in V$

Axioma 1: $x + y \in V$ (cerrado para la suma de vectores)

Axioma 2: $x + y = y + x$ (conmutatividad para la suma de vectores)

Axioma 3: $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociatividad)

Axioma 4: Existe un vector $0 \in V$ tal que $x + 0 = x$ (vector cero/nulo)

Axioma 5: Para cada $x \in V$, hay un único elemento $(-x) \in V$ tal que $x + (-x) = 0$ (vector inverso)

(b) **Multiplicación por escalar**: Hay una función fija de $\bullet$: $K\times V\to V$ anotada por $(\alpha, x) \to \alpha\bullet x$ y que también satisface 4 axiomas, pero axiomas diferentes a los del punto anterior (Poole, 2011, p. 447), para todo $x, y \in$ V y para todo $\alpha, \beta \in K$.

Axioma 6: $\alpha\bullet x \in V$ (cerrado para la multiplicación escalar)

Axioma 7: $(\alpha\beta)\bullet x = \alpha\bullet(\beta\bullet x)$ (asociatividad de la multiplicación por escalar)

Axioma 8: $\alpha\bullet(x + y) = \alpha\bullet x + \alpha\bullet y$ (primera ley distributiva)

Axioma 9: $(\alpha + \beta)\bullet x = \alpha\bullet x + \beta\bullet x$ (segunda ley distributiva)

Axioma 10: Existe un elemento $1\in K$ tal que para todo $x \in V$, $1\bullet x = x$ (identidad escalar)

El conjunto V con las dos operaciones anteriores y el cumplimiento de todos los axiomas que lo definen, lo dotan de una estructura de espacio vectorial sobre el campo K.

En atención a lo anterior, en este punto es importante detenerse a mirar la estructura de $(V, K, +, \bullet)$ como un todo integrado, donde la necesidad de algunos axiomas contribuye a un entrelazamiento algebraico entre las operaciones que participan en dicha definición, por ejemplo el axioma asociatividad de la multiplicación por escalar: $(\alpha\beta)\bullet x = \alpha\bullet(\beta\bullet x)$, para α y β en K, $x\in V$; entrelaza la operación multiplicación del campo K, con la multiplicación por escalar de V. Otros axiomas en cambio, obedecen a otra naturaleza, como por ejemplo la identidad escalar: existe un elemento

$1 \in K$ tal que para todo $x \in V$, $1 \bullet x = x$; la cual es parte del requerimiento para que el grupo $K-\{0\}$ sea una acción sobre el conjunto V.

¿Pero cómo concibe las operaciones Suma de Vectores y Multiplicación por Escalar un aprendiz de AL cuando trabaja con un conjunto de vectores?

Para dar respuesta a dicha pregunta, se va a situar la investigación en el escenario de la construcción mental de conjuntos linealmente independientes/dependientes, cuando se hacen explícitas las operaciones de suma y multiplicación por escalar en un espacio vectorial.

TEORÍA APOE: CONTEXTOS ABSTRACTOS Y CONTEXTOS CONCRETOS

Para la teoría APOE (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) las estructuras mentales *acción*, *proceso*, *objeto* y *Esquema* interpretan la construcción del conocimiento matemático, la que se origina de los mecanismos mentales *interiorización*, *coordinación*, *reversión* y *encapsulación* (*desencapsulación*).

Consideremos un concepto matemático. Un estudiante muestra una construcción *acción* del concepto, si las transformaciones –entendidas como actividad mental reflejada en argumentos observables– que hace sobre el concepto las realiza paso a paso, donde cada paso de la transformación requiere realizarse de forma explícita y guiada por instrucciones externas que entregan indicaciones precisas sobre qué se debe hacer. Aunque las *acciones* son las construcciones mentales más primarias, éstas son importantes y necesarias para alcanzar otras construcciones. Cuando las *acciones* sobre un concepto se repiten y el estudiante reflexiona sobre ellas y deja de depender de las instrucciones externas adquiriendo control interno sobre lo que hace (o imagina), decimos que el estudiante ha *interiorizado* la *acción* en un *proceso*. La construcción mental *proceso* se caracteriza por ser dinámica, porque el estudiante ha alcanzado la capacidad para imaginar la ejecución de los pasos a seguir en una actividad matemática, sin tener necesariamente que llevar a cabo cada uno de ellos explícitamente, incluso puede prescindir de algunos. Por otra parte, dos o más *procesos* pueden *coordinarse* para construir un nuevo *proceso* y además dicho *proceso* puede *revertirse* o *generalizarse*. Si el estudiante estabiliza el dinamismo propio de un *proceso* en un estado estático sobre el cual puede aplicar *acciones* sin que éste se desarme, y logre entender el *proceso* como un todo ligado, entonces se dice que ha *encapsulado* el *proceso* en un *objeto* cognitivo. Además, si se necesita volver desde el *objeto* al *proceso* que le dio origen, se dice que ha *desencapsulado* ese *objeto* en un *proceso*.

Un *esquema* de un concepto matemático (Figura 1) es una colección de *acciones*, procesos, *objetos* y *esquemas* de otros conceptos, relacionados en la mente del estudiante como una estructura cognitiva coherente. La coherencia es entendida como la capacidad del estudiante para reconocer relaciones al interior del *esquema* y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Un *esquema* esta siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo *objeto* al cual pueden aplicársele *acciones* y *procesos*.

Ahora, si nos vamos más al detalle en la construcción de los conceptos que se desarrollan en las instituciones de educación superior, generalmente –en una etapa inicial– se construyen a partir de *acciones* específicas sobre *objetos concretos*, tal como se señala en la Figura 1, y que más tarde se van consolidando en *objetos abstractos*.

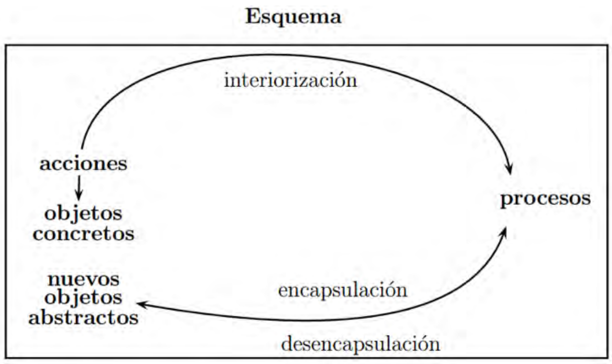
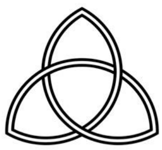


Figura 1. Contextos abstractos y concretos en APOE (Arnon et al., 2014, p.154).

Esta es precisamente la dirección que tomará esta comunicación, proporcionar evidencia con sustento teórico de *acciones* sobre conjuntos concretos de vectores, para proveer una explicación de cómo los aprendices de AL las *interiorizan* en conjuntos abstractos de vectores linealmente independientes/dependientes para espacios vectoriales cuyas operaciones suma y multiplicación por escalar se hace explícita.

Para ilustrar la idea de *objeto concreto*, consideremos la Figura 2a), que corresponde al logo de la *Mercedes Benz*, el cual tiene su base en el triángulo Celta –Figura 2b)–, el que apareció hace miles de años en los nudos celtas.

a) 

b) 

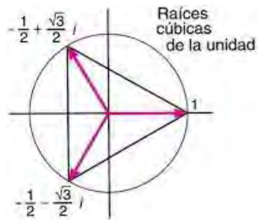
c) 

Figura 2. Contextos abstractos y concretos de vectores linealmente dependientes.

Este logo de la Figura 2a) se puede representar en el círculo unitario del espacio vectorial de los números complejos (con operaciones usuales), por las tres raíces cúbicas de la unidad –Figura 2c)– entre las cuales se da la siguiente combinación lineal entre esos tres vectores:

$$1 = -1\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

La expresión anterior muestra que este objeto concreto "el *logo de la Mercedes Benz"* es un ejemplo paradigmático de dependencia lineal, en el contexto de los paradigmas algebraicos de Mena-Lorca, Mena-Lorca y Morales (2012), porque al realizar sobre este *logo* la *acción* de representarlo como vectores de $\mathbb{C}$, que, al alero del *proceso* de las raíces de la unidad en el círculo unitario, se *encapsula* a través de la combinación lineal de vectores, en el *objeto* abstracto de vectores linealmente dependientes.

En lo que sigue, vamos a entender por *objeto concreto* como aquello que involucra el uso de objetos físicos, reales o imaginarios en el contexto de espacios vectoriales de dimensión 2 o 3 y, que, a su vez, permiten representarlos a través de conceptos del AL. Nos interesa para ello apoyarnos en los paradigmas algebraicos propios del AL, porque desde allí podemos explicar mejor el rol de las operaciones del espacio vectorial en los conjuntos linealmente independientes/dependientes.

Para la teoría APOE, una descomposición genética (DG) es un modelo que describe en detalle las construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante aprenda un concepto matemático (Arnon et al., 2014). En el caso de esta comunicación, interesa mostrar una DG que describa la construcción del conocimiento que aprendices de AL evocan en la construcción *objeto* de conjuntos linealmente independientes/dependientes. Cabe mencionar que además se proyecta avanzar en la construcción del conocimiento matemático y didáctico incluido en este tipo de conjuntos, y situarlo en un *esquema*, incluyendo *objetos* concretos y abstractos como sub-esquemas del *esquema* vectores linealmente independientes/dependientes.

MÉTODO

La forma de indagación que permitió describir y determinar las *acciones* sobre conjuntos específicos de vectores que se *interiorizan* en un conjunto de *objetos* abstractos de vectores linealmente independientes/dependientes, requirió de una DG y de la toma de datos a través de un cuestionario semiestructurado.

Una DG del concepto vectores linealmente independientes/dependientes como objeto

Conocimientos previos: *Esquema de* función, *proceso de* vectores en R^2 y R^3, que incluye la posibilidad de operar con vectores y escalares, *esquema* de conjunto que incluye el *proceso* de describir un conjunto de diferentes maneras, el *proceso* de formar conjuntos con distintos tipos de elementos y, por último, solución de sistemas de ecuaciones lineales como *proceso*, son las construcciones sobre la cual se sustenta la siguiente DG sobre conjuntos de vectores linealmente independientes/dependientes como *objeto*.

Construcción del Esquema de vectores linealmente independientes/dependientes. Para llegar a construir el objeto de vectores linealmente independientes/dependientes, se comienza con *acciones* concretas sobre vectores de un espacio vectorial, las que se *interiorizan* en los *procesos* analíticos y geométricos de vectores a través de las operaciones suma y multiplicación por escalar, que se etiqueta como *proceso* combinación lineal. Paso seguido, el *proceso* combinación lineal y el de expresar a un vector del espacio de manera única como combinación lineal de los vectores de un conjunto dado, se *coordinan* a través de la igualdad de vectores, con el *proceso* neutro aditivo del espacio vectorial, dando como resultado el *proceso* solución de sistemas de ecuaciones lineales. En los casos en que la solución del sistema es única y trivial, el *proceso* solución anterior se *encapsula* a través de la definición de conjunto linealmente independiente, en el *objeto* conjunto linealmente independiente de vectores. Ahora en los casos que la solución del sistema es infinita (no única) el *proceso* solución del sistema de ecuaciones lineales se *encapsula* a través de la definición de conjunto linealmente dependiente, en el *objeto* conjunto linealmente dependiente de vectores.

Instrumentos y toma de datos

La toma de datos consistió en registros de observación de las producciones escritas de estudiantes de Pedagogía y Licenciatura en Matemáticas que participaron de un curso de AL en una universidad chilena, y del análisis de sus procedimientos a las actividades de un cuestionario de 4 preguntas, con 11 actividades. Para examinar dichos procedimientos, consideramos una aproximación de Estudio de Casos (Stake, 2010). En la (Tabla 1) detallamos cada uno de ellos, los que se insertaron dentro del ciclo de investigación de la teoría APOE (Arnon et al., 2014). Los resultados se enmarcaron en el análisis del trabajo evidenciado por los estudiantes de cada uno de los casos.

Caso 1	Caso 2	Caso 3
3 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. L1, L2 y L3	5 estudiantes de Pedagogía en matemáticas P4, P5, P6, P7 y P8	2 estudiantes de Licenciatura y Pedagogía en Matemáticas a la vez. LP9, LP10

Tabla 1. Descripción de los participantes en los tres Casos de Estudio.

A continuación, se presentan dos preguntas representativas del trabajo de los estudiantes, por un lado, en un espacio vectorial que tiene dos elementos (Pregunta 1) y, por otro, un espacio vectorial que tiene un número infinitos de vectores (Pregunta 4).

Las Preguntas 1 y 4 fueron diseñadas en este estudio con el propósito de visualizar *coordinaciones* entre *procesos*, provenientes de *acciones* sobre *objetos* concretos (entre ellos, operaciones suma y multiplicación por escalar, elemento neutro y solución de sistemas de ecuaciones lineales) dispuestos en la DG descrita. En estas preguntas, particularmente se indaga sobre la capacidad del estudiante para analizar y argumentar sobre la independencia/dependencia lineal de algunos subconjuntos de vectores para diferentes espacios vectoriales (con finitos e infinitos vectores), donde la suma está definida como producto y la multiplicación por escalar, como una operación constante (en el caso de la pregunta 1) y de una potencia (en el caso de la pregunta 4).

Pregunta 1

$V=\{-1,1\}$ subconjunto de ***R****, sobre K =* ***R*** *con las operaciones:*

Suma de vectores: $v_1+v_2=v_1v_2$ *para todo* $v_1,v_2\in V$

Multiplicación por escalar: $\alpha\bullet v=1$ *para todo* $v\in V$ *y para todo* $\alpha\in\mathbf{R}$

¿El conjunto $\{-1, 1\}$ es linealmente independiente?

La intención explícita de esta pregunta es mostrar evidencias del cero vector como *proceso*, la combinación lineal como *proceso*, *coordinaciones* entre los *procesos* anteriores y la definición que muestran de conjuntos linealmente independiente/dependiente de vectores, en un espacio vectorial concreto formado con dos elementos, donde ninguno de los elementos es explícitamente el número cero de los números reales.

En relación a los argumentos observables expuestos por los 10 estudiantes, podemos resaltar lo realizado por dos estudiantes. El estudiante L3, se posiciona en las operaciones del espacio vectorial y concluye a través de un procedimiento para obtener el elemento neutro del grupo (V, +), –que el cero vector es el número 1–, Paso seguido, muestra a través de la *interiorización* de la *acción* sobre el *objeto* concreto de combinación lineal y el cero vector, que el conjunto de vectores $\{-1, 1\}$ es linealmente dependiente (Figura 3a). El *proceso* de combinación lineal en que la solución del sistema no es única se *encapsula* a través de la definición de vectores linealmente dependientes en el conjunto de vectores linealmente dependiente como *objeto*, de acuerdo a la especificidad de las operaciones definidas para el espacio vectorial V.

a) $\exists 1$ $\vec{0}=1$ P.q. $1+x=1\cdot x=x$

La combinación Lineal

$\alpha(-1)+\beta(1)=1$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$1\cdot 1=1$

V $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\therefore$ $\{-1,1\}$ es Ld

b) Bueno el cero vector es el 1, entonces como $1\in\}1,-1\{$ el conjunto es l.d.

Figura 3. Contextos concretos (a través de la combinación lineal) y abstractos (propiedad del cero vector) del concepto linealmente independiente/dependiente.

Además de las evidencias de las estructuras de construcción mental *proceso* para la combinación lineal de vectores y del cero vector, se demostró que si el estudiante lograba expresar y caracterizar la pertenencia del cero vector en el conjunto $\{-1, 1\}$, ha mostrado *desencapsular* el objeto de vectores linealmente dependientes en el *proceso* "Cualquier conjunto que contenga al vector cero es linealmente dependiente". Este último, argumento observable que mostró el estudiante LP9, al señalar que "el cero vector de V" pertenece al conjunto $\{-1, 1\}$, y por ello es linealmente dependiente (Figura 3b).

Pregunta 4

Sea $V=\{(a,b)/a,b \in R^+\}$ un R- espacio vectorial, con las operaciones:

***Suma de vectores**: $(a,b)+(c,d)=(ac,bd)$; $(a,b),(c,d) \in V$*

***Multiplicación por Escalar**: $k(a,b)=(a^k,b^k)$; $k \in R$ y $(a,b) \in V$*

Estudiar la dependencia lineal de los subconjuntos de V dados por:

(a) $S_1=\{(2,1),(3,2)\}$ (b) $S_2=\{(1,1),(2,1)\}$.

Para que un aprendiz pueda alcanzar la construcción mental *proceso* de conjuntos linealmente independientes/dependientes, se debe volver sobre algunos conceptos, como el de combinación lineal entre vectores de un conjunto y el de sistemas de ecuaciones lineales. El *proceso* expresar un vector nulo como combinación lineal de los vectores de un conjunto, es producto de coordinar el *proceso* de determinar el vector neutro aditivo del espacio vectorial con el *proceso* de las operaciones suma y multiplicación por escalar que definen al espacio vectorial. La pregunta 4 fue diseñada con el propósito de visualizar esta *coordinación*. En esta pregunta, se indaga sobre la capacidad del estudiante para analizar la independencia/dependencia lineal de algunos subconjuntos para un mismo espacio vectorial.

El estudiante L2 considera S_1 y plantea una igualdad de la suma ponderada de los vectores con el vector nulo. El problema es que no repara en el hecho que el elemento neutro bajo la operación suma definida para V es (1,1) y no (0,0). Al hacer la resolución obtiene una afirmación contradictoria, pues las potencias resultan igual a cero. Lo mismo ocurre para el otro conjunto S_2. Lo anterior muestra que el estudiante L2 no ha construido el vector neutro aditivo del espacio vectorial, como un *proceso*. Al no evidenciar L2 esa estructura cognitiva, la *coordinación* a través de la igualdad entre los *procesos* combinación lineal de los vectores S_1 y el vector cero es errónea. En la Figura 4, es posible apreciar la ausencia de la estructura de construcción mental *proceso* para el concepto neutro aditivo del espacio vectorial, a través de los argumentos observables de la pregunta 4 del cuestionario.

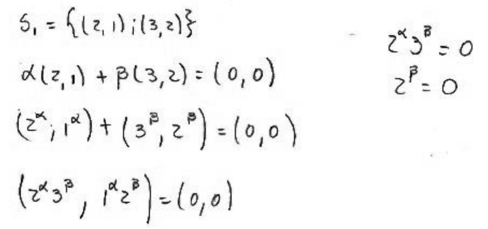


Figura 4: Ejemplo de estructura de construcción mental acción en un objeto concreto que no logra ser proceso para determinar el vector neutro aditivo del espacio vectorial.

La pregunta 4 fue omitida por dos estudiantes, otros dos no logran determinar adecuadamente el neutro aditivo para la operación suma definida en el espacio V, un estudiante confunde la pregunta, un estudiante realiza un procedimiento distinto, basado en el análisis de vectores múltiplos entre sí, y finalmente, 4 estudiantes alcanzan la estructura *proceso* para determinar el vector cero del espacio vectorial. Una muestra de esto último se puede observar en el estudiante LP9, quien primero plantea la combinación lineal pensando que el vector nulo es (0,0), pero luego borra, pues se arrepiente y decide determinar con base a la operación suma definida en V el vector nulo (neutro aditivo) del espacio vectorial, como se puede apreciar en la Figura 5.

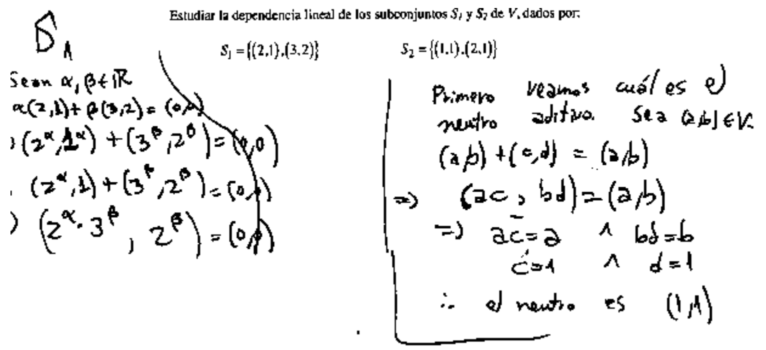


Figura 5: Ejemplo de estructura de construcción mental proceso para el vector neutro aditivo del espacio vectorial.

De los 4 estudiantes que sí reconocen adecuadamente que el vector nulo en el espacio vectorial V es (1,1) y no (0,0), sólo tres de ellos plantean a dicho vector nulo como combinación lineal de los vectores del conjunto S_1, con la finalidad de realizar el análisis de los escalares vía la solución de un sistema de ecuaciones lineales. L3 en representación del trabajo realizado por esos 3 estudiantes, muestra la igualdad de vectores como el mecanismo de *coordinación* entre los *procesos* asociados a tales conceptos, como se puede observar en la Figura 6.

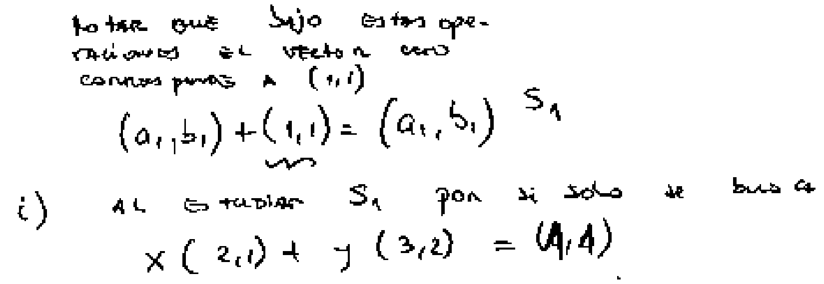


Figura 6: Ejemplo de coordinación entre las estructuras de construcción mental proceso expresar un vector cualquiera como combinación lineal de los vectores de un conjunto y el vector nulo del espacio vectorial *V*.

El mecanismo de *coordinación* entre la combinación lineal de un conjunto finito de vectores y el cero vector, a través de la igualdad de vectores, tiene lugar en S_1 en la medida que el estudiante plantea la suma ponderada de los vectores del conjunto igual al vector (1,1). El resultado de esa *coordinación* es el *proceso* resolución de sistema de ecuaciones lineales, que tiene una solución única. Evidencia de esta *coordinación* es mostrada en los argumentos del estudiante L2, quien a partir de la expresión del vector nulo como combinación lineal de los vectores de un conjunto S_1, construye un sistema de ecuaciones. De este sistema el estudiante L2 desprende que ambos escalares son nulos, lo cual le permite concluir que los vectores de S_1 son linealmente independientes. L2 realiza lo mismo para el otro conjunto S_2, de donde deduce que un escalar es nulo y el otro puede ser cualquier valor real –sin restricciones–, lo cual le permite reconocer que los vectores son linealmente dependientes, pues la solución no es la trivial. L2 añade *"esto es pues (1,1) es el vector nulo para la suma, el cual siempre es linealmente dependiente para con otros vectores"*. Una parte de la resolución del estudiante L2, evidencia la presencia del mecanismo de *coordinación* en relación a la independencia lineal, lo que se puede apreciar en la Figura 7.

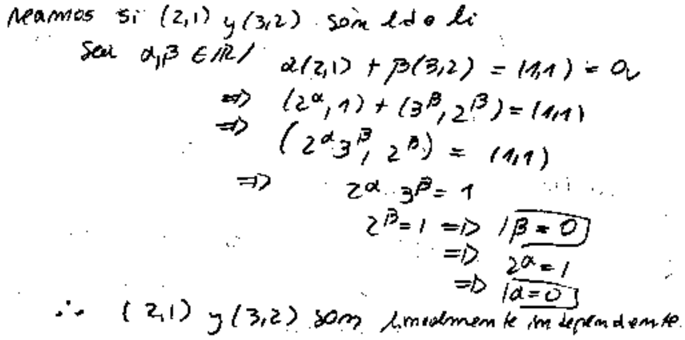


Figura 7: Ejemplo de coordinación entre las estructuras de construcción mental proceso expresar el vector nulo como combinación lineal de los vectores de un conjunto y sistema de ecuaciones lineales para el logro del proceso seleccionar la combinación lineal en que la solución del sistema es única y trivial.

Encapsular la solución única y trivial del sistema de ecuaciones lineales en el conjunto de vectores linealmente independientes como *objeto,* a través de la definición de vectores linealmente independientes que ha construido el aprendiz, se evidencia en la medida que el estudiante reconoce elementos de la definición de la independencia lineal, que le permiten descartar la dependencia lineal por simple inspección de las características de los vectores, en estrecha relación con la especificidad de las operaciones definidas para el espacio vectorial *V.* Es el caso del estudiante P8 que muestra un estado de construcción mental *proceso* de la combinación lineal de vectores, que *coordinado* a través de la igualdad de vectores con el vector nulo, da origen a una solución del sistema de ecuaciones lineales única y trivial, puesto que P8 señala: *"si S_1 es linealmente dependiente entonces existe un escalar en los números reales, tal que* (2,1) = α(3,2)" de esta afirmación desprende dos igualdades asociadas a potencias, de donde obtiene una "contradicción" para el valor de alfa (o escalar), por lo tanto concluye que este conjunto es linealmente independiente, de acuerdo a los elementos que conforman su definición de vectores linealmente independientes, como se puede observar en la Figura 8.

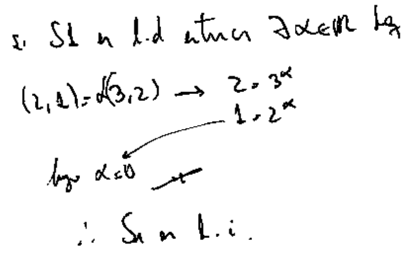


Figura 8: Ejemplo de estructura de construcción mental objeto para el concepto conjunto de vectores linealmente independientes.

A MODO DE CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

El desarrollo de investigación seguido al alero de la DG propuesta y del análisis de los resultados de la aplicación de las preguntas 1 y 4 del cuestionario a los estudiantes que pertenecen a los casos de estudio, permite sustentar la conclusión de que el rol de las operaciones del espacio vectorial en la construcción de conjuntos, linealmente independientes/dependientes) está vinculada a acciones sobre objetos concretos, como lo es el vector nulo y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, a partir de los cuales se construyen procesos abstractos de conjuntos linealmente independientes/dependientes, que son encapsulados a través del tipo de solución que va arrojando el sistema de ecuaciones lineales asociado a la combinación lineal de los vectores del conjunto igualados al ventor nulo, (1) en objetos abstractos de conjuntos linealmente independientes cuando la solución del sistema es única y (2) en conjuntos linealmente dependiente cuando la solución del sistema es infinita.

La coherencia del esquema de conjuntos linealmente independientes/dependientes ha sido evidenciada en términos de la evolución de *proceso* a *objeto* del cero vector de *V* que han mostrado los estudiantes, en relación con la definición (*V*, +) como Grupo y de las *acciones* sobre los *objetos* concretos de cero vector y de combinación lineal para operaciones suma y multiplicación por escalar no usuales.

En síntesis, las confusiones generadas en los estudiantes por las designaciones del rol de las operaciones del espacio vectorial y el vector nulo en la construcción de conjuntos linealmente independientes (dependientes) se diagnostican acertadamente mediante la teoría APOE, sin embargo, se interpretan bien en la génesis semiótica dentro del esquema de los ETM, lo que se constituye en una proyección de esta investigación.

AGRADECIMIENTOS

La investigación presentada ha sido financiada parcialmente por CONICYT a través del Proyecto FONDECYT Nº 1180468.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.

García-Martínez, I. & Parraguez, M. (2017). The basis step in the construction of the principle of mathematical induction based on APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 128-143.

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J. y Morales, A. (2012). Hacia una noción de espacio de trabajo algebraico. *Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático,* Universidad de Montreal, Canadá, noviembre.

Parraguez, M. & Yáñez, A. (2017). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje de los Valores y vectores propios en R2: El caso de enseñanza media. *Revista Pädi Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería de las Ciencias*, 1(1), 10-25.

Parraguez, M., Lezama, J. & Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores. *Revista enseñanza de las Ciencias*, 34(2), 129-150.

Parraguez Parraguez, M. & Uzuriaga, V. (2014). Construcción y uso del concepto combinación lineal de vectores. Revista *Scientia et Technica Año XIX*, 19(3), 329-334.

Parraguez, M. (2013). El rol del cuerpo en la construcción del concepto espacio vectorial. *Revista Educación Matemática*. México, 25, (1), 133-154.

Parraguez M., Oktaç A., (2010). Construction of the vector space concept from the view point of APOS Theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8),

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal una Introducción Moderna*. México D. F: Cengage Learning.

Rodríguez, M.; Parraguez, M. & Trigueros, M. (2018). Construcción cognitiva del Espacio Vectorial R^2. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. México, 21(1), 57- 86.

Roa-Fuentes, S. & Parraguez, M. (2017). Estructuras Mentales que Modelan el Aprendizaje de un Teorema del Álgebra Lineal: Un Estudio de Casos en el Contexto Universitario. *Revista Formación Universitaria*, 10(4), 15-32.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

ETUDE DES ETM PERSONNELS D'ETUDIANTS NON MATHEMATICIENS – DOMAINE DE DEFINITION D'UNE FONCTION COMPOSEE

Philippe Hoppenot

UEVE Paris Saclay – LDAR EA4434, Paris Diderot, Université d'Artois, Université de Rouen, Université Paris Créteil Val de Marne, Université Cergy-Pontoise, France

p.hoppenot@iut.univ-evry.fr

This paper deals with the definition of the domain of composite functions in the specific case of logarithm for non-mathematician students. The objective is to make the student use different representation registers to deal with this complicated problem. Mathematical Working Space are used to describe the student work and analyse how they deal with this question. One objective is to propose a task for which the student naturally develop a complete mathematical work. We propose to use two Personal MWS. The expected P-MWS corresponds to the a priori analyse of the task. The effective P-MWS corresponds to the work really done by the student. The main results of this study are that the proposed task leads to a complete mathematical work in its first phase but that the second phase, corresponding to a generalisation, is generally not well performed. The last result is that, sometimes, some of the manipulated objects change their place (from knowledge to representamen for example) in the MWS from one phase to the other, which is a sign of maturation as regards students' thinking.

Key-words: *Mathematical Working Space, representation registers, composite function, non-mathematician students.*

INTRODUCTION

Ce travail a été réalisé avec des étudiants d'IUT QLIO[1]. L'approche des mathématiques est guidée par sa dimension outil au sens de Douady (1986). Il s'agit en effet de motiver l'utilisation des mathématiques pour résoudre des problèmes dans le domaine de la qualité ou de la logistique. Pour ce qui concerne la fonction logarithme, elle est présentée à partir d'un problème de taux d'intérêt cumulatif. Plus généralement, les étudiants en IUT QLIO ont besoin de la notion de fonction pour modéliser des phénomènes de qualité et de logistique. Le PPN[2] prévoit l'étude des fonctions exponentielle et logarithme. Dans le cas des fonctions du type $ln(u(x))$, on constate in situ que les étudiants se lancent directement dans le calcul de la dérivée, sans s'intéresser au domaine de définition. Le problème n'est pourtant pas trivial. Divers travaux ont porté sur l'étude de la fonction logarithme en général et sur son domaine de définition en particulier. En 1999, David Meel (1999) s'est interrogé sur

[1] Institut Universitaire Technologique, Qualité Logistique Industrielle et Organisation.

[2] Programme Pédagogique National, commun à tous les départements QLIO de France.

la compréhension qu'avaient des étudiants, se préparant à l'enseignement et suivant le cours de "*Advanced Mathematics for Elementary Teachers*", des notions de fonction et fonction composée. Ni la définition formelle de la notion de fonction de Dirichlet-Bourbaki ni celle de la composition de fonctions n'est clairement comprise par les étudiants. Dans leur article de 2004 (Cantoral & Farfán, 2004), Ricardo Cantoral et Rosa María Farfán ont confronté des étudiants mexicains, âgés de 18 à 26 ans de premier cycle scientifique universitaire (mathématique et physique) et n'ayant jamais rencontré les nombres complexes, ainsi que des professeurs en lycée n'ayant jamais donné de cours sur les variables complexes et deux didacticiens, à "*des situations nécessitant l'extension de la fonction logarithme aux nombres négatifs et [qui] se trouvent donc obligés d'accepter les nombres et les variables complexes*". Les auteurs montrent que les étudiants ont du mal à remettre en cause des connaissances antérieures à savoir que la fonction logarithme n'est définie que sur $]0;+\infty[$. Beaucoup n'accèdent pas à l'idée d'envisager un tel prolongement, ce que les auteurs interprètent comme une forme d'assujettissement à des règles sociales et culturelles que l'on ne prend pas assez en compte dans l'enseignement des mathématiques.

On peut se poser la question suivante : pourquoi les étudiants d'IUT QLIO ont-ils du mal à déterminer correctement le domaine de définition d'une fonction composée du type *ln(u(x))* ? Afin d'aborder cette question, la section suivante présente le cadre théorique utilisé. Puis l'expérimentation est décrite (section méthodologie) et les productions des étudiants sont analysées.

CADRE THEORIQUE

Dans son papier de 1986, Régine Douady (1986, p.6) présente la dialectique outil-objet comme "un processus cyclique organisant les rôles respectifs de l'enseignant et des élèves, au cor duquel les concepts mathématiques jouent alternativement le rôle d'outil pour résoudre un problème et d'objet prenant place dans la construction d'un savoir organisé". Il se déroulant en 6 phases. Cette résolution de problèmes nécessite le développement d'outils mathématiques spécifiques, en l'occurrence ceux qui sont liés à la fonction logarithme. Une fois leur utilisation stabilisée, ils peuvent être décontextualisés et s'intégrer à un corpus de connaissances déjà constitué : ils prennent alors la dimension d'objets. Afin de rendre cette dialectique efficace, Régine Douady préconise des changements de cadre, initiés par le professeur, permettant d'éclairer le problème sous un autre angle et ainsi de permettre aux élèves d'avancer dans leur réflexion. Ces changements s'effectuent là encore en plusieurs étapes : (i) le transfert et l'interprétation qui génèrent (ii) des correspondances imparfaites propres à déséquilibrer les élèves afin d'aboutir à (iii) une amélioration des correspondances et des progrès de la connaissance. Afin de préciser ces changements de cadre qui ne sont pas toujours définis avec précision, nous avons choisi de nous appuyer sur la notion de registre de représentation de Duval (1995, p.50). Il repose sur la triade Signifiant – Objet – Signifié. Duval définit deux types de transformations d'une expression : le traitement (interne à un registre de représentation donné) et la conversion (externe au registre de représentation initial), en fait un changement de registre.

Dans leur article de 1981, David Tall et Shlomo Vinner (1981) interprètent les difficultés des élèves en termes de représentation des concepts auxquels ils sont confrontés. Ils définissent la notion de concept-image comme la "structure cognitive complète associée au concept qui inclut toutes les images mentales et les propriétés et processus associés" et celle de concept-définition comme "l'ensemble de mots utilisés pour spécifier le concept". Un facteur de conflit potentiel est défini comme une "partie de l'image ou de la définition du concept qui peut être en conflit avec une autre partie de l'image ou de la définition du concept". Ainsi des images ne représentant qu'une partie d'un concept ou des définitions incomplètes peuvent-elles conduire à un conflit cognitif chez l'élève.

On peut tirer une première analyse de cette courte recension sur laquelle s'appuyer pour la conception des séances. Tall et Vinner (1981) montrent que les images que l'on se fait des concepts que l'on manipule sont susceptibles de provoquer des conflits cognitifs, obstacles à une bonne compréhension de ces concepts. Meel montre que les notions de fonction et de composition de fonctions ne sont pas clairement appréhendées par de nombreux étudiants qui se destinent à l'enseignement. Chez les étudiants de QLIO, les données recueillies montrent que le domaine de définition de fonctions du type $f: x \mapsto ln\big(u(x)\big)$ pouvait être simplement associé à l'intervalle $]0;+\infty[$ sans réflexion supplémentaire. Cette conception erronée semble être un obstacle pour de nombreux élèves et étudiants qui empêche une utilisation correcte de la fonction logarithme en dehors de la situation de référence *ln(x)*. A la décharge des étudiants, dans les programmes de l'enseignement des mathématiques, "toute définition générale de la notion de fonction et la notion d'ensemble de définition sont hors programme" (BO 2008, programme de troisième). En classe de seconde (élèves de niveau 10), "Les fonctions abordées sont généralement des fonctions numériques d'une variable réelle pour lesquelles l'ensemble de définition est donné" (BO 2009, Mathématique de seconde, page 3). En classes de première et terminale (élèves de 17 à 18 ans), les élèves (surtout des sections scientifiques) déterminent des ensembles de définition de fonctions composées, sachant que "la composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale sans que cette dernière notion ne soit abordée de façon théorique" (BO 2011, programme de terminale scientifique). L'étude de Meel porte sur le cas général de la composition de fonctions par de futurs enseignants. Nous avons choisi de nous limiter à une question plus réduite en considérant les fonctions du type $f: x \mapsto ln\big(u(x)\big)$.

Dans cette étude, le travail dans le registre algébrique (expression algébrique de la fonction) a été confronté à un travail soit dans le registre des représentations graphiques (courbe de la fonction), soit dans celui des tableaux de valeurs. Les ETM sont bien adaptés à l'analyse du travail des étudiants. Kuzniak et al. (2016) présentent une synthèse du cadre théorique des ETM. En particulier, la notion d'ETM personnel des étudiants permet une analyse précise de leur travail effectif. On peut alors évaluer, à partir de la circulation dans les différents plans des ETM, si le travail mathématique des étudiants est complet ou non (Kuzniak et al., 2015, p.11). Un travail mathématique est dit complet lorsque "toutes les dimensions et tous les plans du travail sont activés, à un moment ou un autre, au cours de l'activité." Cet outil permet de proposer l'évolution suivante de la question de recherche :

> Quel est le travail mathématique mis en œuvre par des étudiants de DUT QLIO lors de la détermination du domaine de définition d'une fonction du type *ln(u(x))* ? S'agit-il d'un travail mathématique complet ?

METHODOLOGIE

Contexte de l'étude

Le département QLIO de l'IUT accueille des étudiants issus de bacs généraux Economique et Social (35%) et Scientifique (25%) ainsi que de bacs technologiques Sciences et Technologies du Management et de la Gestion (15%) et Sciences et Technologies de l'Industrie et du Développement Durable (25%). Ces proportions sont comparables d'une année sur l'autre. L'étude s'est déroulée au second semestre sur deux années : une phase préliminaire en 2015-2016 et l'expérimentation proprement dite en 2016-2017. Chaque année, deux groupes d'une vingtaine d'étudiants ont participé à cette expérimentation.

Expérimentation préliminaire (année universitaire 2015-2016)

Une expérimentation préliminaire a été menée en 2015-2016. Les étudiants travaillaient en groupes de quatre. En nous inspirant de Cantoral et Frafàn (2004), nous leur avons proposé une consigne sous la forme d'un scénario à commenter. Un exemple de consigne donnée en annexe. Différentes fonctions ont été proposées aux étudiants, en essayant de tenir compte de leurs difficultés mesurées lors du premier semestre (complexité croissante de 1 à 5) :

1. $f\colon x \mapsto ln(-x+3)$ $\quad f\colon x \mapsto ln(-2x+3)$
2. $f\colon x \mapsto ln(-x^2-2x+3)$ $\quad f\colon x \mapsto ln(-x^2+2x+3)$
3. $f\colon x \mapsto ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$ $\quad f\colon x \mapsto ln\left(\frac{1+x}{-x+2}\right)$
4. $f\colon x \mapsto ln\left(\frac{x^2+2x-3}{-x+2}\right)$ $\quad f\colon x \mapsto ln\left(\frac{-x^2+2x+3}{x+2}\right)$
5. $f\colon x \mapsto ln\left(\frac{-x^2+2x+3}{x^2+x-2}\right)$ $\quad f\colon x \mapsto ln\left(\frac{-x^2-2x+3}{x^2-x-2}\right)$

Afin de faciliter les calculs pour les étudiants, nous avons choisi de prendre des expressions algébriques comportant des racines entières. La constitution des groupes et l'utilisation de la calculatrice était laissées libres.

Les étudiants pouvaient appréhender la question en utilisant plusieurs registres de représentation au sens de Raymond Duval (1995) :

1. la résolution d'une inéquation dans le registre des écritures algébriques,
2. la résolution d'une inéquation dans le registre de la représentation graphique d'une fonction,
3. l'utilisation d'un tableau de valeurs.

L'utilisation ou non de la calculatrice ainsi que son mode d'utilisation (mode classique, mode graphique, mode table de valeurs) sont laissés au libre choix des étudiants.

Les données recueillies lors de cette première étude n'ont pas permis de développer une analyse détaillée de l'activité mathématique des étudiants. Elle a néanmoins permis de dégager quelques éléments intéressants. Nous avons pu identifier trois types de groupes en fonction des réponses données par les étudiants. Dans le premier type on trouve quatre groupes ayant répondu sans réelle réflexion IR^{+*}. La présence du logarithme a suffi à emporter la décision. Dans le second type, on trouve deux groupes ayant poussé plus loin leurs investigations, sans pour autant aboutir au résultat attendu, mais donnant des éléments pertinents de réflexion. Enfin, quatre des dix groupes, au terme d'une réflexion aboutie, parviennent à déterminer correctement de domaine de définition de la fonction qui leur est proposée. On a relevé l'utilisation de divers registres de représentation (algébrique, représentation graphique, fonctionnel, tableau de valeurs), sans avoir le matériel suffisant pour analyser comment les étudiants les ont articulés. Le niveau de complexité des fonctions a été un élément soit de blocage (lorsque la difficulté était trop importante), soit de réussite lorsque la difficulté était bien adaptée. Enfin, un élément a semblé empêcher la progression d'un des groupes : les racines entières de u, faciles à déterminer. Il semble que cela a attiré les étudiants à ne considérer que les valeurs de x annulant u, faciles à déterminer même par essai-erreur, et à ne pas mener une étude plus approfondie pour u négative.

Pour l'expérimentation proposée dans cette étude, nous avons souhaité restreindre le champ de nos investigations en nous limitant à l'étude de l'impact des registres de représentation : algébrique-graphique pour certains, algébrique-tableau de valeurs pour d'autres. Nous avons pris en compte la difficulté liée à la fonction en adaptant la complexité de la fonction choisie au niveau de chaque groupe d'étudiants et choisi des racines non entières afin de pousser les étudiants à mener une étude approfondie des fonctions considérées.

Conditions expérimentales et recueil de données (année universitaire 2016-2017)

Pour cette expérimentation, les étudiants ont été répartis en groupes de deux, selon leurs affinités. Dix groupes d'étudiants, principalement des binômes, ont travaillé dans le registre des représentations graphiques et huit dans le registre des tableaux de valeurs. Chaque binôme travaille en deux temps sur un énoncé du type :

On donne la fonction suivante : $x \mapsto ln(x^2 - 10x + 20)$

1. Donner son domaine de définition.
2. Tracer sa courbe sur votre calculatrice (ou 2. Construire un tableau de valeurs)

La réponse à la question 1 correspond en fait à celle attendue lors de l'expérience précédente. On s'attend, avec la question 2, à ce que les étudiants ayant répondu trop vite $]0;+\infty[$ à la première question réagissent à la vue du tracé de la courbe (ou du tableau de valeurs) et reviennent sur leur première réponse. Le travail mathématique des étudiants est analysé à l'aide des ETM.

Une troisième question, plus générale, sur le domaine de définition de *ln(u(x))* n'a été posée qu'après, à l'oral :

3. Quel est le domaine de définition de *ln(u(x))* ?

On attend ici que le travail réalisé lors de la résolution des deux premières questions induise une réflexion conduisant à dépasser la réponse erronée $]0;+\infty[$. Lors de cette étape, le travail mathématique des étudiants est étudié une seconde fois, en lien direct avec les questions de recherche explicitées ci-dessus.

Afin de tenir compte du niveau des élèves, nous avons proposé des fonctions de complexité croissante :

$x \mapsto ln(-2x+7)$	$x \mapsto ln(-3x+13)$	$x \mapsto ln(x^2 - 10x + 20)$
$x \mapsto ln(x^2 - 11x + 19)$		$x \mapsto ln\left(\frac{1}{2}x^2 - 6x + 13\right)$
$x \mapsto ln\left(\frac{1}{3}x^2 - 5x + 17\right)$		$x \mapsto ln\left(\frac{1}{2}x^2 - 7x + 21\right)$
$x \mapsto ln\left(\frac{2x-7}{3x-17}\right)$	$x \mapsto ln\left(\frac{2x-5}{3x-13}\right)$	$x \mapsto ln\left(\frac{1}{3}x^2 - 4x + 8\right)$

Lors de cette expérimentation, nous avons recueilli les productions écrites des groupes d'étudiants. Des extraits choisis sont présentés dans cet article. Dans les groupes travaillant dans le registre graphique, les étudiants pouvaient utiliser une calculatrice graphique. Dans les autres groupes, une calculatrice simple leur était fournie afin de ne pas avoir d'interférence entre le mode tableau de valeurs et le mode graphique (l'interférence du mode tableau de valeurs sur le mode graphique avait été jugé peu probable, ce qui s'est vérifié). Ce choix a induit une difficulté dans le recueil des données : les étudiants travaillant dans le registre graphique n'ont que très peu reporté la courbe sur le papier alors que les tableaux de valeurs ont été régulièrement remplis. Il a donc été difficile d'étudier l'impact du registre graphique.

ANALYSE DES RESULTATS

Le travail mathématique personnel des étudiants est analysé à l'aide des ETM. Afin de distinguer l'analyse *a priori* de l'analyse des données recueillies, il semble pertinent de parler d'ETM personnels attendus pour les premiers et d'ETM personnels effectifs pour les seconds.

Analyse *a priori* - ETM personnels attendus

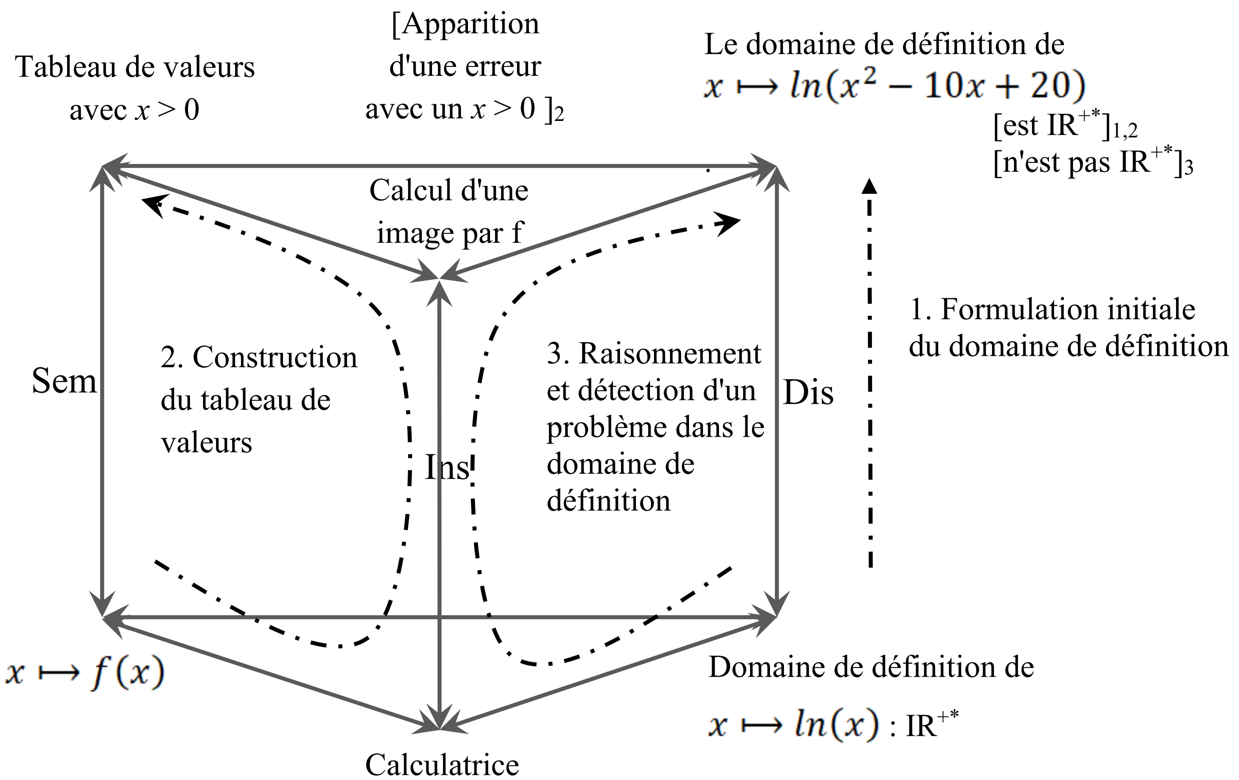


Figure 1 : ETM pour les questions 1 et 2, étapes 1 à 3

Dans la première étape du travail, correspondant aux questions 1 et 2, on s'attend à ce que certains étudiants commencent par répondre que le domaine de définition est IR^{+*}. La question 2 a pour objectif de les amener à constater par eux-mêmes les incohérences et donc à interroger leur réponse à la question 1. Une circulation possible attendue dans les différents plans des ETM, pour la condition mettant en jeu des tableaux de valeurs, est proposée sur la Figure 1 :

1. Le domaine de définition de $x \longmapsto ln(x)$ est IR^{+*} donc celui de *f* est aussi IR^{+*}. Circulation le long de l'axe **Dis**.
2. Construction du tableau de valeurs à partir de valeurs de *x* positives. Circulation dans **Ins-Sem**.
3. Apparition d'une valeur impossible. **Raisonnement** pour détecter un problème de domaine de définition. Circulation dans **Ins-Dis**.

et sur la Figure 2 :

4. Construction du tableau de valeurs à partir de valeurs quelconques (positives et négatives) de *x*. **Découverte** de valeurs "interdites" aussi bien positives que négatives. Circulation dans **Ins-Sem**.
5. **Formulation** de $x^2 - 10x + 20 > 0$. Circulation dans **Sem-Dis**.

Dans le plan épistémologique des ETM, le référentiel comprend la connaissance du domaine de définition de la fonction logarithme et la connaissance du domaine de valeurs de x^2-10x+20, l'artéfact la calculatrice et le représentamen $x \longmapsto f(x)$. Dans le plan cognitif, on trouve la preuve du domaine définition (correcte dans l'étape 5 mais incorrecte dans l'étape 1 décrites ci-dessus), le calcul d'images de certaines valeurs par f comme construction et le tableau de valeurs comme visualisation de la fonction.

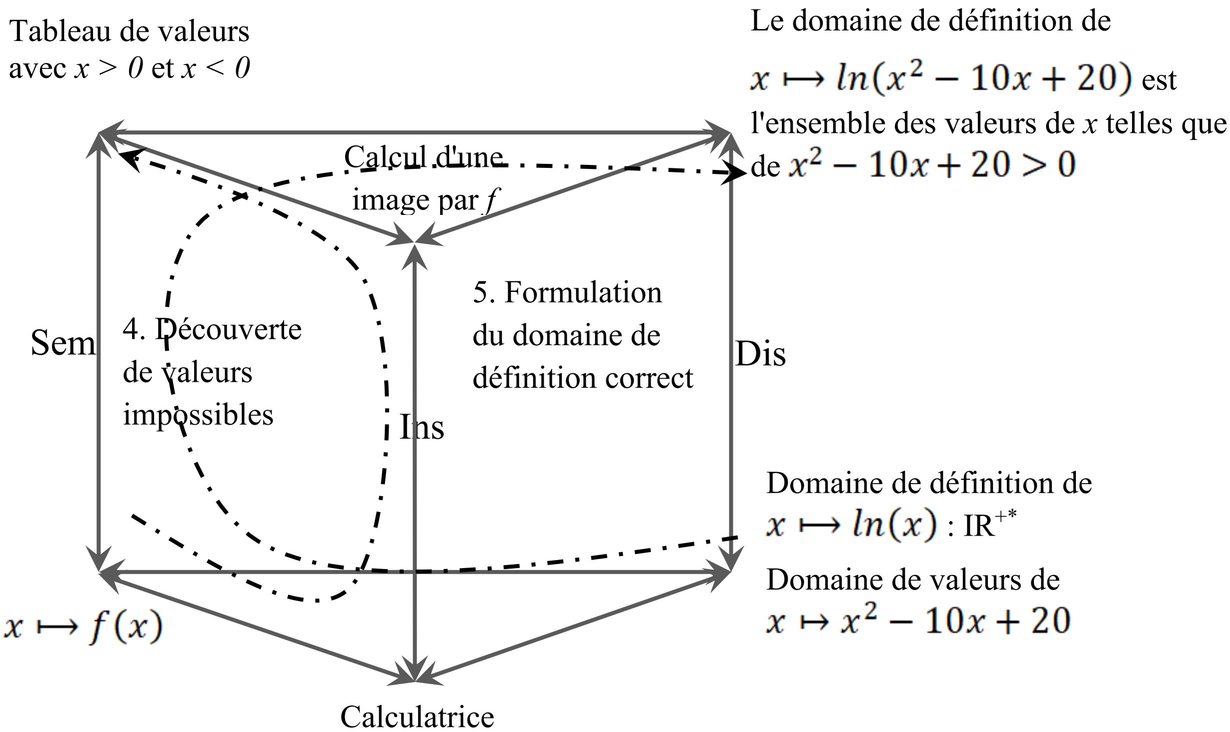


Figure 2 : ETM pour les questions 1 et 2, étapes 4 et 5

Cette analyse montre des circulations dans tous les plans de cet ETM. On est bien face à un travail mathématique complet : toutes les dimensions et tous les plans de l'ETM sont activés pendant le travail des étudiants.

Dans la seconde étape du travail, correspondant à la question 3, voilà une circulation attendue possible :

1. **Découverte** de la généralisation dans le plan **Sem-Ins**.
2. **Raisonnement** sur $u(x) > 0$ dans le plan **Ins-Dis**.
3. **Formulation** de la propriété complète dans le plan **Sem-Dis**.

Dans l'étape de découverte de la généralisation, l'exemple donné par $x^2 - 10x + 20 > 0$, obtenu dans le cas particulier traité par l'étudiant dans les questions 1 et 2, devient représentamen et le tableau de valeur construit précédemment devient l'artéfact. Ces changements de statut d'un objet (ici l'inéquation et le tableau de valeur) paraissent être des marques tangibles de l'évolution de la pensée de l'étudiant. En l'occurrence, l'exemple $x^2 - 10x + 20 > 0$ que l'étudiant a résolu lors des phases 1 et 2 est le point de départ de la généralisation. Il lui permet, en s'appuyant sur le tableau de valeurs généré lui aussi lors de l'élaboration de la réponse à la question 2, de concevoir un tableau de valeurs générique ne faisant intervenir que le signe de $u(x)$, information pertinente pour répondre à la question 3. De là, l'étudiant peut visualiser la condition permettant de déterminer le domaine de définition de la fonction *ln(u(x))*. Ce travail s'effectue dans le plan Sem-Ins (étape 1). Il lui reste alors à expliciter son raisonnement dans le plan Dis-Ins (étape 1). Enfin, il peut formuler dans le plan Sem-Dis la condition assurant l'existence de *ln(u(x))* (étape 3).

Analyse des réponses des étudiants- ETM personnels effectifs

Nous avons recueilli les réponses de 18 groupes d'étudiants (binômes en général et quelques trinômes, soit 38 productions), 10 (soit 20 productions) ayant travaillé dans le registre des représentations graphiques et 8 (soit 18 productions) dans celui des tableaux de valeurs.

Le premier résultat que l'on peut noter est que seuls trois étudiants donnent IR^{+*} comme domaine de définition en réponse à la question 1. C'est beaucoup moins que l'année précédente où il y en avait 4 sur 10. Deux facteurs semblent pouvoir expliquer ce résultat : (i) une meilleure adaptation de la difficulté des fonctions proposées ou (ii) une prise en compte plus nette par l'enseignant des difficultés rencontrées par les étudiants sur cette question et une meilleure sensibilisation lors du cours. Les trois étudiants sont dans le groupe des représentations graphiques. Néanmoins, un des groupes ne donne pas de courbe et se lance dans une résolution algébrique de l'inéquation $-2x+7 > 0$. Il arrive à la conclusion donnée sur la Figure 3. Ces erreurs de calcul, qui finalement se compensent, mérite d'être signalée même si elle ne rentre pas dans le cadre de cet article. A la question 3, l'étudiant répond $]0;+\infty[$, sans commentaire.

$$-2x+7 > 0$$
$$-2x > -7$$
$$x > \frac{7}{2} = 3,5 \qquad]-\infty ; 3,5[$$

Figure 3 : Exemple de détermination algébrique de domaine de définition

Dans l'autre groupe, la démarche en reste à l'état du constat par le lecteur du document, sans explications explicites. Aucun commentaire n'accompagnant le graphique de la Figure 4, il est difficile de mesurer sur le rendu papier si les étudiants ont fait le lien entre les questions 1 et 2. L'enregistrement est à cet égard intéressant. En regardant la courbe, une étudiante dit " le truc qui est un peu bizarre c'est qu'en fait on a trouvé que /// on a trouvé que heu c'était défini que sur IR+* mais là on voit bien fait qu'elle est pas définie sur IR+* en fait [...] donc heu on s'est plantées". Il y a bien un lien avec la question 1. Mais le problème n'est pas résolu. Dans la réflexion sur la question 3, la fonction traitée en 1 et 2 est reprise, ce qui donne lieu à la réflexion suivante : "si on reprend la même fonction que juste avant donc ça veut dire que *f* de *x* est égale // a deux *x* moins sept sur trois *x* moins dix-sept / ça veut dire que là il faut forcément que le *x* / *y* soit positif /// soit *x* strictement positif pour que ça marche /// pour que *f* de *x* / *y* soit strictement positif". Les étudiantes continuent à identifier $f(x)>0$ avec $x>0$. En référence aux figures 1 et 2 que l'on peut aisément transposer au cas de la représentation graphique, on voit apparaitre l'étape 3 de détection de l'erreur dans la réponse à la question 1. Elle permet d'avancer dans le raisonnement et de trouver graphiquement le domaine de définition. La définition formelle de ce domaine n'est pas donnée à la question 2. A la question 3 (Figure 5). L'étudiant 1 semble n'avoir fait aucun lien entre le signe de *u(x)* (*u* est notée *f*) et le domaine de définition de la fonction globale alors que l'étudiant 2 mène un raisonnement qui commence correctement. Si l'on se réfère aux ETM personnels attendus décrits ci-dessus, la phase 1 de la généralisation est correcte, mais pas la phase 2 et donc pas la phase 3 non plus. Il revient sur le cas particulier de la question 2, ne sait pas le résoudre et se raccroche alors à ce qu'il connait. Une analyse plus détaillée de l'enregistrement audio, combinée avec celui correspondant à la Figure 5 serait à mener pour tenter d'éclaircir ce point.

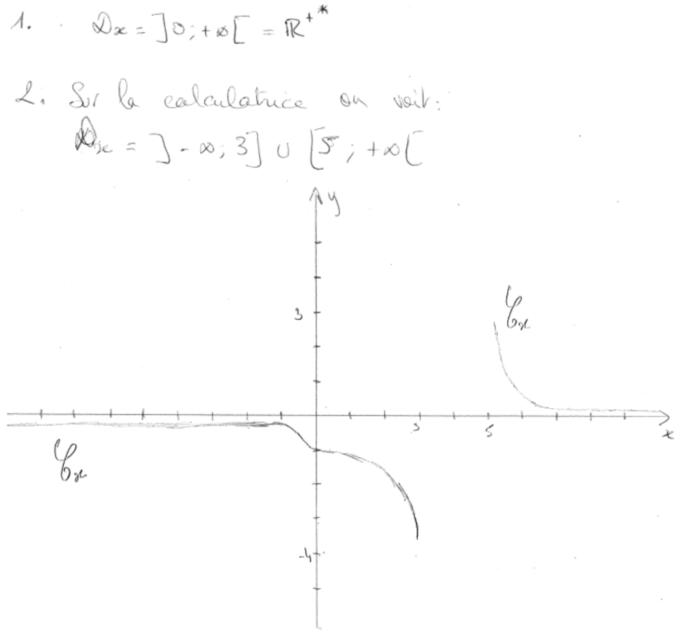
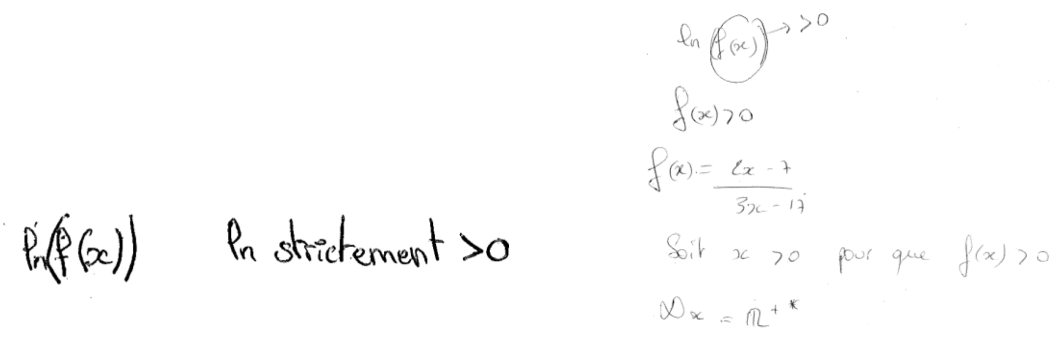


Figure 4 : Détermination graphique du domaine de définition

On peut dresser ici un premier bilan. Ces étudiants accomplissent un travail complet pour la réponse aux questions 1 et 2. Ce travail ne se généralise pas pour la question 3. On peut suggérer que la pauvreté de la rédaction et de l'expression de l'enchaînement des argumentations est une piste à explorer pour permettre aux étudiants d'accéder à la généralisation.



Etudiant 1 Etudiant 2

Figure 5 : Réponse à la question 3

Après ce premier constat, il est intéressant de noter que 24 étudiants sur 38 ont donné une réponse correcte aux questions 1 et 2, tous avec une argumentation correcte. Pour ces étudiants, la phase 1 de l'ETM personnel attendu n'existe pas. Ils entrent directement dans le processus à la phase 2. Parmi ces argumentations, 7 font apparaitre un des registres de représentations proposés (Figure 6, pour la fonction $\ln\left(\frac{-2x+5}{3x-13}\right)$ par exemple). Mais la représentation n'est qu'en appui à un développement algébrique. Pour ces étudiants, on peut penser que l'argumentation algébrique est suffisamment claire et accessible pour ne pas avoir besoin d'une autre représentation.

Finalement, ces étudiants semblent capables de formuler directement un domaine de définition correct dans le plan Sem-Dis. Néanmoins, la qualité de la présentation du raisonnement est souvent assez faible, en particulier lorsque u est de la forme d'une expression du second degré.

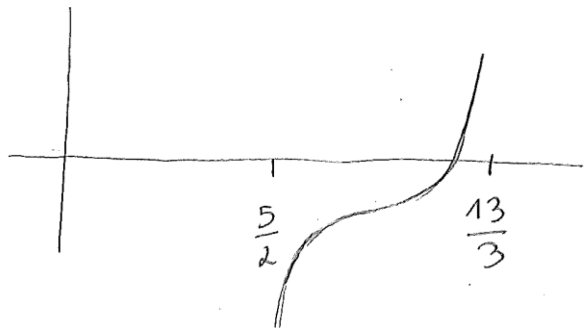
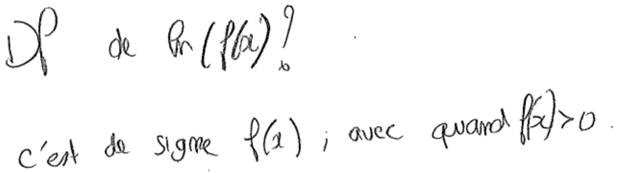
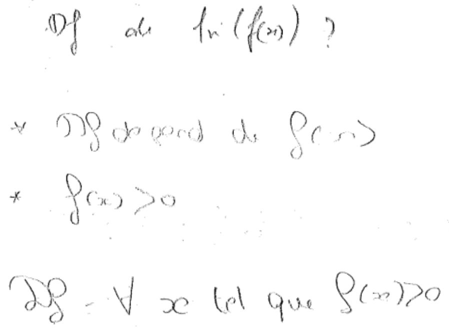


Figure 6 : Détermination du domaine de définition à l'aide d'une courbe

Concernant la question 3, les résultats sont très différents. 17 étudiants donnent une argumentation qui semble correcte, par exemple sur la Figure 7.a. Elle est néanmoins très succincte. Parmi eux, 7 étudiants donnent explicitement un domaine de définition. 2 sont corrects (Figure 7.b), 5 sont incorrects (exemple Figure 8). On mesure ici que les étudiants n'ont pas conscience que le domaine de définition est un ensemble de valeurs de x. Le concept même de domaine de définition n'est pas clair chez ces étudiants. Ils n'en ont qu'une image mentale (David et al.,1981, p 151) floue, associée à un intervalle ou une union d'intervalles sans préciser clairement que c'est la variable x qui est concernée. Le concept d'ensemble image semble absent et se confondre avec celui de domaine de définition, les amenant à cette conclusion erronée. L'explication très minimale donnée par les étudiants les amène à avoir une vision erronée de la notion de domaine de définition. Il semble donc difficile de laisser le bénéfice du doute à tous ceux qui s'en arrêtent à l'argument sans donner explicitement un domaine de définition.



(a)



(b)

Figure 7 : Argumentation correcte en réponse à la question 3

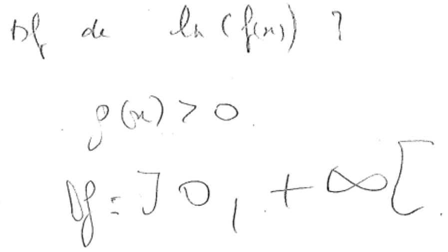


Figure 8 : Argumentation correcte et réponse incorrecte à la question 3

C'est en fait la phase 3 de l'étape 2 de la circulation dans l'ETM personnel attendu qui pose un problème aux étudiants. Une explication peut provenir de la pauvreté de l'expression : la réponse n'est pas donnée sous la forme d'une phrase explicitant que le domaine de définition est un ensemble contenant la variable et tel que $f(x)$ existe.

15 étudiants ne donnent ni argument ni réponse à la question 3 et 6 étudiants donnent des arguments incorrects (Figure 9). Parmi ces étudiants, 2 ont apporté une réponse correcte à la question 2 qu'ils n'ont pas su généraliser.

Figure 9 : Argumentation incorrecte en réponse à la question 3.

Parmi les 24 étudiants ayant répondu correctement à la question 2, 11 ne donnent pas d'argumentation pour la question 3. Ces étudiants n'ont en fait pas abordé cette question. On note aussi 4 étudiants qui n'ont pas répondu correctement à la question 2 et qui ont donné une argumentation correcte à la question 3.

Pour ces 24 étudiants, on peut dresser le bilan suivant :

- La résolution des questions 1 et 2 semble être acquise comme en témoigne l'absence de la phase 1 de l'ETM personnel attendu pour ces étudiants. Les autres phases sont présentes. On est donc bien en face d'un travail mathématique complet.
- Le passage à la généralisation, question 3, ne se fait pas correctement. Les phases 1 et 2 sont souvent correctes, mais la formulation finale est la plupart du temps incorrecte.
- Comme pour le premier groupe d'étudiants, on peut émettre l'hypothèse qu'une rédaction plus détaillées permettrait d'accéder dans de meilleures conditions à la généralisation.

Enfin, on peut noter qu'une comparaison entre les deux registres utilisés (graphique d'un côté et tableau de valeur de l'autre) aurait pu être intéressante. Malheureusement, les étudiants ayant travaillé dans le mode graphique n'ont la plupart du temps pas reporté sur papier les courbes obtenues sur leurs calculatrices ; le travail de comparaison n'a donc pas pu être mené.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

L'expérimentation présentée dans cet article cherche à répondre à la question de recherche présentée plus haut : Quel est le travail mathématique mis en œuvre par des étudiants de DUT QLIO lors de la détermination du domaine de définition d'une fonction du type *ln(u(x))* ? S'agit-il d'un travail mathématique complet ? Nous avons proposé une analyse des ETM personnels des étudiants en définissant des ETM personnels attendus et des ETM personnels effectifs. Les premiers rendent compte d'une analyse *a priori* de la tâche proposée aux étudiants, les seconds du travail effectivement réalisé par les étudiants, à partir des différentes productions recueillies. Ce cadre nous a permis de formuler plusieurs résultats. (i) Les ETM personnels attendus ont montré que la tâche proposée permet aux étudiants de générer un travail mathématique complet. (ii) Les ETM effectifs montrent que les étudiants produisent un travail mathématique complet pour les questions 1 et 2[3]. (iii) La plupart des étudiants ne produisent pas un travail mathématique complet pour la question 3. Dans ce cas, on peut émettre l'hypothèse que la rédaction assez limitée pour les réponses aux questions 1 et 2 peut expliquer la difficulté de la généralisation.

Afin de renforcer ces résultats, il faudrait proposer de nouvelles expérimentations. Deux voies sont envisageables. La première serait de pousser les étudiants à expliciter d'avantage leur démarche. On peut faire l'hypothèse qu'alors on obtiendrait une plus grande capacité de généralisation, qui pourrait être mesurée grâce aux

[3] S'ils ont donné une réponse correcte à la question 1, ils n'ont plus besoin de cette première étape du travail. La question de la complétude du travail n'est alors pas à étudier pour eux.

changements de statut de certains objets d'un ETM à l'autre. Néanmoins, le niveau d'abstraction dans l'étude de $x \longmapsto ln(u(x))$ pourrait s'avérer être trop élevé pour ces étudiants. Une seconde voie serait de leur proposer d'autres fonctions explicites et de mesurer leur taux de réussite.

Un point est intéressant à mentionner pour prolonger ce travail : le changement de statut des objets dans les ETM entre les questions 1 et 2 d'une part et la question 3 d'autre part, lorsqu'une connaissance devient un représentamen (c'est le cas par exemple du tableau de valeur d'une fonction spécifique qui passe du statut de visualisation à artefact). Ce nouveau statut pourrait être un indicateur de l'intégration de cette connaissance dans les outils disponibles par l'étudiant. Cet aspect est présent dans les ETM personnels attendus (donc potentiellement dans les ETM effectifs) mais il semble qu'on ne le retrouve pas dans les ETM personnels effectifs, ce qui expliquerait les difficultés rencontrées par les étudiants pour la question 3. Ce point mériterait d'être analysé plus en détail.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Ministère de l'éducation nationale. (2008). Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, programme du collège, http://www.education.gouv.fr/pid20484/special-n-6-du-28-aout-2008.html

Ministère de l'éducation nationale. (2009). Bulletin officiel spécial n°30 du 23 juillet 2009, Mathématiques classe de seconde, http://cache.media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf

Ministère de l'éducation nationale. (2011). Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011, programme de terminale scientifique. http://media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

Cantoral Ricardo, Farfán Rosa María. (2004). La sensibilité à la contradiction : logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 24 (n° 2.3) pp. 137-168.*

Douady Régine. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *RDM, 7 2, p. 5 31.*

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. *Bern. Peter Lang.*

Kuzniak A., Tanguy D., Elia I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education (vol 48), p. 721-737.*

Kuzniak A., Montoya E., Vandebrouck F., Vivier L. (2015). Le travail mathématique en Analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction. *Cours 2, Ecole d'été, Brest.*

Meel, David E. (1999). Prospective Teachers' Understandings: Function and Composite Function. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*.

Tall David and Vinner Shlomo. (1981). Concept-image et Concept-définition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics (vol. 12) p.151-169.*

ANNEXE - SCENARIO A COMMENTER

Nicolas travaille avec ses étudiants sur l'étude de fonctions, dont la fonction logarithme. Ils ont compris que son domaine de définition est $]0;+\infty[$. Ils en connaissent même la dérivée… Nicolas souhaite maintenant aller un peu plus loin et composer cette fonction avec d'autres. Voilà le dialogue introductif de cette séance entre Nicolas et Frédéric, un élève attentif et travailleur :

> Nicolas : Je vous propose d'étudier la fonction suivante : $f: x \mapsto \ln\left(\frac{x^2+2x-4}{x+2}\right)$
>
> Frédéric : On a vu que la dérivée était $\frac{u'}{u}$. Et comme ici u est un quotient sa dérivée $\frac{u'v-uv'}{v^2}$…
>
> Nicolas : C'est vrai, mais par quoi commence-t-on lorsqu'on veut étudier une fonction ?
>
> Frédéric : On cherche le domaine de définition. Ici c'est facile, c'est $]0;+\infty[$ à cause du logarithme : il est toujours positif…

Que pensez-vous de l'affirmation de Frédéric ? Vous tenterez d'aboutir à une position commune. Vous étayerez cette position par des arguments que vous serez amenés à défendre devant l'ensemble de vos camarades.

GÉNESIS SEMIÓTICA Y PASAJES DISCRETO-DENSO-CONTINUO

Denis Tanguay[a], Analía Bergé[b] et Gustavo Barallobres[a]

[a]Université du Québec à Montréal (UQAM), [b]Université du Québec à Rimouski (UQAR), Québec, Canada

tanguay.denis@uqam.ca, Analia_Berge@uqar.ca, barallobres.gustavo@uqam.ca

Resumen. En este texto presentamos el análisis de diálogos y producciones escritas recogidos durante una experimentación en la que dos estudiantes del profesorado de matemática de nivel secundario resolvieron el Problema del punto fijo*. Nos interesamos a una reorganización del problema en cinco tareas, especialmente al efecto que haya podido provocar el hecho de incluir en el enunciado el conjunto de números de hasta cinco cifras decimales. A través de este análisis, discutimos el problema de la conceptualización de las estructuras numéricas discretas, densas y completas al extender el conjunto de los racionales al conjunto de los números reales, especialmente desde el punto de vista de la coordinación de representaciones gráficas y propiedades teóricas de los conjuntos en cuestión.*

Résumé. Le présent texte porte sur l'analyse des dialogues et productions écrites issus d'une expérimentation au cours de laquelle deux étudiantes en formation des maîtres devaient résoudre le Problème du Point fixe*. Nous nous intéresserons à l'aménagement du problème en cinq tâches, notamment à l'effet qu'a pu provoquer le passage intermédiaire par l'ensemble des nombres à cinq décimales et moins, et aux inflexions du travail mathématique suscitées par les indices et pistes proposées par les chercheurs. À travers cette analyse, le problème de la conceptualisation des structures numériques discrètes, denses et complètes est discuté, quand il s'agit d'étendre l'ensemble des rationnels à l'ensemble des nombres réels, notamment du point de la coordination entre représentations graphiques et propriétés théoriques des ensembles en cause.*

***Palabras claves**: Punto fijo, Discreto, Denso, Continuo, Conceptualización de los números reales, Representationes, Congruencia semántica.*

CONTEXTO

Existen resultados mostrando que muchos estudiantes al inicio de la universidad no pueden definir el conjunto de los números reales con precisión, ni describir las características o las razones que hacen que este conjunto sea un dominio adecuado para desarrollar y validar el trabajo con funciones. De hecho, los conocimientos relativos a la definición de un número real de los estudiantes que han participado en diversas investigaciones (por ejemplo Zachariades et al., 2013; Vergnac et Durand-Guerrier, 2014) son muy limitados: las características atribuidas a los números racionales e irracionales son confusas y ciertas incoherencias aparecen cuando deben tratarse los desarrollos numéricos infinitos (ver Vivier, 2015; Bronner, 1997…). En

Francia y en Quebec, el conjunto de los números reales no es definido formalmente ni en la escuela secundaria ni en el preuniversitario. En el primer ciclo universitario, **R** es raramente construido y su existencia es habitualmente dada por hecho; sus propiedades son deducidas de un axioma "que cae del cielo", por ejemplo el axioma del supremo[1]. De este modo, las ideas imprecisas de los estudiantes sobre **R** perduran (ver, por ejemplo, Bergé, 2016, 2010). El presente artículo se inscribe en un proyecto de investigación cuyo objetivo es elaborar y experimentar situaciones y secuencias de aprendizaje y de enseñanza permitiendo transformar las concepciones de **R** que los estudiantes construyen, de manera a permitir integrar en dichas concepciones, afirmaciones y definiciones matemáticamente (más) precisas.

El problema del punto fijo

En su artículo de 2016, Durand-Guerrier afirma: "we hypothesize that this fixed-point problem is a good candidate for the design of a didactical situation (in the sense of Brousseau, 1998) aiming at fostering the understanding, by undergraduate students, of the relationships between discreteness, density-in-itself[2] and continuity". El problema del punto fijo al cual hace referencia es el que se encuentra en el artículo de Pontille y col. (1996), del cual reproducimos a continuación el enunciado.

> "Consideremos una función f de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, siendo n un número natural diferente de 0. Suponiendo que f es creciente, mostrar que existe un entero k tal que $f(k) = k$. Este entero k es llamado punto fijo.
>
> Estudiar posibles generalizaciones a los siguientes casos, siendo f creciente :
>
> f : $\mathbf{D}\cap[0\,;1] \rightarrow \mathbf{D}\cap[0\,;1]$, siendo **D** el conjunto de números decimales.
>
> f : $\mathbf{Q}\cap[0\,;1] \rightarrow \mathbf{Q}\cap[0\,;1]$, siendo **Q** el conjunto de números racionales.
>
> f : $[0\,;1] \rightarrow [0\,;1]$, o cualquier otra generalización."
>
> (El problema del punto fijo en Pontille, Feurly-Reynaud et Tisseron, 1996).

De los procedimientos y soluciones producidos por los estudiantes del preuniversitario y analizadas en el artículo de Pontille y col., Durand-Guerrier retoma los elementos más relevantes, agregando un corto resumen de la experimentación – del mismo problema propuesto pero esta vez en el marco de un programa de formación de profesores – realizada con estudiantes más avanzados a los cuales se les había presentado previamente la construcción clásica de **R** basada en las cortaduras de Dedekind.

---

[1] Todo subconjunto no vacío de **R** y mayorado admite supremo.

[2] Durand-Guerrier hace referencia aquí a la densidad para una relación de orden. Entre dos elementos cualesquiera de un conjunto ordenado denso para el orden, existe un tercer elemento (diferente de los otros) y, por consecuencia, una infinidad. Se trata de una densidad intrínseca que debe distinguirse de la densidad tipológica extrínseca, aquella de un subespacio topológico en el espacio en el cual está incluido.

Análisis del problema y de sus soluciones

Retomemos sucintamente algunos elementos del análisis, tanto a priori como a posteriori, de Durand-Guerrier (2016). El problema en el cual f es una función creciente de $\{1, 2, ... , n\}$ en sí mismo puede tratarse mediante argumentos ad hoc, basados en la recurrencia. En efecto, es suficiente constatar que para k comprendido entre 1 y n, la imagen $f(k)$ es forzosamente enviada a $\{k + 1, ... , n\}$, lo que plantea un problema para la imagen de n. El caso de la función creciente $f: [0 ; 1] \to [0 ; 1]$ es típicamente el caso que debe resolverse por el axioma del supremo (ver nota 1), aplicado a $E = \{ x \in [0\,;1] \mid x \leq f(x)\}$, subconjunto de $\mathbf{R}$ que contiene 0 y que es mayorado por 1. Se prueba de este modo que el supremo de E es forzosamente un punto fijo. En el caso de $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$ y $\mathbf{Q}\cap[0 ; 1]$, siendo $\mathbf{D}$ el conjunto de números cuyo desarrollo decimal es finito (que llamaremos simplemente "decimales"), no es posible aplicar el axioma del supremo ya que estos conjuntos densos para el orden "$\leq$" no son completos. Los argumentos "ad hoc" no se adaptan tampoco de $\{1, 2, ... , n\}$ a $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$ o a $\mathbf{Q}\cap[0 ; 1]$ ya que no existe la idea de "sucesor[3] " de un elemento dado en $\mathbf{D}$ y $\mathbf{Q}$. De hecho, es posible encontrar en $\mathbf{D}$ o $\mathbf{Q}$ funciones crecientes sin punto fijo, a partir de funciones con valores reales para las cuales los puntos fijos (en $\mathbf{R}$) no pertenecen a $\mathbf{D}$ o a $\mathbf{Q}$; por ejemplo, la función afín $g(x) = \frac{7}{10}x + \frac{1}{10}$ que tiene un punto fijo en $\frac{1}{3}$, o la función cuadrática $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}$ para la cual uno de los puntos fijos es $\frac{2-\sqrt{2}}{2} \in [0\,;1]$.

De un punto de vista didáctico, Durand-Guerrier propone como hipótesis inicial que el problema "… es adecuado para llevar a los estudiantes a interrogar el modelo implícito de una dicotomía entre lo discreto y lo continuo (p. 339, nuestra traducción), y para comprender mejor las relaciones entre lo discreto, lo denso [densidad intrínseca para el orden] y lo continuo."

El procedimiento previsible – y de hecho observado, tanto en los estudiantes preuniversitarios como en los estudiantes de profesorado – para abordar la segunda tarea del problema consiste en adaptar para los decimales la prueba elaborada para las funciones crecientes que van de $\{1, 2, ... , n\}$ en sí mismo; lo que puede probablemente, según Durand-Guerrier, conducir a los estudiantes a cuestionarse sobre la existencia de sucesor de un número decimal dado. Un buen dominio de la propiedad de densidad debe, en principio, permitir concluir que un número decimal (respectivamente racional) no tiene "sucesor" en $\mathbf{D}$ (respectivamente en $\mathbf{Q}$), pero estas relaciones no son específicamente trabajadas en la escuela secundaria o en el preuniversitario, y es posible pensar que no serán fácilmente tomadas en consideración. Cuando a la densidad en $\mathbf{D}$ está bien identificada como obstáculo para adaptar la prueba de $\{1, 2, ... , n\}$ a $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$, ciertas cuestiones relativas al infinito deberían surgir, especialmente la confrontación entre la densidad y la continuidad, y

[3] Ya que la relación $\leq$ no es un "buen orden" en **D** ni en **Q**.

en paralelo, la dificultad de concebir que el conjunto denso de los decimales no permite cubrir todos los puntos de la recta real (Durand-Guerrier, 2016, p. 352).

A posteriori, del tratamiento del pasaje de de $\{1, 2, ..., n\}$ a $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$ hecho por los estudiantes del preuniversitario en Pontille y col. (1996), Durand-Guerrier retiene en primer lugar el debate entre dos estudiantes (op. cit., pp. 22-23) sobre la cuestión de saber si hay “el decimal más pequeño” [no nulo] y si “existe una distancia fija entre dos decimales” (una misma distancia entre cada número decimal y el “siguiente”), dos cuestiones estrechamente ligadas a la idea de sucesor. La respuesta negativa a estas cuestiones terminará por imponerse y conducirá a uno de los estudiantes a concluir que “si no hay distancia, entonces es como una línea recta”. Posteriormente, los estudiantes inician una discusión sobre la naturaleza de esta recta; para uno de ellos, la ausencia de distancia implica necesariamente que los puntos están “conectados” y para el otro, la idea de que los puntos formen una recta no es incompatible con el hecho de que entre cada par de decimales, “hay siempre una distancia” (no nula). Estas discusiones son acompañadas de esbozos gráficos como apoyo a los razonamientos y a los intercambios de ideas; del punto de vista del modelo ETM, es posible decir que el trabajo se realiza esencialmente en el plano [Sem-Dis] (ver por ejemplo, Kuzniak y col., 2016a, §2.3), mediante esbozos gráficos utilizados como verdaderos herramientas semióticas en el sentido de Kuzniak y col. (2016b), ubicándose de este modo del lado del eje semiótico. Como lo señala Durand-Guerrier, estos esbozos confrontan con la dificultad de representar la “recta decimal” y de rendir cuenta gráficamente a la vez de la densidad y de la no completitud. Mostramos a continuación algunas tentativas…

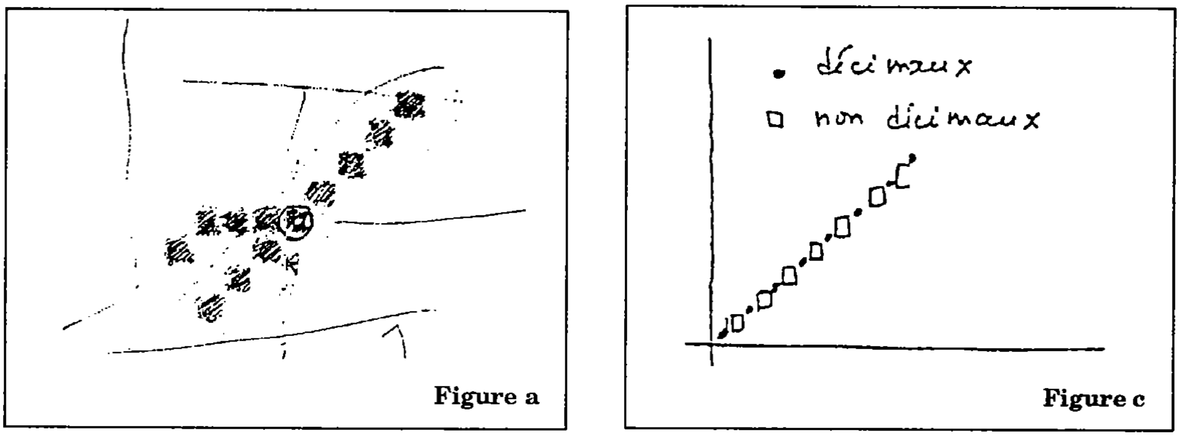


Figura 1: Representaciones de funciones de D en D, en Pontille y col. (1996)

Siempre desde el punto de vista de ETM, es posible pensar que la no pertinencia de los gráficos para representar las propiedades de los objetos del referencial teórico-numérico – Duval (1988) hablaría de no congruencia semántica entre las representaciones – dificulta la coordinación entre el trabajo en el plano semiótico y el trabajo en el plano discursivo de la prueba. La dificultad se manifestará también en el registro del lenguaje, una vez constatado que entre dos decimales, es posible siempre intercalar un tercero, especialmente el que se encuentra en el medio entre los dos:

"¿Pero se pueden poner tantos [puntos decimales] que al final, si ponemos todos los puntos que están en el medio de otros dos, en un momento dado, todos los puntos formarán una recta?" (Pontille y col., p. 28). El profesor interviene y su intervención puede ser analizada como una manera de redirigir el trabajo del lado del eje discursivo, llamando la atención sobre los reales, conjunto a considerar como referencia (teórica) en el cual incluir los decimales, ya que el recurso a aspectos gráficos – confinado en la génesis semiótica – es inadecuado para representar esta inclusion.

Reformulando el problema en términos de "saltos" y de "agujeros" en la recta real, los estudiantes orientarán su trabajo hacia la búsqueda de una función que cumpla el rol de contraejemplo, un trabajo en el cual los aspectos discursivos y semánticos serán ahora mejor coordinados, especialmente mediante manipulaciones sintácticas sobre funciones representadas en el registro simbólico.

El problema del punto fijo modificado

Como fase preliminar del proyecto de investigación mencionado en la introducción, que tiene por objetivo la concepción y experimentación de situaciones y secuencias de enseñanza centradas sobre la conceptualización de los números reales, hemos retomado la experimentación de la situación del punto fijo con dos pares de estudiantes, uno formado por dos estudiantes de segundo año de la universidad en el programa de estudios actuariales y el otro formado por dos estudiantes finalizando su formación universitaria destinada a enseñar matemáticas en la escuela secundaria (BES-maths, UQAM[4]). Para cada par de estudiantes, hemos organizado dos encuentros cercanos de dos horas cada uno, como parte de la experimentación. Cada encuentro ha sido grabado en formato video y todas las producciones escritas, incluyendo los borradores, han sido recolectadas. En lo que sigue, nos centraremos en el trabajo del par de estudiantes del BES-maths, ya que han sido más interesantes para nuestros propósitos. Las estudiantes serán identificadas por las letras E_1 y E_2. Los diálogos están traducidos de francés. El análisis de las producciones de los estudiantes y de las intervenciones de los investigadores será realizado en el marco de ETM (cf. Kuzniak et al., 2016a).

Referencial teórico

En principio, describiremos el referencial teórico (*theoretical frame of reference*, o simplemente *referential* en Kuzniak y col., 2016a, §2.1) en el cual las estudiantes pueden apoyarse para resolver el problema. En la formación de los futuros profesores (BES-maths, UQAM), los conjuntos de números y sus propiedades teóricas son tratados y trabajados principalmente durante tres cursos (cada uno de 45 horas a lo largo de 15 semanas): *Estructuras numéricas*, *Teoría de ecuaciones* e *Iniciación al análisis*. Ninguna construcción formal de **R** es abordada en estos cursos. La

[4] Programa universitario de 4 años, aproximadamente 40 cursos, un poco más de la mitad destinados a las matemáticas y a la didáctica de las matemáticas y el resto a la formación psico-pedagógica y a la formación práctica.

completitud de **R** es garantizada por el axioma del supremo cuya introducción es contextualizada y justificada por la necesidad de dar un sentido a los desarrollos decimales ilimitados.

Típicamente, las sucesiones de desarrollos decimales truncados de $\sqrt{2}$ son propuestas para poner en evidencia que en **Q**, las sucesiones monótonas limitadas pueden no converger. Se explica a los estudiantes que el axioma del supremo permite evitar este problema en **R** y dar sentido a todos los desarrollos infinitos, aún aquellos no periódicos: a cada desarrollo decimal le corresponde un número real, definido como el supremo del subconjunto de **D** constituido por los truncamientos del desarrollo en cuestión. El axioma del supremo es a continuación utilizado para demostrar el teorema del valor medio y el teorema según el cual la imagen a través de una función continua de un conjunto cerrado y acotado es un conjunto cerrado y acotado, teorema esencial para demostrar el teorema de Rolle que será presentado en el contexto de las derivadas.

Nunca se enuncia explícitamente la densidad de los decimales o de los racionales, posiblemente porque las relaciones de orden no son objeto de un estudio sistemático, siendo la relación usual $\leq$ (en **N**, **Z**, **Q**, **R**...) considerada como evidente. Sin embargo, la propiedad de densidad es trabajada en los cursos de didáctica (distintos a los tres cursos mencionados). Finalmente, hay que mencionar que si bien se introducen definiciones generales para las nociones de función, dominio, codominio, imagen, elementos, etc., las funciones trabajadas son casi siempre funciones reales de una variable real. Más globalmente, el vocabulario y los resultados (elementales) de la teoría de conjuntos son introducidos, pero fundamentalmente como útiles de redacción y de comunicación: no se realiza un estudio sistemático como el que se efectuaba en los curriculums preuniversitarios de los años 70. En resumen, es posible afirmar que para las dos estudiantes del BES-maths, los elementos necesarios para la resolución del Problema del punto fijo son conocimientos "movilizables" sin necesariamente estar "disponibles", en el sentido de Robert (1998).

Tareas intermedias y pistas para preparar un ETM idóneo

Las restricciones de tiempo han obligado a los investigadores a anticipar eventuales bloqueos y a interrogarse sobre modificaciones posibles de las tareas:

> When do some blockages arise in the mathematical work? How can they be characterized? What is their origin? What kind of teachers' adaptation and changes allows keeping (or not) a complete and coherent mathematical work? (Kuzniak & Nechache, 2018, p. 2708)

Hemos querido orientar rápidamente las reflexiones de las estudiantes respecto a la primera de las dos cuestiones esenciales del problema, susceptibles de provocar bloqueos: el pasaje de lo discreto a lo denso y el pasaje de lo denso a lo continuo. La primera cuestión surge cuando se intenta adaptar la solución de las funciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en $\{1, 2, \ldots, n\}$ a las funciones de $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$ en $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$. Sabiendo que las estructuras del conjunto **D** no son objeto de un estudio sistemático – ¿**D** es cerrado para + y ×? ¿Es un cuerpo? ¿Hay un número infinito de elementos en $\mathbf{D}\cap[0\,;\,1]$? etc. – y que los decimales aparecen en un marco sobre todo de cálculo, hemos decidido facilitar el pasaje de lo discreto a lo denso proponiendo una tarea intermedia, la tarea b) de la figura 2 que reproduce la hoja con las consignas.

Consideremos una función f de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ en $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, siendo n un número natural diferente de 0. Suponiendo que f es creciente, es decir que para todos x_1, x_2 pertenecientes $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$,

$$x_2 > x_1 \implies f(x_2) \geq f(x_1).$$

a) Mostrar que existe necesariamente un entero k tal que $f(k) = k$. Este entero k es llamado punto fijo.

Estudiar posibles generalizaciones a los siguientes casos, siendo f creciente en su dominio:

b) $f : \mathbf{D}_5\cap[0\,;\,1] \rightarrow \mathbf{D}_5\cap[0\,;\,1]$, siendo $\mathbf{D}_5$ el conjunto de números cuyo desarrollo decimal tiene como máximo 5 decimales no nulos.

c) $f : \mathbf{D}\cap[0\,;\,1] \rightarrow \mathbf{D}\cap[0\,;\,1]$, siendo $\mathbf{D}$ el conjunto de números decimales, es decir el conjunto de números cuyo desarrollo decimal es finito.

Por favor, dejar trazos de los procedimientos empleados, incluso de los dibujos,

Figura 2: Consignas dadas en el primer encuentro

En el segundo encuentro, hemos dado una 2da hoja en la que se agregaban las tareas d) y e), es decir las generalizaciones a las funciones crecientes de $\mathbf{Q}\cap[0\,;\,1]$ en sí mismo y de $\mathbf{R}\cap[0\,;\,1]$ en sí mismo, respectivamente.

Hemos pensado que el pasaje por $\mathbf{D}_5$ ayudaría a explicar cuestiones relativas a $\mathbf{D}$, de manera que las distinciones entre las estructuras de $\{1, 2, \ldots , n\}$ y $\mathbf{D}$ sean más rápidamente identificadas. Se trata de enriquecer el referencial en el cual, para las estudiantes en cuestión, ni el conjunto $\mathbf{D}_5$ ni el conjunto $\mathbf{D}$ tienen un status teórico bien establecido. El siguiente pasaje, con una ligera duda en la voz de E_1, muestra que la simple cuestión de saber si hay un número infinito de elementos en $\mathbf{D}\cap[0\,;\,1]$ no fue evidente:

E_1: Bueno, no sé al mismo tiempo, para este caso [marca el item c sobre la hoja, E_1 y E_2 reflexionan en paralelo en los casos $\mathbf{D}_5$ y $\mathbf{D}$], tengo una duda [en lo que respecta a extender a $\mathbf{D}$ el argumento que habían producido para $\mathbf{D}_5$], puesto que… puesto que… el conjunto de números en los que el desarrollo decimal es finito, es … bastante infinito como conjunto de números.

En el caso de un bloqueo implicando $\mathbf{D}\cap[0\,;\,1]$ et $\mathbf{Q}\cap[0\,;\,1]$, para guiar la búsqueda de una función contraejemplo, habíamos previsto que el investigador podría proporcionar alguna de las siguientes figuras como pistas, la primera figura para el ítem c) y la segunda para el ítem d). Pero ninguna de las dos pistas ha sido utilizada.

Del punto de vista de ETM, es posible pensar que la información dada por estas pistas, más que enriquecer el referencial, hubiera facilitado la circulación del plano semiótico hacia el plano discursivo de la prueba, a través la ilustración en el registro gráfico de las propiedades teóricas a considerar.

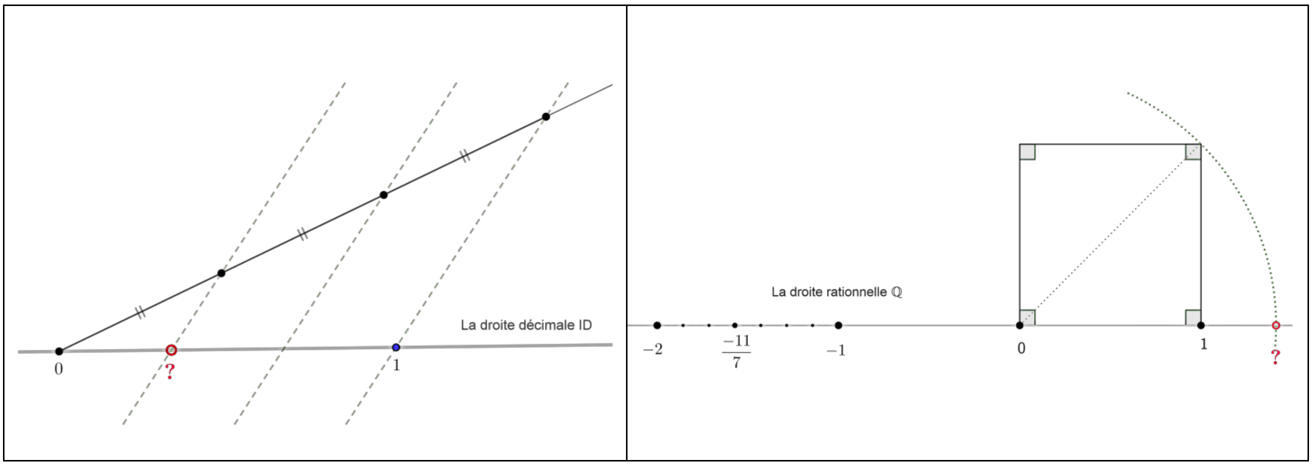


Figura 3: Las dos figuras que podrían ser utilizadas como pistas

Para la tarea e), generalización a las funciones de [0 ; 1] en [0 ; 1], habíamos previsto, en caso de bloqueo, que el investigador recordara el axioma del supremo y que diera a las estudiantes el enunciado. El investigador debía también sugerir, según la evaluación del tiempo restante, el análisis del subconjunto E del dominio: $E=\{x \in [0\,;1] \mid x \leq f(x)\}$. Esto ha sido hecho en la experimentación, en la cual quedaba menos de una media hora cuando la tarea e comenzó a ser abordada por las estudiantes. Del punto de vista ETM, es posible pensar que se trata de intervenciones directas sobre el referencial teórico.

Hechos salientes de los procedimientos de resolución de E1 et E2

Presentaremos algunos elementos del análisis a posteriori de la experimentación realizada con el par de estudiantes del BES-maths. Estos análisis corroboran globalmente las conclusiones de Durand-Guerrier (2018, 2016). Examinaremos, sin embargo, ciertos elementos más específicos puestos en evidencia por los procedimientos y las producciones de E_1 y E_2. Notamos, en un primer tiempo, que la génesis semiótica a ocupado un lugar muy importante en el trabajo, mediante la omnipresencia de dibujos, esbozos gráficos como soportes al razonamiento y a la comunicación. No menos de 32 pequeños esbozos gráficos han sido producidos sobre las hojas que sirven de borradores y sobre las que se utilizaron para redactar las soluciones.

El razonamiento que permite resolver la tarea a) ha sido encontrado relativamente rápido. Lo que es para destacar, algo inesperado, es que el problema, aún para los enteros, ha sido rápidamente transpuesto al contexto general de las modelizaciones gráficas de funciones de una variable real, interpretando la restricción “sin punto fijo” como no pudiendo crear la primera diagonal, la línea de ecuación $y = x$. De aparecer esta representación, la esperábamos solamente para las tareas c) o d).

Del punto de vista de ETM, podemos analizar esto como un cambio de un $\text{ETM}_{\text{aritmético}}$ a un $\text{ETM}_{\text{función}}$; podríamos también hablar de un cambio de marcos, en el sentido de Douady (1986). Este cambio es probablemente motivado por el hecho de que el plano semiótico, casi reducido al registro simbólico en el $\text{ETM}_{\text{aritmético}}$, es más fértil en el $\text{ETM}_{\text{función}}$ en el cual el recurso a las representaciones figurales es promovido. Proponemos los tres primeros esbozos producidos por E_1 et E_2 sobre una misma hoja.

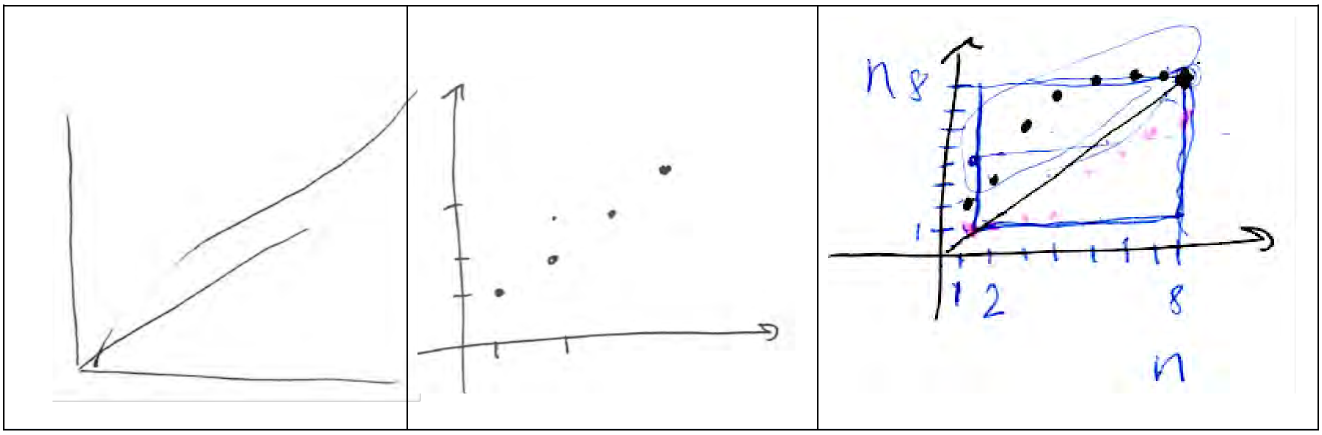


Figura 4: Tres primeros esbozos en un borrador

E_1 y E_2 razonan por el absurdo y suponen que una función sin punto fijo es posible. Ellas acuerdan que las imágenes serán todas por encima o todas por debajo de la diagonal para no cruzarla. E_2 dice: "si tu decides no cruzar … en el centro…, porque no tienes elección, bien tienes al menos el primero o el último" (muestra con su lápiz los puntos (1 ; 1) y (8 ; 8) en el tercer esbozo). E_1 está de acuerdo, "así es", pero agrega "pero hay que probarlo". Sin formularlo en el lenguaje de los ETM, las estudiantes son conscientes de que su trabajo sobre las representaciones en los registros figurativo y lingüístico no es suficiente y que una prueba más formal es necesaria. Ellas producirán esta prueba pero la gestión sintáctica en el registro simbólico será difícil, y la formulación "siguiendo el mismo razonamiento" tomará la forma de recurrencia. La resolución de la tarea b) (ver Figura 2) ha sido casi inmediata.

E_1: "¿Nos sirve saber cuántos hay? [elementos en $\mathbf{D}_5 \cap [0 ; 1]$]. Porque una vez que sepamos esto, no cambia nada. Claramente hay una cantidad…[E_1 y E_2 al mismo tiempo] ... finita!". E_1 sugiere 10 000, pero se ponen de acuerdo posteriormente afirmando que son 100 000, luego 100 001. No tienen ninguna duda que el razonamiento es el mismo que para la tarea a). Pero en paralelo, piensan en la tarea c), lo que hace que reflexionen sobre los ajustamientos posibles a $\mathbf{D} \cap [0 ; 1]$.

Es por lo tanto la resolución de la tarea c) que llevará más tiempo y provocará reflexiones y discusiones centradas esencialmente sobre la configuración de los puntos de $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$, constituyendo el gráfico de f en el plano cartesiano. E_1 y E_2 permanecerán un buen momento convencidas que el argumento se transpone de $\mathbf{D}_5 \cap [0 ; 1]$ a $\mathbf{D} \cap [0 ; 1]$. La evidencia que se impone es ante todo gráfica y E_2

acompaña de hecho sus explicaciones con trazos de un bosquejo. Parte de su dificultad a identificar los elementos a reconsiderar en el razonamiento se puede explicar por un encierro en la génesis semiótica, con representaciones que son inadecuadas para rendir cuenta de las propiedades teóricas de los conjuntos de referencia.

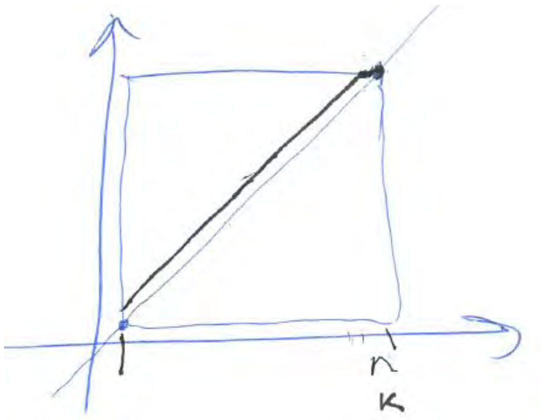


Figura 5: Gráfico de *f* que va siguiendo la diagonal

> *E_2*: Pero tenemos… aun si es infinito vas a tener… el mismo problema. […] Para el primer punto no puedes empezar en esta esquina [quiere decir en (0 ; 0)], hay que arrancar más arriba. No queda otra [posibilidad] que empezar más arriba [que la diagonal, que ella ha trazado en el cuadrado $[0;1]\times[0;1]$, ella empieza a trazar el gráfico de *f* que va siguiendo la diagonal]. No importa, aunque esté bien pegadito pegadito, al final no queda otra [posibilidad] que…[y agrega el punto (1 ; 1), bien marcado, al final del gráfico].

E_1 sugiere que el gráfico podría también estar completamente por debajo de la diagonal. E_2 aclara que para ello habría que comenzar en (0 ; 0), que sería entonces un punto fijo. E_1 está de acuerdo. Intentan formalizar el razonamiento, pero se les presentan algunas dudas, como la que sigue, que perdurará un tiempo, sin saber si E_2 ha comprendido.

> *E_1*: Lo que me molesta un poco es el caso infinito, ya sé que se trata de… pero éstos [y señala $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$ con la lapicera] no se pueden ordenar. [E_1 sabe que $\leq$ es un orden en **D** pero lo que seguramente quiere decir es que los elementos de $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$ no pueden escribirse como elementos de una lista ordenada, algo que ella expresa mediante la palabra “ordenar”. La idea que aparece es la ausencia de un “siguiente” en **D**, algo que se ve confirmado en los diálogos posteriores.]

El diálogo entre E_1 y E_2 se desarrolla rápidamente y no es todo el tiempo explícito, lo que hace que el investigador C intervenga en este momento ya que no está seguro si E_1 y E_2 están trabajando con el conjunto $\mathbf{D}_5\cap[0 ; 1]$ o con $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$. A pedido de C, E_1 y E_2 sintetizan y aclaran sus conclusiones sobre $\mathbf{D}_5\cap[0 ; 1]$. Nuevos bosquejos y diálogos surgen a propósito del caso $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$. E_2 cree que ha logrado aclarar su razonamiento, y lo expone :

*E*2: Si no queremos tener este punto [ella hace un circulito alrededor del punto (1 ; 1) sobre el bosquejo de la Figura 6, en donde están dibujados hasta ese momento solamente los ejes y la diagonal], ni este otro [y hace un circulito alrededor del (0 ; 0)], … tenemos $f(0)$ que es mayor que 0, $f(1)$ que es menor que 1 [ella añade dos cruces X, una arriba de (0 ; 0) y otra debajo de (1 ; 1) y escribe en el margen $f(0) > 0, f(1) < 1$], pero para juntar esos dos puntos no te queda más remedio que cruzar [la diagonal].

*E*1: Si, tal cual… va a tener que pasar por acá [muestra el punto de cruce en la diagonal con su lapicera].

*E*2: [en voz muy baja] ¿y eso cómo se escribe? [Risas, ya que por "escribir" quieren decir "formalizar por escrito"]… Trayendo… [Hace el gesto de juntar sus manos, se sobreentiende hacia el punto de cruce (*K* ; *K*) de la diagonal, ver Figura 6]. Acá funciona, acá también [traza las dos flechas que se ven en la figura, desde cada X hacia el punto de cruce de la diagonal], a ver, achicando el intervalo [traza barras verticales a los dos lados del punto fijo *K*] pasa que al final tenemos el mismo valor… [escribe "*K*" en cada uno de los ejes, recordemos que en el enunciado del problema se designa al punto fijo mediante la letra *k*].

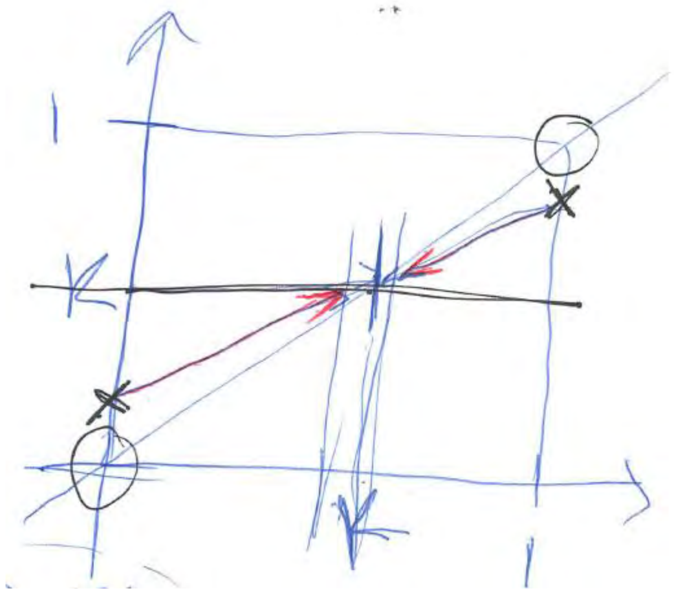


Figura 6: Bosquejo del gráfico de *f* cruzando la diagonal en (*K* ; *K*)

El investigador, sin estar seguro de lo que ha sido o no aclarado, interviene preguntando sobre una característica del conjunto de referencia que la representación no permite ver necesariamente: "¿este conjunto, es finito?". E_1 responde sin dudar, "no, los desarrollos decimales son finitos, pero el conjunto es infinito". Continúa una discusión en la que E_1 y E_2 tratan de trabajar con "límites", tratando de "encerrar" al punto fijo, siempre buscando formalizar un razonamiento para el cual un argumento gráfico no es suficiente. Este intento de recurrir al trabajo con límites constituye una reorientacion del trabajo hacia el eje discursivo de la prueba, algo que hará tomar consciencia de que los límites necesitan estar situados en **R** y que en **D** un argumento en término de "límites" puede no funcionar.

E_1: Bueno, no estoy segura que se puede [utilizar límites]. Me es difícil…es que no tenemos una función [quiere decir una función de variable real] …no hay nada de "tiende a algo"…

Estas reflexiones dispararán la idea de que el punto de cruce con la diagonal podría "ser Pi"; claramente π es mencionado por E_2 como un irracional emblemático, sin prestar atención al hecho de que no se encuentra entre 0 y 1.

E_2: Porque yo pienso… si no quieres cruzar, te tienes que quedar del mismo lado [de la diagonal]. Si aquí estas abajo [señala la X a la derecha de la Figura 6], vas a estar debajo [muestra la punta de flecha que empieza de esa X y que va hasta el extremo del intervalo marcado por las barras verticales], si aquí estas por arriba, te quedas por arriba [muestra lo mismo a la izquierda de las barras verticales]. Estamos primero por arriba y después por abajo, asi que al final no queda otra [quiere decir no queda otra posibilidad que cruzar]. Pero…[…] no es finito acá, no son los reales, tal vez podría cruzar, pero no por un punto. […] Ahora no funciona pero… teóricamente podría…

E_1: Espera, espera, ¿qué quieres decir con que "no son los reales"?

E_2: Digamos que… porque estamos en el conjunto de los decimales, imagínate que cruza en *Pi*… Bueno, entonces en el conjunto de los decimales va a funcionar [quiere decir, es posible pasar del otro lado de la diagonal sin cruzarla].

E_1: No, no anda, quiere decir que antes funcionaba porque… estábamos en los enteros.

Nos interesa detenernos en este pasaje de diálogo: "como no es finito acá" muestra que E_2 no ha olvidado que están en **D** y no en $\mathbf{D}_5$, y que entonces no se trata de una cantidad finita sino mas bien de una infinidad de valores a considerar. Ella continúa dándose cuenta que, como "no son los reales" podría haber cruce en un punto de coordenadas no decimales. Ella dice "tal vez podría cruzar, pero no por un punto", más tarde ella mencionará un punto "que no existe" para designar un número que no pertenece a **D**. La frase "Ahora no funciona" se aclarará más tarde, veremos que esta eventualidad de un punto de cruce no perteneciente a $\mathbf{D}\times\mathbf{D}$, no es para ella posible en ese contexto, posición en la que ella permanecerá por un buen tiempo.

La última intervención de E_1 es también sorprendente, inesperada; por lo que sabemos esta reacción no se ha manifestado en las experimentaciones de Pontille et al. (1996) ni en las de Durand-Guerrier (2018, 2016). E_1 acaba de comprender que el argumento de E_2 permitiría pasar del otro lado de la diagonal sin cruzarla; más precisamente, cruzando en un punto de coordenadas no decimales. Sin embargo esto le preocupa porque en principio, ya que π no es entero ni perteneciente a $\mathbf{D}_5$, el mismo argumento debería invalidar el resultado – y los argumentos que E_1 et E_2 habían propuesto – para las funciones de $\{1, 2, ... , n\}$ en $\{1, 2, ... , n\}$ o de $\mathbf{D}_5\cap[0 ; 1]$ en $\mathbf{D}_5\cap[0 ; 1]$. El trabajo completado anteriormente en el eje discursivo de la prueba es cuestionado por esta posibilidad, esencialmente gráfico, de un punto de cruce no perteneciente al conjunto que se está considerando; la estudiante está preocupada por esta ruptura de coherencia entre las génesis semiótica y discursiva. Percibimos aquí una dificultad en distinguir y considerar, mediante argumentos de diferente naturaleza cada vez, los casos *discreto*, *denso*, *continuo.*

El argumento del cuadrado alrededor del agujero

El diálogo continuará por un buen tiempo. La búsqueda de una función que sirva como contraejemplo no comienza porque ambas estudiantes están convencidas de que el resultado es verdadero para las funciones de **D** en **D**. E_1 piensa que, ya que para cada una de las tareas los conjuntos de salida y de llegada son los mismos, es posible adaptar el argumento utilizado en las tareas a) y b): si al comienzo se prescinde de algún valor del conjunto de llegada, no habrá al final manera de evitar que un valor del dominio sea aplicado en sí mismo o afuera del conjunto. Ella dirá "si nos corremos, se pasa", subyace aquí la dificultad de concebir una función inyectiva de un conjunto en una parte propia, algo que caracteriza a los conjuntos infinitos. E_2 por su parte sostendrá el razonamiento "del cuadrado" un poco difícil de entender, para el cual, a partir de la mención a las separaciones de un cienmilésimo, tenemos la hipótesis de que ha sido provocado por el trabajo en $\mathbf{D}_5 \cap [0\ ;\ 1]$.

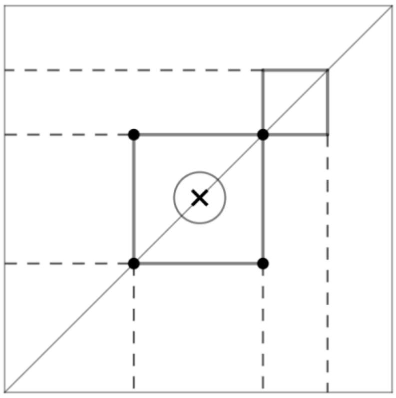


Figura 7a: Dos cuadrados dibujados inicialmente

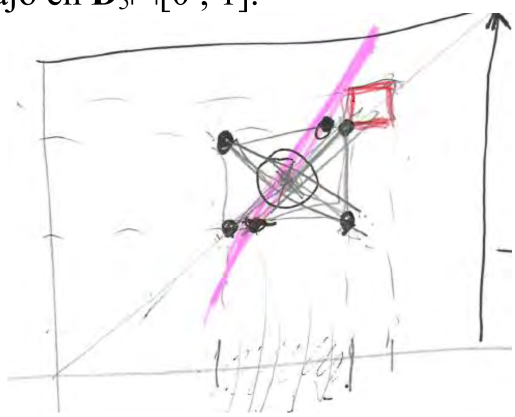


Figura 7b: E2 completa la figura a medida que ella explica el "argumento del cuadrado"

E_1: Me cuesta darme cuenta… porque acá no podrá cruzar [caso b)] y acá, podrá [caso c), ya que un cruce en $(\pi\ ;\ \pi)$ ha sido considerado], pero ya no sé por qué no en c) [dado que E_2 sigue sosteniendo que el cruce no es posible en el caso c)]

E_2: El caso c)… este… es lógicamente, las separaciones entre los puntos del dominio… no son constantes necesariamente, no? En a) y b) sí lo son, tienes un cienmilésimo entre punto y punto [hace referencia a la tarea b)]. Lo que yo decía del cuadrado, tienes un cuadrado porque las separaciones son constantes. Pero al mismo tiempo … [piensa] … ...vas a tener *siempre* un cuadrado, porque aunque … aunque tengas esto y esto [traza dos cuadrados de medidas diferentes en la Figura 7a], …, nomás tienes un cuadrado más chiquito o más grande, porque no tienes la misma separación.

El razonamiento de E_2, que se extiende en un largo diálogo, es difícil de descifrar. Explica por qué una eventual "función contraejemplo" teniendo un punto fijo, por ejemplo en $x = \frac{1}{3}$, no sería posible. Resumimos este "razonamiento del cuadrado": sea f : $\mathbf{D}_5 \cap [0 ; 1] \to \mathbf{D}_5 \cap [0 ; 1]$ una función que tiene un punto fijo en $x = \frac{1}{3}$. Se considera el cuadrado cuyos vértices son (0,33333 ; 0,33333), (0,33334 ; 0,33333), (0,33333 ; 0,33334) y (0,33334 ; 0,33334), al que $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ pertenece. Para que el gráfico de f, que está por encima de la diagonal, pueda cruzar la recta de ecuación $y = x$ en $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$, es necesario primero que llegue a una de las cuatro esquinas del cuadrado y que siga después una de sus dos diagonales. Pero la diagonal de pendiente positiva presupone la existencia de dos otros puntos fijos, en el dominio, y la diagonal de pendiente negativa corresponde a una función decreciente. En ambos casos la función contraejemplo no verifica las hipótesis y no es entonces válida. Eso es lo que explica E_2 pero sin dar con precisión los vértices del cuadrado, lo que vuelve su explicación difícil de seguir. Su explicación además supone – y es aquí en donde las conceptualizaciones aparecen de manera muy interesante – que el razonamiento ¡se conserva para f de $\mathbf{D} \cap [0 ; 1]$ en $\mathbf{D} \cap [0 ; 1]$! Al final de su explicación el investigador C interviene:

C: Pero esto [la prueba de que la función contraejemplo no es válida] es para el caso b), tú la has hecho para el caso discreto, el cuadrado del que tú hablas… [iba sin duda a decir algo así como "es sólo posible en el caso discreto"]

E_2: ¡No! ¡Es para el caso c)! Hay igualmente agujeros, números que no existen [que están fuera del dominio] pero para decir que cruza en un punto que no existe, hay que mirar los puntos que están alrededor…

C: Hay un número infinito de puntos alrededor…

E_2: No, [risas]. Para mí, no. No, porque hay un agujero, entonces hay una cota… hay un agujero entonces hay dos [valores del dominio] alrededor [hace un gesto: las manos paralelas mostrando dos "cotas" a cada lado de un "agujero"].

C: Entre dos decimales hay siempre…

E_2: No puedo nombrarlos pero siempre hay dos números de modo que no hay ninguno [salvo el número-agujero, se entiende] entre los dos…[ella duda] no es cierto?

C y E_1: En los decimales, no.

E_2: ¿Aunque no los nombremos? ¿Tan chiquitos como uno quiera?

E_1: Siempre puedes agregar algo después…no puedes elegir dos nombres decimales entre los que no hay nada.

E_2: No puedes elegirlos, no puedes nombrarlos pero… puedes decir que existen… [duda]. ¿No puedes ni siquiera decir que existen? Si hay un agujero, si puedo decir ahí no hay números [decimales], eso quiere decir que hay dos [gesto con los dedos, queriendo decir “a cada lado del agujero”].

E_1: No, no creo…no puedes tener dos números decimales entre los que no hay nada [en el conjunto de los decimales].

Es interesante aquí analizar las reflexiones de las estudiantes a través de la coordinación entre génesis en el plano [Sem-Dis]. E_2 interpreta las representaciones gráficas mediante una concepción de la recta que puede pensarse “atomista” (Nuñez et al., 1999) al considerar dos puntos en la frontera del “agujero” por el que ella quiere hacer pasar el gráfico de f: si hay un agujero, ese agujero tiene (gráficamente) un borde y según la concepción atomista de E_2, hay necesariamente dos puntos de cada lado constituyendo ese borde. Es posible que la caracterización de la recta como el conjunto de puntos que la constituyen haya podido reforzar esta concepción. Al mismo tiempo E_2 es consciente de que el hecho de mencionar esos puntos del borde en el discurso de prueba requiere que se los pueda designar. Para E_2, la imposibilidad de aislar esos puntos se restringe a la dificultad de nombrarlos, algo que ella evita diciendo “No puedes elegirlos, no puedes nombrarlos pero… puedes decir que existen…”

E_1 parece más distante de la génesis semiótica y las representaciones gráficas, y más cercana a la génesis discursiva. Ella no pierde de vista las características de los números naturales que es necesario considerar aquí, características que forman parte de la sintaxis en el registro simbólico – entonces cayendo debajo del referencial teórico – y que las representaciones gráficas tienden a desdibujar. Otra muestra de la proximidad de su trabajo al eje discursivo es la reacción que tiene frente a la posibilidad de que el gráfico de f cruce la diagonal en un punto de coordenadas irracionales: se preocupa inmediatamente a propósito de las tareas a) y b), ya que piensa que esta posibilidad descalificaría las pruebas propuestas para esas tareas.

A continuación de la aclaración que hace E_1 sobre los decimales, esencialmente sobre la propiedad de densidad que debe ser considerada, se va instalando la idea de que una función contraejemplo de $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$ en $\mathbf{D}\cap[0 ; 1]$podría ser posible; sin embargo E_1 y E_2 siguen sin entender cómo ese contraejemplo no sería contradictorio con la solución que han encontrado para las tareas a) y b), algo que les impide avanzar. Una vez más, las representaciones gráficas que ellas mismas han producido les producen confusión y su trabajo permanece confinado a la génesis semiótica. La intervención del segundo investigador, C_2, que se sumó a la experimentación un poco más tarde, tiene por efecto que las estudiantes dejen finalmente de lado el registro gráfico para orientarse hacia la manipulación de representaciones simbólicas de funciones. La intervención de C_2, que pone a las estudiantes a considerar desde el punto de vista teórico de las definiciones lo que significa restringir el dominio y la imagen de una función (consideración que queda oculta en el marco de las representaciones gráficas), favorece que las estudiantes coordinen el trabajo sintáctico a propósito de las expresiones con la búsqueda del contraejemplo, que es el elemento (discursivo) de prueba que se espera producir.

E_2: Es que si esta función existe, si realmente esta función existe, querría decir que [los gráficos de] las dos otras, a) y b), deberían estar formados de puntos en $\mathbf{D}_5$ de esta función?

C_2: Temo decir demasiado pero… no necesariamente en realidad, porque lo que importa es el dominio, la función que ustedes van a construir tal vez no sea una función de **N** en **N**, o de $\mathbf{D}_5$ en $\mathbf{D}_5$, es una función de **D** en **D** pero tal vez no lo sea de **N** en **N**, en ese caso no se contradiría con su solución de a) y b). […] A ver, no quieren tratar de encontrar una función a partir de esta idea?

Las estudiantes se ponen entonces a buscar entre las funciones afines que pasan por $\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ y rápidamente encuentran la función $f(x)=\frac{7}{10}x+\frac{1}{10}$. Sigue un intercambio de a cuatro, en el que C y C_2 buscarán que E_1 y E_2 distingan correctamente las propiedades de **N** y de $\mathbf{D}_5$ que no se satisfacen en **D** – esencialmente el hecho que cada elemento tiene un sucesor – y que hacen que la prueba de la existencia del punto fijo sea posible en **N** y en $\mathbf{D}_5$.

Las tareas d) y e)

Las tareas d) y e) fueron abordadas en el segundo encuentro de la experimentación. Pensando la tarea d), después de varios intentos habiendo asumido que la función pasaría por $\left(\sqrt{0,2}\ ;\sqrt{0,2}\right)$, E_1 y E_2 se dan cuenta de que una función afín no puede ser un contraejemplo ya que requeriría coeficientes irracionales. La búsqueda se orienta entonces a las funciones cuadráticas, pero E_1 y E_2 se enfrentan a la dificultad de "hacer entrar" la imagen de f dentro del intervalo [0 ; 1]. Los investigadores presentes, C_2 y C_3, acuerdan después de unos minutos que esta dificultad es poco importante en relación con lo que se busca movilizar y explican a E_1 y E_2 que pueden buscar un contraejemplo cuya imagen esté contenida en $\mathbf{Q}\cap[0\ ;1]$, $a < b$ arbitrarios. E_1 y E_2 retoman los cálculos casi terminados y producen la función $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{10}$ que posee un punto fijo en $\sqrt{0,2}\notin\mathbf{Q}$ pero que aplica [0 ; 1] en $\left[-\frac{1}{10}\ ;\frac{7}{5}\right]$. Finalmente, considerando el poco tiempo disponible y estimando importante llegar al final de las cinco tareas propuestas y a la secuencia *discreto* → *denso* → *continuo*, C_2 y C_3 hacen recordar a E_1 y E_2 el axioma del supremo, dando su enunciado y dando la pista del subconjunto a considerar para resolver la tarea e), esto es, el conjunto $E=\{\,x\in[0\,;1]\mid x\le f(x)\}$. Mediante preguntas cuidadosamente elegidas, C_2 y C_3 guiarán a E_1 y E_2 hasta la producción de una prueba válida y completa del hecho que el supremo del conjunto E es un punto fijo para f.

CONCLUSIONES

Dos intervenciones de los investigadores han reorientado significativamente el trabajo de las dos estudiantes en la tarea c). En los dos casos, se trató de llevar la atención hacia propiedades teóricas de los objetos que son poco "visibles" (y hasta permanecen ocultas) por las representaciones de las figuras. De ese modo se favoreció una mejor coordinación entre las génesis semiótica y discursiva en el plano [Sem-Dis], en un momento en que el trabajo parecía confinado a la génesis semiótica. Del mismo modo se pueden considerar las pistas que los investigadores tenían preparadas en caso de bloqueo como medios para facilitar la circulación del trabajo entre las génesis, ya sea enriqueciendo el referencial teórico o mediante una ilustración gráfica (eje semiótico) de los elementos teóricos principales. La modificación de la tarea d) mientras era resuelta – modificación que consistió en reducir la condición de obtener la imagen en $[0 ; 1]$ a obtenerla en $[a ; b]$ – puede también ser analizada como una intervención que tenía la intención de sacar el trabajo de un confinamiento. En este caso se evaluó que el trabajo, más bien técnico e instalado en la génesis discursiva, no iba a ser verdaderamente aprovechado, considerando el conocimiento matemático buscado y el tiempo disponible. Se puede suponer que un docente, en una clase moderadamente numerosa, podría realizar intervenciones similares.

Con una mirada retrospectiva, evaluamos que la modificación realizada al enunciado incluyendo la tarea b), esto es, el paso por $\mathbf{D}_5$ como un punto intermedio entre $\{1, 2, ..., n\}$ y $\mathbf{D}$, ha favorecido la explicitación de concepciones de las estudiantes y puesto en evidencia la dificultad que representa la coordinación entre las estructuras numéricas de los conjuntos discretos, densos y continuos en juego formando parte del referencial teórico, y sus representaciones geométrico-figurativas, en las que la intuición se apoya, al mismo tiempo que constituyen un freno para el razonamiento.

El conjunto $\mathbf{D}_5$, rápidamente reconocido por las estudiantes como teniendo la misma estructura que $\{1, 2, ... , n\}$, suscita imágenes[5] cercanas a las que uno puede hacerse de $\mathbf{D}$, y se puede pensar que la imagen del cuadrado que encierra el "agujero" no habría aparecido de no haberse trabajado en $\mathbf{D}_5$. La imagen seguramente se ha cristalizado a raíz de pensar un gráfico de $\mathbf{D}_5\times\mathbf{D}_5$ incluido en $\mathbf{R}^2$.

La noción de *trabajo matemático completo* propuesto en Kuzniak et al. (2016b) se extiende menos fácilmente cuando se trabaja en contextos matemáticos avanzados o más teóricos, debido a la dificultad de situar la génesis instrumental en dichos contextos. Ésta puede sin embargo ser invocada en tales contextos cuando se considera los cálculos (sintácticos) de expresiones como un recurso a los artefactos simbólicos. Aunque Kuzniak et al. (2016b, §2.3) describen los algoritmos relacionados con sistemas simbólicos (por ejemplo el de álgebra preuniversitaria en el

[5] El hecho de proponer números con cinco cifras decimales respondió a la intención de buscar que la separación entre esos números estuviera fuera del alcance de lo que se puede percibir en las escalas usuales.

ETM$_{\text{función}}$) como "herramientas teóricas", también se ha sugerido (Kuzniak et al., 2016b, §2.2; 2016a, §3.1.1) que pueden ser considerados como artefactos relacionados con la génesis instrumental una vez que su validez está bien establecida, y que ya no es más el objetivo del trabajo matemático. En este sentido, podemos evaluar que la intervención de C_2 que hizo que E_1 y E_2 se desbloquearan en la tarea c), provocó, considerando el trabajo sintáctico sobre las representaciones simbólicas que se desencadenó, un movimiento del trabajo tanto hacia el eje discursivo de la prueba como hacia el eje instrumental, entonces un movimiento del plano [Sem-Dis] hacia el plano [Ins-Dis].

Independientemente del modo en que se identifique tal o cual aspecto del trabajo, sostenemos que los momentos claves son aquellos en los que éste circula, se desplaza, no se confina a un solo aspecto de lo que se solicita desde lo cognitivo. Esta metáfora de movimiento, que hace circular el trabajo entre dos o tres ejes (verticales) fijos del modelo ETM, puede ser complementada en términos de *coordinación*: se trataría entonces, desde un punto de vista de algún modo dual, de identificar cómo se organizan las relaciones, los puentes y los acercamientos entre las diferentes perspectivas aportadas por los ejes / las génesis, a lo largo de los cuales son abordados los objetos y procesos matemáticos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a Sabrina Fernandes, a Charlotte Megrourèche, a Fanny St-Onge y a Janet Yang por su participación en este proyecto. La realización de este proyecto (n° 435-2018-1308 del CRSH) ha sido posible gracias al aporte del programa *Savoir* del *Conseil de recherches en sciences humaines du Canada* (CRSH).

REFERENCIAS

Bergé, A. (2016). Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l'apprentissage du système des nombres réels. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (éds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (INDRUM 2016), 33-42. Université de Montpellier, France.

Bergé, A. (2010). Students'perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217-227.

Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 55-80.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Durand-Guerrier, V. (2018). La triade discret, dense, continu dans la construction des nombres. *Actes de la CORFEM*, Nîmes 13-14 juin 2016.

Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 338-361.

Duval, R. (1988). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°1, 7-25.

Kuzniak, A. et Nechache, A. (2018). On dialectic and dynamic links between the Mathematical Working Space model and practice in the teaching and learningof Mathematics. In Dooley, T. & Gueudet, G. (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 10). Dublin, Irlande : DCU Institute of Education & ERME.

Kuzniak, A., Tanguay, D. et Elia, I. (2016a). *Mathematical Working Spaces in Schooling: An introduction*. Dans A. Kuzniak, D. Tanguay et I. Elia (éds.), Mathematical Working Spaces in Schooling, chap. 1. *ZDM Mathematics Education*, vol. 48 (6), 721-737.

Kuzniak, A., Nechache, A. et Drouhard, J.-P. (2016b). Understanding the Development of Mathematical Work in the Context of the Classroom. Dans A. Kuzniak, D. Tanguay et I. Elia (éds.), Mathematical Working Spaces in Schooling. *ZDM Mathematics Education*, vol. 48 (6), 861-874.

Nuñez, R., Lakoff, E. et Matos J. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* (39), 45-65.

Pontille, M.-C., Feurly-Reynaud, J. & Tisseron, C. (1996). Et pourtant, ils trouvent… *Repères-IREM*, n°24, 11-34.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 18 (2), 139-190.

Vergnac, M. et Durand-Guerrier, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique. *Petit x*, n°96, 7-28.

Vivier, L. (2015). *Sur la route des réels, Points de vue sémiotique, praxéologique, mathématique*. Thèse d'habilitation à diriger les recherches (HDR). Université Paris Diderot – Paris 7.

Zachariades, T., Christou, C. et Pitta-Pantazi, D. (2013). Reflective, systemic and analytic thinking in real numbers. *Educational Studies in Mathematics* (82), 5-22.

TRAVAIL MATHEMATIQUE EN CONTEXTE DE MODELISATION. LE CAS D'UNE TÂCHE DE MODELISATION PROBABILISTE « LE JEU DU LIEVRE ET DE LA TORTUE »

Charlotte Derouet[a] & Blandine Masselin[b]

[a]ESPE de Strasbourg, LISEC équipe AP2E, Université de Strasbourg, [b]IREM de Rouen, LDAR, Université Paris Diderot

charlotte.derouet@espe.unistra.fr, blandine.masselin@wanadoo.fr

Cette communication a pour objectif de présenter l'analyse d'une tâche probabiliste de modélisation dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. Nous étudions le travail mathématique produit par des groupes d'élèves en prenant en compte le cycle de modélisation et les paradigmes probabilistes. Nous cherchons à mettre en évidence comment les choix des artefacts mobilisés par les groupes ainsi que les interventions de l'enseignant influencent le travail mathématique des élèves.

Mots-clés *: Modélisation, Espace de Travail Mathématique, tâche, probabilités.*

INTRODUCTION

La modélisation est de plus en plus présente dans les programmes français. Elle est notamment introduite en mathématiques dans le programme du cycle 4 (grades 7 à 9) :

> Les mathématiques occupent une place essentielle dans les enseignements pratiques interdisciplinaires. Elles fournissent des outils de calcul et de représentation (à l'aide de tableaux, de schémas, de graphiques), des méthodes (prenant appui sur différents types de raisonnement) qui permettent d'organiser, de hiérarchiser et d'interpréter des informations d'origines diverses. Elles sont porteuses de concepts et proposent des outils de modélisation. (MENESR & DGESCO, 2015)

La recherche en didactique des mathématiques s'intéresse depuis quelques dizaines d'années à des questions relatives à la modélisation (Kaiser *et al.*, 2011). Dans cet article, nous nous intéressons au cas de la modélisation en probabilités, déjà étudiée par plusieurs chercheurs en France notamment Henry (2001) et Parzysz (2009). Plus spécifiquement, nous étudierons une situation que nous appelons « Le jeu du lièvre et de la tortue ». Dans le contexte de notre étude, l'énoncé de la tâche associée à cette situation est formulé ainsi :

Une course du lièvre et de la tortue s'effectue avec un dé à 6 faces sur un parcours à 6 cases.

					« Arrivée »

Cette course se déroule de la manière suivante.

- *A chaque manche de la course, on lance le dé :*
  - *Si le dé tombe sur 6, le lièvre atteint directement l'arrivée*
  - *Sinon, la tortue avance d'une case.*
- *Le premier à atteindre la case « Arrivée » gagne.*
- *On réalise autant de manche que nécessaire pour avoir un gagnant.*

Qui du lièvre ou de la tortue a le plus de chance de gagner cette course ?

Figure 1 : Enoncé de la tâche donnée aux élèves

Nous considérons ce jeu comme étant lié à une tâche emblématique, c'est-à-dire une tâche « reconnue dans les ETM de référence et utilisée dans les ETM idoines » et qui permet potentiellement de produire un travail mathématique complet et cohérent (Kuzniak, Nechache & Drouard, 2016). De plus, ce jeu renvoie à une situation de modélisation probabiliste particulièrement riche, avec de nombreuses potentialités dans le travail mathématique des élèves, dans le choix du modèle, dans les démarches possibles… Pour ces raisons, ce « jeu » a été choisi comme référence dans les travaux de thèse de Masselin (2019) pour suivre la trajectoire d'une situation d'avatars (Masselin, 2018) au fil d'une formation continue de type « lesson study » adaptée (Masselin & Derouet, sous presse) auprès d'enseignants du second degré (grades 9 et 10). Pour une situation d'enseignement, Masselin (2019) désigne par avatar un énoncé et ses questions choisis à un moment donné par un enseignant ou plusieurs.

La « lesson study » adaptée au contexte français est constituée de trois boucles décrivant la réalisation de la situation dans des classes. La première boucle correspond à la mise en œuvre de la situation par les formateurs (qui interviendront dans la formation) dans leur propre classe et selon leur propre scénario. La seconde boucle correspond à la construction en formation d'une séance autour de la situation, avec une tâche et un scénario arrêtés par le groupe des enseignants en formation ; la séance construite est ensuite expérimentée par un des enseignants dans une classe (qui n'est pas la sienne) et observée par les autres. Puis une troisième boucle correspond à la mise en place de la situation par les enseignants en formation dans leur propre classe. Ces boucles entraînent des modifications dans l'énoncé de la tâche, dans les activités attendues des élèves et dans les scénarios.

Dans cet article, nous nous intéressons à la mise en œuvre de cette tâche emblématique (figure 1) dans une classe de troisième (grade 9) lors de la première boucle de la lesson study. Il faut bien noter qu'il ne s'agit donc pas d'une expérimentation dans le cadre d'une ingénierie didactique où la tâche et sa mise en place ont été travaillées au préalable avec la chercheure. L'enseignante est entièrement libre de ses choix lors de la construction et du déroulement de la séance. L'objectif du chercheur, dans la première boucle de la « lesson study », est de voir comment cette situation vit dans une classe « ordinaire ».

Dans cet article, notre objectif va être d'étudier le travail mathématique effectif de petits groupes de trois élèves lors de cette séance. Nous cherchons à mettre en évidence l'évolution du travail mathématique du groupe d'élèves lors de la résolution de cette tâche probabiliste, en prenant en compte les interactions du groupe avec l'enseignante ainsi que la place des artefacts en jeu. Cela nous permettra notamment de voir comment l'enseignante s'empare de la situation et la fait vivre dans sa classe.

Après avoir présenté certains éléments théoriques et méthodologiques de notre recherche, nous proposerons une analyse *a priori* des différentes démarches qui peuvent être attendues d'élèves de Troisième (grade 9) dans un processus de modélisation autour de la tâche donnée. Cela mettra en évidence la richesse de cette situation du point de vue de la modélisation. Ensuite, à partir de productions écrites et d'extraits vidéo de petits groupes d'élèves, nous analyserons l'évolution effective du travail mathématique de deux groupes d'élèves en particulier. Nous mettrons en évidence le rôle des artefacts utilisés et des interventions de l'enseignante dans cette évolution.

CADRE THEORIQUE

Le modèle des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011), noté ETM, nous permet de repérer la circulation du travail mathématique dans la mise en œuvre d'une tâche dans une classe, et en particulier met en lumière les dimensions privilégiées (instrumentale, sémiotique et discursive). Nous portons, dans cet article, un regard tout particulier sur les artefacts en jeu. Nous distinguons les types d'artefacts suivant :

- Les artefacts matériels (à savoir, ici, un dé),
- Les artefacts numériques de simulations probabilistes, en nous limitant au tableur car il s'agit du seul logiciel rencontré dans la classe de l'expérimentation,
- Les artefacts symboliques comme un arbre de dénombrement, un arbre de probabilité, un tableau...

Notre étude, portant sur une tâche de modélisation, prend en compte le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007), légèrement modifié par Derouet (2016). Ce cycle distingue notamment la situation réelle de la situation modélisée. Il se présente comme suit :

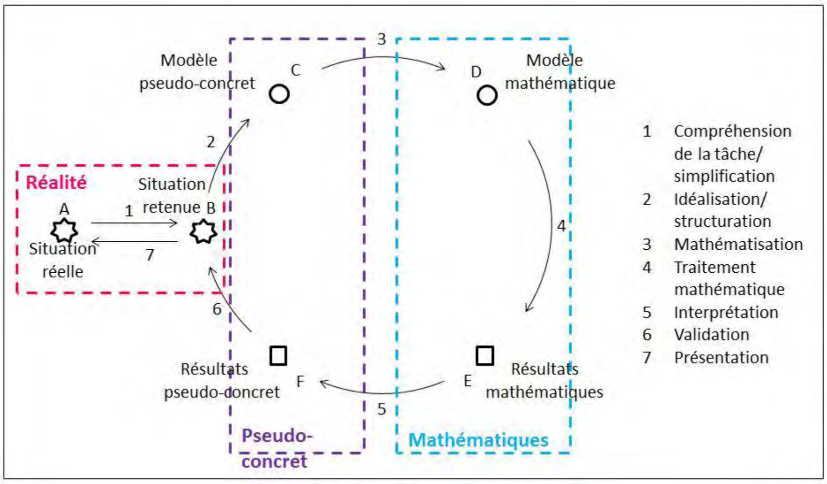


Figure 2 : Cycle de modélisation (d'après Derouet, 2016)

Ce cycle de modélisation est légèrement adapté pour mettre en évidence un « monde pseudo-concret » à l'interface entre la réalité et les mathématiques. En effet, nous supposons que lorsque des simplifications sont apportées à la situation proposée, nous ne nous situons déjà plus dans la réalité contrairement au choix fait dans le modèle de Blum et Leiss (2007). Parzysz parle d'« une réalité simplifiée par la description qui en est faite » (2011).

La tâche de modélisation étudiée se situant dans le domaine des probabilités, il nous paraît important de distinguer les deux approches probabilistes qui se retrouvent dans les programmes de mathématiques français, à savoir l'approche laplacienne, que Parzysz (2011) définit comme l'approche « qui consiste à définir la probabilité d'un événement associé à diverses éventualités comme le rapport du nombre de celles qui le produisent à leur nombre total », et l'approche fréquentiste. Cette dernière se rapporte à « une probabilité objective, résultant de nombreuses observations de [l'] événement » (Parzysz, 2011). Nous ferons aussi référence aux paradigmes probabilistes introduits par Parzysz (2011, 2014), à savoir :

- le paradigme de la « réalité », c'est-à-dire de l'expérience concrète effectivement réalisée à l'aide d'objets matériels (dés, pièces de monnaie, roue de loterie, jetons sortis d'une urne, etc.), mais toutefois avec une perception du caractère aléatoire de la situation (nous ne sommes pas dans la réalité « déterministe »). Nous noterons ce paradigme P0 ;
- le paradigme P1 :

  > issu d'une première modélisation dans laquelle on associe à l'expérience concrète une liste des issues prises en compte et un protocole expérimental précis (expérience pseudo-concrète), assurant que l'expérience pourra être répétée dans les mêmes conditions, la répétition donnant lieu à des observations permettant d'attribuer une chance d'apparition à chacune des différentes issues. (Parzysz, 2014, p. 68) ;

- le paradigme P2, plus formel, fondé sur la notion d'espace probabilisé fini, dont l'horizon théorique est une axiomatique de type Kolmogorov (paradigme P3).

Les conceptions des probabilités (laplacienne ou fréquentiste) ne sont pas rattachées spécifiquement à l'un ou à l'autre des paradigmes.

METHODOLOGIE

Les données

Nos données sont issues de l'observation d'une séance de classe de troisième (grade 9) où l'enseignante, expérimentée (15 ans d'enseignement) et formatrice[1], a d'abord fait travailler les élèves individuellement sur un temps court, puis par petits groupes de trois. Nous nous limiterons ici à l'étude de deux groupes (sur les huit constitués). Leur travail nous semble représentatif de celui des autres groupes. Nous prendrons appui sur des échanges (enseignant-élèves ou entre élèves) lors de la séance de classe, qui ont été filmés puis retranscrits, ainsi que sur des extraits de productions des élèves (brouillon, feuille de synthèse de groupe ou fichier de simulation).

Analyse des données

La tâche étudiée étant une tâche de modélisation, qui plus est en probabilités, laisse un grand nombre de choix possibles pour les élèves. Notre analyse *a priori* présente les différentes démarches qui peuvent être envisagées face à cette tâche en classe de troisième (grade 9), ces choix pouvant être articulés les uns aux autres. Nous distinguons les démarches selon le type d'artefact en jeu. Pour chacune, nous nous demandons dans quel paradigme probabiliste elle se situe, mais aussi à quelle(s) phase(s) du cycle de modélisation elle correspond. Dans l'analyse *a posteriori*, nous précisons l'influence des interventions de l'enseignant ainsi que la place des différents types d'artefacts dans l'avancement du travail mathématique du groupe. Nous verrons ainsi les conséquences sur les dimensions de l'ETM mobilisées et les allers-retours entre les différentes phases du cycle de modélisation.

ANALYSE *A PRIORI* DE LA TACHE DE MODELISATION

Le jeu décrit peut être perçu comme une réalité « arrangée » car ce n'est pas un véritable jeu. Il s'agit en fait d'une situation retenue par une enseignante avec une intention didactique. Dans le cycle de modélisation, nous sommes donc déjà à l'étape B.

Dans ce jeu, mis à part le protagoniste gagnant qui est la variable aléatoire qui nous intéresse explicitement, une seconde variable aléatoire est en jeu : le nombre de lancer de dés nécessaires pour conclure une partie. Les deux dépendent l'une de l'autre. Une analyse épistémologique détaillée de cette situation est faite dans la thèse

1 L'enseignante est une formatrice du groupe "Activités" de l'IREM de Rouen.

de Masselin (2019), ainsi qu'une description de l'ETM idoine attendu (Masselin, 2018).

Ici, nous nous attardons sur l'aspect modélisation de la tâche et notamment sur les différents modèles possibles. Dans l'étude de ce jeu, nous pouvons faire les hypothèses de modèle (Parzysz, 2009) suivantes :

(H1) Le résultat d'un lancer de dé sera 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 selon le côté du dé visible à l'issue du lancer.
(H2) Si le dé est « cassé », i.e. le lancer ne fait pas clairement apparaître une des faces, le lancer sera annulé.
(H3) Le dé est supposé« équilibré », c'est-à-dire que les six faces du dé ont autant de chances d'être obtenues.
(H4) On lance le dé suffisamment fort pour que le résultat ne soit pas prévisible.

Comme le mentionne Parzysz (2009) et Henry (1999), ceci constitue les éléments du « *modèle pseudo-concret* », pour un unique lancer de dé. Cependant, le protocole d'expérience de la situation du jeu n'est pas encore totalement déterminé ici. Nous pouvons alors envisager deux protocoles différents. Le premier protocole, sémantiquement congruent aux règles du jeu, est le suivant :

(H5) Lancer le dé.

- Si le 6 sort, arrêter de lancer le dé ;
- Sinon recommencer. Faire 6 lancers au maximum.

La tortue gagne si aucun 6 n'est sorti, sinon le lièvre gagne.

Ce protocole est à relier au modèle probabiliste de la loi géométrique tronquée (LG) de paramètres 6 et 1/6. Le second protocole expérimental possible, plus « éloigné » du jeu est le suivant :

(H5') Lancer le dé six fois de suite. Si le 6 sort au moins une fois, le lièvre gagne ; sinon, la tortue gagne.

Ici, le modèle probabiliste sous-jacent est la loi binomiale (LB) de paramètres 6 et 1/6. On pourrait d'ailleurs le considérer autrement : lancer six dés simultanément.
Ces deux modèles probabilistes (loi géométrique tronquée ou loi binomiale) ne sont pas au programme de la classe étudiée dans cet article. Il n'est donc pas attendu des élèves qu'ils mobilisent des connaissances sur ces lois. Il est donc difficilement envisageable que ceux-ci entrent complètement dans le paradigme P2, avec tout le vocabulaire associé.

Ces expériences aléatoires, décrites par l'un ou l'autre des protocoles, sont ce qu'appelle Gaydier (2011) des expériences composées, c'est-à-dire « la conjonction ou l'enchaînement d'au moins deux expériences aléatoires élémentaires » (expériences non nécessairement indépendantes). Les expériences aléatoires élémentaires ici correspondent au lancer d'un dé. La compréhension de

l’enchaînement de ces expériences aléatoires élémentaires est à la charge de l’élève. Notamment, l’énoncé du problème mentionne « *On réalise autant de manche que nécessaire pour avoir un gagnant* » ; l’élève doit donc comprendre qu’il y a au maximum six lancers de dés pour avoir un gagnant. Cognitivement, il est plus complexe de concevoir la victoire de la tortue que la victoire du lièvre. Dans l’énoncé (cf. Fig. 1), il est fait explicitement référence à la victoire du lièvre, tandis que la victoire de la tortue nécessite un changement de point de vue à la charge de l’élève.
La tâche étant proposée à des élèves de troisième (grade 9), nous faisons une analyse *a priori* des démarches envisageables à ce niveau scolaire en les classifiant suivant le type d’artefact utilisé car nous considérons que le choix d’un artefact est déterminant dans les démarches. Nous préciserons à chaque fois à quelle phase du cycle de modélisation ces démarches se réfèrent, ainsi que le paradigme mis en œuvre. Nous les relierons autant que possible aux hypothèses présentées ci-dessus.

Démarches mobilisant un artefact matériel

Voici différentes démarches envisageables avec l’utilisation, par l’élève, d’un artefact matériel, à savoir ici l’usage d’un dé.

M1. L’élève manipule un dé à jouer, réalise une unique partie[2] *du jeu, jusqu’à obtenir un gagnant, puis il conclut.*

Dans ce cas, l’élève a une vision déterministe du jeu, il reste dans la réalité, ne perçoit pas l'aspect aléatoire de la situation, et n’entre pas dans le domaine des probabilités. Au niveau du cycle de modélisation, il n’y a pas de passage de la phase 1 à la phase 2 car aucune idéalisation ou structuration n’est accomplie.

M2. L’élève manipule un dé, fait quelques courses dont il note les résultats au fur et à mesure.

Dans ce cas, la situation est perçue comme relevant du hasard. L’élève a ou prend conscience en amont que le résultat de l’expérience n’est pas toujours identique. S’arrêter à quelques lancers lui permet de s’approprier, voire de maîtriser les règles du jeu imposées par l’énoncé. Etant dans la réalité, il se rend compte du caractère aléatoire de la situation. Son travail se trouve dans le paradigme P0 (paradigme de la « réalité »). Dans le cycle de modélisation, cette démarche peut permettre à l’élève d’amorcer le passage de la situation retenue à l’étape « modèle pseudo-concret ».

M3. L’élève manipule un dé et joue beaucoup (un certain nombre, assez conséquent) de courses, tout en notant les résultats au fur et à mesure.

L’élève a pleinement conscience d’étudier un phénomène aléatoire et que le résultat n’est pas toujours le même, grâce aux expériences réelles réalisées. Il cherche alors un moyen d’anticiper ce qui peut se produire en se détachant des expériences réelles. Le travail en jeu s’appuie initialement sur la réalité (P0) et « glisse » vers le domaine

---

2 Nous appelons « partie » ce qui est présenté comme étant une « course » dans l’énoncé du problème, pour lever toute ambiguïté.

des probabilités, associé ici au paradigme P1. Nous considérerons alors que cette démarche est à la limite entre le paradigme de la réalité P0 et P1, car le fait de répéter un certain nombre de fois l'expérience semble aller de pair avec le fait d'appliquer en acte le résultat de la loi des grands nombres (P2).

Cependant, pour aller jusqu'au bout de cette démarche, l'élève doit utiliser la statistique descriptive (SD) en déterminant la fréquence des victoires d'au moins un des protagonistes. Il s'agit d'une approche fréquentiste des probabilités. Au niveau du cycle de modélisation, le passage au modèle pseudo-concret n'est pas explicité. Cependant, si l'élève décide de poser le modèle tel que la probabilité correspond à la fréquence, alors il se situe directement dans le modèle mathématique du cycle de modélisation.

Démarches mobilisant un artefact numérique

Dans cette partie, nous présentons des démarches utilisant un artefact numérique prenant appui sur une démarche simulée du jeu. Au grade 9, nous pouvons envisager l'utilisation du tableur ou encore du logiciel de programmation Scratch. Suivant le logiciel employé, les démarches diffèrent. Cela ne se réduit pas au fait que les langages soient distincts, mais en partie au fait que les logiciels n'engagent pas aussi facilement les élèves vers les deux modèles probabilistes possibles.

Voulant se baser sur une approche fréquentiste, l'élève peut envisager de faire des simulations de l'expérience aléatoire en s'appuyant sur l'équiprobabilité de chacune des faces lors d'un lancer de dé (premières hypothèses de modélisation). Le choix du protocole (le plus souvent implicite) se fait en amont ou simultanément avec l'implémentation de l'expérience aléatoire dans l'artefact numérique choisi. A partir d'expériences aléatoires élémentaires (s'appuyant sur l'hypothèse (H3)), l'élève va avoir accès à l'expérience composée (Gaydier, 2011) correspondant au jeu étudié. Le travail s'effectue alors dans P1. Comme le précise Parzysz (2009), suivant le protocole expérimental choisi et les outils à sa disposition, l'élève propose un modèle pour la situation, et peut prendre appui sur une simulation numérique (notée Sim et précisée ensuite):

- *Simulation avec la loi géométrique tronquée* (Sim_{LG}) ;
- *Simulation avec la loi binomiale* (Sim_{LB}).

Il n'est en fait pas nécessaire pour les élèves de passer au paradigme P2 (comme le montre Parzysz, 2014). Ils peuvent en effet rester dans P1, sans mise en évidence d'une expérience aléatoire, d'une variable aléatoire ou d'une loi de probabilité. Dans ce cas, l'élaboration de la simulation engendre un passage de P1 à la statistique descriptive (SD), puis un retour dans P1 pour conclure (avec, donc, une prise de conscience que les simulations permettent d'obtenir des fréquences). Ainsi, l'élève obtient une approximation des probabilités. Au niveau du cycle de modélisation, avec ce protocole, il y a un passage du modèle pseudo-concret au modèle mathématique.

Le logiciel Scratch permet d'implémenter assez facilement le protocole avec l'hypothèse (H5). Ceci est beaucoup plus compliqué avec le tableur qui, en revanche, facilite l'implémentation du protocole avec l'hypothèse (H5'). Cependant dans le second cas, il n'y a pas congruence entre le protocole et la situation. Dans notre étude, seul le tableur est utilisé mais cette analyse plus large est tout de même importante et complétée dans la thèse de Masselin (2019).

Démarches mobilisant un artefact symbolique

Il s'agit ici des démarches prenant appui sur une approche laplacienne des probabilités. Cette approche « théorique » peut être envisagée avec l'emploi d'un arbre de dénombrement ou de probabilité. Les arbres de probabilité peuvent porter les deux modèles (loi géométrique tronquée et loi binomiale). Des tentatives de travail dans le paradigme P2 ou un travail réellement dans P2 aura alors lieu. On pourrait aussi envisager un appui sur un tableau à double entrée, puis à trois entrées… (Masselin, 2019). Cependant sa visualisation devient vite impossible.

Cette analyse *a priori* montre la multitude de démarches que peut mettre en place l'élève, seule ou en en associant plusieurs. Cela met en évidence la richesse du travail de modélisation autour de cette situation.

ANALYSE DE DEROULEMENTS

Choix de l'enseignante

Pour cette séance, l'enseignante met à disposition des élèves des ordinateurs portables, donc chaque groupe peut travailler s'il le souhaite sur un ordinateur et principalement sur le tableur. Le logiciel Scratch n'est pas encore préconisé au moment de notre étude. Seul le tableur sera disponible dans la classe. Les élèves ont déjà travaillé avec cet artefact numérique sur d'autres tâches de simulation en probabilités. Ils ont déjà simulé des lancers de dé numérique et sont familiarisés avec certaines fonctionnalités du tableur comme ALEA.ENTRE.BORNES ou NB.SI. Les groupes d'élèves ont été constitués par proximité spatiale.

Analyse *a posteriori* du premier groupe

Dans ce groupe, dans la phase individuelle, deux démarches sont initiées, comme en témoignent les brouillons (fig. 3).

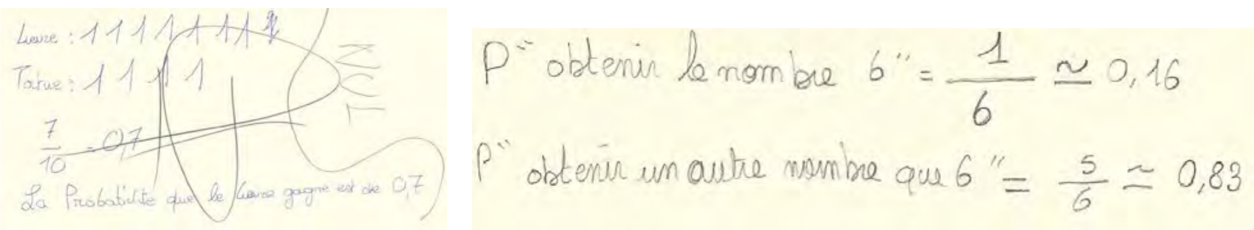


Figure 3 : Brouillons de Jean et Alicia

Un premier élève, Jean, débute par une démarche de type M2 qui tend vers M3. Il lance un dé et effectue 11 courses à l'aide de stabilos de deux couleurs différentes pour incarner le lièvre et la tortue. Il les fait avancer sur le parcours de l'énoncé et inscrit des 1 à chaque victoire du lièvre ou de la tortue en respectant les règles du jeu. Puis, il calcule la fréquence de gain du lièvre, qu'il appelle probabilité, en considérant 10 parties (au lieu des 11 réalisées) et conclut qu'elle vaut 0,7. Son travail se situe dans le paradigme P1, en lien avec la statistique descriptive. Il applique en acte le résultat de la « loi des grands nombres », avec le biais de l'appliquer aux petits nombres (l'élève indique que la probabilité est de 0,7). Il assimile fréquence et probabilité.

L'élève Alicia, elle, n'utilise pas d'artefact matériel mais tente des calculs de probabilités, en restant seulement au niveau du premier lancer (hypothèse H3). En voyant d'autres élèves utiliser un ordinateur, elle questionne l'enseignante :

Alicia : Et on peut savoir comme ça ou on est obligé de prendre un ordinateur ?

Enseignante : Alors, on n'est pas obligé d'utiliser un ordinateur, mais l'ordinateur il peut peut-être nous permettre de gagner du temps, d'accord ?

L'enseignante favorise par cette intervention l'emploi d'un artefact numérique. Elle questionne ensuite sur la condition pour que la tortue gagne. Face à la confusion entre un lancer de dé (l'expérience élémentaire) et une partie (l'expérience composée), elle cherche à ce que l'élève se questionne sur les hypothèses (H5) ou (H5').

Enseignante : Alors tu t'es emmêlé les pinceaux mais ton idée était bonne effectivement, il peut suffire d'une manche[3] pour que le lièvre gagne la partie, mais effectivement pour que la tortue gagne, elle, la partie, il faut que le lièvre perde six fois les manches. Donc pour pouvoir simuler / pour pouvoir obtenir une expérience aléatoire qui représente une partie gagnée par la tortue, il faut avoir fait six lancers de dé.

Dans cette intervention, l'enseignante réinterprète l'événement « la tortue gagne » par « le lièvre perd 6 fois les manches ». Elle prend à sa charge le fait qu'il y ait au maximum 6 lancers de dés. L'élève se voit fortement suggérer des hypothèses du modèle.

L'enseignante propose alors les deux approches possibles (fréquentiste et laplacienne) et semble *a priori* laisser le choix au groupe. Elle oriente cependant ensuite le groupe vers l'approche fréquentiste et la simulation au tableur en déclarant :

Enseignante : A vous d'inventer une feuille tableur qui prenne en compte effectivement comment vous allez faire, comment vous allez ruser pour que le tableur simule l'expérience. (...) Vous connaissez quoi comme fonction du tableur qui peut être utile ?

Le groupe se tourne alors vers l'élaboration d'une simulation au tableur. Le brouillon d'Alicia montre ce changement de démarche, elle y note : « *On peut utiliser le tableur*

3 Ici l'enseignante considère qu'une manche est un lancer de dé (contrairement à ce qui est considéré comme une manche dans l'énoncé).

pour faire un grand nombre de fois cette expérience ». L'enseignante amène donc Alicia mais aussi les autres élèves du groupe à utiliser l'artefact numérique tableur. Le groupe simule 5000 premiers lancers du dé au tableur dans la première colonne puis 800 victoires du lièvre sont identifiées grâce à une formule saisie avec =NB.SI(plage, 6).

A la vue du fichier de simulation en l'état, l'enseignante intervient dans le groupe :

Enseignante : Vous avez vu où était le problème ? Donc, là effectivement, les 800 ce sont bien des victoires du lièvre, mais les 4200 qui vous restent, ce ne sont pas des victoires de la tortue, elle a juste avancé d'une case mais pour autant, la partie n'est pas terminée. Effectivement pour savoir si la partie elle est gagnée par le lièvre ou la tortue, il faut avoir joué les six manches, ok ? Je vous laisse reprendre.

L'enseignante identifie à nouveau dans leur simulation une confusion entre les expériences « lancer d'un dé » et « réaliser une partie ». Le fait de ne pas faire expliciter les hypothèses du modèle fait que les élèves restent toujours à l'hypothèse (H3) sans aller plus loin dans la description du protocole expérimental, ce qui les bloque dans l'implémentation de l'expérience aléatoire. L'enseignante impose alors la démarche avec la loi binomiale (Sim_{LB}) en déclarant six lancers (qu'elle appelle manches) nécessaires systématiquement. La synthèse du groupe traduit un changement radical de démarche dans le groupe, comparé à leurs démarches initiales exposées plus haut. C'est donc l'enseignante qui amène les élèves dans le modèle mathématique, sans pour autant que les élèves n'aient réussi à identifier le protocole en jeu. Voici un extrait de leur fiche de synthèse du groupe :

> *Pour aller plus vite, nous avons utilisé le tableur, nous avons réalisé 5000 fois l'expérience aléatoire (...)*
>
> *Grâce à NB.SI, nous avons regardé combien de 0 nous avons trouvé 1675 (0)*
>
> *Donc on a conclu que la tortue gagne 1675 fois et que le lièvre gagne 3325 (5000-1675). Mais pour être plus précis, nous avons était jusqu'à 10 000 on a trouvé 3355 (0)*
>
> *Donc Lièvre=6645 et Tortue=3355*

L'enseignante guide fortement l'exploitation de la simulation en demandant de relancer le fichier pour observer une stabilisation des fréquences. Elle incite le groupe à étendre le nombre de courses et les élèves passent de 5000 parties à 10000. Ensuite elle commente les résultats affichés dans le tableur du groupe et incite à considérer la fréquence.

L'enseignante impose de passer à la fréquence puis de relancer six fois la simulation. Les élèves notent :

Probabilité tortue =0,34
Probabilité lièvre=0,66
On relance la feuille jusqu'à la fréquence (~~probabilité~~) se stabilise

et ils écrivent en conclusion : *Après six essais, la fréquence se stabilise.*

Pour conclure, deux démarches différentes sont initiées au sein du groupe : une approche fréquentiste avec des parties manuelles et une tentative de calculs de probabilité par l'approche laplacienne. Mais l'enseignante a incité le groupe à effectuer une démarche de simulation au tableur. Elle a induit une circulation du travail dans les plans [Sem-Ins] et [Ins-Dis] de l'ETM. L'enseignante a orienté les élèves vers la loi binomiale (démarche Sim_{LB}) et a conduit une rétroaction dans le cycle de modélisation (passage de D à C), alors qu'aucun échange n'a lieu pour expliciter les hypothèses de modélisation (passage de B à C absent). Le travail s'est ici situé dans le paradigme P1.

Analyse *a posteriori* du deuxième groupe

Ce groupe opte d'emblée pour une démarche incluant le tableur. Il vise une approche fréquentiste avec simulation. Partant d'un fichier vierge, les élèves essayent de simuler des échantillons suivant la loi géométrique tronquée (démarche Sim_{LG}). Le deuxième lancer de dé, conditionné au résultat du premier lancer, est effectué seulement le nombre de fois où le lièvre n'avait pas gagné directement au premier lancer. Ce nombre de faces six apparues lors des 1000 premiers lancers est obtenu avec la formule NB.SI. Les élèves ôtent ce premier nombre obtenu (181) de 1000 à la main afin de décider du nombre de deuxième lancer à effectuer ensuite (819). Cependant, après la pause, quand le groupe rallume l'ordinateur, les réalisations du premier lancer sont réactualisées et par conséquent, le nombre de 6 apparu au premier lancer a changé. Comme en géométrie dynamique où l'on parle de figure non robuste, on peut ici faire le rapprochement en identifiant cette simulation comme non robuste : si l'on modifie les réalisations du premier lancer, les réalisations du second lancer ne sont plus valables.

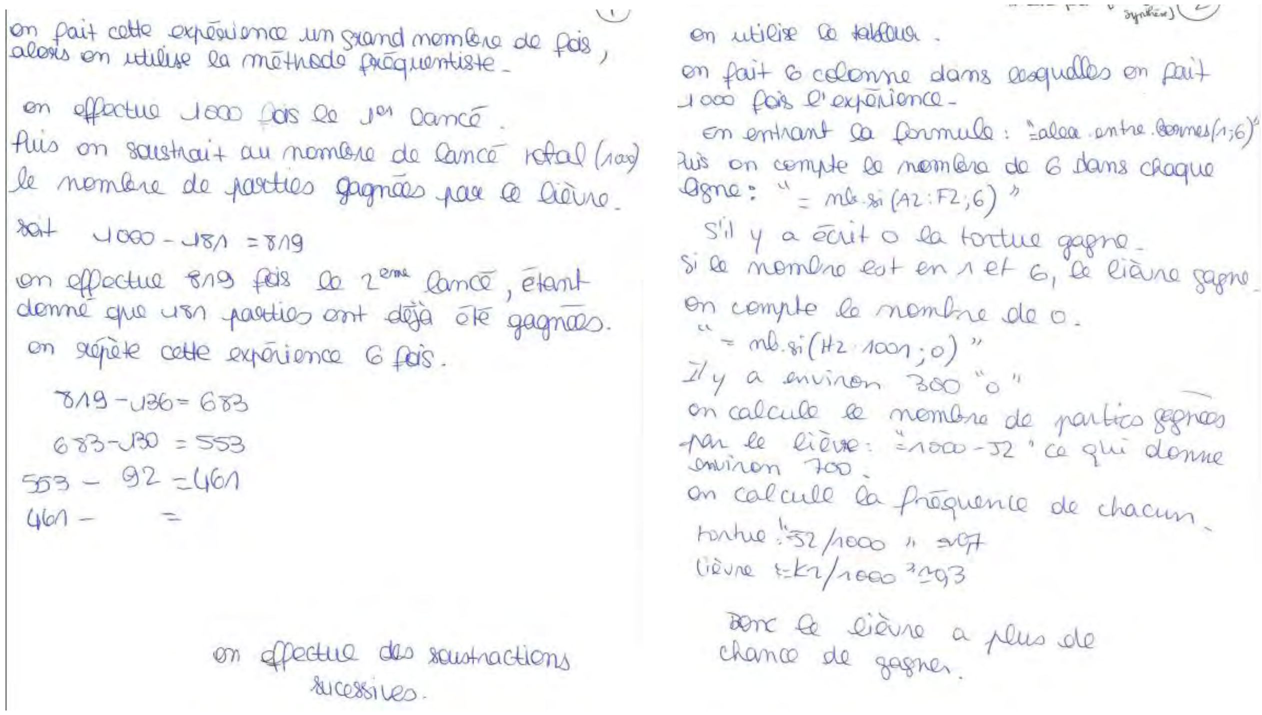


Figure 4 : Synthèses du groupe 2

L'enseignante propose alors, pour débloquer les élèves, de simuler à chaque fois six lancers de dés (modèle de la loi binomiale). Cependant, les élèves n'arrivent pas à quitter leur modèle initial car le second était pour eux trop éloigné des règles du jeu. Cette « aide » de l'enseignante les a finalement bloqués, comme en témoigne l'extrait de leurs échanges :

Gloria : ok donc tu fais directement les 6.

Louise : Comment ?

Gloria : Tu fais six fois, tu fais six colonnes de 1000.

Louise : Donc là, j'mets lancer, j'enlève ça, et j'fais directement les lancers ?

Gloria : En fait, elle ne t'a pas dit " fais étape par étape". C'est à la fin on regarde à la fin si le lièvre a gagné. Et s'il a gagné à la première manche, on s'en fiche.

Louise : Pourquoi s'il gagne la première manche, on s'en fiche ? S'il gagne la première, il gagne !

Gloria : Oui mais la prof a dit que ça nous coûte rien par rapport aux calculs de l'ordi.

Louise : Oui mais par rapport aux résultats, ça nous coûte.

Ce confinement momentané dans la circulation du travail est survenu dans la dimension instrumentale de l'ETM et est due à l'intervention de l'enseignant qui impose son modèle probabiliste (Sim_{LG}). Le travail du groupe évoluant initialement dans le paradigme P1, s'est ensuite porté vers P2 (utilisation de la loi des grands nombres), avec des relances de la simulation impulsées par l'enseignante, puis de nouveau dans P1 pour conclure après observation d'une stabilisation des valeurs des fréquences affichées.

En conclusion, ce groupe a d'emblée opté pour une approche fréquentiste, mobilisant le tableur avec implicitement le protocole décrit par (H5), sans au préalable utiliser un artefact matériel. Les élèves ont bien identifié tout le protocole expérimental (version 1). Cependant, ils ont été contraints par l'enseignante de considérer l'hypothèse (H5') plutôt que (H5) sans justification mathématique de l'équivalence des deux modèles sous-jacents. Une rétroaction a lieu dans le cycle de modélisation (passage de D à C), identique à celle du groupe précédent.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cet article, nous avons montré la richesse possible des démarches offertes par cette tâche de modélisation dans l'analyse *a priori*. Nos analyses des déroulements dans les deux groupes montrent l'utilisation par certains élèves de l'artefact matériel dé et pour tous, au final, l'utilisation de l'artefact numérique tableur, celui-ci étant imposé (groupe 1) ou non (groupe 2) par l'enseignante. Dans les deux groupes (c'est le cas pour sept groupes sur huit), l'enseignante amène les élèves à la démarche $\mathrm{Sim}_{\mathrm{LB}}$, sans que le protocole expérimental et notamment les hypothèses du modèle ne soit explicité ; ce qui est source de difficulté chez les élèves et que l'enseignante ne repère pas comme étant un passage déterminant dans le travail mathématique. En effet, dans le groupe 1, il est visible que le groupe n'a pas identifié ce protocole : Alicia, notamment, reste toujours sur l'expérience élémentaire ; ce qui bloque l'implémentation avec le tableur. Alors qu'un appui sur l'artefact matériel (élève Jean) pourrait débloquer le groupe. Cette phase dans le monde « pseudo-concret » devrait être un préalable avant d'essayer de simuler le jeu avec le tableur. Dans le groupe 2, bien que cela ne soit pas explicité, le groupe a bien identifié le protocole expérimental (version 1). Mais l'enseignante leur impose un changement de protocole expérimental (passage de l'hypothèse (H5) à (H5')). Elle semble considérer que le passage du modèle LG au modèle LB est évident, ou bien ne perçoit pas que ça ne l'est pas. Le groupe finit par « faire comme a dit l'enseignante » sans comprendre pourquoi. De même, aucun artefact symbolique n'a été exploité par les élèves dans la classe ; ce que nous pouvons rapprocher du fait que l'enseignante ne considère pas le fait de faire un arbre comme un raisonnement valide au niveau scolaire de la classe où elle enseigne. La grande partie du travail mathématique des élèves s'est déroulé dans le paradigme P1. Finalement, cette tâche de modélisation qui ouvre plein de possibles en termes de démarches se voit restreinte par les interventions de l'enseignante qui favorise une certaine planification du travail mathématique des élèves. La liberté laissée aux élèves dans ce type de tâche est finalement « recadrée » par les choix de l'enseignante. Ces analyses demandent cependant à être complétées par celles de l'ensemble des groupes de la classe, pour dégager les similitudes et variabilités entre les groupes et voir si les interventions de l'enseignante ont toujours la même influence sur le travail mathématique des élèves.

Cette étude permet de mettre en évidence des éléments didactiques non perçus par l'enseignante. Cela a notamment nourri la deuxième boucle de la lesson study pour illustrer des blocages d'élèves et surtout, pour faire prendre conscience aux enseignants en formation de l'importance d'identifier le protocole expérimental. Cela appui ce qu'a déjà dit Parzysz (2011), à savoir qu'il est (didactiquement) préférable de privilégier le modèle sémantiquement congruent à la situation, tout du moins dans un premier temps. Cela peut donc être rendu possible en utilisant le logiciel Scratch plutôt que le tableur. Sinon, il est indispensable de disposer des moyens de convaincre les élèves que les deux modèles sont mathématiquement équivalents dans ce contexte et donc d'avoir conscience de la différence entre les deux au départ. Les exposer avec le tableur aux simulations Sim_{LB} et Sim_{LG} simultanément peut être une piste intéressante à ce propos.

Enfin, l'enseignante, qui insiste ici sur Sim_{LB} conçoit un travail majoritairement situé autour de la dimension instrumentale car elle est guidée par la facilité d'implémentation dans le tableur avec le modèle LB. Ce choix interroge car il est réalisé au détriment d'un travail sur l'axe théorico-discursif qui aurait pu se produire.
Finalement, l'étude de la trajectoire d'avatars des deuxième et troisième boucles de la « lesson study » adaptée a dévoilé des transformations opérées sur la tâche ou sur ses mises en œuvre. Elle a également montré différents types de travail de modélisation pouvant être mis en place avec cette tâche emblématique.

REFERENCES

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In G.-P. B. W. Haines & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics* (Horwood, pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing.

Derouet, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral*. Thèse de doctorat. Université Paris Sorbonne Cité, Université Paris Diderot.

Gaydier, F. (2011). *Simulation informatique d'expérience aléatoire et acquisition de notions de probabilité au lycée*, Thèse de doctorat. Université Paris Descartes.

Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM*, *36*, 15–34.

Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In C2I Statistique et probabilités (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 149–159). Besançon : Presses Universitaires Franc-Comtoises.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J.-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. ZDM - Mathematics Education, 48(6).

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo, F., & Stillman, G. (2011). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling - Preface. In: Kaiser, G., Blum, W. et al. (Eds), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (v.1, pp.1-5). Springer Netherlands.

Masselin, B. (2018). *Etude du travail de l'enseignant par le biais de la trajectoire d'une situation d'avatars en trois boucles*. Affiche présentée à ETM6, Valparaiso, Chili, décembre 2018.

Masselin, B., & Derouet, C. (sous presse). Sur la mise en évidence des effets d'une formation courte sur les pratiques d'enseignants autour de la simulation en probabilités en classe de troisième. In *Actes du colloque EMF 2018*.

Masselin, B. (2019). Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classes de troisième et seconde : métamorphoses d'un problème au fil d'une formation en probabilité. *Thèse de doctorat*. Université Paris Sorbonne Cité, Université Paris Diderot.

MENESR & DGESCO (2015). Programme d'enseignement du cycle d'approfondissement (cycle 4). *BOEN spécial n°11*.

Parzysz, B. (2009). De l'expérience à la modélisation, via la simulation. *Repères-IREM*, *74*, 91–103.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 127–147.

Parzysz, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *17*(4 (I)), 65–82.

EL ROL DE LAS TAREAS DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE INGENIEROS: UN ACERCAMIENTO AL ETM IDÓNEO

Saúl Ernesto Cosmes Aragón

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

cosmes21@hotmail.com

Se presenta un avance de investigación relacionado con estudiar la modelización matemática en la formación de estudiantes de ingeniería. Mostramos elementos del ETM idóneo de un profesor de una asignatura correspondiente al área de especialidad en estructuras de una universidad chilena. Utilizamos como sustento teórico, el enfoque de los espacios de trabajo matemático en interacción con el ciclo de modelización, presentado por Blum-Borromeo. Los modelos estudiados en clase (modelos estructurales: vigas, armaduras y marcos) nos permiten estudiar problemas reales de modelización en la formación del ingeniero.

Palabras clave: *Tareas de modelización, ETM idóneo, ingeniería.*

INTRODUCCIÓN

Se espera que la formación matemática de estudiantes de ingeniería contribuya al desarrollo de competencias profesionales acordes a las exigencias de diversos organismos acreditadores y sociedades dedicadas al estudio de la formación matemática en ingeniería p.e, la Sociedad Europea para la Formación de Ingenieros, SEFI (2013), pero además, se hace necesario que a nivel escolar, se contribuya a establecer diálogos entre los diversos ejes de formación de ingenieros. En este sentido, la transposición didáctica de la matemática, debiera tomar en cuenta no sólo los saberes involucrados en la matemática como disciplina sino también otros saberes, como por ejemplo, los pertenecientes a contextos propios de la ingeniería.

Por ello, consideramos que tanto por el aspecto de formación por competencias como por la necesidad del diálogo mencionado anteriormente, es necesario caracterizar y desarrollar espacios de trabajo matemático, a través de tareas capaces de desarrollar esa potencialidad, considerando que las tareas de modelización brindan dicha oportunidad (Romo, 2014, Bisell Dillon, 2000). Al respecto Tosmur & Behiye (2013) mencionan que los cursos de matemáticas deben ser enseñados utilizando contextos propios de la ingeniería, en orden de promover una matemática más relevante para la ingeniería. En este context nos planteamos las siguientes interrogantes, ¿Cuál es la naturaleza de tareas de modelización en contextos de ingeniería? ¿Cómo es la relación entre la matemática presente en los modelos utilizados y la ingeniería?

ELEMENTOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS

Las herramientas teóricas que sirven de sustento para estudiar las tareas de modelización son las relacionadas con el enfoque de los ETM (Kuzniak, Tanguay &

Elia, 2016) y con el ciclo de modelación de Blum –Borromeo (Borromeo, R. (2013)). El enfoque de los ETM nos permitirá comprender el trabajo matemático del profesor y de los estudiantes, ello enmarcado en la construcción de conocimiento a través del trabajo con tareas de modelización, las cuales estudiamos por fases de acuerdo al ciclo de Blum -Borromeo, mediante el cual caracterizamos el trabajo realizado en la fase con base en lo esperado según el ciclo. Lo anterior nos permite estudiar los procesos de matematización, a través de conectar el enfoque de ETM y el ciclo de Blum – Borromeo. El trabajo de conexión entre ambos enfoques teóricos ha sido motivo de investigaciones que recientemente se han realizado, como por ejemplo el de Montoya, Viola & Vivier (2017), en el que se propone el uso de ambos enfoques teóricos en dos direcciones: una para analizar la producción de tareas de modelización en estudiantes de pedagogía en matemática y otro para reorganizar los contenidos matemáticos que se tenga por objetivo hacer emerger.

ETM IDÓNEO EN INGENIERÍA CIVIL

Estudiamos el ETM idóneo en modelización para el caso de un profesor de ingeniería civil cuando ejerce la asignatura de análisis estructural. Para la elección de esa asignatura se realizó una revisión de programas de curso de la carrera de ingeniería Civil y entrevista a dos profesores de la carrera, en ambas (programas y profesores) se encontró que, en la malla curricular, la asignatura de análisis estructural era idónea para recolectar información acerca de la naturaleza de los problemas de modelización en un contexto de ingeniería y podamos tener elementos que permitan establecer diálogos entre asignaturas de los ejes de matemáticas, estudiados en el eje de formación en ingeniería de ciencias básicas y ejes de formación profesional (en este caso asignaturas relacionadas con la ingeniería estructural).

Los datos recolectados hasta el momento de este reporte consisten en la observación de una serie de 17 clases correspondientes a la asignatura de Análisis Estructural perteneciente a la carrera de Ingeniería Civil de una universidad chilena. Con la finalidad de analizar el trabajo del profesor, se realizan particiones de los temas de acuerdo a diversos momentos de clase, considerando para ello, momentos de explicación del tema, momentos de justificación de las herramientas teórico-prácticas a utilizar y momentos de explicación de ejemplos. Los hallazgos encontrados al momento permiten identificar objetos matemáticos relacionados con la función (el profesor en la solución de los problemas hace énfasis en la construcción de funciones que llama funciones de carga, cortante y momento), además se evidencian objetos como la derivada de una función y la integral de una función, que sirven para la construcción de argumentos de gráficos que aparecen en la solución de los problemas (tales como esfuerzos máximos, momentos máximos).

Como comentario final, observamos que los problemas estudiados en clase, al momento de este reporte, parten de la etapa dos del ciclo de Blum, es decir, modelos estructurales ya idealizados se presentan como información del problema.

REFERENCIAS

Alpers, B.A., Demlova, M., Fant, C.H., Gustafsson, T., Lawson, D., Mustoe, L. et al. (2013). *A framework for mathematics curricula in engineering education. A report of the mathematics working group*. Brussels: European Society for Engineering Education (SEFI).

Bissell, C. & Dillon, C. (2000). Telling tales: models, stories and meanings, *For the Learning of Mathematics*, 20(3), pp. 3-11.

Borromeo, R. (2013). Mathematical modelling in European education. *Journal for Mathematics Education at Teachers College*, 4, 18-24.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Space in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737.

Montoya, E., Viola, F., & Vivier, L. (2017). Choosing a Mathematical Working Space in a modelling task: The influence of teaching. En Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 956-963). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Romo_Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática* 25 años, 314-338.

Tosmur-Bayazit, N., Ubuz, B. (2013). Practicing engineer`perspective on mathematics and mathematics education in college. *Journal of Science, Technology, Engineering and Mathematics Education*, Auburn, 14(3), pp. 34-40

UNA CONSTRUCCIÓN PROGRESIVA DEL MODELO EXPONENCIAL EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES ANALIZADA DESDE LOS ETM

Diego Francisco Vilotta

Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

dfvilotta@gmail.com

Se presenta una situación didáctica realizada con alumnos del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Nordeste de la Argentina. El objeto de este trabajo es analizar una actividad de modelización matemática presentada a alumnos que ya tienen conocimientos del objeto matemático que responde a la situación y que, en este caso, es la función exponencial. Como novedad, en respuesta a una situación de crecimiento poblacional, se presenta para ser analizado un modelo alternativo al exponencial que tiene características comunes. Analizar la pertinencia o no de este modelo llevaría a explicitar propiedades del modelo exponencial que no suelen ser abordadas en la formación.

Palabras clave*: Modelo exponencial, Modelo poligonal, Formación de Profesores.*

INTRODUCCIÓN

Mientras que en el nivel superior la modelización matemática sigue teniendo una presencia escasa, en el nivel secundario, nivel donde los futuros profesores deberán dar clases, la modelización matemática está cada vez más presente. Este fenómeno, de una manera más general, ya fue identificado por Klein (1908, citado en Winsløw y Grønbæk, 2014) hace mucho tiempo, quien afirmó que los estudiantes se enfrentan a una doble discontinuidad, la primera cuando pasan del secundario a la universidad y la segunda cuando regresan a las escuelas como profesores.

La modelización matemática en el nivel secundario presenta algunas falencias que, por ejemplo, se puede observar en los libros de textos donde al estudiar las funciones vía modelización matemática se descuidan aspectos importantes como ser, el dominio de la función o, se producen saltos en el proceso de modelización imponiéndose en forma apresurada el modelo matemático que se pretende enseñar sin tener en cuenta que puede haber otros modelos que también den respuesta a la situación.

La función exponencial presenta distintas características que hacen especialmente interesante su estudio en el contexto presentado, entre las mismas se encuentra el hecho de parecer un modelo bastante sencillo, sin embargo, analizar sus propiedades y describir con precisión su comportamiento tiene una complejidad importante, tanto para el nivel secundario como para el nivel superior.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El trabajo está orientado por la siguiente pregunta: ¿Es posible organizar un proceso de enseñanza con alumnos avanzados del profesorado que les permita a la vez profundizar sus conocimientos sobre función exponencial e identificar sus principales propiedades?

Una segunda pregunta de investigación es: Ante un problema de crecimiento poblacional ¿proponer un modelo plausible pero incorrecto como el de la poligonal, cuestionará los conocimientos que tienen los EP sobre función exponencial?

El modelo de la poligonal consiste en marcar primero los puntos de la función exponencial para valores enteros y luego unir estos valores con segmentos obteniendo de esta manera la gráfica de la función con imagen para todos los valores reales del dominio de la función.

METODOLOGÍA

En este trabajo se toma como marco teórico los Espacios de Trabajo Matemático, Kuzniak (2011), y los ciclos de modelización descriptos por Blum y Borromeo-Ferri (2009).

En la investigación se elaboró una secuencia didáctica donde, ante una situación de crecimiento poblacional, se presenta a los EP un modelo alternativo al exponencial. Decidir sobre la pertinencia o no de este modelo que tiene algunas características comunes al exponencial (pero no todas) obligará a los mismos a precisar y explicitar distintas características del modelo exponencial.

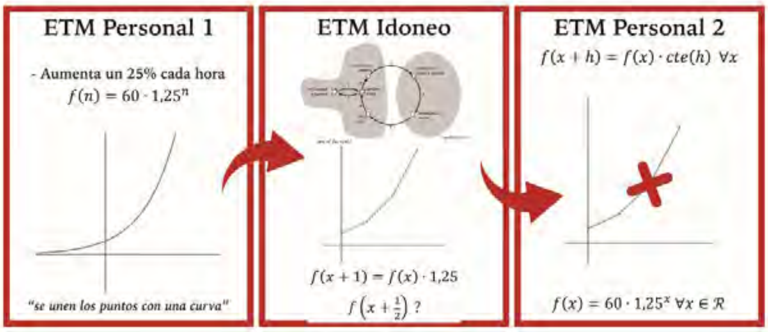


Figura 1: Tránsito de ETM Personal 1 a ETM personal 2

El trabajo se realizará en cada uno de los planos - descriptos por Kuzniak y otros (2016) y Gómez-Chacón y otros (2016) -, pero, con una tendencia de comenzar en un plano Sem-Ins, para ir trabajando cada vez más en los planos donde esté más presente la génesis discursiva, es decir los planos Sem-Dis e Ins-Dis.

Se realizó un análisis a priori de los posibles procedimientos de los estudiantes de profesorado y se implementó la secuencia en tres clases de tres horas cada una con 15 alumnos de cuarto año del Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Nordeste de la Argentina. Las clases fueron filmadas y se recuperaron las producciones escritas de los alumnos. El análisis a posteriori se encuentra todavía en proceso de elaboración.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

Ante un problema de crecimiento poblacional se propone a los EP un modelo alternativo al exponencial (el de la poligonal) con el objeto de cuestionar los conocimientos que se tiene sobre la función exponencial.

El modelo de la poligonal consiste en marcar primero los puntos de la función exponencial para valores enteros y luego unir estos valores con segmentos obteniendo de esta manera la gráfica de la función con imagen para todos los valores reales del dominio de la función.

Si se presenta este modelo, los EP seguramente intentarán desecharlo porque, según sus conocimientos, el modelo de crecimiento poblacional es el de la función exponencial que tiene por gráfica una curva suave. Al darse esta situación se les dirá: "bueno, el de la función exponencial puede funcionar, pero ¿por qué este modelo de la poligonal no?". El de la poligonal también puede ser un modelo adecuado. Creemos que esta pregunta obligará a los alumnos a revisar y precisar las propiedades que conocen de la función exponencial para ver "cuál de ellas" no cumple el modelo de la poligonal.

Se comienza planteando a los EP el siguiente problema de crecimiento poblacional: *En un laboratorio, están experimentando con una población de bacterias. Han observado que al reproducirse la masa de la población crece siempre en forma pareja, de manera que en cada hora aumenta un 25%. Al comienzo de la observación, el cultivo de bacterias tiene una masa de 60g. ¿Cuál será la masa de las bacterias después de dos horas? ¿y después de tres horas?*

Si bien los EP no tienen mayores problemas en contestar correctamente la pregunta, se aprovecha para discutir sobre la conveniencia de preguntar directamente por la masa al cabo de dos horas, llegándose a la conclusión que se hace esto para que los alumnos comprendan que, en esta situación, no puede ser utilizado el modelo lineal para la obtención de nuevos valores. En este problema en particular, significa no poder recurrir al cálculo del 50% de 60 para obtener el incremento de la masa de la población al cabo de 2 horas.

Luego, a partir de la consigna: *Con los valores obtenidos anteriormente se representa en un gráfico cartesiano los puntos (0; 60), (1; f(1)), (2; f(2)), ... y se los une con segmentos obteniéndose como gráfica una poligonal ¿La gráfica construida de esta manera representa correctamente la masa de las bacterias en función del tiempo?*

Probablemente el modelo sea rechazado por no ser su gráfica una curva suave como lo es el de la función exponencial, a pesar de que dicho modelo cumple con la propiedad $f(x+1) = f(x) \cdot 1{,}25\,, \ \forall x \in R$. Es aquí cuando, o se acepta más de un modelo como solución al problema (cosa que sucede frecuentemente en modelización) o se precisan las características del crecimiento para que, sea sólo el exponencial, el modelo de crecimiento que da respuesta al problema.

A continuación, con el objeto de ajustar el modelo, se abordará la pregunta: ¿Se puede saber que masa hay a la media hora de iniciado el experimento?

Se concluye que, como el crecimiento es parejo, a incrementos iguales de tiempo se tienen porcentajes de crecimientos iguales y que por eso no se puede calcular el 12,5% de la masa inicial para saber la masa al cabo de media hora sino que, para calcular el porcentaje de crecimiento se puede seguir el siguiente razonamiento: como para dos horas calculamos $60 \cdot 1{,}25 \cdot 1{,}25$; si quisiéramos calcular dos períodos de media hora, la cuenta sería $60 \cdot k \cdot k$ y, como nos tiene que dar 75 , la constante (el valor de k en la ecuación) para media hora es $\sqrt{1{,}25}$, es decir que el factor es $1{,}25^{\frac{1}{2}}$.

A continuación, se presenta a los EP otro modelo de la poligonal más fino, que se lo llamará $M_{1/2}$ y donde se realizarán discusiones análogas llegándose de esta manera a una familia de modelos: $M_{1/2}$, $M_{1/3}$, ... $M_{1/n}$. La última parte de la actividad apunta a comparar el modelo exponencial con el modelo $M_{1/n}$ cuando n se hace grande y se aprovecha para trabajar en distintos registros y con distintos soportes tecnológicos tanto el modelo exponencial como los modelos alternativos.

RESULTADOS

Si bien el análisis a posteriori está en proceso de elaboración podemos afirmar que:

- A pesar de que los EP conocen el modelo *e*xponencial, los mismos no priorizan dicho modelo por sobre el modelo de la poligonal presentado como alternativo.
- Resulta difícil recuperar de la situación real las características del modelo exponencial que lo diferencian del modelo de la poligonal.

BIBLIOGRAFÍA

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). *Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt?* Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 45-58.

Gómez-Chacón,I., Kuzniak, A. y Vivier, L. (2016). *El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático.* Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 54, p. 1-22.

Kuzniak, A. (2011). *L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9-24.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). *Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction*, ZDM, 48(6), 721-737.

Winsløw, C., & Grønbæk, N. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. Recherches en Didactique des Mathématiques, 34(1), 59-86.

ETM6

Symposium/Symposium/Simposio

UNIVERSIDADES ORGANIZADORAS 2009 - 2018

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

University of Cyprus

Université Paris Diderot

Université de Montréal

Universidad Complutense Matritensis

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
UNIVERSITY OF WESTERN MACEDONIA

PATROCINADORES

sochiem

XCHILE Sociedad de Matemática