Symposium/Symposium/Simposio

Mathematical Working Space
Espacio de Trabajo Matemático
Espace de Travail Mathématique

Proceedings
Fifth ETM Symposium

Actas Quinto Simposio Internacional ETM

Actes Cinquième Symposium ETM

From July 18th to July 22nd 2016
University of Western Macedonia,
Florina, Greece

Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Kostas Nikolantonakis
Philippe R. Richard
Laurent Vivier (Eds.)

FACULTY OF EDUCATION
UNIVERSITY OF WESTERN MACEDONIA

Mathematical Working Space
Espacio de Trabajo Matemático
Espace de Travail Mathématique

Fifth ETM Symposium
Quinto Simposio Internacional ETM
Cinquième Symposium ETM

From July 18th to July 22nd 2016
Faculty of Education - University of Western Macedonia
Florina, Greece

UNIVERSITY OF WESTERN MACEDONIA

FACULTY OF EDUCATION - UNIVERSITY OF WESTERN MACEDONIA

Mathematical Working Space
Espacio de Trabajo Matemático
Espace de Travail Mathématique

Fifth ETM Symposium
Quinto Simposio Internacional ETM
Cinquième Symposium ETM

From July 18th to July 22nd 2016
Faculty of Education - University of Western Macedonia
Florina, Greece

Editors

Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Kostas Nikolantonakis
Philippe R. Richard
Laurent Vivier

University of Western Macedonia

Faculty of Education
Department of Primary Education
3rd Km Florina – Niki str
53100 – Florina
Greece

Editors
Inés Mª Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Kostas Nikolantonakis
Philippe R. Richard
Laurent Vivier

Design
Kostas Nikolantonakis, Philippe R. Richard, Laurent Vivier
Design of Cover and Back page
Nikolaos Moutsis

Copyright © 2017 Faculty of education - University of Western Macedonia

ISBN: 978-618-81047-5-4

Printed in Greece

UNIVERSITY OF WESTERN MACEDONIA

Η πνευματική ιδιοκτησία αποκτάται χωρίς καμία διατύπωση και χωρίς την ανάγκη ρήτρας απαγορευτικής των προσβολών της. Επισημαίνεται ότι κατά το Ν. 2387/1920 (όπως έχει τροποποιηθεί με το Ν. 2121/1993 και ισχύει σήμερα) και κατά τη Διεθνή Σύμβαση της Βέρνης (που έχει κυρωθεί με το Ν. 100/1975) απαγορεύεται η αναδημοσίευση και γενικά η αναπαραγωγή του παρόντος έργου, με οποιονδήποτε τρόπο, τμηματικά ή περιληπτικά, στο πρωτότυπο ή σε μετάφραση ή άλλη διασκευή, χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη.

INTRODUCTION

ETM Meetings are organized into working groups based on the contributions proposed by participants. The form of the Symposium allows an interesting exchange of ideas amongst participants and encourages the development of a scientific community with common interests. ETM meetings have an international dimension (Argentina, Canada, Chile, Cyprus, France, Greece, Mexico, Spain, etc.) and a multilingual participation (English, Spanish, French).

The first two meetings were initially dedicated to the study, development and possible uses of the concept of Mathematical Working Spaces (ETM, Espace de Travail Mathématique, in French) in mathematics education.

The first ETM meeting took place in October 24-25, 2009 in Nicosia (Cyprus). Communications of this first meeting were published in the book: Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E., & Vivier, L. (eds, 2009). *Cyprus and France, Research in Mathematics Education*, Lefkosia.

The second meeting was held in October 22-23, 2010 in Paris, for the first time in the form of a symposium. The papers presented in this symposium were published after being reviewed in the journal *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. (Vol. 16 & 17, http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives).

Within ETM3 and ETM4, the focus was on the foundational component of these meetings: the mathematical work. This evolution has deepened and diversified the approaches to the subject. In particular, the semiotic, cognitive and instrumental dimensions, as elements of the MWS, were the subject of specific contributions. Similarly, the institutional and social dimensions of mathematical work were integrated in all three working topics.

The third edition of ETM was held in Montreal in October 22-23-24, 2012. Proceedings are available online (http://turing.scedu.umontreal.ca/etm/documents/Actes-ETM3.pdf). Papers in this symposium have been reviewed in an editorial process for publication in a special issue of the journal RELIME, *El trabajo matemático – puntos de vista y perspectivas*, volume 17(4), I and II, online at http://www.clame.org.mx/relime.htm.

The ETM4 meeting took place from June 30 to July 4, 2014 in El Escorial, in the prestigious summer programs supported by the Universidad Complutense de Madrid. Proceedings are online at http://www.mat.ucm.es/imi/ETM4/ETM4libro-final.pdf. Papers in this symposium have been reviewed in an editorial process for publication in a special issue of the journals ZDM and RELIME.

Following ETM4, one of the main objectives of the fifth ETM meeting was to strengthen the community of education researchers interested in MWS. The development of the MWS model as a methodological and a theoretical framework remained a central concern, including also the study of its effective uses to various areas of research in mathematics education.

The Symposium has lasted five days from July 18 to July 22, 2016 and was mainly trilingual (English, Spanish, French) as in the previous ETM meetings. Each oral presentation has been done in one of these three main languages and based on a slideshow written in one of the other two languages.

The meeting has been organized around three main topics (Topic 1 - The mathematical work and Mathematical Working Spaces, Topic 2 - Specific tools and signs in the mathematical work, Topic 3 - Genesis and development of mathematical work: the role of teacher, trainer and interactions**)** and each contribution has deled with one of these topics. Each theme of the conference has been introduced by a plenary presentation recalling, in particular, the achievements of previous symposia.

At the beginning of ETM5, there has taken place a specific work on the ETM model, in addition to the work within the three themes:

- A conference by Alain Kuzniak on the ETM model, with a specification to analysis and geometry,
- A workshop, in two sessions, on geometry, by Annette Braconne-Michoux, Carolina Henríquez et Paraskevi Michael Chrysanthou,
- A workshop, in two sessions, on analysis, by Elizabeth Montoya and Laurent Vivier.

I'm delighted by the high degree of interest in this Symposium. The number of participants (59 people) reflects the dynamic nature of studies in the notion of Space for Mathematical Work abroad and we can see the diversity of the topics presented at the conference. It is our pleasure to have a program with 35 peer-reviewed research papers and 3 posters, distributed across the three topics of the symposium. I am also pleased to see a large community of researchers coming from several universities in different European countries: Cyprus, France, Spain, Greece; from Latin America: Argentina, Chile, Mexico and from Canada. This event would not have been possible without the support from the hosted University of Western Macedonia in Florina. The Scientific program has been supplemented by a Cultural program which has been supported by the Prefecture of Western Macedonia, Department of Florina, Aristotelis Cultural Association and the City of Florina. We extend our gratitude to the scientific committee for evaluating the many proposals in a very short time and to the authors for their relevant perspectives. We are also indebted to all the reviewers who kindly and thoroughly collaborated in revising and improving the proposals. All this contributed to the high quality of the final papers published in this Symposium Proceedings.

Konstantinos Nikolantonakis
Symposium Chair

INTRODUCCIÓN

Los encuentros ETM son simposios organizados siguiendo la metodología de grupos de trabajo a partir de las comunicaciones propuestas por los participantes. El formato simposio posibilita que se den intercambios fructíferos entre los participantes y promueve la constitución de una comunidad de investigadores con intereses comunes. Los encuentros ETM tienen carácter internacional (Argentina, Canadá, Chile, Chipre, Francia, Grecia, México y España, entre otros) y multilingüe (inglés, español y francés).

Los dos primeros encuentros estuvieron dedicados al estudio, el desarrollo y las posibles aplicaciones de la noción de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en la didáctica de las matemáticas.

El primer encuentro ETM tuvo lugar los días 24 y 25 de octubre de 2009 en Nicosia (Chipre). Las comunicaciones de este Simposio quedaron recogidas en la publicación: Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E., y Vivier, L. (eds., 2009). *Cyprus and France, Research in Mathematics Education*, Lefkosia.

El segundo encuentro se celebró los 22 y 23 de octubre de 2010 en París, y adoptó por primera vez la forma de simposio. Los artículos resultantes de las comunicaciones de dicho Simposio, una vez revisados, se publicaron en la revista *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. (Vol. 16, 17, http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives).

En las ediciones tercera y cuarta de ETM se fijó el objetivo, más amplio, de estudiar aquello que constituye el objeto fundacional de estos encuentros: el trabajo matemático. Esta evolución temática condujo a la profundización en las líneas desarrolladas y a una mayor diversificación de enfoques. Más concretamente, aquellas investigaciones que integran las dimensiones semióticas, cognitivas e instrumentales han permitido definir mejor las problemáticas en torno a los ETM. Por otro lado, las dimensiones institucional y social del trabajo matemático han pasado a formar parte de los tres grandes temas de trabajo.

La ciudad de Montreal acogió la tercera edición de ETM los días 22, 23 y 24 de octubre del año 2012. Las actas de este encuentro están disponibles en línea (http://turing.scedu.umontreal.ca/etm/documents/Actes-ETM3.pdf). Los artículos resultantes de las comunicaciones presentadas en esta ocasión también han sido publicados en un número especial de la revista RELIME (Kuzniak, A. y Richard. R., [eds., 2014], *El trabajo matemático – puntos de vista y perspectivas*, Vol. 17(4), I y II, en línea: http://www.clame.org.mx/relime.htm).

El encuentro ETM4 tuvo lugar en el municipio español de El Escorial, en el marco de los prestigiosos cursos de verano de la Universidad Complutense de Madrid, del 30 de junio al 4 de julio de 2014. Las actas están disponibles en línea en http://www.mat.ucm.es/imi/ETM4/ETM4libro-final.pdf. También se han publicado artículos en números especiales de las revistas ZDM y RELIME.

Esta quinta edición busca dar continuidad al ETM4, con la consolidación de la comunidad de investigadores surgida en torno al trabajo matemático. El desarrollo del modelo de los ETM continúa siendo una preocupación mayor, junto con el estudio de los posibles usos como referencia estructurada y funcional que garantiza una continuidad entre los marcos conceptuales y metodológicos de un dispositivo de investigación.

El Simposio ha tenido una duración de 5 días y, al igual que los anteriores, se ha desarrollado fundamentalmente en tres idiomas (inglés, español y francés). Las comunicaciones orales debían realizarse en una de estas tres lenguas e ir acompañadas de una presentación cuyo contenido tenía que estar en uno de los otros dos idiomas.

Para este encuentro se escogieron tres temas principales (Tema 1 – El trabajo matemático y los Espacios de Trabajo Matemático; Tema 2 – Especificidad de las herramientas y los signos en el trabajo matemático; Tema 3 – Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del docente, del formador y de las interacciones) y cada una de las contribuciones presentadas se incluyó en uno de los temas propuestos. Cada temática del Simposio fue objeto de una introducción, que consistió en una conferencia plenaria donde se presentaron los aprendizajes de ediciones anteriores.

El encuentro ETM5 se abrió con un trabajo específico sobre los ETM, además del trabajo sobre los siguientes temas:

- una conferencia de Alain Kuzniak sobre el modelo de los ETM, con referencias específicas a la geometría y al análisis;
- un taller repartido en dos sesiones sobre geometría, impartido por Annette Braconne-Michoux, Carolina Henríquez y Paraskevi Michael Chrysanthou;
- un taller repartido en dos sesiones sobre análisis, impartido por Elizabeth Montoya y Laurent Vivier.

Me complace comprobar el gran interés que despierta este Simposio. El número de participantes (59 personas en total) refleja la abundancia de estudios sobre la noción de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en todo el mundo y la diversidad de las temáticas abordadas en este coloquio. Es para mí una satisfacción haber reunido en el programa 35 artículos de investigación evaluados por revisores y 3 pósteres, repartidos entre los tres temas del encuentro. También me agrada comprobar la existencia de una amplia comunidad de investigadores venidos de diferentes universidades de múltiples países de Europa, como Chipre, Francia, España o Grecia; de América Latina y Central, como Argentina, Chile o México; y de América del Norte, representada por Canadá.

Este evento no hubiera sido posible sin el apoyo de la Universidad de Macedonia Occidental. El Programa científico se completa además con un Programa cultural propuesto por la Prefectura de Macedonia Occidental, el Departamento de Florina, la Asociación Cultural Aristotelis y el Ayuntamiento de Florina. También queremos transmitir nuestra gratitud al comité científico, que evaluó las numerosas propuestas en un reducido plazo de tiempo, y a todos los autores por compartir con nosotros sus acertadas opiniones. Nos sentimos en deuda con todos los revisores que han tenido a bien colaborar en la evaluación y las propuestas de mejora. Todo ello ha contribuido a la alta calidad de los artículos publicados en estas Actas del Simposio.

Konstantinos Nikolantonakis
Presidente del Simposio

INTRODUCTION

Les rencontres ETM sont des symposiums organisés sous forme de groupes de travail à partir des communications proposées par les participants. La formule symposium permet des échanges fructueux entre les participants et encourage la constitution d'une communauté de chercheurs aux intérêts communs. Les rencontres ETM profitent d'une dimension internationale (Argentine, Canada, Chili, Chypre, France, Grèce, Mexique, Espagne, etc.) et d'une participation multilingue (anglais, espagnol, français).

Les deux premières rencontres étaient initialement consacrées à l'étude, au développement et aux usages possibles de la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) en didactique des mathématiques.

La première rencontre ETM a eu lieu les 24 et 25 Octobre 2009 à Nicosie (Chypre). Les communications de ce Symposium ont été publiées dans l'ouvrage : Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E., & Vivier, L. (eds, 2009). *Cyprus and France, Research in Mathematics Education*, Lefkosia.

La deuxième rencontre a eu lieu les 22 et 23 Octobre 2010 à Paris, pour la première fois, sous la forme d'un symposium. Les articles issus des communications de ce Symposium ont été publiés après relecture dans la revue *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. (Vol. 16 & 17, http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives).

Dans les ETM3 et ETM4, l'objet visé, plus largement, à étudier ce qui est l'élément fondateur de ces rencontres : le travail mathématique. Cette évolution thématique a permis un approfondissement des pistes développées et une plus grande diversification des approches. En particulier, les recherches intégrant les dimensions sémiotiques, cognitives et instrumentales ont permis de mieux définir les enjeux constitutifs des ETM. En plus, la prise en compte de la dimension institutionnelle et sociale du travail mathématique ont été intégrées dans les trois thèmes de travail.

La troisième édition d'ETM s'est déroulée à Montréal les 22, 23 et 24 Octobre 2012. Les actes sont en ligne (http://turing.scedu.umontreal.ca/etm/documents/Actes-ETM3.pdf). Les articles issus des communications de ce symposium sont entrés dans un processus éditorial pour une publication dans un numéro spécial de la revue RELIME (Kuzniak, A. & Richard. R., (eds, 2014), *El trabajo matemático – puntos de vista y perspectivas*, Volume 17(4), I and II, en ligne http://www.clame.org.mx/relime.htm.).

L'ETM4 s'est déroulée à El Escorial en Espagne, dans le cadre des programmes prestigieux d'été de l'Universidad Complutense de Madrid du 30 Juin au 4 Julliet, 2014. Les actes sont en ligne á http://www.mat.ucm.es/imi/ETM4/ETM4libro-final.pdf. Des articles ont été publiés dans des numéros spéciaux des revues ZDM et RELIME.

Cette cinquième édition s'inscrit dans la continuité d'ETM4 avec la consolidation de la communauté de chercheurs créée autour du travail mathématique. Le développement du modèle des ETM reste une préoccupation majeure avec notamment l'étude de ses usages possibles en tant que référence structurée et fonctionnelle qui assure une continuité entre les cadres conceptuels et méthodologiques d'un dispositif de recherche.

Le Symposium a durée 5 jours et, comme les précédents, a été principalement trilingue (anglais, espagnol, français). Chaque communication orale a été faite dans une de ces trois langues, et accompagnée d'un diaporama électronique dans une des deux autres langues.

La rencontre a été organisée autour de trois thèmes (Thème 1 – Le travail mathématique et les Espaces de Travail Mathématique, Thème 2 – Spécificité des outils et des signes dans le travail mathématique, Thème 3 – Genèse et développement du travail mathématique : rôle de l'enseignant, du formateur et des interactions) et chaque contribution a été inséré dans un des thèmes proposés. Chaque thématique du Symposium a été introduite par un exposé plénier rappelant notamment les acquis des précédents symposiums.

La rencontre ETM5 a commencé par un travail spécifique sur les ETM, en plus du travail sur les thèmes :
- Une conférence d'Alain Kuzniak sur le modèle des ETM, avec des spécifications à la géométrie et à l'analyse,
- Un atelier en deux sessions sur la géométrie, par Annette Braconne-Michoux, Carolina Henríquez et Paraskevi Michael Chrysanthou,
- Un atelier en deux sessions sur l'analyse, par Elizabeth Montoya et Laurent Vivier.

Je suis enchanté du grand intérêt porté à ce Symposium. Le nombre des participants (59 personnes) montre l'abondance des études sur la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) partout dans le monde et la diversité des thématiques présentes à ce colloque. Cela me fait plaisir d'avoir réuni dans le programme 35 articles de recherche évalués par des pairs-évaluateurs et 3 affiches, réparties entre les trois thèmes du colloque. Je suis aussi heureux de voir une vaste communauté de chercheurs venue de différentes universités de différents pays d'Europe: Chypre, France, Espagne, Grèce; d'Amérique Latine et Centrale : Argentine, Chile, Mexique et d'Amérique du Nord : Canada.

Cet événement n'aurait pu être possible sans le soutien de l'Université de la Macédoine de l'Ouest. Le Programme Scientifique a été supporté par un Programme Culturel proposé par La Préfecture de la Macédoine de l'Ouest, Département de Florina, l' Association Culturelle Aristote et par la Mairie de Florina. Notre gratitude s'étend au comité scientifique pour avoir évalué les nombreuses propositions dans des délais très courts et à tous les auteurs pour leurs points de vue pertinents. Nous sommes redevables à tous les évaluateurs qui ont bien voulu collaborer à la révision et l'amélioration des propositions. Tout cela a contribué à la qualité des articles publiés sur ces Actes du Symposium.

Konstantinos Nikolantonakis
Président du Symposium

INDEX / ÍNDICE / INDEX

CHAIR/ PRESIDENT/ PRÉSIDENT:

Konstantinos NIKOLANTONAKIS, University of Western Macedonia, Greece

CO-CHAIR/ CO-PRESIDENT/ CO-PRÉSIDENT:

Philippe R. RICHARD, Université de Montréal, Canada et Laurent VIVIER, Université Paris Diderot, France

SCIENTIFIC COMMITTEE / COMITE CIENTIFICO/ COMITE SCIENTIFIQUE

José CARRILLO YÁÑEZ, Universidad de Huelva, Spain, Jean-Philippe DROUHARD, Universidad de Buenos Aires, Argentina, Iliada ELIA, University of Cyprus, Cyprus, Athanasios GAGATSIS, University of Cyprus, Cyprus, Inés Mª GÓMEZ-CHACÓN, Universidad Complutense de Madrid, Spain, Alain KUZNIAK, Université Paris Diderot, France, Jean-Baptiste LAGRANGE, Université de Reims, France, Elizabeth MONTOYA DELGADILLO, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, Konstantinos NIKOLANTONAKIS, University of Western Macedonia, Greece, Asuman OKTAÇ, Cinvestav, Mexico, Tomás RECIO, Universidad de Cantabria, Spain, Philippe R. RICHARD (Co-President), Université de Montréal, Canada, Denis TANGUAY, Université de Québec, Canada, Laurent VIVIER (Co-President), Université Paris Diderot, France

ORGANIZING COMMITTEE / COMITE DE ORGANIZACION/ COMITE D'ORGANISATION

Matthew ANASTASSIADIS, University of Western Macedonia, Greece, Ioanna KAIAFA, University of Western Macedonia, Greece, Charalampos LEMONIDIS, University of Western Macedonia, Greece, Konstantinos NIKOLANTONAKIS (President), University of Western Macedonia, Greece, Ioannis ZISSIS, University of Western Macedonia, Greece, Ilias INDOS, University of Western Macedonia, Greece, Spyros PAPACHARISSIS, National Education, Greece, Eleni PAPAGIANNIDOU, University of Western Macedonia, Greece, Kostas STYLIADIS, National Education, Greece, Vasiliki TSIAPOU, University of Western Macedonia, Greece

ORGANIZING INSTITUTION / ENTIDAD ORGANIZADORA/ INSTITUTION ORGANISATRICE

School of Education, Department of Primary Education, University of Western Macedonia

WITH INTERNATIONAL COLLABORATION / CON LA COLABORACIÓN INTERNACIONAL DE/ AVEC LA COLLABORATION INTERNATIONALE DE

Université Paris Diderot, University of Cyprus, Université de Montréal, Universidad Complutense de Madrid

ORGANIZATION BY TOPICS/ ORGANIZACIÓN POR TEMAS/ ORGANISATION THÉMATIQUE

The meeting will be organized around three main topics. El encuentro se organizara alrededor de tres temas. La rencontre sera organisée autour de trois thèmes.

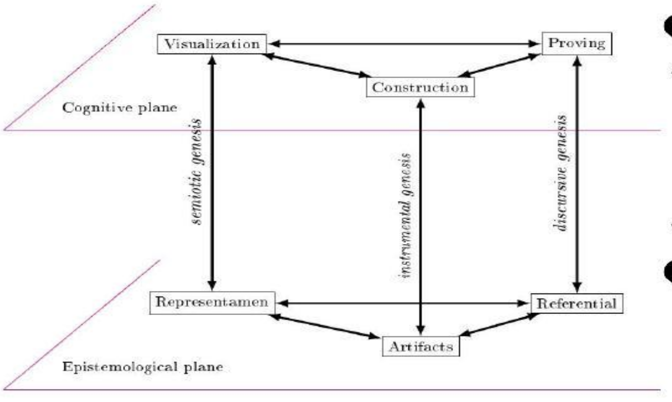
INTRODUCTORY CONFERENCE

Understanding the nature of the Mathematical Work through the Mathematical Working Spaces model

Alain Kuzniak, Université Paris-Diderot, Paris, France

The current state of the theoretical and methodological model of MWSs was presented during the introductory conference. The model was introduced by Kuzniak in 2011 to study mathematical work in schooling and comes from the model of the Geometric Working Space (GWS) initiated by Houdement, Kuzniak and Rauscher in didactics of geometry. In the GWS model, the study of geometry is considered through three dimensions that organize work in mathematics: figural, instrumental, discursive. The notion of geometric paradigms helps to understand the overall orientation of the work. The initial GWS model was extended and deepen into the MWS model to account the results of studies developed in other mathematical domains (probabilities, analysis, etc.). The MWS model is more than a simple extension of the model and benefits from these studies.

To summarize the MWS model, it worth to note that the idea of mathematical work is central to this approach and thanks to this notion of mathematical work, two essential points are highlighted : the purpose of the activities carried out by teachers and students in classrooms and the necessary effort to achieve this end. According Thurston's conception on mathematics, this domain is considered as the fruit of a constant and recursive development of notions specific to this discipline. The work of individuals is then seen as the result of a rational activity that can be based on conceptual or material tools. This activity is mediated by communication between individuals that promotes interactions. Thus, this conception of work presupposes a combination of epistemological and cognitive approaches. The MWS model links the two approaches through different geneses associated with the three dimensions (semiotics, instrumental and discursive) that are considered in this approach of mathematical work.



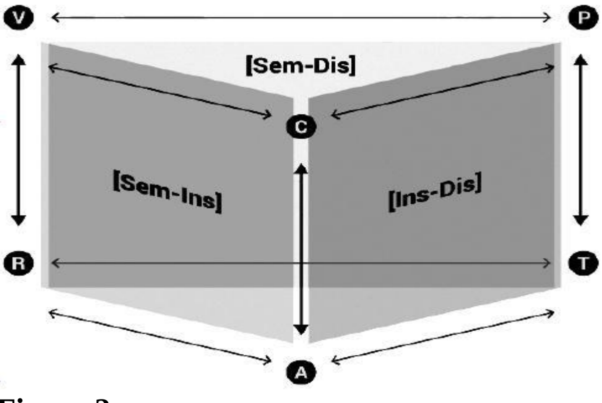


Figure 1 et Figure 2

The multiple interactions described by the model are illustrated on the two diagrams (Figures 1 and 2) which also emphasize the dynamics and tensions between all the components. Thus, each of the three dimensions needs to interact with the others to avoid confinement, and each of the vertical planes ([sem-ins], [ins-dis] and [sem-dis]) combines with the other to account of the diversity of work: discovery and exploration, justification and reasoning, presentation and communication. This dynamic shows what can be characterized in the model as work circulation.

To illustrate the possible use of the model, we have referred to studies on the different GWSs developed in secondary education in France and Chile. These various studies show the importance of institutional variations and support the need of different types of vigilance (epistemological, didactic and cognitive) to ensure the adequate development of the various MWSs (reference, appropriate and personal) introduced in the model.

To conclude, the emphasis was on the possible evolution of the model and its uses in the analysis and tasks design to develop mathematical work in the school context. Considering the MWSs model as adaptable hosting structure for mathematical activities needs to think about tasks and activities which give the MWSs their full meaning.

For more details on the MWS model, the reader is referred to the various special issues in French, in dans les Annales de didactique et de sciences cognitives (2011-14), in Spanish in Bolema (2016-18) and Relime (2014-19(4)), in English, dans ZDM (2016-48(6)).

CONFERENCIA INTRODUCTORIA

El trabajo matemático y el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático

Alain Kuzniak, Université Paris-Diderot, Paris, France

El objetivo de esta conferencia introductoria ha consistido en hacer balance sobre el estado actual del modelo teórico y metodológico de los ETM. En un primer momento, este modelo fue propuesto (Kuzniak, 2011) para estudiar el trabajo matemático en el ámbito escolar. Se apoya en los estudios de Houdement, Kuzniak y Rauscher en el campo de la didáctica de la geometría, de los cuales se dedujo un primer modelo, el de los ETG. Dicho modelo permite estudiar la geometría a partir de tres dimensiones que conforman el trabajo matemático: figurativa, instrumental y discursiva. Las nociones de los paradigmas geométricos se utilizan además en este contexto para comprender la orientación global del trabajo. Como consecuencia de los estudios realizados en otros ámbitos matemáticos (probabilidad y análisis, entre otros), que han contribuido al estudio en profundidad y la modificación sustancial del modelo inicial, se ha considerado necesario ampliar el modelo de los ETG para pasar a los ETM.

Para resumir el modelo de los ETM, conviene en primer lugar aclarar que la idea de trabajo matemático ocupa un lugar central en este enfoque. La noción de trabajo matemático permite insistir en dos puntos esenciales: el propósito de las actividades llevadas a cabo por los profesores y los alumnos en el ámbito escolar y el esfuerzo necesario para alcanzar dicho objetivo.

Según Thurston, las matemáticas se definen como el fruto de un desarrollo recursivo de nociones específicas a esta disciplina. El trabajo de los individuos se percibe así como el resultado de una actividad racional que puede apoyarse en herramientas conceptuales o materiales. Esta actividad está acompañada por la comunicación entre los individuos, que favorece las interacciones. Por tanto, esta concepción del trabajo implica la combinación de los enfoques epistemológico y cognitivo. El modelo de los ETM tiene en cuenta ambos enfoques y los vincula, mediante las diferentes génesis asociadas, a las tres dimensiones (semiótica, instrumental y discursiva) más importantes en este diseño de trabajo matemático.

Los dos diagramas (Figura 1 y 2) ilustran las múltiples interacciones que el modelo se propone describir y permiten además insistir en la dinámica y las tensiones que existen entre todos los componentes del modelo. De este modo, una dimensión no puede considerarse de forma aislada a las demás, y cada uno de los planos verticales ([sem-ins], [ins-dis] y [sem-dis]) debe combinarse con los otros dos para evitar cualquier posible confinamiento y reflejar la diversidad del trabajo: descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación. Esta dinámica permite que emerja lo que podemos definir como una circulación del trabajo en el modelo.

A modo de ejemplo de posibles aplicaciones del modelo, podemos citar los estudios sobre los distintos ETG desarrollados en la enseñanza secundaria tanto en Francia como en Chile. Estos diferentes estudios muestran la necesidad de tener en cuenta las variaciones institucionales y garantizar diferentes tipos de vigilancia (epistemológica, didáctica y cognitiva) sobre la realización de los diferentes ETM (referencia, idóneo y personal) introducidos en el modelo.

A modo de conclusión, se ha insistido en las evoluciones y las posibles aplicaciones del modelo en el análisis y la concepción de las tareas a la hora de desarrollar el trabajo matemático en el contexto escolar. El hecho de considerar el modelo de los ETM como una estructura adaptable que permite incorporar actividades matemáticas exige una reflexión sobre las tareas y actividades que dotan a los ETM de todo su sentido.

Para más detalles sobre estas cuestiones, le invitamos a consultar las diferentes presentaciones de los modelos realizadas en los números especiales dedicados a los ETM en francés en *Annales de didactique et de sciences cognitives* (2011-14), en español en Bolema (Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier, 2016-30(54)) y Relime (2014-19(4)), y en inglés en ZDM (2016-48(6)).

CONFÉRENCE INTRODUCTIVE

Le travail mathématique et le modèle des Espaces de Travail Mathématique

Alain Kuzniak, Université Paris-Diderot, Paris, France

L'objet de cette conférence introductive était de faire le point sur l'état actuel du modèle théorique et méthodologique des ETM. Ce modèle a été introduit (Kuzniak, 2011) pour étudier le travail mathématique dans le cadre scolaire. Il s'appuie sur les études d'Houdement, Kuzniak et Rauscher en didactique de la géométrie qui avait contribué à dégager un premier modèle, celui des ETG. Ce modèle permet l'étude de la géométrie en s'appuyant sur trois dimensions constitutives du travail en mathématique : figurale, instrumentale, discursive. Les notions de paradigmes géométriques sont également utilisées dans ce contexte pour comprendre l'orientation globale du travail. L'extension du modèle intial des ETG au modèle des ETM est devenue nécessaire à la suite des études menées sur d'autres domaines mathématiques (probabilités, analyse,…) et ces études ont contribué à approfondir et à modifier substantiellement le modèle initial.

Pour résumer le modèle des ETM, il faut d'abord préciser que l'idée de travail mathématique est centrale dans cette approche. La notion de travail mathématique permet d'insister sur deux points essentiels : la finalité des activités conduites par les professeurs et les élèves dans le cadre scolaire et l'effort nécessaire à faire pour atteindre cette finalité.

En s'inspirant de Thurston, les mathématiques sont définies comme le fruit d'un développement récursif de notions spécifiques à cette discipline. Le travail des individus est alors vu comme le résultat d'une activité rationnelle pouvant s'appuyer sur des outils conceptuels ou matériels. Cette activité est médiatisée par la communication entre les individus qui favorise les interactions. Ainsi, cette conception du travail suppose la combinaison d'approches épistémologique et cognitive. Le modèle des ETM prend en compte ces deux approches et les relie à travers différentes genèses associées aux trois dimensions (sémiotique, instrumentales et discursive) privilégiés dans cette conception du travail mathématique.

Les deux diagrammes (figures 1 et 2) illustrent les multiples interactions que le modèle se propose de décrire et ils permettent aussi d'insister sur la dynamique et les tensions existant entre toute les composantes du modèle. Ainsi, une dimension ne peut être pensée isolément des autres, et chacun des plans verticaux ([sem-ins], [ins-dis] et [sem-dis]) doit se combiner avec les deux autres pour éviter tout confinement et rendre compte de la diversité du travail : découverte et exploration, justification et raisonnement, présentation et communication. Cette dynamique fait apparaître ce que l'on peut caractériser comme une circulation du travail dans le modèle.

À titre d'illustration de l'emploi possible du modèle, nous avons fait référence aux études sur les différents ETG développé dans l'enseignement secondaire tant en France et au Chili. Ces différentes études montrent la nécessité de tenir compte des variations institutionnelles et d'assurer différents type de vigilances (épistémologique, didactique et cognitif) sur la réalisation des différents ETM (référence, idoine et personnel) introduits dans le modèle.

Pour conclure l'accent était mis sur les évolutions et les emplois possible du modèle dans l'analyse et la conception des tâches pour développer le travail mathématique en contexte scolaire. Le fait de considérer le modèle des ETM comme une structure adaptable permettant d'accueillir des activités mathématiques nécessite de réfléchir sur les tâches et activités qui donnent aux ETM leur plein sens.

Pour plus de détails sur ces questions, le lecteur peut consulter les différents numéros spéciaux consacrés aux ETM en français, dans les Annales de didactique et de sciences cognitives (2011-14), en espagnol, dans Bolema (2016-18) et Relime (2014-19(4)), en anglais, dans ZDM (2016-48(6)).

WORKSHOP 1

An approach of the MWS for analysis

Elizabeth Montoya Delgadillo, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemática, elizabeth.montoya@pucv.cl; http://ima.ucv.cl/academicos/elizabeth-montoya/

Laurent Vivier, Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr; http://www.lar.univ-paris-diderot.fr/user/70

In this workshop, we shall introduce the participants to the MWS model for the domain of Analysis. It will be proposed activities which will allow to analyze and to identify the essential elements of this frame which considers the mathematical work in its semiotic, instrumental and discursive dimensions while distinguishing epistemological and cognitive aspects.

Group and collective works will be organized so that the participants can discuss the reach and the implications of the distinction of the various types of MWS, personal, suitable and of reference, the plans favored in the realization of a task and paradigms at stake.

We shall propose a first work to identify the specific paradigms of the analysis:

- A distinction between the standard analysis and the no standard analysis and the influence of this reference paradigm on the construction of the mathematical objects, the implications for learning and teaching;
- An identification of three paradigms of this domain that will be used for analyses and that influence widely the mathematical work.

In this workshop, we shall lean on tasks and productions of high school students and university students as well as mathematics teachers that will be analyzed with the MWS model. Material was obtained from questionnaires and from classroom videos (original in Spanish or French, with translation in English) on emblematic objects of Analysis like real numbers, functions and tangents. Then one can understand the role of : the *semiotic genesis* with signs and representations, the *instrumental genesis*, particularly with a situation using a dynamic geometry software, and the *discursive genesis*, with the possible permitted reasoning.

For the organization of the workshop, there are planned individual working time, works in group and collective discussions. We suggest that participants bring a laptop computer equipped with the software Geogebra (or a similar software) for group work (group constitution will be made in order to have at least a computer by group).

At the end, we shall propose articles and a bibliography in which the workshop lean on so that every participant can deepen the questions related to the Analysis MWS.

TALLER 1

Una aproximación al ETM del Análisis

Elizabeth Montoya Delgadillo, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemática, elizabeth.montoya@pucv.cl; http://ima.ucv.cl/academicos/elizabeth-montoya/

Laurent Vivier, Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr; http://www.lar.univ-paris-diderot.fr/user/70

En este taller iniciaremos a los participantes en el modelo del Espacio de Trabajo Matemático en el dominio del análisis ($\text{ETM}_{\text{análisis}}$). Se proponen actividades que nos permitirán analizar e identificar elementos esenciales que nos señala este constructo; que considera el trabajo matemático con las dimensiones semiótica, instrumental y discursiva distinguiendo los aspectos epistemológicos y cognitivos.

Se realizará una puesta en común donde los participantes podrán discutir sobre los alcances y las implicancias del uso entre los distintos tipos de ETM : personal, idóneo y de referencia, los planos privilegiados en una tarea y los respectivos paradigmas en juego.

Nosotros proponemos un primer trabajo de identificación de paradigmas específicos del análisis:

- una distinción entre el análisis estándar y el análisis no estándar y su influencia de este paradigma de referencia en la construcción de objetos matemáticos, la implicación por el aprendizaje y la enseñanza;
- una identificación de tres paradigmas en este dominio que serán utilizados para los análisis y que influencian largamente el trabajo matemático.

En el taller se apoyará en tareas y producciones de estudiantes de liceo y universidad, como así también de profesores de matemática que serán analizadas con el modelo del ETM. El material ha sido obtenido a partir de cuestionarios y video de clase (original en español o francés, con una traducción en inglés) con objetos emblemáticos del análisis ; como los números reales, las funciones y la tangente principalmente. Así, comprenderemos el rol que juega : la *génesis semiótica* con los signos y sus representaciones, la *génesis instrumental* particularmente en una situación al utilizar un software de geometría dinámica, y las posibles argumentaciones que se aceptan, es decir, la *génesis discursiva.*

La organización del taller tiene previsto un trabajo individual, en grupo y colectivo para la puesta en común. Nosotros invitamos a los participantes en traer un computador con el software geogebra (o otro similar) para trabajar en grupo (la distribución de los participantes considerará que cada grupo cuente con al menos un computador).

Por último, está previsto la entrega de artículos y una bibliografía que apoyan el taller con la finalidad que cada participante pueda profundizar en cuestiones relativas al ETM del Análisis.

ATELIER 1

Une approche de l'ETM de l'Analyse

Elizabeth Montoya Delgadillo, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Instituto de Matemática, elizabeth.montoya@pucv.cl; http://ima.ucv.cl/academicos/elizabeth-montoya/

Laurent Vivier, Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr; http://www.lar.univ-paris-diderot.fr/user/70

Dans cet atelier, nous initierons les participants au modèle des ETM pour le domaine de l'Analyse. Il sera proposé des activités qui permettront d'analyser et d'identifier les éléments essentiels de ce cadre qui considère le travail mathématique dans ses dimensions sémiotique, instrumentale et discursive tout en distinguant les aspects épistémologiques et cognitifs.

Des mises en commun seront organisées afin que les participants puissent discuter sur la portée et les implications de la distinction des différents types d'ETM, personnel, idoine et de référence, les plans privilégiés dans la réalisation d'une tâche et les paradigmes en jeu.

Nous proposerons un premier travail d'identification des paradigmes spécifiques de l'analyse :

- une distinction entre l'analyse standard et l'analyse non standard et l'influence de ce paradigme de référence sur la construction des objets mathématiques, les implications pour l'apprentissage et l'enseignement ;
- une identification de trois paradigmes de ce domaine qui seront utilisés pour les analyses et qui influencent largement le travail mathématique.

Dans cet atelier, on s'appuiera sur des tâches et des productions de lycéens et d'étudiants d'université ainsi que d'enseignants de mathématiques qui seront analysées avec le modèle des ETM. Le matériel a été obtenu à partir de questionnaires écrits et de vidéos de classe (original en espagnol ou français, avec traduction en anglais) sur des objets emblématiques de l'Analyse comme les nombres réels, les fonctions et les tangentes. Ainsi, comprendrons-nous le rôle que jouent la *genèse sémiotique*, avec les signes et les représentations, la *genèse instrumental*, particulièrement avec une situation utilisant un logiciel de géométrie dynamique, et la *genèse discursive*, avec les possibles argumentations admises.

Dans l'organisation de l'atelier, il est prévu des temps de travail individuel, en groupe et collectif de mise en commun. Nous invitons les participants à apporter un ordinateur portable muni du logiciel Geogebra (ou un logiciel similaire) pour un travail de groupe (la répartition des participants sera effectuée pour avoir au moins un ordinateur par groupe).

En fin d'atelier, nous proposerons des articles et une bibliographie sur lesquels nous nous sommes appuyés afin que chaque participant puisse approfondir les questions relatives à l'ETM de l'Analyse.

WORKSHOP 2

The nature of the teachers' and students' Geometric Working Spaces (GWS)

Braconne-Michoux, Annette, Université de Montréal, Département de didactique, Professeur de didactique des mathématiques Annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Henríquez-Rivas, Carolina, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile, Departamento de Matemática y Estadística, Profesora de Didáctica de la Matemática, carohenriquezrivas@gmail.com

Michael-Chrysanthou, Paraskevi, University of Cyprus, Department of Education, Special Teaching Staff in the Didactics of Mathematics, pmicha@ucy.ac.cy

Misunderstanding occurs when students' views of what they need to do in class deviate from their teachers' expectations. For instance, mathematics teachers are convinced that the students must know the theorems in order to use them in geometrical proofs; subsequently, depending on the curriculum or the country, the students learn them more or less by heart. But for a teacher, knowing a theorem necessarily implies being able to apply it. In doing so, teachers and students are working in different geometrical paradigms potentially leading to some misunderstandings, even, in some cases, to a total lack of comprehension.

Based on the above, the main questions to be addressed in this workshop rely on the nature of the teachers' personal Geometric Working Spaces, through their epistemological and cognitive conceptions about the geometry they teach, their didactic conception about building an appropriate GWS for their students. This workshop aims to make the participants familiar with the different geometrical paradigms (GI, GII, GIII) and aware of the distance between the teachers' and the students' Geometrical Working Spaces. To do so, the participants will have the chance to analyze pupils' written works from different countries translated in the three languages (7^{th} to 10^{th} grades pupils) using the theories of the geometrical paradigms and the GWS as reference frameworks (personal, appropriate GWSs).

As a conclusion, we hope that, being more familiar with the different geometrical paradigms and the different aspects of WGS (the process of visualization, the use of instruments or discursive reasoning) participants will be able to analyze their students' answers or to refer to these in their research studies.

TALLER 2

La naturaleza de los Espacios de Trabajo Geométrico de profesores y estudiantes (ETG)

Braconne-Michoux, Annette, Université de Montréal, Département de didactique, Professeur de didactique des mathématiques Annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Henríquez-Rivas, Carolina, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile, Departamento de Matemática y Estadística, Profesora de Didáctica de la Matemática, carohenriquezrivas@gmail.com

Michael-Chrysanthou, Paraskevi, University of Cyprus, Department of Education, Special Teaching Staff in the Didactics of Mathematics, pmicha@ucy.ac.cy

En ciertas ocasiones ocurren malentendidos cuando los puntos de vista de los estudiantes sobre lo que tienen que hacer en la clase se desvían de las expectativas de su profesor. Por ejemplo, los profesores de matemáticas están convencidos que los estudiantes deben saber los teoremas a fin de utilizarlos en pruebas geométricas. Además, según el país y el currículo, los estudiantes los aprenden usualmente de memoria, pero para un profesor, saber un teorema implica necesariamente la capacidad de aplicarlo. De este modo, profesores y estudiantes trabajan en paradigmas geométricos diferentes que podría dar lugar a algunos malentendidos, incluso, en algunos casos, a la falta total de comprensión.

Con base en lo anterior, las principales preguntas que se abordarán en este taller están relacionadas con la naturaleza de los diferentes Espacios de Trabajo Geométrico, a través sus concepciones epistemológicas y cognitivas sobre la geometría que enseñan, su concepción didáctica sobre la construcción de un ETG apropiado para sus estudiantes. Este taller tiene como propósito familiarizar a los participantes con los diferentes paradigmas geométricos (GI, GII, GIII), para dar a conocer la distancia entre los Espacios de Trabajo Geométrico de un profesor y sus estudiantes. Para ello, los participantes deberán analizar producciones de alumnos (estudiantes de 7º a 10º año de distintos países, traducidos en los 3 idiomas) refiriéndose a los diferentes paradigmas geométricos y los diferentes ETG (ETG personal e idóneo).

A modo de conclusión, esperamos que, después de la familiarización con los paradigmas geométricos y los diferentes aspectos de los ETG (proceso de visualización, uso de instrumentos o razonamiento discursivo), los participantes sean capaces de analizar las producciones de los estudiantes o referirse a ello en sus estudios.

ATELIER 2

La nature des Espaces de Travail Géométrique (ETG) des enseignants et des élèves

Braconne-Michoux, Annette, Université de Montréal, Département de didactique, Professeur de didactique des mathématiques Annette.braconne-michoux@umontreal.ca

Henríquez-Rivas, Carolina, Universidad de La Frontera, Temuco, Chile, Departamento de Matemática y Estadística, Profesora de Didáctica de la Matemática, carohenriquezrivas@gmail.com

Michael-Chrysanthou, Paraskevi, University of Cyprus, Department of Education, Special Teaching Staff in the Didactics of Mathematics, pmicha@ucy.ac.cy

Une certaine incompréhension apparaît quand il y a divergence entre ce que les étudiants comprennent qu'ils doivent faire en cours de géométrie et ce que les enseignants attendent. Par exemple, les professeurs de mathématiques sont convaincus que les élèves doivent connaître les théorèmes pour pouvoir les utiliser dans les démonstrations. Aussi, dans certains pays et selon les différents curriculums, il arrive que les élèves apprennent les théorèmes par cœur alors que, pour les enseignants, connaître un théorème implique nécessairement de savoir l'appliquer. C'est dire que enseignants et élèves travaillent dans des paradigmes géométriques distincts, ce qui peut les amener à une certaine – voire totale – incompréhension.

En s'appuyant sur cette idée, les différentes questions qui seront abordées dans l'atelier, reposeront sur la nature des Espaces de Travail Géométrique personnels des enseignants au travers de leurs conceptions épistémologique et cognitive de la géométrie enseignée, de leur conception didactique de la construction d'un Espace de Travail Géométrique idoine pour leurs élèves. Le but de cet atelier est de familiariser les participants aux différents paradigmes (GI; GII; GIII), de les sensibiliser à la distance entre l'Espace de Travail Géométrique d'un enseignant et celui d'un élève. Pour ce faire, il leur sera proposé d'analyser des travaux écrits d'élèves (élèves de 7^{e} à 10^{e} années, issus de différents pays, traduits dans les trois langues) en référence aux paradigmes géométriques et aux Espaces de Travail Géométrique (ETG personnel, ETG idoine, …).

En conclusion, nous espérons que, après familiarisation avec les différents paradigmes géométriques et les différents aspects des ETG (processus de visualisation, usage des instruments, raisonnement discursif, …), les participants seront en mesure de les utiliser pour analyser les travaux de leurs élèves ou s'y référer dans leurs recherches.

TOPIC 1/ TEMA 1/ THEME 1

THE MATHEMATICAL WORK AND MATHEMATICAL WORKING SPACES

EL TRABAJO MATEMÁTICO Y LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET LES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

SYNTHESIS/ SÍNTESIS / SYNTHÈSE

Denis Tanguay, Université du Québec à Montréal

Alain Kuzniak, Université Paris Diderot

Elizabeth Montoya Delgadillo, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Athanasios Gagatsis, University of Cyprus

Topic 1 – The mathematical work and Mathematical Working Spaces

The purpose of Topic 1 is, on one hand, to delve deeper into the theoretical and methodological model defined by Mathematical Working Spaces (MWS) and on the other hand, to show how it can be put to use through possible specific usages and case studies.

The previous symposia have highlighted the diversity of the mathematical addressed topics and fields, leaning on the MWS model : probability, synthetic and analytic (coordinate) geometries, functions, algorithmic, numbers… This diversity confirmed the necessity of considering mathematical working spaces specific to particular mathematical fields, and raise the issue of their definition and their articulation. So, how to better depict the dynamic aspects and nature of mathematical work with the help of the model, for instance by making its use easier in describing the tasks and the mathematical situations that give rise to a change of fields.

It will also be about exploring how the MWS model, conceived as a space of circulations between the poles in the epistemological and cognitive planes, may enable the implementation and the fine tuning of already constructed tasks, but also the elaboration and 'calibration' of new teaching situations, or of situations still to be experimented.

Moreover, the importance allotted in the model to the interdependence of the three geneses – semiotic, instrumental and discursive – calls for descriptions and characterizations of each, but also for accounts of their interweaving.

The contributions to the topic may lean on case studies taken from teaching experiments in specific fields (geometry, calculus or analysis, probability, etc.), or on modelling activities resorting to the interaction between real world situations and mathematical models.

Tema 1. El trabajo matemático y los Espacios de Trabajo Matemático

En este tema, el objetivo es por un lado profundizar el modelo teórico que los Espacios de Trabajo Matemático definen y, por otro lado, mostrar sus usos posibles como herramienta de análisis en estudios específicos.

Simposios anteriores han puesto de manifiesto la variedad de temas matemáticos abordados apoyándose en los ETM: probabilidades, geometrías sintética y analítica (en coordenadas), funciones, algoritmos, números ... Esta diversidad ha confirmado la necesidad de considerar Espacios de Trabajo de Matemáticas propios a sus dominios matemáticos específicos y plantea la cuestión de su definición y articulación. Cómo entonces describir mejor los aspectos y el carácter dinámico del trabajo matemático con la ayuda del modelo, incluso facilitando su uso para describir las tareas o situaciones matemáticas que dan lugar a cambios de dominios.

Adicionalmente, se explorará cómo el modelo del ETM, concebido como un espacio de circulación entre los polos de los planos epistemológico y cognitivo, puede contribuir a posibilitar la puesta en práctica y el ajuste de tareas ya construidas, pero también la elaboración y "calibración" de nuevas situaciones de enseñanza o de situaciones que aún no se han experimentado.

Por otra parte, la importancia asignada en el modelo, la interdependencia entre las tres génesis - semiótica, instrumental y discursiva – requiere saber cómo describir estas génesis particulares y tomar en cuenta su imbricación.

Thème 1 – Le travail mathématique et les Espaces de Travail Mathématique

L'objet de ce thème est, d'une part, d'approfondir le modèle théorique et méthodologique défini par les Espaces de Travail Mathématique et d'autre part, d'en montrer les utilisations possibles dans des études particulières.

Les précédents symposiums ont fait ressortir la diversité des thèmes mathématiques abordés et s'appuyant sur le modèle des ETM : probabilités, géométries synthétique et analytique (en coordonnées), fonctions, algorithmique, nombres... Cette diversité a confirmé la nécessité de considérer des Espaces de Travail Mathématique propres à des domaines mathématiques spécifiques et pose la question de leur définition et de leur articulation. Comment alors mieux décrire les aspects et caractère dynamiques du travail mathématique grâce au modèle, notamment en facilitant son emploi pour décrire les tâches ou les situations mathématiques qui donnent lieu à des changements de domaines.

Il s'agira aussi d'explorer comment le modèle de l'ETM, conçu comme un espace de circulation entre les pôles dans les plans épistémologique et cognitif, peut servir à la mise en place et à l'ajustement de tâches déjà construites mais aussi comment il peut permettre l'élaboration ou le calibrage de situations d'enseignement nouvelles et encore à expérimenter.

De plus, l'importance accordée, dans le modèle, à l'interdépendance entre les trois genèses – sémiotique, instrumentale et discursive – nécessite de savoir comment décrire ces genèses particulières et rendre compte de leur imbrication.

Les contributions pour ce thème pourront s'appuyer sur des études de cas prises dans le cadre d'enseignement de domaines spécifiques (géométrie, analyse, probabilités, etc.) mais aussi sur des activités de modélisation mettant en interaction monde réel et modèles mathématiques.

THE PRESENTATIONS/ LAS PRESENTACIONES / LES PRÉSENTATIONS

Introduction du thème : Denis Tanguay, Université du Québec à Montréal, Canada

Elizabeth Montoya-Delgadillo, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.y Laurent Vivier, Université Paris-Diderot, France.

Conectar los ETM del análisis: el caso de la función exponencial[1]

Charlotte Derouet, Université Paris Diderot.

Circulations entre trois domaines mathématiques : les probabilités, la statistique et l'analyse[1]

Analyse

Laurent Vivier, Université Paris-Diderot, et Elizabeth Montoya-Delgadillo, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Les perspectives de localité dans le travail en analyse

Paula Verdugo, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Una aproximación al ETM idóneo de las sucesiones: el caso de la sucesión $(1+1/n)$ *n en la enseñanza secundaria y univesitaria*

Géométrie

Carolina Henriquez, Universidad de la Frontera, Chile

El espacio de trabajo matemático como una herramienta para el estudio de la práctica en el aula del profesor

Matthew Anastasiadis, Kostas Nikolantonakis, University of Western Macedonia, Grece,

The mathematical working space in the case of area and perimeter: concepts' definitions and measurement-calculation processes

Androulla Petridou, Athanassios Gagatsis University of Cyprus

Exploring kindergartners' figural genesis in geometry

Probabilités

Alain Kuzniak et Assia Nechache, Université Paris-Diderot, France.

Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines et personnels : existence et usages

Assia Nechache, Université Paris-Diderot, France.

Articulation des genèses de l'ETM_{Proba} dans le travail mathématique des tâches Probabilistes faisant intervenir la modélisation

Bernard Parzysz et Charlotte Derouet, Université Paris-Diderot, France.

Le théorème de Moivre-Laplace : une illustration d'un travail centré dans le plan sémiotico-instrumental

Algébre

Eleni Demosthenous, University of Cyprus

Mathematical working space: the case of algebra-related topics in primary school

Mauricio Gamboa Inostroza et Arturo Mena-Lorca, Universidad de Concepción, y Arturo Mena-Lorca, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Paradigmas algebraicos y espacio de trabajo matemático

Posters :

Alicia Noemí Fayó Universidad Nacional de Cuyo, Argentina

Espacio de trabajo matemático a través de cuentos y matemática dinámica

Blandine Masselin, Université Paris Diderot, France

Etude d'ETM idoine autour d'un problème de probabilité

A METHODOLOGICAL AND THEORETICAL FRAMEWORK FOR THE STUDY OF MATHEMATICAL WORK IN SCHOOL CONTEXT

Since its emergence in the field of study of teaching and learning geometry, the theoretical and methodological model of Mathematical Working Spaces (MWS) has taken into account the diversity of mathematical fields such as analysis, algebra, probability, etc. This evolution towards research themes pertaining to other mathematical fields has highlighted the need for focusing on subfields, that are more restricted and demarcated within larger mathematical fields.

Thus, beyond the consideration of specific MWSs related to mathematical fields—$\text{MWS}_{\text{Probability}}$, $\text{MWS}_{\text{Geometry}}$, $\text{MWS}_{\text{Analysis}}$—it may be worth considering mathematical work in more circumscribed areas. In some studies, it may even be interesting to specify local MWSs structured around a notion, around a theorem... One can thus envisage, as Charlotte Derouet did in her study about density functions, to introduce several local MWSs ($\text{MWS}_{\text{Density functions}}$, $\text{MWS}_{\text{Integral Calculus}}$, $\text{MWS}_{\text{Descriptive Statistics}}$). During the symposium, these local aspects were the subject of extensive discussions, aimed at understanding and describing the interactions between these different MWSs, in particular regarding their transitional or parallel involvement in the work when this work is conducted or leaned on several levels.

The concerns at stake here are not new in the field of *Didactics of Mathematics*, and some answers could have been brought through other theoretical frameworks. In France, for example, the Théorie anthropologique du didactique (TAD) proposes a 'co-determination scale', by which mathematics is structured into fields (*domaines*), themes and subjects. In a more cognitive approach, Vergnaud suggests the use, for analysis purposes, of the notion of *champs conceptuels* (conceptual fields), while Douady introduces the notion of *jeu de cadres* (frames, or settings interplay). These theoretical tools allow to account for the richness granted to teaching by the assumed possibility of switching from one mathematical field to another. But then, what may be brought to this question by the MWS approach? In fact, the MWSs model is organized so as to consider simultaneously the epistemological organization of the mathematics at play, and their cognitive dimension within the work to be provided by the students, who are solving the given task or problem and beyond, who are working on an (organized) set of tasks. Indeed, through the notions of local and global MWSs, we try to grasp the dynamics required for a student to gradually achieve a greater mathematical mastery, dynamics issued from solving a set of tasks within a field related to one or more global MWSs, each specific tasks giving rise to a local MWS.

Extending the research propounded by our group to MWSs of various fields and to the interplays between fields and subfields, has also led to reconsider the place allotted to *paradigms* in the MWS model. Introduced to account for the epistemological diversity of the work in geometry, geometric paradigms were based on the assumption of strong epistemological breaches, which are traceable as much in history as in teaching. Since then, the various forms of paradigms proposed (e.g. by Parzysz in Probability, by Montoya-Delgadillo and Vivier in Analysis, by Mena-Lorca and Gamboa in Algebra) are moving away from the initial idea of paradigm in Kuhn's sense, which was rooted in the historical development and its ruptures, to include and integrate paradigms in teaching contexts. According to these contexts and the fields at play, they refer to a conjunction of working modes, techniques and methods, of (validation, notations, representations...) standards that are to be met under a shared and stabilized form in educational institutions. Contrary to paradigms 'à la Kuhn', several of these 'school paradigms' may coexist, interact, or even converge, providing evidence for the diversity and richness of mathematical work.

Even more than in the previous symposia, the role of tasks, in connection with changes of fields, has been emphasized. Substantial progress has been made, regarding the issue raised in ETM3 and

ETM4, about the description of the circulation between parallel working spaces, between epistemological planes where objects common to two fields are encountered, but where registers of representations, artifacts, theorems or definitions from the different theoretical frames of reference are drawn on in very different ways. For such a description, one may exploit the idea of ‘comics’, by using sequences of diagrams displaying the steps through which the work came out (or is expected to come out) in the *suitable* MWS. The model then allows a fine account of the activity progression in the classroom.

For instance, Charlotte Derouet looked into the MWS associated with density functions. The study of this question is set in a very specific educational context, that of French teaching in ‘classe de Terminale’ (last year of high school), where a marked emphasis is put on integral calculus and initiation to statistics. Derouet shows that the mathematical work around density functions must ultimately be thought of as an articulation between three subfields : Density Probability (PaD), Descriptive Statistics (SD) and Integral Calculus (CI). It is then a matter of finding the tasks that favor the links between these three related ways of working.

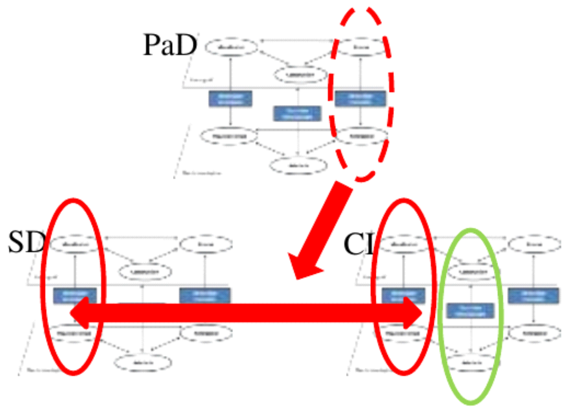


Figure 1: Relationship between three MWS associated with different domains

Derouet represents each of the working phases linked to a specific task by a diagram that reveals the articulations between the three local MWS. Then, she assembles these different diagrams into a chronological sequence, as in a ‘comics’. Moreover, using different colors, this representation allows Derouet to highlight the respective inputs from the teacher and the students in their working progress inside the suitable MWS.

Another choice, provided by Matthew Anastasiadis and Kostas Nikolantonakis, consists in describing a ‘complex’ of MWSs associated to several fields. Depending on the task to be solved, the student must learn to get the right tool in the right MWS, like a buyer in a shopping center. In their study about the relationship between areas and perimeters, the two authors establish that a central issue is the articulation between the $MWS_{Geometry}$ and the $MWS_{Numbers}$. It is then a matter of analyzing the differences and the possible integrations, when and where these two MWSs intersect in a fundamental way around the instrumental dimension.

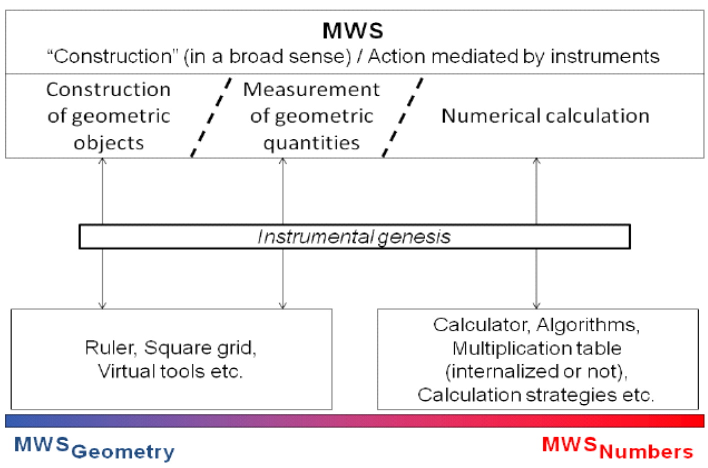


Figure 2: Interactions between MWS associated to Numbers and Geometry

For a given task, the model should allow to identify and locate where and how the mathematical work circulates, i.e. its path inside one or several MWSs. It should also allow to spot the possible resonances between the three poles, semiotic, instrumental and discursive. The solicited activity must favor articulation and rebounds between the vertical planes [Sem-Ins], [Sem-Dis] and [Ins-Dis], thus leading to a complete mathematical work. This idea of *complete* mathematical work has been illustrated thanks to the 'comics' proposed by Kuzniak and Nechache (2014). Their study about a probability task supervised by a teacher in his class led them to analyze the different phases of the teaching session, showing a complete circulation between the three vertical planes of the MWS (Figure 3) during two phases.

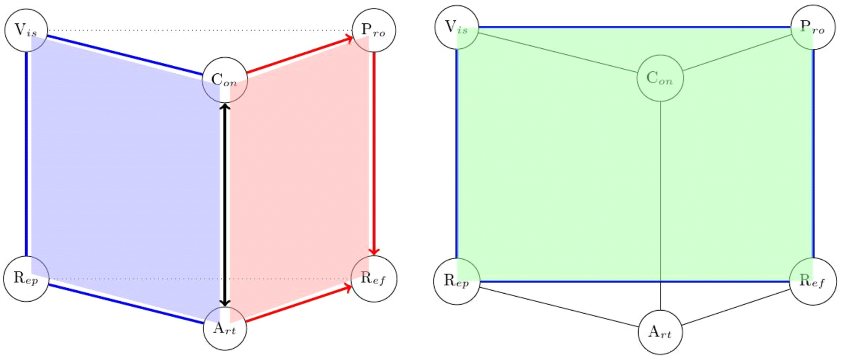


Figure3: Phase 1 and Phase 2 in the reference MWS

The MWS model, conceived as a circulation space between the poles in the epistemological and cognitive planes, may be used to set and fine-tune already constructed tasks, but also to develop and calibrate new teaching situations, still to be experimented. To move forward into this direction, Kuzniak and Nechache introduced the idea of *emblematic tasks*, defined in relation to the MWS model. These tasks must satisfy the following conditions :

To be available in the *reference* MWS, or in other words to be recognized by the educational institution as relevant for the mathematical work intended for the students.

To be fully topical in the suitable MWSs, or in other words to be part of the tasks that are effectively being proposed in the 'potential' suitable MWSs, delimited by the textbooks but first and foremost by the actual standard classroom teaching.

To potentially support a complete mathematical work. Emblematic tasks must allow a circulation between poles and vertical planes in the MWS (Kuzniak et Richard, 2014), which is a reliable warrant for a complete mathematical work.

One among the interests of these emblematic tasks is the potentiality of comparing their implementation by different teachers in the same educational context or institution, but also in varied institutions from different countries. Besides, the preliminary molding that such tasks require should contribute to improve, *a posteriori*, the way these tasks, once experimented, are being observed and analyzed, by making easier the description of the students' progression in their mathematical work, whether these students are observed alone or in group. This research trend may lead to a better understanding of the still largely open issue of *personal* MWSs.

Some questions for the future Symposia

Q1 : How to describe, *a priori*, the epistemological organization and the cognitive dimension of the expected work? Is the MWS model suitable or sufficient to account for the close interplay between the two? On what theories, in mathematics education or in related fields, can we lean?

Q2 : What sense should be ascribed to the expressions *global MWS* and *local MWS* ? Do the qualifiers global or local necessarily refer to a MWS associated to a field, respectively to a field or subfield?

Q3 : What are the MWS poles, planes and geneses activated by the development of a proof and of the associated discourse? What are the paradigms at play in such a construction? And what about constructing a validation in the setting of a modelling tasks?

Q4 : How to make sure that the description through ‘comics’ adequately accounts for the mathematical work actually done? What theoretical and methodological tools could be of use (paradigms, semiotic and instrumental tools, technological and/or theoretical tools…) ?

Q5 : Does any change of fields entail a change of MWSs? More generally, when can we consider that there is (or has been) a change of MWS?

Q6 : How to recognize an emblematic task? What should be planned about their study, about their experimentations? What are the differences with Brousseau’s ‘situations fondamentales’?

UN MARCO METODOLÓGICO Y TEÓRICO PARA EL ESTUDIO DEL TRABAJO MATEMÁTICO EN CONTEXTO ESCOBAR

Desde su aparición en el marco de las investigaciones sobre la enseñanza de la geometría, el modelo teórico y metodológico de los Espacios de Trabajo Matemáticas (ETM) ha tenido en cuenta la diversidad de dominios matemáticos clásicos tales como el análisis, álgebra, probabilidad, etc. Esta evolución hacia temas de investigación en otros dominios de las matemáticas ha puesto de relieve la necesidad de interesarse en los subdominios, que son más restringidos y delimitados dentro de los grandes dominios de las matemáticas.

Por lo tanto, más allá de la consideración de los ETM propuestos en dominios matemáticos específicos — $\text{ETM}_{\text{Probabilidades}}$, $\text{ETM}_{\text{Geometría}}$, $\text{ETM}_{\text{Análisis}}$ —puede ser necesario estudiar el trabajo matemático en dominios más limitadas. En algunos estudios, puede incluso ser útil para especificar los ETM locales estructurados en torno a una noción, de un teorema… Así, es posible pensar, como lo hizo Charlotte Derouet en su estudio sobre la función de densidad, introducir varios ETM locales ($\text{ETM}_{\text{Función Densidad}}$, $\text{ETM}_{\text{Cálculo Integral}}$, $\text{ETM}_{\text{Estadística Descriptiva}}$).

Durante el simposio, estos aspectos locales fueron objeto de extensas discusiones que trataron de comprender y describir las interacciones entre estos diferentes ETM, en particular considerando las transiciones o trabajo en paralelo cuando éste se apoya en varios niveles. Las preocupaciones que hemos presentado no son nuevas en el campo de la *Didáctica de la Matemática*, y algunas respuestas se podrían obtener usando otros marcos teóricos. En Francia, por ejemplo, la TAD propone niveles de co-determinación que estructuran las matemáticas en áreas, sectores y temas. En un enfoque más cognitivo, Vergnaud sugirió, para fines de análisis, la noción de *campos conceptuales* y Douady introdujo la noción de *juego de marcos*. Estas herramientas teóricas permiten considerar la riqueza que puede tener la enseñanza por resta posibilidad de cambiar de un dominio matemático a otro. Entonces, ¿qué puede aportar de nuevo a esta pregunta el enfoque de los ETM ? De hecho, el modelo de los ETM es organizado de tal forma que considera simultáneamente la organización epistemológica de las matemáticas y la dimensión cognitiva del trabajo requerido por los estudiantes para llevar a cabo una tarea determinada, y más aún de un conjunto (organizado) de tareas. En efecto, las nociones de los ETM locales y de los ETM globales tratamos de capturar la dinámica requerida para que un estudiante logre progresivamente un mayor dominio matemático, mediante la resolución de un conjunto de tareas dentro de un dominio relacionado con uno o más ETM globales, cada una de las tareas específicas conducen a un ETM local.

La extensión de la investigación a los diversos ETM y a la dinámica entre dominios y subdominios, nos condujo también a la reformulación del papel de los *paradigmas* en el modelo de los ETM. Introducidos para dar cuenta de la diversidad epistemológica del trabajo en geometría, los *paradigmas geométricos* supusieron fuertes rupturas epistemológicas, cuyas trazas se encuentran tanto en la historia como en la enseñanza. Desde entonces, diversas formas de paradigmas se han propuesto (en particular, Parzysz en probabilidades, Montoya-Delgadillo y Vivier en análisis, Mena-Lorca y Gamboa en álgebra) sin alejarse de la idea inicial de paradigma en el sentido de Kuhn, cuya fuente fue el desarrollo histórico y sus rupturas, para incluir e integrar los paradigmas en el contexto de enseñanza. De acuerdo a estos contextos y a los dominios propuestos, se tiene, por lo tanto, un conjunto de métodos de trabajo, técnicas y métodos, estándares (validación, notaciones, representaciones ...) o normas que se encuentran compartidas y estabilizadas en las instituciones escolares. A diferencia de los paradigmas "a la Kuhn," varios de estos "paradigmas escolares" pueden coexistir, interactuar o incluso converger, reflejando la diversidad y riqueza del trabajo matemático.

Incluso más que en simposios anteriores, se puso énfasis en el rol de la de tareas en relación con el cambio de dominio. Se ha hecho un progreso sustancial a la pregunta emanada de ETM3 y ETM4 en describir la circulación entre espacios de trabajo paralelos, entre los planos epistemológicos donde viven los objetos comunes a dos dominios, pero cuando los registros de representación, artefactos, teoremas o definiciones de diferentes referenciales teóricos son movilizados (o no) de manera muy diferente. (Q3). Por esto, es posible apoyarse en la idea de "cómics" (o bandas-dibujadas) que dan cuenta de las etapas del trabajo en el ETM idóneo. Entonces, el modelo permite una descripción detallada del desarrollo de la actividad en la sala de clases. (Q4).

Así, Charlotte Derouet se interesó en el ETM asociado con las funciones de densidad. El estudio de este tema se encuentra en un contexto escolar específico; este fue realizado en Francia en la “clase Terminal” (último año de la escuela secundaria), el cual se enseña con un fuerte énfasis en el cálculo integral y en la introducción a la estadística. Derouet muestra que el trabajo matemático en torno de la función de densidad debe, finalmente, ser pensado como una articulación entre los tres dominios: Densidad de Probabilidad (PaD), Estadística Descriptiva (SD) y el Cálculo Integral (CI). Entonces, se trata de encontrar las tareas que favorezcan los vínculos entre estas tres maneras de trabajar.

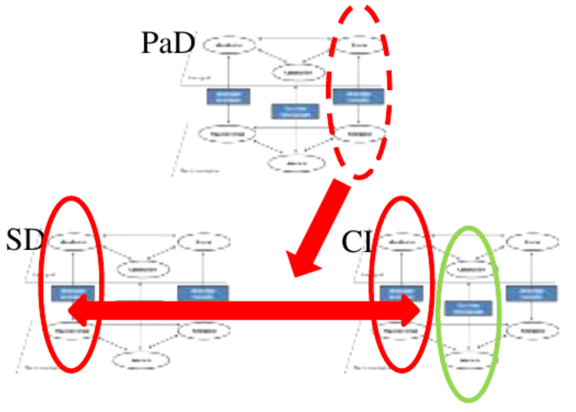


Figura 1: Relaciones entre tres ETM asociados con diferentes dominios

Derouet representa cada una de las fases del trabajo relacionadas con una tarea en particular por un diagrama que muestra las articulaciones entre los tres ETM locales. Posteriormente, se ensamblan estos diferentes diagramas en una secuencia cronológica que pueden ser visto como un “cómic”. Además, estas representaciones permiten, mediante el uso de colores, evidenciar las respectivas contribuciones del profesor y de los estudiantes en el trabajo progresivo en el ETM idóneo.

Otra opción, propuesta por Matthew Anastasiadis y Kostas Nikolantonakis, consiste en describir un "complejo" de ETM asociados a diversos dominios. En función de la tarea a resolver, el estudiante debe aprender a elegir la herramienta adecuada en el ETM, como un comprador en un centro comercial. En su estudio sobre la relación entre áreas y perímetros, ambos autores muestran claramente que una cuestión clave es la articulación entre los $\text{ETM}_{\text{Geometría}}$ y $\text{ETM}_{\text{Números}}$. Entonces, es importante analizar las diferencias y las posibles integraciones cuando estos dos ETM se intersectan, fundamentalmente, alrededor de la dimensión instrumental.

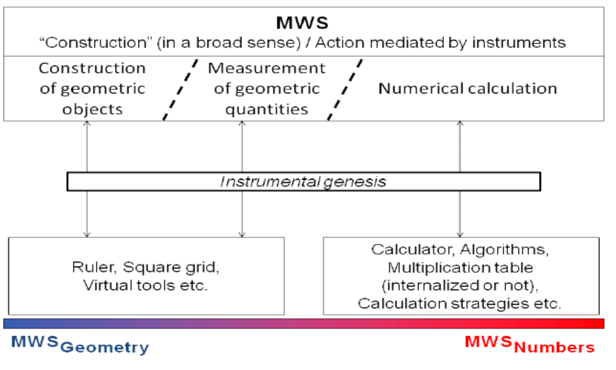


Figura 2: Interacciones entre los ETM de los números y de la geometría

Para una tarea determinada, el modelo debe permitir identificar las circulaciones del trabajo matemático, al interior de un ETM o varios ETM. También, debe permitir detectar las posibles resonancias entre los tres polos, la semiótica, instrumental y discursiva. Las actividades de implementación deben promover las articulaciones y rebotes entre los planos verticales ([Sem-Ins], [Sem-Dis] e [Ins-Dis]), lo que induce a un trabajo matemática *completo*. Esta idea de trabajo matemático *completo* fue ilustrada gracias a los “cómics” propuestas por Kuzniak y Nechache (2014). Su estudio con una tarea de probabilidad dirigida por un profesor en su clase permitió analizar las diferentes fases de la sesión, mostrando una circulación completa del trabajo entre los tres planos verticales del ETM durante las dos fases (Figura 3).

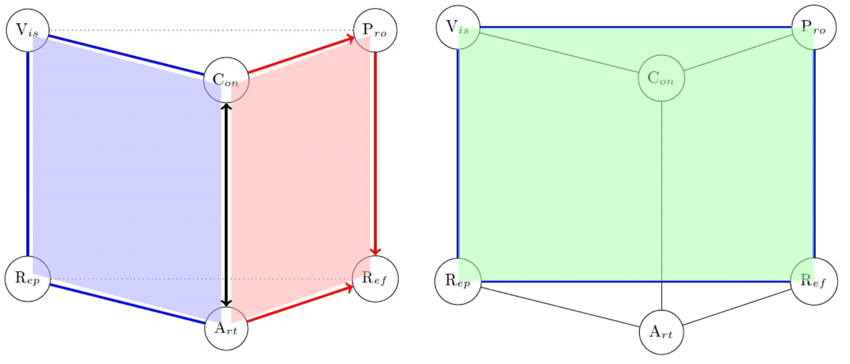


Figura 3: Fase 1 y Fase 2 en el ETM de referencia

El modelo del ETM, concebido como un espacio de circulación entre los polos de los planos epistemológico y cognitivo, puede ser utilizado para establecer y ajustar tareas ya construidas, pero también para el desarrollo o la calibración de nuevas situaciones de enseñanza por experimentar. Para avanzar en esta dirección, Kuzniak y Nechache introdujeron la idea *tareas emblemáticas*, definidas utilizando el modelo del ETM. Estas tareas deben satisfacer las siguientes condiciones:

Estar disponible en el ETM de referencia, es decir, ser reconocidos por la institución educativa como relevantes para el trabajo matemático destinado a los estudiantes.

Ser vivas en el ETM idóneo, es decir, formar parte de las tareas que se proponen efectivamente en los ETM idóneos "potenciales", delimitados por los libros de texto, pero también y por sobre todo por la regularidad de las propias clases.

Ser potencialmente portadoras de un trabajo matemático completo. Las tareas emblemáticas deben permitir la circulación entre los polos y los planos verticales del ETM (Kuzniak y Richard, 2014), que es una garantía confiable para un trabajo matemático completo.

Uno de los mayores intereses de estas tareas emblemáticas es la posibilidad de comparar su implementación por diferentes profesores en el mismo contexto educativo o institución, pero también en diversas instituciones de diferentes países. Además, el pre-formato preliminar que estas tareas requieren debe contribuir a mejorar, a posteriori, la forma en que estas tareas, una vez experimentadas, facilitan la descripción de la progresión de los estudiantes en su trabajo matemático, ya sea individual o grupal. Esta tendencia de investigación sería avanzar en cuestiones abiertas en la comprensión del ETM personal.

Algunas preguntas para los futuros simposios

P1: ¿Cómo describir a priori la organización epistemológica esperada y la dimensión cognitiva del trabajo? ¿El modelo de los ETM es suficiente para dar cuenta de la estrecha interacción entre ambos? ¿Cuáles son las teorías en didáctica de la matemática (o dominios relacionados) en la que podemos apoyarnos?

P2: ¿Qué sentido debe atribuirse a las expresiones ETM global y ETM local? ¿Las nociones globales o locales se refieren necesariamente a un ETM asociado a un dominio o subdominio respectivamente?

P3: ¿Cuáles son los planos y génesis movilizados por la constrFigure 2. Interactions between MTEs of Numbers and Geometryucción de pruebas y los discursos asociados? ¿Cuáles son los paradigmas en juego en esta construcción? ¿Qué sucede con la construcción de una validación en el marco de tareas de modelización?

P4: ¿Cómo asegurarse de que la descripción a través de "cómics" representan adecuadamente el trabajo matemático efetivamente realizado? ¿Qué herramientas teóricas y metodológicas pueden ser de utilidad (paradigmas, herramientas e instrumentos semióticos, tecnológicos o teóricos ...)?

P5: ¿Todo cambio de dominio induce un cambio de ETM? En términos más generales, ¿cuándo podemos considerar que existe un cambio de ETM?

P6: ¿Cómo reconocer una tarea emblemática? ¿Qué se debe planificar o estudiar para su experimentación? ¿Cuáles son las diferencias con las *situaciones fundamentales* de Brousseau?

UN CADRE MÉTHODOLOGIQUE ET THÉORIQUE POUR L'ÉTUDE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE EN CONTEXTE SCOLAIRE

Depuis son émergence dans le cadre des recherches sur la didactique de la géométrie, le modèle théorique et méthodologique des Espaces de Travail Mathématique (ETM) a pris en compte la diversité des domaines mathématiques classiques comme l'analyse, algèbre, les probabilités, etc. Cette évolution vers des thématiques de recherche dans d'autres domaines mathématiques a mis en évidence la nécessité de s'intéresser à des sous-domaines plus restreints et délimités à l'intérieur de grands domaines mathématiques. Ainsi, au-delà de la considération des ETM propres à des domaines mathématiques spécifiques — $\text{ETM}_{\text{Probabilités}}$, $\text{ETM}_{\text{Géométrie}}$, $\text{ETM}_{\text{Analyse}}$ —, il peut s'avérer nécessaire d'étudier le travail mathématique dans des aires plus circonscrites. Dans certaines études, il peut même être intéressant de préciser des ETM locaux structurés autour d'une notion, d'un théorème. On peut ainsi penser, comme l'a fait Charlotte Derouet dans le cadre de son étude sur les fonctions à densité, à introduire plusieurs ETM locaux ($\text{ETM}_{\text{Fonctions à densité}}$, $\text{ETM}_{\text{Calcul Intégral}}$, $\text{ETM}_{\text{Statistiques Descriptives}}$). Pendant le symposium, ces aspects locaux ont fait l'objet de larges discussions qui visaient à comprendre et à décrire les interactions entre ces différents ETM, notamment au regard des transitions ou des mises en parallèle qui les impliquent, quand le travail s'articule sur plusieurs niveaux.

Les préoccupations dont nous rendons compte ici ne sont pas nouvelles dans le champ de la didactique des mathématiques, et certaines réponses ont pu y être apportées en utilisant d'autres cadres théoriques. En France, par exemple, la TAD propose une échelle de co-détermination qui structure les mathématiques en domaines, thèmes et sujets. Dans une approche plus cognitive, Vergnaud suggère l'usage, à des fins d'analyse, de la notion de champs conceptuels et Douady introduit la notion de jeu de cadres. Ces outils théoriques permettent de rendre compte de la richesse que donne à l'enseignement cette possibilité assumée de basculer d'un domaine mathématique à l'autre. Que peut donc apporter de nouveau à cette question l'approche par les ETM ? De fait, le modèle des ETM est organisé de façon à considérer simultanément l'organisation épistémologique des mathématiques et la dimension cognitive du travail que doivent fournir les élèves pour réaliser une tâche donnée, et au-delà un ensemble (organisé) de tâches. En effet, les notions d'ETM locaux et d'ETM globaux tentent de saisir la dynamique nécessaire à un étudiant pour atteindre peu à peu une maîtrise mathématique plus grande, à partir de la résolution d'un ensemble de tâches relevant d'un champ notionnel lié à un ou plusieurs ETM globaux, chacune des tâches spécifiques donnant lieu à un ETM local.

L'extension de la recherche à des ETM divers et à cette dynamique entre domaines et sous-domaines a aussi conduit à une reformulation de la place des paradigmes dans le modèle des ETM. Introduits pour rendre compte de la diversité épistémologique du travail en géométrie, les paradigmes géométriques supposaient des ruptures épistémologiques fortes, dont on retrouvait la trace autant dans l'histoire que dans l'enseignement. Depuis, les diverses formes de paradigmes qui sont proposées (notamment Parzysz en probabilités, Montoya-Delgadillo et Vivier en analyse, Mena-Lorca et Gamboa en algèbre) s'éloignent de l'idée initiale de paradigme au sens de Kuhn, qui avait pour source le développement historique et ses ruptures, pour inclure et intégrer les paradigmes dans les contextes d'enseignement. Selon ces contextes et les domaines considérés, il s'agit donc d'un assemblage de modes de travail, de techniques et méthodes, de standards (validation, notations, représentations…), qu'on retrouve sous forme partagée et stabilisée dans les institutions scolaires. Contrairement aux paradigmes « à la Kuhn », plusieurs de ces « paradigmes scolaires » peuvent cohabiter, interagir, voire converger, témoignant alors de la diversité et de la richesse du travail mathématique.

Plus encore que dans les symposiums précédents, le rôle des tâches en liaison avec les changements de domaine a été souligné. Des progrès substantiels ont été apportés à la question posée à ETM3 et à ETM4 sur la description de la circulation entre des espaces de travail parallèles, entre des plans épistémologiques où vivent des objets communs à deux domaines mais où des registres de représentations, des artefacts, des théorèmes ou définitions des différents référentiels théoriques sont mobilisés (ou non) de manière très différentes. Pour cela, il est possible de s'appuyer sur l'idée de "bandes-dessinées" qui rend compte des étapes du travail dans l'ETM idoine. Le modèle permet alors une description fine du déroulement de l'activité en salle de classe.

Ainsi, Charlotte Derouet s'intéresse à l'ETM associé aux fonctions à densité. L'étude de cette question se situe dans un contexte scolaire bien précis, celui de l'enseignement en France en terminale, avec une insistance marquée sur le calcul intégral et l'initiation aux statistiques. Derouet montre que le travail mathématique autour des fonctions à densité doit, in fine, être pensé comme une articulation entre trois domaines (Figure 1), celui des Probabilités à Densité (PaD), celui de la Statistique Descriptive (SD) et celui du Calcul Intégral (CI). Il s'agit alors de trouver les tâches qui favorisent les liens entre ces trois manières de travailler.

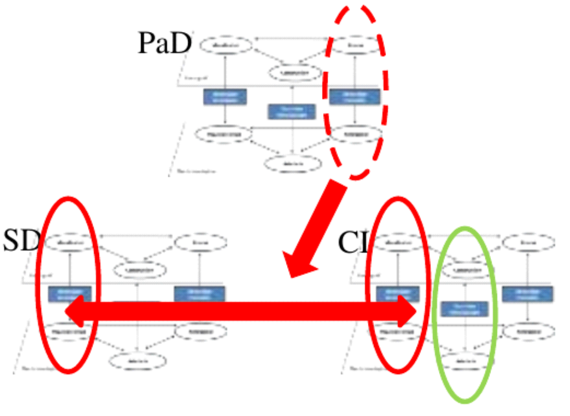


Figure 1: Relations entre trois ETM associés à des domaines différents

Derouet représente alors chacune des phases du travail associées à une tâche particulière par un diagramme qui montre les articulations entre les trois ETM locaux. Puis, elle assemble ces différents diagrammes dans une suite chronologique que l'on peut voir comme une bande-dessinée. Cette représentation lui permet également de mettre en évidence, par des couleurs, les contributions respectives du professeur et des élèves dans l'avancée du travail dans l'ETM idoine.

Un autre choix, retenu par Matthew Anastasiadis et Kostas Nikolantonakis, consiste à décrire un « complexe » d'ETM associés à des domaines. En fonction de la tâche à résoudre, l'étudiant doit apprendre à aller chercher le bon outil dans le bon ETM, à la manière de l'acheteur dans un complexe commercial. Dans leur étude à propos de la relation entre aires et périmètres, les deux auteurs montrent bien qu'un enjeu essentiel est celui de l'articulation entre l'$\text{ETM}_{\text{Géométrie}}$ et l'$\text{ETM}_{\text{Nombres}}$. Il s'agit alors d'analyser les différences et les possibles intégrations, quand ces deux ETM s'intersectent de manière fondamentale autour de la dimension instrumentale.

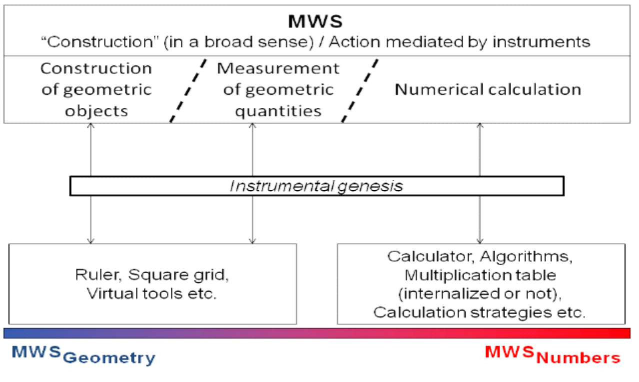


Figure 2: Interactions entre les ETM des nombres et de la géométrie

Pour une tâche donnée, le modèle doit permettre d'identifier les circulations du travail mathématique, les parcours à l'intérieur d'un ETM ou de plusieurs ETM. Il doit aussi permettre de repérer les mises en résonance possibles entre les trois pôles, sémiotique, instrumental et discursif. L'activité mise en œuvre doit favoriser les articulations et rebonds entre les plans verticaux ([Sem-Ins], [Sem-Dis] et [Ins-Dis]), induisant ainsi un travail mathématique complet. Cette idée de travail complet a été illustrée grâce aux 'bandes-dessinées' proposées par Kuzniak et Nechache (2014). Leur étude d'une tâche de probabilité pilotée par un professeur dans sa classe leur permet une analyse des différentes phases de la séance, faisant apparaître une circulation complète du travail entre les trois plans verticaux de l'ETM en combinant les phases 1 et 2 qui activent des plans différents.

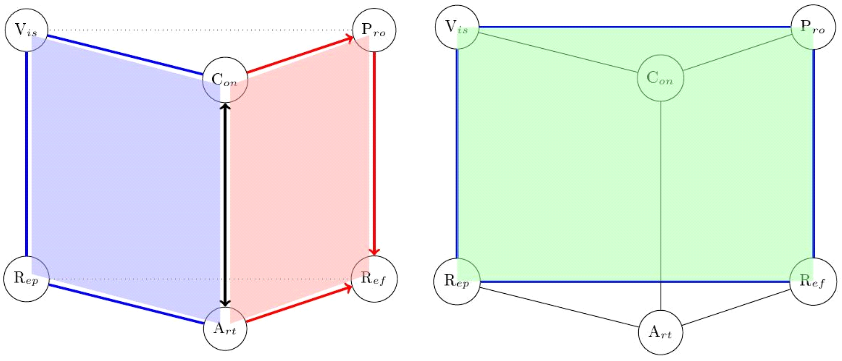


Figure 3 : Phase 1 et Phase 2 dans l'ETM de référence

Le modèle de l'ETM, conçu comme un espace de circulation entre les pôles dans les plans épistémologique et cognitif, peut ainsi servir à la mise en place et à l'ajustement de tâches déjà construites, mais aussi permettre l'élaboration ou le calibrage de situations d'enseignement nouvelles et encore à expérimenter. Pour avancer dans cette direction, Kuzniak et Nechache ont introduit l'idée des *tâches emblématiques*, qu'ils ont définies en utilisant le modèle des ETM. Ces tâches doivent vérifier les conditions suivantes :

Être disponibles dans les ETM de référence, autrement dit bénéficier d'une reconnaissance qui témoigne de leur adéquation au travail mathématique visé pour les élèves par l'institution scolaire.

Être vivantes dans les ETM idoines, autrement dit faire partie des tâches qui sont effectivement proposées, d'abord dans les ETM idoines 'potentiels' circonscrits par les manuels, mais aussi et surtout dans les classes ordinaires.

Être potentiellement porteuses d'un travail mathématique complet. Les tâches emblématiques doivent permettre une circulation entre les pôles et les plans verticaux des ETM (Kuzniak et Richard, 2014), assurant ainsi un travail mathématique complet.

Un des grands intérêts possibles de ces tâches emblématiques est de pouvoir comparer leurs mises œuvre par des professeurs différents dans un même système scolaire, voire peut-être également dans des pays ou institutions variées. Enfin, le préformatage que de telles tâches supposent devrait permettre d'étoffer l'observation et le compte rendu d'expérimentations pour en faciliter l'examen, en rendant notamment possible la description du cheminement, dans leur travail mathématique, d'élèves pris isolément ou en groupe. Ceci permettrait d'avancer sur la question encore largement ouverte de la connaissance des ETM personnels.

Quelques questions pour les futurs Symposiums

Q1 : Comment décrire, a priori, l'organisation épistémologique attendue et la dimension cognitive du travail ? Le modèle des ETM rend-t-il suffisamment compte de l'étroite interaction entre les deux ? Quelles sont les théories en didactique des mathématiques (ou dans des domaines connexes) sur lesquels il peut s'appuyer ?

Q2 : Quel sens donner aux expressions *ETM global* et *ETM local* ? Qualifier un ETM de global ou de local, est-ce le cas échéant associer cet ETM à un domaine ou à un sous-domaine ?

Q3 : Quels sont les plans et genèses mobilisés par la construction d'une preuve et l'élaboration du discours associé ? Quels sont les paradigmes en jeu dans cette construction ? Qu'en est-il de la construction de la validation dans le cadre de tâches de modélisation ?

Q4 : Comment s'assurer que la description par des « bandes-dessinées » rend bien compte du travail mathématique effectif ? Quels outils théoriques ou méthodologiques peut-on utiliser (paradigmes, outils et instruments sémiotiques, technologiques et théoriques…) ?

Q5 : Est-ce que tout changement de domaine induit un changement d'ETM ? Plus généralement, quand peut-on considérer qu'il y a un changement d'ETM ?

Q6 : Comment reconnaître des tâches emblématiques ? Quel plan d'étude pour leur expérimentation ? Quelles différences avec les *situations fondamental*es de Brousseau ?

CONECTAR LOS ETM DEL ANÁLISIS: EL CASO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Alain Kuzniak[1], Denis Tanguay[2], Laurent Vivier[3], Jaime Mena-Lorca[4], Arturo Mena-Lorca[5], Elizabeth Montoya-Delgadillo[6]

Universidad Paris Diderot[1,3] – Francia, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[4,5,6] – Chile, Université du Québec à Montréal[2] – Canadá

alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr, tanguay.denis@uqam.ca, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr, jaime.mena@pucv.cl, arturo.mena@pucv.cl, elizabeth.montoya@pucv.cl

La problemática de construir un ETM estructurado que permite un trabajo completo es al centro de esta investigación. Consideramos el dominio del análisis por el cual gran parte de los profesores no tiene un ETM bien articulado. Se diseñó una ingeniería didáctica aplicada a estudiantes (profesores en formación inicial) en Chile y Francia. El estudio profundiza en el ETM personal y en los paradigmas en el análisis para la construcción de la función exponencial.

***Palabras Claves**: análisis, función exponencial, modelización, formación de docentes*

INTRODUCCIÓN

La enseñanza del análisis aparece tardíamente en los currículos chileno y francés al fin de la escuela obligatoria. La identificación de este trabajo matemático es complejo y va a la par a una reflexión didáctica sobre esta construcción en la escolaridad. En el marco de un proyecto en común entre el LDAR-P7 de Francia y el IMA-PUCV de Chile (ECOS-Sud C13H03[1]), hemos estudiado esta cuestión y nos hemos apoyado en el marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático, ETM (Kuzniak, 2011; Kuzniak & Richard, 2014; Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016). Nuestro estudio del trabajo matemático existente en el dominio del análisis parece revelar un conjunto más bien desestructurado, como lo hemos podido ver con el caso de las funciones exponenciales. Precisamente, hemos podido apoyarnos sobre el estudio de estas funciones, por una parte, para mostrar las limitantes del trabajo matemático efectuado actualmente en análisis, y, de otra parte, para construir una serie de secuencias didácticas, conformando una ingeniería didáctica, que permitirían ayudar a los futuros profesores a construir un ETM estructurado y global en el dominio del análisis. Este trabajo de conexión es importante por la constitución de un ETM global del análisis. Nos interesa dar condiciones para intervenir en el ETM personal de estudiantes universitarios que realizan la formación inicial de profesores. Para ello, diseñamos una serie de actividades que conformaron una ingeniería didáctica (ID) la cual fue aplicada en Chile y en Francia. Algunos de los datos obtenidos en esta primera aplicación se presentan en esta comunicación.

La propuesta didáctica, en torno a la función exponencial, tiene como objetivo de conectar el ETM de las funciones y de las series de polinomios con sus propiedades (continuidad, derivabilidad), así como con sus distintas representaciones. La idea central es desarrollar (o provocar) cuestionamientos centrales del análisis que involucran la aproximación, la convergencia, la completitud, la continuidad, en relación con la articulación entre lo discreto, lo denso y lo continuo. Precisaremos algunos puntos esenciales que aparecen en la construcción del trabajo matemático en el análisis.

EL CONSTRUCTO DEL ETM EN EL ANÁLISIS

Comenzamos por precisar algunos elementos del marco teórico y metodológicos del ETM que utilizaremos a continuación. El marco del ETM considera un ETM que depende de dominios matemáticos específicos (Kuzniak, 2011), tales como el análisis, la geometría, el álgebra, las probabilidades, etc., y los correspondientes *paradigmas* son su caracterización en esos dominios; así, hablamos de los paradigmas geométricos, los paradigmas del análisis, etc. (Ibíd.).

En el ETM se concibe la reflexión como el fruto de la interacción entre un individuo y los problemas en un dominio en un ambiente organizado por y para el matemático (geómetra, o algebrista, etc.), mediante la articulación de dos planos: el epistemológico y el cognitivo (Kuzniak, 2011). De los tres tipos de ETM (referencia, idóneo y personal), en este artículo nosotros presenteamos una intervención al ETM personal de futuros profesores. Sin embargo, hemos necesitado estudiar el ETM de referencia de las instituciones involucradas.

El *plano epistemológico* está compuesto por tres *componentes* o polos, a saber: el *representamen,* los signos que se constituyen en registros de representación semiótica; los *artefactos,* que son elementos materiales o simbólicos utilizados; y el *referencial* que está constituido por las propiedades, los teoremas, las definiciones. El *plano cognitivo* se compone de los procesos de, correspondientemente, *visualización, construcción* y *prueba*. Los planos se articulan mediante tres *génesis*: una *génesis semiótica,* basada en los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; una *génesis instrumental,* que permite operacionalizar los artefactos en el proceso de construcción; y una *génesis discursiva* de la prueba que da sentido a las propiedades para dejarlas al servicio del razonamiento matemático.

Esta articulación no debe ser entendida como la unión individual entre las componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación activa conjuntamente por dos o incluso tres génesis, identificando así *tres planos verticales*: [Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis] (Kuzniak y Richard, 2014; Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016).

El ETM de referencia del Análisis, $\text{ETM}_{\text{análisis}}$, es guiado globalmente por el análisis estándar, y caracterizado con los tres paradigmas siguientes identificados en (Kuzniak et al., 2016) y (Montoya y Vivier, 2016) :

> **Análisis-Geométrico/Aritmético, AG**, que permite interpretaciones, con implícitos, nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real.
>
> **Análisis-Calculatorio, AC**, donde las reglas de cálculo son definidas más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión acerca de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.
>
> **Análisis-Real, AR**, caracterizado por un trabajo que considera la aproximación y abiertos, incluso lo topológico; definiciones y propiedades se establecen teóricamente definiciones y propiedades que permiten un "trabajo con ε-δ" específico de este paradigma[2]: cotas, desigualdades, "lo despreciable".

Es de nuestro interés identificar estos paradigmas en las producciones de los estudiantes, y así ajustar este aporte teórico con más evidencias.

EL CASO DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Un ejemplo emblemático de función

Una de las razones por las cuales elegimos la función exponencial para diseñar una ingeniera didáctica es que respecto de ella se puede observar la dialéctica entre lo discreto, lo denso y lo continuo (Derouet et al., 2016). Este es el caso para la construcción de la función exponencial como límite de una sucesión geométrica o por el método de Euler. En ambas aproximaciones existe un apoyo sobre lo discreto para construir un objeto continuo, lo cual es también frecuente para otros objetos matemáticos.

Nos parece que en el caso de la función exponencial es elemental el *espacio matemático* que se observa, esto es, tabular puntos (discreto) y luego obtener una curva representativa (continuo) lo que muchas veces es apoyado por un software (artefacto). Para su construcción es necesario el conocimiento de otras nociones (límites, continuidad, ...) de modo de comprender la continuidad (y otras propiedades) de la función exponencial.

El hábitat curricular en Chile y en Francia

En Chile la función exponencial se estudia en el segundo y en el cuarto año del liceo (niveles 10 y 12 respectivamente). En segundo medio, en la unidad de álgebra se solicita analizar gráficamente la función exponencial, a mano alzada y con herramientas tecnológicas. En cuarto medio, el trabajo se enriquece con la introducción de la función logaritmo. El trabajo es esencialmente gráfico y algebraico, sin uso de la derivación.

En Francia, la introducción de funciones exponenciales se hace en los cursos Terminales S y ES (denotados TS por la opción científica y TES por la opción económica y social, respectivamente), correspondientes al nivel 12. Hay diferencias significativas en estos cursos, pero en ambos, el trabajo se apoya sobre nociones del análisis, en particular, el límite, la derivación y la integración. Cabe señalar que el enfoque en Chile está más cerca de la clase de TES (Derouet et al., 2016) : en Chile y en Francia (TES), las funciones exponenciales con base a ($a > 0$, a distinto de 1) son introducidas como una extensión continua de las series geométricas de razón a. En TS, en Francia, se define la función exponencial, exp, como la única función derivable igual a su derivada y que vale 1 en 0.

Diferentes aspectos de la función exponencial : una desatirculación a nivel de su enseñanza

Como ocurre con muchos contenidos que se tratan en la enseñanza secundaria, la función exponencial se estudia por partes (Derouet et al., 2016) y no es claro que los estudiantes logren integrarlos armoniosamente para concebirla como un solo objeto matemático.

Una situación similar ocurre en la formación inicial de profesores, en la cual, la función exponencial es abordada en distintos cursos bajo objetivos más globales.

En Chile, en el primer curso de Cálculo, el centro está constituido por la continuidad y la derivada; la función exponencial se trata como un ejemplo de una función que es continua y posteriormente, como una que es derivable. Lo mismo ocurre en el segundo curso de Cálculo, en el cual la integración y las series constituyen el centro. La exponencial es uno de los tantos casos particulares que se estudian, pero desde el punto de vista de su integrabilidad, determinando su antiderivada, etc. Más adelante se estudia que la exponencial es una de las funciones que tiene una serie de Taylor, que cumple algún teorema de series de funciones, entre otros temas.

En Francia, los profesores en formación tienen cursos en los cuales la función exponencial es definida principalmente como la solución de $f' = f$ que satisface $f(0) = 1$. Posteriormente, ellos tendrán que enseñar en las secciones económicas del liceo la introducción de las funciones exponenciales mediante la relación funcional característica denotada por (*) – ver la sección siguiente.

En la formación inicial, en el caso de la modelización, es frecuente que se afirme que la función exponencial sirve como un modelo, ya sea como una función que es útil o como uno de los ejemplos de soluciones de ecuaciones diferenciales que resultan ser modelos utilizados en otras ciencias (ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes o como la solución de un modelo logístico).

Los estudiantes (futuros profesores) muestran que, a nivel de propiedades, más bien recurren a lo que aprendieron en el liceo, sin cuestionarse la existencia de los elementos que están tratando, pues la operatoria correcta lo justificaría. Nuestra experiencia como formadores nos hace pensar que es difícil integrar las dimensiones de la función exponencial, que son tratadas en forma parcelada; y el ETM personal de los profesores en formación en el caso de la función exponencial está desarticulado. ¿Están ellos preparados para este tipo de enseñanza? ¿Sus conocimientos están constituidos en un ETM bien articulado?

En términos generales, queremos entender cómo los programas de estudio estructuran los saberes en el ETM de referencia y su influencia al ETM idóneo ya que no siempre las circulaciones y conexiones son trabajadas, o lo son de manera parcial.

LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

En esta propuesta de enseñanza, enfrentamos a los estudiantes a momentos cruciales del trabajo en el análisis, en relación con la identificación de la existencia y las propiedades de una función. En el caso de la función exponencial, a partir de la ecuación funcional que ella posee, ponemos en evidencia tres momentos de un trabajo específico en análisis: (1) estudio de las regularidades de la función buscada, (2) construcción por aproximación de la función, (3) prueba de la existencia de esta función. La naturaleza de la aproximación y su relación con la prueba de la existencia serán elementos característicos del paradigma puesto en juego al resolver los problemas.

Organización general de las actividades

En la primera sesión se propone un trabajo de modelización a partir de situaciones *reales* con la finalidad de motivar la relación funcional $f(x+y) = f(x)f(y)$ (*) en $\mathbf{R}$.

En la segunda sesión, se hace un trabajo, de tipo algebraico, para la búsqueda e identificación de las soluciones no constantes de (*), conociendo $f(1)$. Se trabaja el problema de la continuidad, de la derivabilidad, y las relaciones con las representaciones gráficas (de lo discreto a lo denso y a lo continuo, la completitud de **R** está detrás). El problema de la existencia y de la regularidad (continuidad y derivabilidad) en (*) es puesto a partir de las primeras aproximaciones numéricas y gráficas.

La tercera sesión tiene por objetivo de definir f, y mostrar la existencia de tal función asumiendo la regularidad[3] en 0. Invertimos el problema: en la segunda sesión, se dio $f(1)$ e intentamos entender si $f'(0)$ existe, ahora es $f'(0)$ lo que se entrega. Eso permite una primera aproximación, apoyándose sobre el desarrollo del límite de f en 0. Ello debe permitir obtener sucesiones de polinomios, haciendo un trabajo de aproximación controlada sin la necesidad de justificar todo. En esta etapa, y solo en ésta, "todo está permitido" para explorar. Se consideran dos vías de solución: el método de Euler que no es el esperado (mantener las aproximaciones 0 con polinomios de Taylor de f), o bien, de forma más *natural*, partir de (*) para utilizar los polinomios $(1+ax/n)^n$. En ambos casos, esto posibilita definir una sucesión de polinomios que permiten, por convergencia, obtener una función de la cual se deberá probar que cumple con (*). La serie completa de la exponencial es muy útil en esta etapa.

En todo momento, los estudiantes pueden utilizar los conocimientos sobre la función exponencial que aprendieron. Esto enriquece el trabajo en el cual, finalmente, todo debe ser justificado, y simplemente no pueden decir "es la función exponencial porque lo sé". En esta etapa, se contemplan tiempos individuales, grupales y colectivos.

En lo que sigue, mostramos las sesiones, y las tareas propuestas en la segunda aplicación[4] realizada en Francia.

Sesión 1 – modelización

El objetivo para esta sesión, es proponer una o más situaciones de modelización para introducir la ecuación funcional $f(x+y) = f(x)f(y)$ y la expresión $(1+x/n)^n$. Lo importante es entrar en una cuestión problemática de la modelización. Podrían haber muchas ideas acerca de la modelización, una de las cuales, sería la ecuación funcional que luego se puede estudiar para ver si considera el fenómeno en cuestión. En particular, no es necesario que todos los estudiantes estén convencidos de la propiedad.

Una referencia a la función exponencial puede emerger, aquí o en cualquier momento. Esto no tiene ninguna incidencia en el trabajo: estas son soluciones, la cuestión es saber si hay otras.

Pensamos que ante esta pregunta, los estudiantes básicamente trabajarán en el paradigma AG, existe un énfasis en el trabajo numérico-algebraico, a pesar de encontrar una expresión que modele el problema planteado.

Sesión 2 – propiedades, regularidades

El objetivo para esta sesión es trabajar sobre los problemas de la continuidad, de la derivabilidad, y las relaciones con la representación gráfica.

Se busca determinar la o las soluciones de $f(x+y) = f(x)f(y)$ (*) en R.

Pregunta 1, *individual*

1-a. Encuentre todas las soluciones constantes en Y.

Se busca ahora las funciones f, soluciones (*), que no son constantes.

1-b. Muestre que para todo x real, $f(x) > 0$ y justifique que $f(0) = 1$.

<u>Indicación</u> : puede considerar $f(x/2)$

P1 permite a cada uno entrar al estudio de (*) y ver el interés de $x/2$. Una vez respondida esta pregunta, los estudiantes se agrupan de 3 ó 4 y con al menos 2 que hayan tenido éxito al responder esta pregunta. Mediante esta pregunta, al estudiante se le introduce a trabajar en el álgebra, es decir, se incentiva el paradigma AC.

Pregunta 2, *en grupo, material : papel cuadriculado y calculadora*

2-a. Elegir un valor para $f(1)$ que sea compatible con la pregunta 1, es decir, en $\mathbf{R}^{+}-\{0\,;\,1\}$.

2-b. Represente gráficamente la función f, solución de (*) que satisface $f(1) =$___, en $[-2\,;\,2]$. Utilice el papel cuadriculado; sea preciso en la representación gráfica.

Se espera tener puntos conectados por líneas y también tablas de valores. Esperamos tener puntos en todo el intervalo $[-2\,;\,2]$, aunque hay más entre 0 y 1. En caso de dificultad, se puede proponer calcular $f(1/2)$. No es necesario que todos los grupos logren ‘completar’ todo el intervalo $[-2\,;\,2]$, pero es necesario obtener menos uno.

Una puesta en común permite proyectar los gráficos obtenidos y discutir la pertinencia de “dejar únicamente los puntos” o “unir los puntos”. Esperamos que esta última será la respuesta para la mayoría, pero el ideal sería tener ambos tipos de gráficos para mostrar la diferencia y solicitar a los estudiantes discutir esta diferencia para que emerja un cuestionamiento respecto de la continuidad y también de la derivabilidad.

En esta pregunta P2, es claro observar el rol que juega la génesis instrumental mediante el uso del papel milimetrado o de la calculadora. Además, los constantes cuestionamientos permiten que el estudiante trabaje en el plano [Sem-Ins]. En términos del paradigma, pensamos que los estudiantes se posicionarán más bien en un paradigma AG, pues las argumentaciones provienen del efecto que provoca la visualización del gráfico. En el trabajo se espera ver una utilización de la relación (*) como un artefacto simbólico que permite calcular diferentes valores. Las valores que se puede calcular con el artefacto simbólico (*) son únicamente las imágenes de los números racionales, de la recta **Q**.1 de **R** visto como un **Q**-espacio vectorial. De hecho, P2 se focaliza en el paso de lo discreto a lo denso.

> **Pregunta 3**, *en grupos*
>
> 3-a. ¿Puede justificar que f es continua en 0 ?
>
> 3-b. Muestre que si f es continua en 0, entonces ella es continua en **R**.

3-a es una pregunta delicada, ya que todo hace pensar que la función es continua, pero esto se debe probar, a pesar que existen soluciones que no son continuas en 0.

Los indicios son los gráficos y el estudio de sucesiones particulares que tienden a 0. Sin olvidar lo que acostumbran hacer los estudiantes, la falta de experiencia y conocimiento sobre funciones no continuas. Después se conecta con la derivabilidad con el mismo tipo de cuestionamientos.

En las preguntas 3 y 4 se puede observar el énfasis de la génesis discursiva. Pero las justificaciones esperadas son bajo pruebas del paradigma AC (3-b) y AR (3-a).

> **Pregunta 4**, *en grupos*
>
> Suponga que f es continua en 0 (y, por lo tanto, en **R**).
>
> 4-a. ¿Es f es dérivable en 0 ? Justifique su respuesta. De ser posible, calcule $f'(0)$
>
> 4-b. Muestre que si f es derivable en 0, entonces f es derivable en **R**.

Nuevamente se hace una puesta en común, en la cual el profesor debe tener cuidado : con la continuidad se puede justificar que f es diferenciable en 0, pero se deber notar que el contexto es muy diferente de la pregunta 3. En la sesión 2 se termina afirmando que "existen contra-ejemplos de funciones que satisfacen (*), pero que no son continuas". Estas son 'muestras', casos extremos cuyo estudio va más allá de lo que nos interesa aquí analizar. En lo que sigue, nos restringimos al caso donde la solución es continua y diferenciable en 0. Esta es una hipótesis que justifica las representaciones gráficas regulares.

Esta pregunta, al igual como en la número 3, más bien está posicionada en el paradigma AC (4-b) y AR (4-a).

Sesión 3 : Aproximaciones polinomiales

La sesión 2 tiene como propósito una exploración numérica y gráfica de f, el problema de la regularidad (continuidad y derivabilidad). Esta sesión tiene como objetivo construir f para demostrar la existencia de una función de este tipo. En esta sesión, se trata el paso de lo denso a lo continuo.

Se busca determinar, y conocer, la o las soluciones no constantes de $f(x+y) = f(x)f(y)$ (*) en **R**, que sea(n) continua(s) y diferenciable(s) en 0 (por lo preferible también en **R**). No se usa más $f(1)$, pero ponemos $f'(0) = a$ (esperamos que cada grupo fije el valor de a). Invertimos el problema, para verlo desde otro aspecto. Se precisa con los estudiantes que, en la mayoría de las preguntas, no se requería justificaciones, pero si de explicaciones. Por otro lado, no importa cómo encontrar lo que se pide, sino que lo importante es estar convencido, y convencerse de que "se puede trabajar".

> **Pregunta 1**, *individual* (1-a) *y después en grupo*
>
> 1-a. Explique por qué $f(x)$ puede ser aproximada por $P_1(x) = 1+ax$.
>
> 1-b. Encuentre un polinomio P_2 de grado 2 que pueda aproximar $f(x)$ mejor que P_1.
>
> 1-c. Encuentre los polinomios P_n de grado n que puedan aproximar $f(x)$ cada vez mejor.

La pregunta 1 es difícil, y pensamos que los grupos no tendrán éxito en responderla. Luego es necesario proveer de indicaciones (*devoluciones*) en función a las preguntas que los estudiantes realicen. Esta fase es difícil de manejar para el formador. La continuación también lo será.

Dependiendo de la respuesta, pensamos que en esta pregunta cohabitan los paradigmas AC y AR; nos parece que la generalización permite o invita a transitar al paradigma AR, a pesar que las respuestas (esperadas) pueden ser bajo cálculos y operatorias explícitos, es decir, en el paradigma AC.

Existen dos caminos posibles : los polinomios $S_n(x) = (1+ax/n)^n$ y los polinomios de Taylor $T_n(x)$. Con el trabajo de la sesión 2, la primera sucesión de polinomios es, *a priori*, más natural ya que aproxima $f(x/n)$ por la tangente y luego es posible utilizar (*). En particular, pueden emerger conocimientos sobre la exponencial y las series de Taylor. Es importante dejar a los grupos elegir su propia orientación, y ayudarles si necesitan elegir, pero también nos parece importante <u>no darles indicaciones para el cálculo de derivadas sucesivas</u>. En ausencia de ideas, se puede orientar mas sobre la primera sucesión o favorizar la diversidad de aproximaciones para cada grupo de estudiantes.

Es posible calcular los valores de $f^{(n)}(0)$ formalmente, sin justificar la existencia y llegar después a la serie de Taylor. Es necesario derivar (*), sucesivamente, por x luego por y, etc. Sin embargo, la sola mención de "sabemos que es la exponencial, entonces son los polinomios de Taylor" no está permitida y es necesario que nos convenzamos que es la exponencial (y no solo con la gráfica).

A partir de la sucesión de polinomios, se conecta con la pregunta siguiente:

Pregunta 2, *material Geogebra*

El estudio de la sucesión de polinomios, de raíces, de límites, de convergencia, convergencia de la sucesión, la propiedad cualquier límite... Hacer conjeturas.

Se espera principalmente que se conjeture una convergencia rápidamente a partir de la evolución de las gráficas y que se restrinjan a un intervalo acotado (incluyendo las *colas* no acotadas de las gráficas en $-\infty$).

Se observa un énfasis de la génesis semiótica, pero también discursiva en cuanto se solicita el trabajo de conjeturas. Cabe señalar que el hecho de trabajar con el registro gráfico no implica que se reduzca el trabajo al paradigma AG. Así, se esperan respuestas en los tres paradigmas.

Pregunta 3, *en grupos*

3-a. Identifique los coeficientes de P_n, y muestre que $P_n(x)$ converge. Escribimos $f(x)$ como el límite de los $P_n(x)$.

<u>Indicación</u> : podemos definir la función $f(x)$ candidata a ser lim $P_n(x)$ como una suma infinita.

3-b. Justifique que f satisface (*).

3-c. Verifique que f es derivable en **R** y que $f' = af$.

El hecho de escribir un coeficiente de la suma S_n y ver su límite cuando $n \to \infty$, por un coeficiente de grado fijo, debe permitir hacer aparecer la serie de Taylor. Para el grupo que elija un desarrollo de Taylor, la identificación es casi inmediata. La prueba de la convergencia, una vez identificada la serie entera (de la exponencial), es compleja. No se espera que los estudiantes la encuentren y se puede dar, si el tiempo lo permite. Cabe señalar que sólo hay que justificar la convergencia puntual para S_n. La regularidad del límite proviene de resultados de series enteras.

Esta pregunta está posicionada en AR y esperamos respuestas en este paradigma, pero también en AC. Se espera una fuerte activación de la génesis discursiva y del plano [Sem-Dis].

Conclusión de las sesiones

Al finalizar las sesiones, esperamos que los estudiantes puedan identificar la función f como una función exponencial y comprobar, a partir de la serie entera, que f satisface (*). Podrán construir una solución a (*), pero sin que estén seguros que tienen todas las soluciones, incluso las derivables, ya que pueden faltar soluciones al pasar por las sucesiones de polinomios. Sin embargo, se construyen soluciones que pueden ser utilizadas para justificar que no hay otra solución regular.

Se puede señalar, en términos teóricos, que en las sesiones esperábamos encontrar los tres paradigmas y a la vez activar los tres planos (intencionadamente) con el propósito de generar ciruclaciones en el ETM.

PUESTA EN OBRA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

La propuesta fue aplicada en octubre de 2015 en 4 sesiones de clases de 1:30 hora cada una a 15 estudiantes y futuros profesores de tercer año de Pedagogía en Matemática (formación inicial de profesores) en Chile. En marzo de 2016, la aplicación incluyendo los ajustes, fue realizada en Francia a 16 estudiantes y futuros profesores en formación inicial en 1 sesión de clase de 3 horas (sin la tarea de modelación).

Sesión 1: modelización

El objetivo de esta primera sesión fue introducir la ecuación de funcionalidad, esto permitía estudiar una propiedad que posee la función exponencial sin necesariamente reconocer que se trata de ella.

Se plantearon dos situaciones de modelación: una referido a un préstamo a interés, de una ONG, y la otra a la depreciación de una maquinaria en una fábrica de corchos. En lo que sigue, presentamos solo algunos elementos del problema de la fábrica. Cabe señalar que el problema propuesto no es clásico para reconocer la función exponencial, como lo son los problemas de bacterias o en general relativos a poblaciones, y existen variables tales como la pérdida de la máquina que son normalizados por el costo inicial.

El problema a modelizar fue presentado como se muestra a continuación :

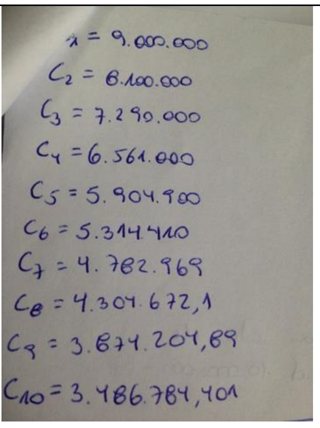
Precio de venta de una máquina

> Una máquina que fabrica corchos para las botellas de vino fue comprada nueva por la suma de US$ $10.000.000. Su tiempo de duración es de 10 años.
>
> Ella puede ser revendida muchas veces y su precio de venta únicamente depende de su tiempo de utilización. La máquina pierde anualmente el 10% de su valor.
>
> Sea $C(t)$ el precio de venta de la máquina en el instante t. Para determinar este valor introducimos la función $p(t) = C(t)/C(0)$, que da cuenta de la pérdida del valor de la máquina.
>
> 1. Encuentre $p(2)$, $p(5)$ y $p(10)$.
> 2. Una primera venta de la máquina ocurre al cabo de dos años ($s = 2$) y una segunda tres años después, es decir, después de 5 años ($w = 5$). Encuentre una relación entre $p(s)$, $p(w\text{-}s)$ y $p(w)$.
> 3. En forma general, deduzca una relación posible entre $p(x)$, $p(y)$ y $p(x+y)$ en donde x, y, $x+y$ son fechas arbitrarias comprendidas entre 0 y 10 años y no necesariamente enteras.

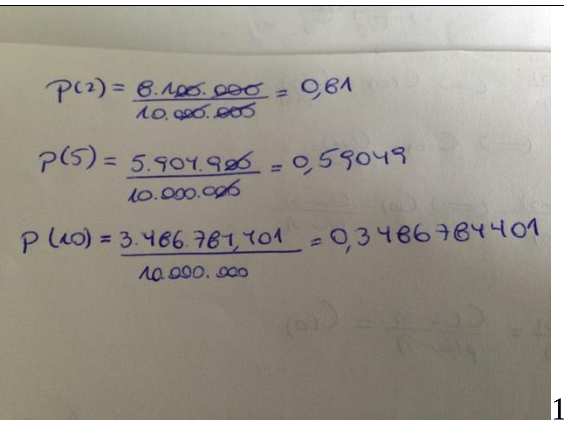
Este problema se presenta con variables adicionales, las cuales permiten normalizar la función de depreciación de la máquina. También se invita a que los estudiantes trabajen, en grupos de dos o de tres, en una primera instancia con números enteros para que luego, como una transición, consideren otros números (en términos del tiempo) para encontrar la relación solicitada.

La modelización

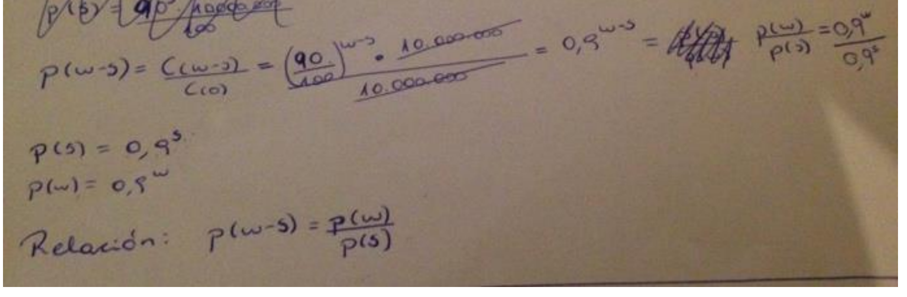
Los tres grupos que trabajaron sobre la situación "la fábrica" comenzaron por los cálculos de la función *C* (figuras 1a y 1b) y luego deducen los valores de *p*. Se observa una entrada aritmética que es lo que se esperaba. Dicho esto, esta entrada no permite percibir la relación (*), incluso al momento de trabajar con valores naturales. Además, en términos más generales, la re-normalización *C* en *p* no es percibida, excepto por G3 en el caso de los enteros, que le permiten, aparentemente, identificar (*) (figura 1c). En esta respuesta, parece que hay una objetivación, quizás oportunista: la relación entre los valores de *p* hace pensar en las propiedades de las potencias y esto permite escribir $p(s)=0{,}9^s$ sin ninguna justificación (la relación es evidente en el dominio de los números enteros entre 1 y 10).



1a



1b

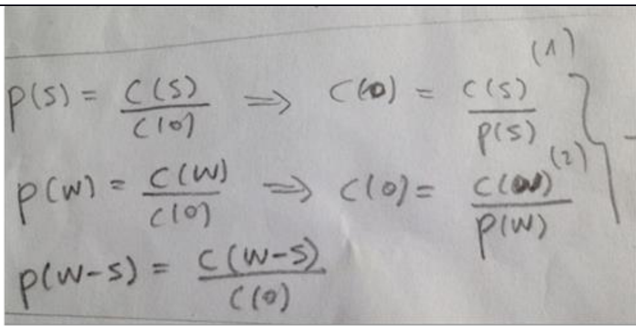


1c

Figura 1: Producción grupo G3, problema de la fábrica

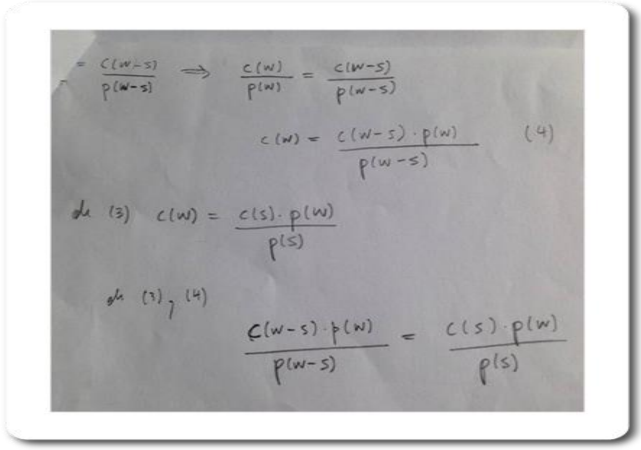
El grupo G4 hizo una hipótesis acerca de tener una relación de linealidad, la cual ellos refutan a partir de los valores numéricos encontrados.

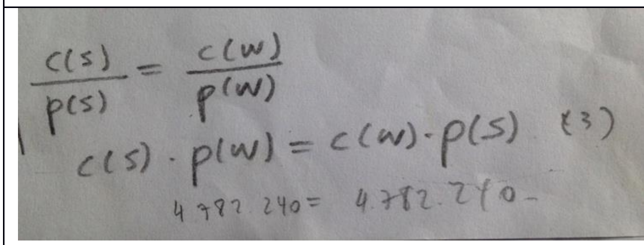
Luego, se observa un trabajo algebraico con 6 incógnitas, los valores de *C* y *p* en *s, w* y en *w–s*, a partir de la relación entre *p* y *C* y eliminando *C*(0) que no ayudan a resolver el problema (figura 3, el trabajo algebraico de G4). Se observa claramente G4 que la re-normalización de *C* en *p* no es comprendida, y más bien constituye un obstáculo para el trabajo de este grupo.



3a)

3b)





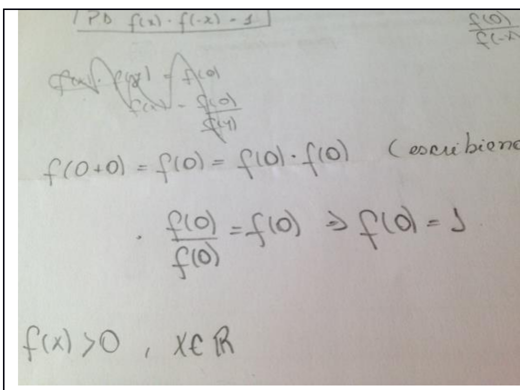
3c)

Figura 3a-3b-3c: producciones del grupo G4 sobre el trabajo algebraico

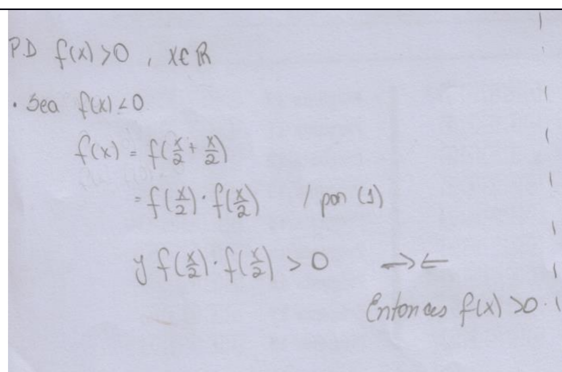
El grupo G5 no aporta nada nuevo en el trabajo realizado, pero se debe tener en cuenta que al final las respuestas se uniformizan con la escritura $0{,}9^x$ que sirve de soporte para la relación (*), probablemente por una información que se transmitió al final de la sesión: el pasaje a través de las funciones de potencia en el dominio de los números enteros para la obtención de la relación (*) es un signo de que nuestro objetivo no fue comprendido; pues esperábamos que la fórmula a^x vendría de la relación (*) para poder construir las funciones exponenciales. Asi, a pesar de los signos, no es claro que la función exponencial aparezca explícitamente.

Las propiedades algebraicas de *f*

El trabajo algebraico de (*) para el valor de $f(0)$ y que f sea una función positiva no es problema para la mayoría de los estudiantes. La utilización de $x = x/2+x/2$ fue comprendida por casi todos los estudiantes, tanto para los de Chile como para los de Francia. Sin embargo, algunos estudiantes tuvieron problemas en identificar dos posibles valores para $f(0)$ cuando se utiliza $f(0+0)$ como se observa en la figura 4a (algunos estudiantes franceses olvidaron el valor 1), el cual no aparece cuando se utiliza $f(x+0) = f(x)f(0)$.



4a)



4b)

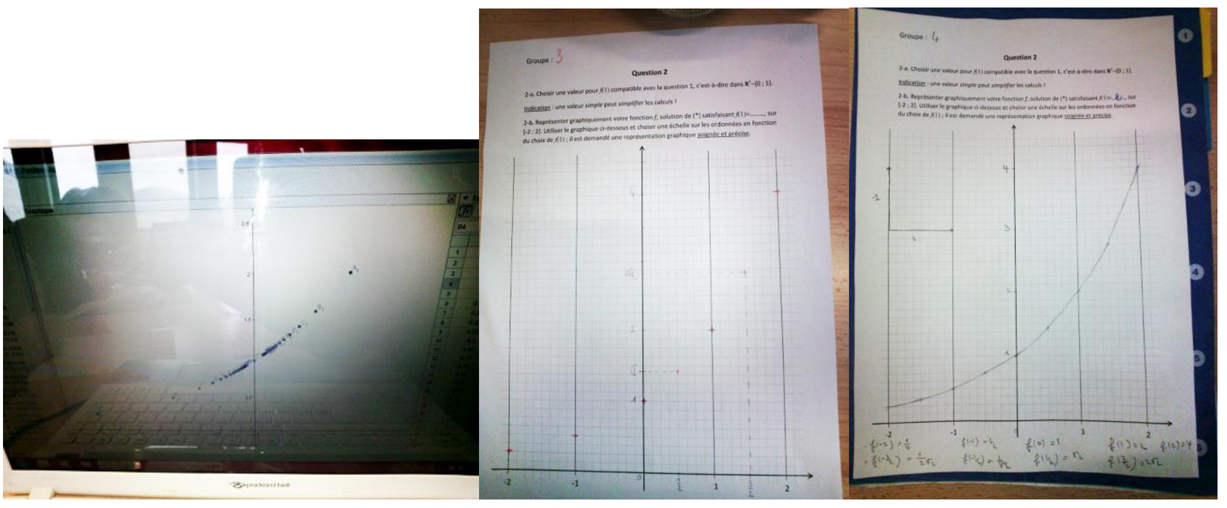
Figura 4: Respuestas del grupo G1

Además, aparecen problemas de lógica: o bien se llega a escribir $f(x) = f^2(x/2)$ y se concluye inmediatamente que la función es estrictamente positiva, o bien los estudiantes trabajan por el absurdo como en la figura 4b. En este caso, la negación de $f > 0$ es entendida por los estudiantes como $f < 0$. Cabe señalar que en este punto, el comportamiento y las respuestas de los estudiantes chilenos y de los estudiantes franceses son similares.

La gráfica (en Francia)

La realización del gráfico no plantea ningún problema a los diferentes grupos de estudiantes franceses. Todos ellos toman el valor $f(1) = 2$, a pesar que un grupo estaba tentado de considerar $f(1) = e$. La cantidad de puntos en la gráfica depende del grupo, pero todos los puntos considerados son correctos. Todos ellos tienen una abscisa de la forma $k/2^n$, lo que muestra un uso de (*), aunque ese uso se limita a un solo tipo de números racionales.

Dos grupos no unen los puntos de la gráfica: uno de los grupos utilizó GeoGebra con la fórmula dada $f(x/2^n)$ y, el otro grupo, que usó papel milimetrado ambos mantienen su posición frente a otros grupos que han trazado una línea regular, que de hecho es la curva de la función 2^x (ver figuras 5).



Figuras 5: 5a con GeoGebra, 5b sin líneas, y 5c con líneas regulares

Se ve claramente la utilización de (*) como un artefacto simbólico, pero únicamente para fracciones de la forma $k/2^n$ que permite un paso de lo discreto a lo denso (como en figura 5a).

La continuidad (en Francia)

Las gráficas son un soporte interesante para hacer emerger la cuestión de la continuidad de f en un debate: ¿se pueden unir los puntos o no? Además, esto permite conectar en forma natural con las preguntas P3.

La pregunta P3-b no es un problema para los diferentes grupos, la utilización de la relación (*) es bien percibida; no así la pregunta P3-a, que es más difícil. Todos los grupos intentan mostrar la continuidad en 0, con un evidente fracaso. Un grupo utiliza la monotonía pensando que había demostrado lo solicitado –un error rápidamente identificado en las discusiones: f es positiva entonces f es creciente–. Algunos estudiantes escriben, correctamente, la definición de continuidad en 0 pero no logran ir más allá. Otros grupos exhiben sucesiones particulares x_n que convergen a 0 y muestran que $f(x_n)$ converge a $f(0) = 1$. Encontramos, en particular, $f(1/n) = f(1)^{1/n}$ y $f(x/n) = f(x)^{1/n}$. Estos son índices (signos) fuertes de la continuidad de f en 0, tanto como la gráfica obtenida por Geogebra (figura 5a) con una acumulación cerca de 0. Cabe señalar que los estudiantes trabajan, implicitamente, siempre en una recta vectorial de **R**, visto como un **Q**-espacio vectorial: si fijamos el valor de f en $a \in \mathbf{P}$, entonces los valores de f sobre toda la recta vectorial $\mathbf{R}a$ son determinados (claro que los estudiantes no pensaron en esta estructura!). En particular, sobre esta recta, si $x \to 0$, entonces $f(x) \to f(0) = 1$. Pero, por supuesto, la continuidad en 0 es una condición mucho más fuerte que la continuidad parcial sobre cada **Q**-recta vectorial.

Última sesión de síntesis

Como se ha señalado, la cuarta sesión, y última etapa de la mencionada ingeniería didáctica, tuvo por objeto promover las circulaciones por los diferentes polos con sus respectivas génesis, para que el estudiante en formación fortalezca su ETM personal, integrando apropiadamente ya sea todas las actividades realizadas en las sesiones anteriores o lo que no ha logrado aprender de la exponencial durante su formación inicial.

Las opiniones vertidas por los estudiantes en esta última etapa dan evidencia de la debilidad que tenían en la integración de saberes que permanecen parcelados; por ejemplo: “Nunca me había dado cuenta de qué era la exponencial”; “Es increíble todo lo que usamos para saber que era la exponencial. ¿Cómo no nos dimos cuenta?”

CONCLUSIONES PRELIMINARES PARA EL ETM PERSONAL

La concepción de la ingeniería didáctica ha sido construida en torno al trabajo del análisis en la cual se refleja la epistemología en este dominio : a partir de un problema, la búsqueda de la regularidad de soluciones, construcciones de sucesiones que pueden ser vistas como las aproximaciones de las soluciones, estudio de la convergencia de las sucesiones, definiciones de nuevos objetos por este límite y probar el hecho de que estos objetos son soluciones del problema inicial.

En todo momento, los estudiantes pueden utilizar sus conocimientos acerca de la función exponencial. Esto no dificulta el desarrollo de las actividades propuestas en las situaciones; muy por el contrario, puesto que finalmente todo debe ser justificado.

En los momentos de la puesta en común, los estudiantes cuestionaron sus conocimientos adquiridos en cursos anteriores. Resultó interesante abordar la función exponencial en forma inversa a la habitual, es decir, estudiar en primer lugar sus propiedades (funcionalidad, continuidad, derivabilidad) y posteriormente explicitar la función propiamente tal: por ejemplo no todos los estudiantes reconocían la ecuación funcional (*) como exclusiva de la función exponencial, por la continuidad, pero (*) admite soluciones que no son continuas en su dominio.

Por otro lado, el aspecto gráfico evidencia rápidamente la dialéctica local/global: lo que sucedía en el primer cuadrante bastaba para señalar que, en el infinito, todos los polinomios y la exponencial ‘se parecerían’.

En el currículo de la formación de los profesores son pocos los modelos que se estudian. Luego nos surge como interrogante por qué la modelización resulta difícil para los estudiantes, ¿querrá esto decir que ese trabajo matemático no fue realizado o no resultó significativo para ellos durante su formación?

Nos apoyaremos en estos primeros resultados para mejorar la ingeniería didáctica; en la sesión 1 de modelización se debieran repensar y precisar las preguntas para orientar el problema a los números no enteros para que pueda emerger (*). También se debieran mejorar los tiempos destinados, en particular, el trabajo de la visualización con GeoGebra para que se trate en otro paradigma la convergencia de las series de polinomios.

Por otro lado, el fenómeno de las dialécticas discreto-denso-continuo no se repara con el proceso de modelización (o con problemas de modelización), puesto que el efecto de la visualización es hacer *pensar* en la continuidad de la exponencial, pero el modelo mismo no tiene cómo justificar la continuidad.

La propuesta didáctica desarrollada permite que los estudiantes se cuestionen la existencia y las propiedades de la función exponencial. El proceso de modelación resultó interesante ya que, al contrario de lo usual en los modelos exponenciales, que son típicamente situaciones crecientes, en este caso se planteó una función decreciente; además surge la pregunta por la posibilidad de conocer y utilizar valores intermedios y eso gatilla la ecuación funcional (*), no solo para números enteros. En otro momento del desarrollo de la situación, el matemático propiamente tal, los estudiantes se preguntan naturalmente qué función será tan especial que cumpla la ecuación funcional (*), y es interesante evidenciar cómo la semiótica que tanto usan en cálculo de potencias, no se conecta con la propiedad mencionada.

En consecuencia, nos parece fundamental poder avanzar y dar buenas condiciones para que el ETM personal sea enriquecido en estudiantes que posteriormente deberán enfrentar la enseñanza de esta función trascendente –que no posee una construcción algebraica–. Pero, en términos más globales, este trabajo ayuda a la constitución de un ETM que considera los elementos del análisis que los futuros profesores tendrán a cargo en el liceo según sea el contexto curricular.

NOTAS

1. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~ecosetma/

2. La expresión "trabajo con ε-δ" se refiere a un tipo de trabajo o pensamiento que se utiliza, incluso de manera informal, para hablar de cantidades pequeñas, insignificantes (esto es, sin recurrir necesariamente al análisis no estándar o a los infinitésimos en el análisis provisto con la topología usual de Y).

3. Suponemos la derivabilidad en 0, aunque la condición puede ser menos fuerte.

4. La primera aplicación se desarrolló en Chile. Las tareas posteriormente fueron adaptadas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del Análisis Elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 1,* 40-55.

Derouet, C., Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R. E., Rousse, S., Vandebrouck, F. Verdugo, P., & Vivier, L. (2016). TD de la 18ème école d'été de didactique, Brest, 19-26 août 2015. (en révision)

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E., Vandebrouck, F. & Vivier, L. (2016). *Le travail mathématique en analyse de la troisième au début du supérieur : identification et construction,* Cours de la 18ème école d'été de didactique, Brest, 19-26 août 2015. (en révision)

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48*(6), 721-737.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, *RELIME, 17*(4-I), 17-28.

Maschietto, M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée: les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices.* Thèse doctorale, Université Paris VII.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM,* 48(6), 739-754.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico - Cambios de dominios y de puntos de vista, taller, *Proceedings of CIAEM XIV*, 5-7 june 2015, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Robert, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe in Vandebrouck (ed), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Chapitre 2, 45-57.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 149 – 185.

CIRCULATIONS ENTRE TROIS DOMAINES MATHEMATIQUES : LES PROBABILITES, LA STATISTIQUE ET L'ANALYSE

Charlotte Derouet

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot

charlotte.derouet@univ-paris-diderot.fr

Cet article a pour objectif de présenter les circulations et les dynamiques entre trois domaines mathématiques au cours d'une séance de classe en terminale scientifique (grade 12) en France. La situation mathématique en jeu a pour objectif (implicite) de donner plus de sens à la fonction de densité de probabilité, et pour atteindre ce but sont mobilisés les probabilités à densité, la statistique descriptive et le calcul intégral. Une présentation globale de la séance permettra ensuite de faire une analyse plus précise, en termes d'Espace de Travail Mathématique (ETM), d'un épisode de la séance particulièrement riche par ses interactions entre les différents domaines. Il sera question de comprendre par quelles dimensions de l'ETM sont effectués les changements de domaine et par qui, des élèves ou de l'enseignant, ils sont pris en charge.

Mots Clés*: Espace de Travail Mathématique, fonction de densité, probabilités, statistique, analyse*

INTRODUCTION

En France, comme dans de nombreux pays, les probabilités et la statistique sont des domaines mathématiques rencontrés de plus en plus tôt dans la scolarité. Depuis la rentrée 2012, en dernière année de lycée (grade 12), les élèves de nombreuses filières rencontrent des lois de probabilités à densité, notamment la loi normale. Dans le programme de terminale de la filière scientifique (grade 12), plusieurs exemples de lois sont abordés comme les lois uniformes sur un segment, les lois exponentielles et les lois normales. Cet article s'appuie sur nos recherches de thèse et fait suite à une étude que nous avons menée sur l'introduction de la notion de fonction de densité de probabilité en terminale scientifique en France (Derouet & Parzysz, 2016). Dans cet article, nous avons analysé les activités d'introduction à la notion de densité proposées dans les différents manuels scolaires français, édités en 2012, de cette filière scolaire à ce niveau. Nous avons, en particulier, mis en évidence une mauvaise prise en charge de l'introduction de cette notion. La majorité des manuels (cinq sur huit) propose une démarche s'appuyant sur l'histogramme de fréquences ; cependant nous avons mis en évidence que des erreurs mathématiques sont présentes sur l'histogramme : noms des axes, confusion entre fréquence et densité de fréquences… Ces résultats complètent ceux de la recherche de Roditi (2009) qui montre le manque de connaissances des enseignants sur cet objet mathématique et leur manque d'intérêt pour cet objet. Cependant, le fait que les manuels de terminale scientifique utilisent l'histogramme pour introduire la fonction de densité est une preuve de l'intérêt de ce diagramme. Nous avons aussi montré que les tâches proposées se limitent à un travail de reconnaissance, de visualisation de représentations sémiotiques, et que le lien entre probabilités à densité et calcul intégral en découle seulement de façon intuitive, sans justification. De plus, les propriétés caractéristiques de la fonction de densité (fonction continue, non nécessaire en général, et positive sur son intervalle de définition I telle que l'aire sous la courbe sur I vaut 1) n'apparaissent pas au cours des activités. Cela est notamment dû au fait que la courbe de densité est toujours donnée sans être questionnée. La seule condition que cette courbe semble devoir vérifier est qu'elle « épouse » (ou « lisse ») l'histogramme. Ces analyses ont débouché sur une proposition de situation, que nous nommerons par la suite « le problème du volcan Aso ». Ce problème prend en compte les remarques précédentes et essaie de faire réellement émerger et installer la notion de fonction de densité et les caractéristiques d'une telle fonction. Cette situation fait aussi jouer le sous-domaine de la statistique descriptive, pour permettre de créer un lien entre lois à densité et calcul intégral. Cette situation a été proposée à une classe de terminale scientifique et nous nous donnons pour but dans cet article d'étudier un épisode de cette séance d'enseignement, en nous demandant comment se sont opérés les changements de sous-domaines mathématiques entre les probabilités à densité et le calcul intégral et suivant quelles dynamiques. Nous chercherons aussi à identifier qui, des élèves ou de l'enseignant, prend en charge ces changements.

Tout d'abord, nous allons présenter les outils théoriques qui guident notre recherche. Ensuite, après avoir exposé et justifié notre méthodologie, nous proposerons l'analyse d'un épisode de la séance, à partir de laquelle nous dégagerons quelques résultats.

CADRAGE THEORIQUE

Le modèle des ETM

Notre travail s'inscrit dans le modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) développé par Kuzniak (2011 ; Kuzniak & Richard, 2014). Nous faisons l'hypothèse que le travail mathématique est au cœur de l'évolution des connaissances mathématiques dans la classe. Par travail, nous entendons une activité rationnelle : ici il s'agit de l'activité des élèves résolvant un problème mathématique. Inspiré des espaces de travail géométrique (Houdement & Kuzniak, 2006), le modèle des ETM (cf. fig. 1) articule deux plans, l'un de nature épistémologique, en lien avec les contenus mathématiques du domaine étudié, et l'autre de nature cognitive, qui concerne l'activité et les moyens que met en œuvre l'élève résolvant des tâches mathématiques.

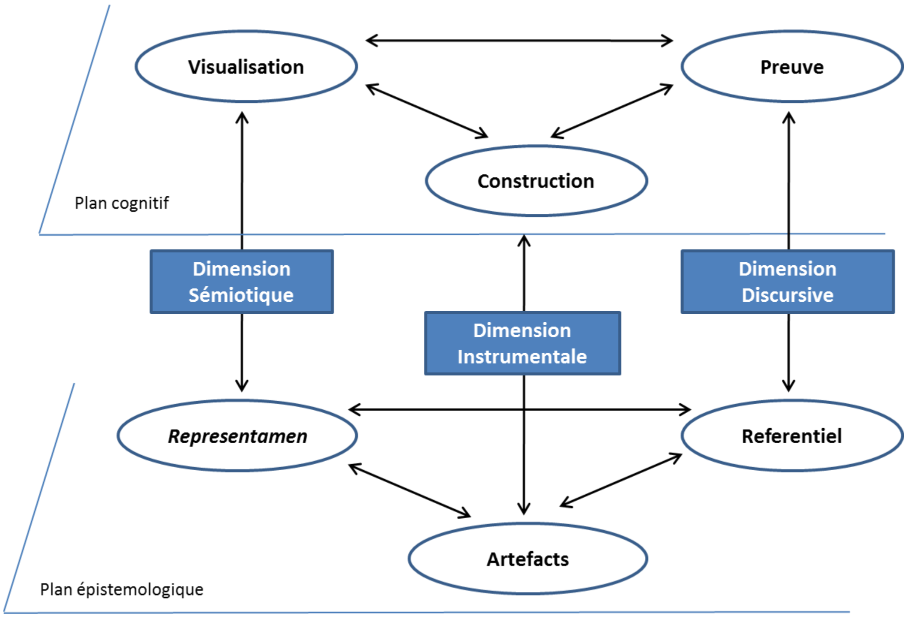


Figure 1: Le modèle des ETM (inspiré de Kuzniak, 2014)

Le plan épistémologique est composé de trois composantes : un ensemble de signes et de représentations sémiotiques (Duval, 1995), un ensemble d'artefacts (instruments) et un système de références théoriques. Le plan cognitif est lui constitué de trois processus : la reconnaissance (visualisation dans un sens large), la construction et la preuve. Ces deux plans sont articulés suivant trois dimensions (ou genèses) :

- La dimension sémiotique, basée sur la production et l'interprétation de représentations, en relation avec les registres de représentation de Duval (1995) et la visualisation ;
- La dimension instrumentale, relative aux constructions déterminées par l'utilisation des instruments (par exemple, l'utilisation de logiciels) ;
- La dimension discursive, en lien avec le référentiel théorique et la preuve.

Nous utilisons le terme « dimension » plutôt que « genèse » car il nous semble qu'il ne renvoie pas au même niveau d'analyse. Ici, nous voulons rendre compte de ce qui est en jeu dans les activités mathématiques de manière ponctuelle, nous ne nous cherchons pas à mettre en évidence une évolution des processus.

Un ETM associé à un domaine mathématique

Dans un premier temps, un ETM peut être vu comme relatif à un domaine mathématique. Kuzniak (2014) définit un domaine mathématique comme étant une partie des mathématiques définie par des objets, des représentations de ces objets et un référentiel théorique sur ces objets. Cependant on peut repérer plusieurs types d'ETM : des ETM associés à un domaine, plus localement à un sous-domaine ou encore des ETM globaux. Selon Montoya Delgadillo et Vivier (2014), « *un ETM global regroupe l'ensemble des composantes cognitives et épistémologiques dans le travail mathématique de plusieurs domaines* ». Ils mettent en garde en précisant que la notion d'ETM global est à réserver au cas où les registres, domaines, notions, etc. en jeu sont suffisamment bien intégrés et le sont d'une manière cohérente. Ils ajoutent :

> On peut d'ailleurs interpréter comme un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques le fait d'aboutir à un ETM global coordonnant les ETM associés à des domaines mathématiques. On peut en particulier penser que l'ETM personnel d'un enseignant de mathématiques est global ce qui lui permet d'élaborer un ETM idoine qui prend en charge plusieurs domaines, même si l'on peut interroger la coordination des ETM associés aux différents domaines au sein de cet ETM idoine. [Montoya Delgadillo & Vivier, 2014, p. 78]

Nous nous intéresserons ici aux ETM associés à deux domaines : les probabilités et l'analyse. Nous nous pencherons plus particulièrement sur plusieurs ETM locaux, à travers les sous-domaines des probabilités à densité (PaD) d'une part, et à celui du calcul intégral (CI) d'autre part. Dans le sous-domaine du calcul intégral, nous entendons plus largement aussi le sous-domaine des fonctions, indispensable à ce sous-domaine. Nous étudierons l'ETM global à travers les changements de sous-domaine entre les probabilités à densité et le calcul intégral. Nous verrons intervenir aussi l'ETM de la statistique descriptive (SD) et celui de la statistique inférentielle (SI).

Les différents niveaux des ETM

Kuzniak (2014) distingue trois niveaux d'ETM : l'ETM de référence, décrivant ce que l'institution attend, principalement repérable dans les textes officiels (programmes, documents Ressources) ; l'ETM idoine, qui décrit le travail planifié par un enseignant pour être effectif dans une classe ; l'ETM personnel, relatif à chaque individu (élève ou enseignant). Dans cet article, nous étudierons l'ETM idoine proposé dans la classe. Nous parlerons d'ETM idoine effectif, qui s'est effectivement construit dans la classe, à distinguer de l'ETM idoine potentiel (Nechache, 2015) qui est simplement propositionnel ou prévisionnel, par exemple l'ETM idoine proposé par un manuel. L'ETM idoine effectif se construit petit à petit dans la classe à l'aide des ETM personnels de chaque élève. En observant une classe, notamment par le biais des mises en commun, nous n'avons pas accès aux ETM personnels des élèves (ou seulement de manière très ponctuelle) mais à un ETM collectif, où chaque élève peut apporter des éléments de son ETM personnel, qui permet de faire avancer le travail mathématique et petit à petit de façonner l'ETM idoine effectif. Nous remarquerons que ce n'est pas seulement l'ETM collectif de la classe qui permet de construire l'ETM idoine, l'enseignant aussi y contribue, par ses aides, ses rappels…

Reformulation de notre question de recherche

Dans le cadre de cette communication, nous nous proposons d'étudier un épisode du travail mathématique réalisé dans la classe au cours de la séance traitant du problème des éruptions du volcan Aso, en mettant en évidence les changements de sous-domaine entre les probabilités à densité et le calcul intégral. Dans le cadre des ETM, nous nous proposons d'étudier comment se font les circulations entre ces deux sous-domaines lors de cette séance de classe. Nous pourrons voir aussi des passages dans le domaine de la statistique, qui apparait à travers le sous-domaine de la statistique descriptive. Dans la construction de cet ETM idoine effectif, nous analyserons plus particulièrement le cheminement de l'ETM collectif de la classe. Nous nous demanderons comment sont pris en charge les changements de sous-domaines : Par le biais de quelles dimensions ? De quel ETM spécifique ? Et nous chercherons aussi par qui ils sont pris en charge : par les élèves ou par l'enseignant.

METHODOLOGIE

Le problème du volcan Aso est décrit dans Derouet & Parzysz (2016), cependant les consignes afférentes seront redonnées un peu plus loin et seront à jumeler aux données de l'Appendice 1. Le problème a été conçu en collaboration avec une enseignante et il a ensuite été expérimenté dans sa classe de terminale scientifique d'un lycée parisien. La classe, composée de 34 élèves (17-18 ans) lors de l'expérimentation, peut être qualifiée de bon niveau. L'enseignante est très expérimentée (plus de vingt ans d'expérience) et a été formatrice pendant cinq ans. Cette situation a été travaillée sur deux séances (séances 3 et 4), sur une durée d'environ 1h30 en tout. Ces séances s'inscrivent dans une expérimentation beaucoup plus longue, d'une séquence entière d'enseignement couplant à la fois le chapitre de probabilités à densité et celui de calcul intégral. Cette situation fait suite à un premier problème (séance 1), débouchant sur une fonction de densité affine, qui a abouti à une première institutionnalisation sur la fonction de densité (séance 2). Dans le tableau 1, nous détaillons les éléments vus en amont de la séance 3 pour resituer le problème 2 (flèche rouge) dans la séquence.

Devoir Maison en amont	Révisions sur les histogrammes Première rencontre de la loi uniforme sur un segment
Séance 1 (1h50)	Problème 1 : Rencontre de la loi de Xénakis (différence de deux lois uniformes) Démarche : Simulation → Histogramme → Fonction de densité (affine)
Séance 2 (25 min)	Institutionnalisation : Fonction de densité, ses propriétés
Séance 3 (50 min)	Problème 2 : Problème du volcan Aso
Séance 4 (1h30)	

Tableau 1: Description des séances précédant les séances étudiée

Nous remarquons que la loi uniforme sur un segment et la différence de deux lois uniformes sont les deux seules lois à densité déjà rencontrées par les élèves. Il faut noter que contrairement à une progression « traditionnelle », les élèves n'ont pas encore abordé les intégrales (et donc le calcul d'aire sous une courbe) au moment de ces séances. Le problème du volcan Aso a justement pour deuxième objectif d'amener le besoin d'un outil mathématique pour calculer l'aire sous la courbe d'une fonction non affine par morceaux, ce que nous n'étudierons pas ici. Les données dont nous disposons sont les enregistrements audio des deux séances, des photos du tableau et des vidéoprojections lors des séances, ainsi que la transcription de ces séances.

ANALYSE DE LA SEANCE

Le problème du volcan Aso et le déroulement global dans la classe

L'objectif général du problème du volcan Aso est de consolider les propriétés que doit vérifier une fonction de densité et justifier le lien entre probabilités à densité et calcul intégral ; dit autrement, le but est de donner du sens à la fonction de densité. Au début de la séance 3, l'enseignante, après avoir écrit « Problème 2 » au tableau, distribue le document en Appendice 1. Il s'agit d'un tableau regroupant les 73 années des différentes éruptions du volcan Aso (Japon) entre 1229 et 1897. La troisième colonne précise aussi le temps d'attente entre deux éruptions consécutives. Les questions suivantes sont vidéoprojetées dans la classe :

> Le volcan Aso est actuellement en éruption.
>
> Comment évaluer la probabilité que la prochaine éruption:
>
> a) ait lieu dans les 5 ans ?
> b) Au cours de l'année 2030 ?

La consigne de l'énoncé est ouverte. La méthode à utiliser n'est pas du tout explicitée, ni même suggérée. De plus, plusieurs réponses à ce problème seraient envisageables : il est attendu des élèves qu'ils finissent par modéliser la situation par une loi exponentielle, mais d'autres lois pourraient être choisies. Cependant, la loi exponentielle n'a pas encore été rencontrée et le but va être de déterminer l'expression de la fonction de densité compatible ici.

La séance, réalisée en classe entière, voit alterner des phases de réflexions individuelles et des phases de mises en commun et de synthèse collective, au cours desquelles l'enseignante a à sa disposition (entre autres) le logiciel *GeoGebra*, qu'elle utilise à l'initiative des élèves ou à sa propre initiative.

Nous ne présenterons pas ici d'analyse *a priori* de la situation. Pour cela, nous suggérons au lecteur de se reporter à Derouet & Parzysz (2016). Nous proposons seulement le diagramme présentant un cheminement possible entre différentes notions (cf. fig. 2), dans lequel les strates horizontales font référence aux sous-domaines en jeu : SD pour la statistique descriptive, SI pour la statistique inférentielle, PaD pour les probabilités à densité et enfin CI pour le calcul intégral. La question est dans le sous-domaine de la statistique inférentielle, il s'agit à partir de données statistiques de faire une estimation. Les données fournies avec l'énoncé du problème sont avant tout travaillées dans le domaine de la statistique descriptive, notamment avec la représentation sous forme d'histogramme. Il y a ensuite un passage aux probabilités à densité, qui est alors jumelé au calcul intégral.

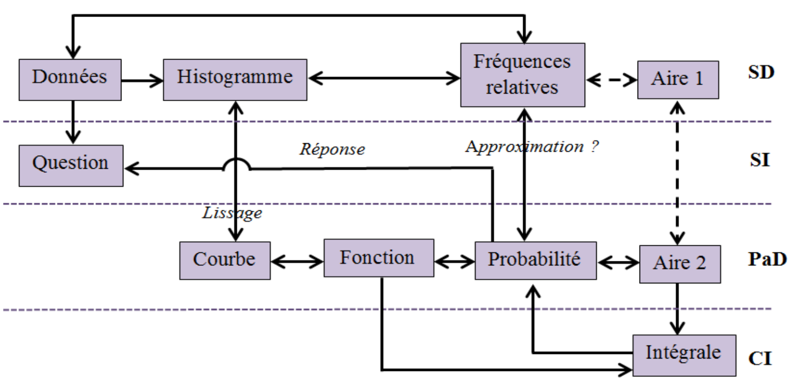


Figure 2: Diagramme du cheminement du problème du volcan Aso (d'après Derouet & Parzysz, 2016)

Le problème étant ouvert, plusieurs chemins existent et le but ici n'est pas de les présenter tous mais seulement celui qui a été emprunté par la classe. Dans la figure 3, nous proposons le déroulement par tâches et sous-tâches de la situation. L'énoncé du problème suggère deux tâches, mais pour y parvenir des sous-tâches intermédiaires ont été introduites au fur et à mesure dans la classe.

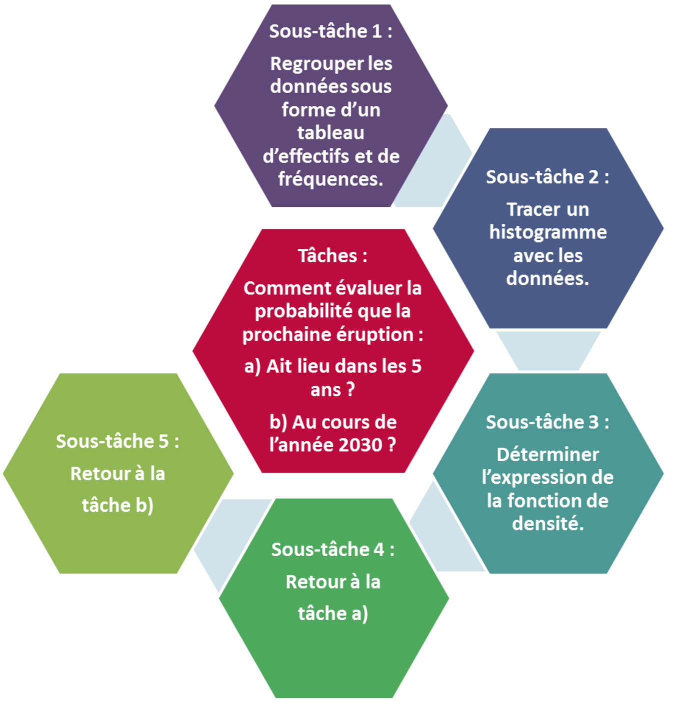


Figure 3: Organigramme du déroulement

Les tâches données au départ font partie du sous-domaine de la statistique inférentielle, mais elles vont être résolues par un passage par les probabilités à densité. Pour cela, plusieurs sous-domaines mathématiques sont sollicités. Nous les précisons dans le tableau 2.

Sous-tâche 1	SD
Sous-tâche 2	SD
Sous-tâche 3	SD/PaD/CI
Sous-tâche 4	PaD/CI
Sous-tâche 5	PaD/CI

Tableau 2: Sous-domaines mathématiques en jeu dans les différentes sous-tâches

La sous-tâche 3

Nous faisons le choix dans cet article de nous focaliser sur un épisode de la sous-tâche 3. La raison principale qui fait nous intéresser à la sous-tâche 3 est que notre objectif est d'étudier les changements de sous-domaines entre les probabilités à densité et le calcul intégral, dans le but de créer un lien entre les deux, et qu'au vu du tableau 2, c'est justement au cours de cette sous-tâche et de l'activité qui va en découler que ce type de travail se fait.

Au cours de la sous-tâche 3, plusieurs phases sont repérables :

3.1 Phase collective : Rappel du vocabulaire (fonction de densité) ;
3.2 Phase collective : Détermination de l'ensemble de définition de la fonction de densité ;
3.3 Phase individuelle : Recherche ;

3.4 Phase collective : Réfutation des fonctions de la famille de $f(x) = \frac{1}{x}$ (fonction inverse) ;
3.5 Phase individuelle (à la maison) : Ajustement de la fonction exponentielle ;
3.6 Phase collective : Mise en commun.

A la fin de la phase 2, la classe se met d'accord et reformule la sous-tâche 3 par :

On cherche une fonction *f* définie sur [0;+∞[qui approche « au mieux » l'histogramme.

L'histogramme en question se trouve à l'Appendice 2. Derrière la fonction en question dans l'énoncé se cache la fonction de densité de la variable aléatoire du temps d'attente entre deux éruptions du volcan Aso. Cependant la manière dont est posée la question peut laisser penser que nous sommes simplement à la recherche d'une fonction (de son expression), et donc dans le domaine de l'analyse. Ici se mêlent en fait les deux sous-domaines : les probabilités à densité et le calcul intégral.

Durant la phase de recherche individuelle (phase 3.3), beaucoup d'élèves proposent la fonction inverse comme solution. Nous allons ici étudier spécifiquement la phase 3.4.

ANALYSE DE L'EPISODE

Cet épisode correspond au passage entre 39min30 et 48min50 de la séance 3. Nous allons à travers le tableau 3 présenter les différentes sous-phases repérables à l'intérieur de l'épisode, en gardant comme filtre les changements de domaines, les dimensions qui les permettent et le rôle des élèves et de l'enseignante dans ce travail. Dans les deux premières colonnes (Elèves/Enseignante) sont décrites les étapes importantes du déroulement prises en charge par les élèves ou par l'enseignante (suivant la colonne remplie). Dans la troisième colonne (Dynamiques entre les ETM et dimensions en jeu), nous voulons rendre compte des dimensions sollicitées au cours des différentes étapes. La couleur rouge est utilisée lorsque la dimension est sollicitée et travaillée par les élèves et la couleur verte quand elle est prise en charge par l'enseignante. Les pointillés sont utilisés quand la dimension est sollicitée par les élèves, mais grâce à une intervention de l'enseignante. Certains verbatims ont été incorporés dans le tableau lorsqu'ils sont révélateurs. Pour aider à la compréhension, quelques courbes proposées tout au long de la phase sont présentées à l'Appendice 3.

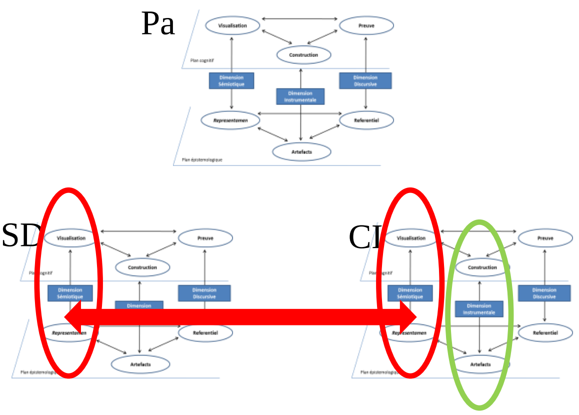
Elèves	**Enseignante**	**Dynamiques entre les ETM et dimensions en jeu**
3.4.1 Proposition : Déplacer la courbe vers le bas	[39:30] Tracé de la fonction $x \to 1/x$ dans la même fenêtre que l'histogramme, sur *GeoGebra* → Inspiré du travail individuel des élèves (phase 3) Déplacement de la courbe à la demande des élèves	 Travail de visualisation : recherche de correspondance entre l'histogramme et la courbe.

Tableau 4: Analyse du déroulement de la phase 4 de la sous-tâche 3

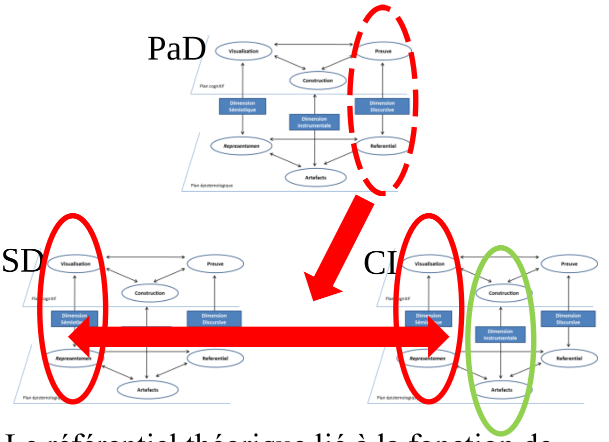
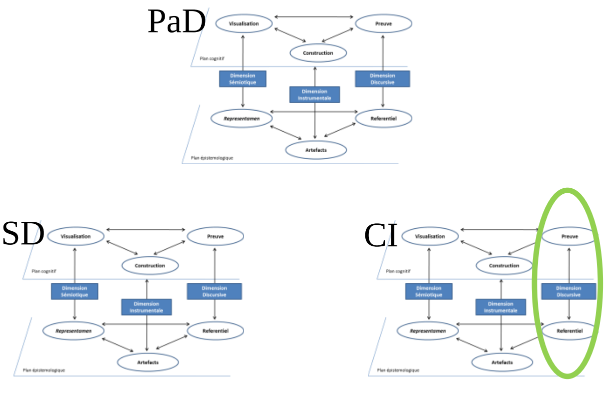
Elèves	Enseignante	Dynamiques entre les ETM et dimensions en jeu
3.4.2 Contrainte : la fonction doit être positive → Déplacement de la courbe La courbe va peut-être couper l'axe des abscisses → Déplacement de la courbe : Rejet de cette candidate	[40:28] « *Alors oui mais est-ce que je peux la décaler… ? Regardez bien ce qui se passe partout parce que…* » Déplacement de la courbe à la demande des élèves Arrêt sur une courbe : est-ce une bonne candidate ?	 Le référentiel théorique lié à la fonction de densité (positivité de la fonction) relance le travail de visualisation.
3.4.3 Tentatives	[42:53] Recherche de l'expression de ce type de fonction. « *C'est quoi la forme générique, là ?* » Donne l'expression	 Sollicitation du référentiel théorique sur les fonctions (de proportionnalité inverse).
3.4.4	[43:33] Travail sur les limites de la fonction	 Sollicitation du référentiel théorique sur les limites.

Tableau 5: Analyse du déroulement de la phase 4 de la sous-tâche 3 (suite)

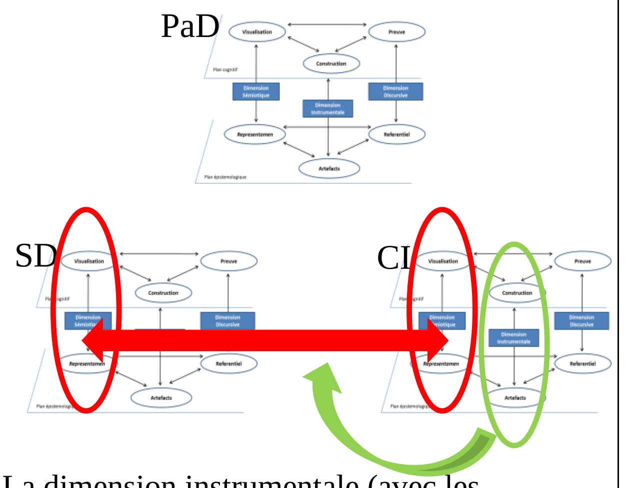
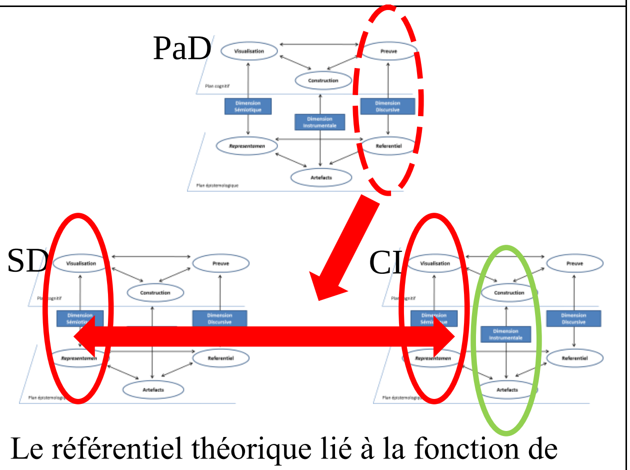
Elèves	**Enseignant**	**Dynamiques entre les ETM et dimensions en jeu**
3.4.5 Discussion sur la validité de certaines candidates : - compensation (rectangles au-dessus de la courbe et vides à d'autres endroits) - non ressemblance avec l'histogramme	[44:24] Utilisation de curseurs dans *GeoGebra* Variation des curseurs	 La dimension instrumentale (avec les curseurs) relance le travail de visualisation.
3.4.6 Contrainte : L'aire sous la courbe vaut 1. Conclusion : Rejet de ce type de fonctions	[46:28] « *Rappelez-moi, il y avait une autre contrainte sur la courbe qu'on cherche quand même. C'est quoi* ? » Commande dans *GeoGebra* pour calculer l'aire sous une courbe Déplacement de la courbe à la demande des élèves	 Le référentiel théorique lié à la fonction de densité (aire sous la courbe égale à 1) relance le travail de visualisation.

Tableau 6: Analyse du déroulement de la phase 4 de la sous-tâche 3 (suite)

RESULTATS

Nous pouvons résumer les dynamiques entre les ETM dans ce passage par le « comics » de la figure 4.

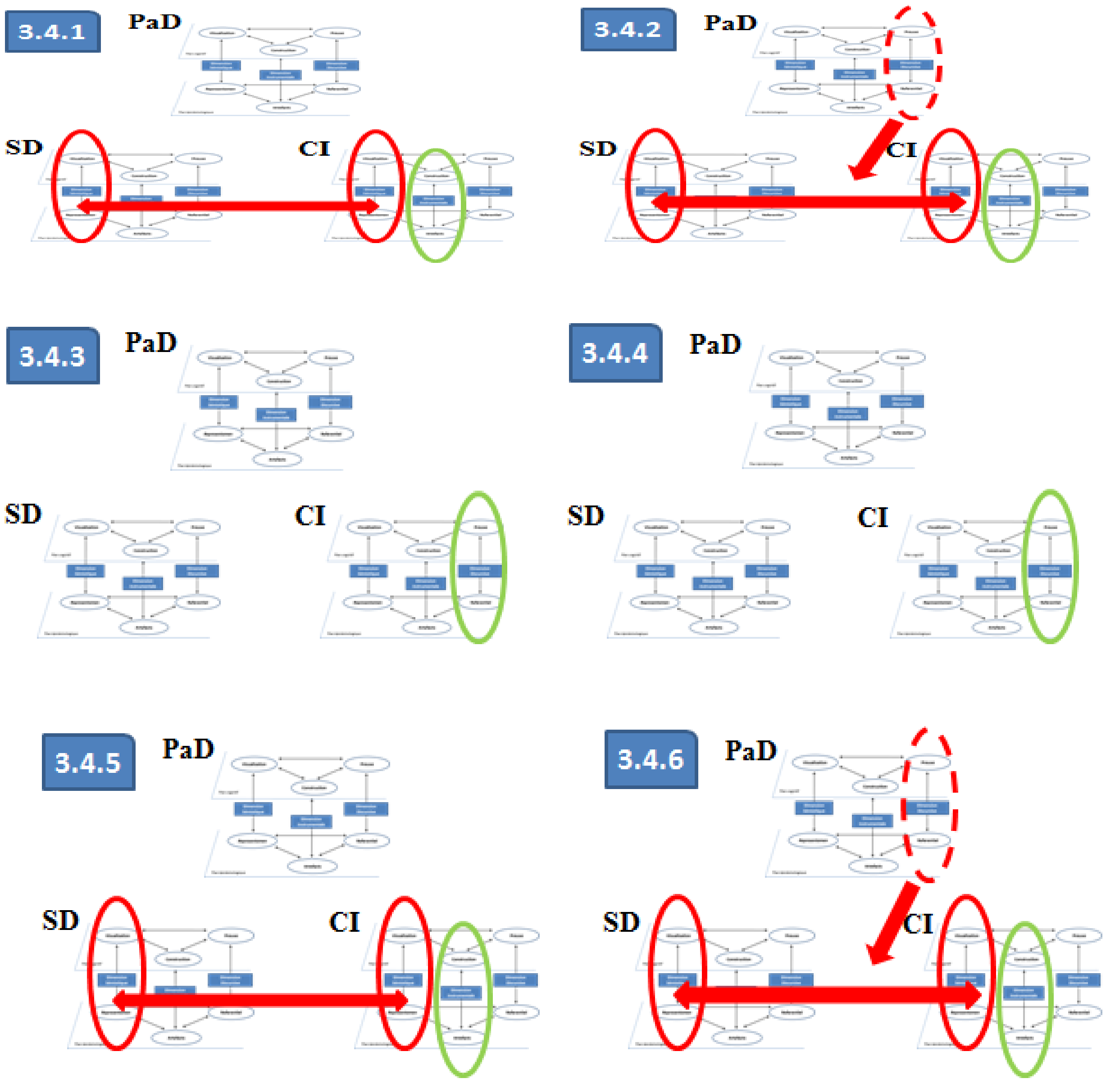


Figure 4: Dynamiques entre les ETM dans l'épisode analysé

Dans cet épisode, nous identifions clairement un jeu entre les trois sous-domaines, statistique descriptive, probabilités à densité et calcul intégral, qui appartiennent tous trois à trois domaines des mathématiques distincts. Chaque sous-domaine a ici son utilité pour, à la fin, permettre de répondre aux questions posées. La statistique descriptive est le point de départ : c'est l'histogramme qui lance le travail. Il s'agit de déterminer une fonction (CI) dont la courbe représentative soit suffisamment proche du haut des rectangles de cet histogramme. Cependant un travail seulement entre SD et CI ne permettrait pas d'aboutir à une fonction de densité : les conditions propres à une telle fonction (PaD) sont indispensables pour faire avancer le travail. D'après les tableaux de la section précédente, on peut remarquer que le travail des élèves est essentiellement dans la dimension sémiotique entre SD et CI (autour de la visualisation de la courbe par rapport à l'histogramme). Cependant ce travail est à chaque fois relancé à travers la dimension discursive de PaD :

l'apparition, au fur et à mesure, des contraintes que doit vérifier la fonction de densité relance le travail de visualisation. Ces contraintes sont avancées par les élèves, mais à chaque fois (3.4.2. et 3.4.6) elles sont en amont amorcées par une question de l'enseignante :

[40:28] Enseignante : Alors oui mais est-ce que je peux la décaler… ? Regardez bien ce qui se passe partout, parce que…

[46:28] Enseignante : Rappelez-moi, il y avait une autre contrainte sur la courbe qu'on cherche, quand même. C'est quoi ?

On peut faire l'hypothèse qu'étant donné que ce n'est que la deuxième rencontre des élèves avec ce type de tâche (recherche d'une fonction de densité) et que la première institutionnalisation sur la fonction de densité et ses caractéristiques n'a eu lieu qu'au cours précédent, ces connaissances ne sont pas encore disponibles pour les élèves mais seulement mobilisables (Robert, 1998), lorsque l'enseignante lance les élèves dans cette direction. Ce type d'activités des élèves n'est pas encore routinisé. L'enseignante les aiguille sans donner la réponse.

La dimension instrumentale est souvent sollicitée dans cette phase, cependant elle reste à la charge de l'enseignante. Cela vient du fait que seule l'enseignante dispose d'un ordinateur dans la classe. De plus, c'était un choix réfléchi de ne pas bloquer les élèves par l'utilisation du logiciel. L'objectif de la séance n'est pas là. Le logiciel est ici un outil efficace pour permettre de tester successivement les fonctions.

On peut repérer deux sous-phases entièrement à la charge de l'enseignante : les sous-phases 3.4.3 et 3.4.4. Dans ces deux cas, il s'agit d'un travail dans la dimension discursive dans le sous-domaine CI, et même plus largement dans le domaine de l'analyse : détermination de l'expression des fonctions et travail sur la limite de la fonction trouvée. Après avoir sollicité les élèves, elle prend assez rapidement ce travail à sa charge, comme par exemple ici pour la sous-phase 3.4.3 :

[42:53] Enseignante : C'est quoi la forme générique, là ? La forme canonique pour une hyperbole ?

Une élève : Ah…

Enseignante : Ah. Vous vous souvenez pas ? C'est quoi ? Vous savez pour les suites quand vous voulez… étudier le… B31 ?

Elève B31 : C'est α…

Enseignante : α. Oui.

Elève B31 : α+β sur…

Enseignante : Oui alors α et β, on va pas pouvoir faire… On va mettre des lettres… Alors α sur ? Tu te souviens pas ?

Elève B31 : $x + \ldots$

Enseignante : On va mettre des lettres… *bx+c* et *d*. Cette forme-là.

L'enseignante écrit au tableau en même temps.

<u>*Prop 1*</u>

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = d + \frac{a}{bx + c}$$

On peut penser que l'enseignante fait ce choix afin de ne pas perdre de temps : dans cette situation, l'important n'est pas dans ce travail sur les fonctions. L'analyse ici n'a pas le même statut que les probabilités, qui sont au cœur de l'apprentissage visé. Les élèves sont censés savoir résoudre ces tâches, mais vu le temps de réponse, l'enseignante préfère ne pas s'attarder là-dessus. De même ensuite, lorsqu'elle prend l'initiative d'introduire des curseurs dans *GeoGebra* pour que le travail ne soit pas ralenti par la maîtrise plus ou moins grande du logiciel par les élèves.

Cet épisode montre une circulation riche entre les différents sous-domaines, où chaque ETM a son propre rôle à jouer : cela peut être identifié à travers les dimensions de l'ETM sollicitées, qui sont différentes suivants le domaine en jeu. Nous pouvons remarquer que le travail est majoritairement autour de la dimension sémiotique dans l'articulation statistique descriptive et calcul intégral, alors que pour les probabilités, c'est la dimension discursive, objectif principal de la séance, qui est activée et qui permet de relancer une dynamique dans les deux autres sous-domaines. Cette dimension est indispensable ici, alors qu'elle était totalement absente dans les manuels. D'un point de vue global, l'ETM en jeu ici prend en compte les trois dimensions, mais pas nécessairement du même sous-domaine, et c'est justement ce jeu entre les dimensions et les domaines qui permet l'avancée du travail. Cet épisode montre un travail que l'on pourrait qualifier de complet : une articulation riche entre les différentes dimensions et les plans verticaux (Kuzniak, Nechache & Drouhard, 2016), qui est guidé par l'ETM collectif de la classe. Ceci permet la construction d'un ETM effectif riche, avec la participation de l'enseignante. D'une part, l'enseignante prend en charge le travail dans la dimension instrumentale, du fait que c'est elle qui manipule le logiciel sur le seul ordinateur de la classe, mais toujours sur commande des élèves. D'autre part, elle apporte aussi des aides aux élèves à certains moments pour leur permettre de solliciter la dimension discursive.

Une autre remarque peut être faite : il est sûrement utile, voire indispensable, pour les élèves de rencontrer ici une seconde fois un problème où l'on doit rechercher une fonction de densité, pour qu'ils prennent bien conscience de l'importance des propriétés de la fonction de densité.

CONCLUSION

Des recherches antérieures ont déjà travaillé ces questions de changements de domaine, à travers les ETM, mais jusqu'à maintenant elles se sont principalement intéressées à des changements de domaine mettant en jeu le domaine de la géométrie (Kuzniak, 2014 ; Montoya & Vivier, 2014). Notre contribution propose une étude de changements de domaine (même de sous-domaine) entre les probabilités, la statistique et l'analyse. Nous aurions pu essayer de reprendre la terminologie de Montoya & Vivier (2014) en parlant de domaine source et de domaine but. Dans l'épisode étudié, le sous-domaine source est la statistique descriptive et le sous-domaine but est le calcul intégral (ou l'analyse plus globalement), mais aussi les probabilités à densité car la fonction recherchée n'est pas une fonction quelconque mais bien une fonction de densité. Ce dernier sous-domaine, les probabilités à densité, pourrait aussi être vu différemment, par exemple comme un domaine ressource dans le sens où, par sa dimension discursive, il guide et relance le travail. Nous pourrions même arriver à nous demander si ces trois sous-domaines, indiscutablement disjoints à ce stade d'introduction de la notion de densité et des probabilités à densité, n'en viendraient pas à terme à constituer un seul (sous)-domaine ou encore, trois sous-domaines mais avec des intersections non vides.

REFERENCES

Derouet, C. & Parzysz, B. (2016), How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions?, *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 757-773.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A. (2014), Travail mathématique et domaines mathématiques, *Relime*, especial 2014, Tomo 2.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J.-P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM Mathematics Education*, 48 (6), 861-874.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014), Espaces de travail mathématique. Points de vue et perspectives, *Relime*, especial 2014, Tomo 1.

Montoya Delgadillo, E., & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 19, 73-102.

Nechache, A. (2015), Comparaison de la démarche de validation dans les espaces de travail idoines en géométrie et en probabilité, in Gómez-Chacón, M. I., Escribano, J., Kuzniak, A., Richard, P. (Eds.), *Espace de Travail Mathématique, Actes Quatrème Symposium ETM.*(pp. 51-68). Madrid : Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139–189.

Roditi, E. (2009). L'histogramme : à la recherche du savoir à enseigner. *Spirale. Revue de recherches en éducation*, 43, 129–138.

APPENDICES

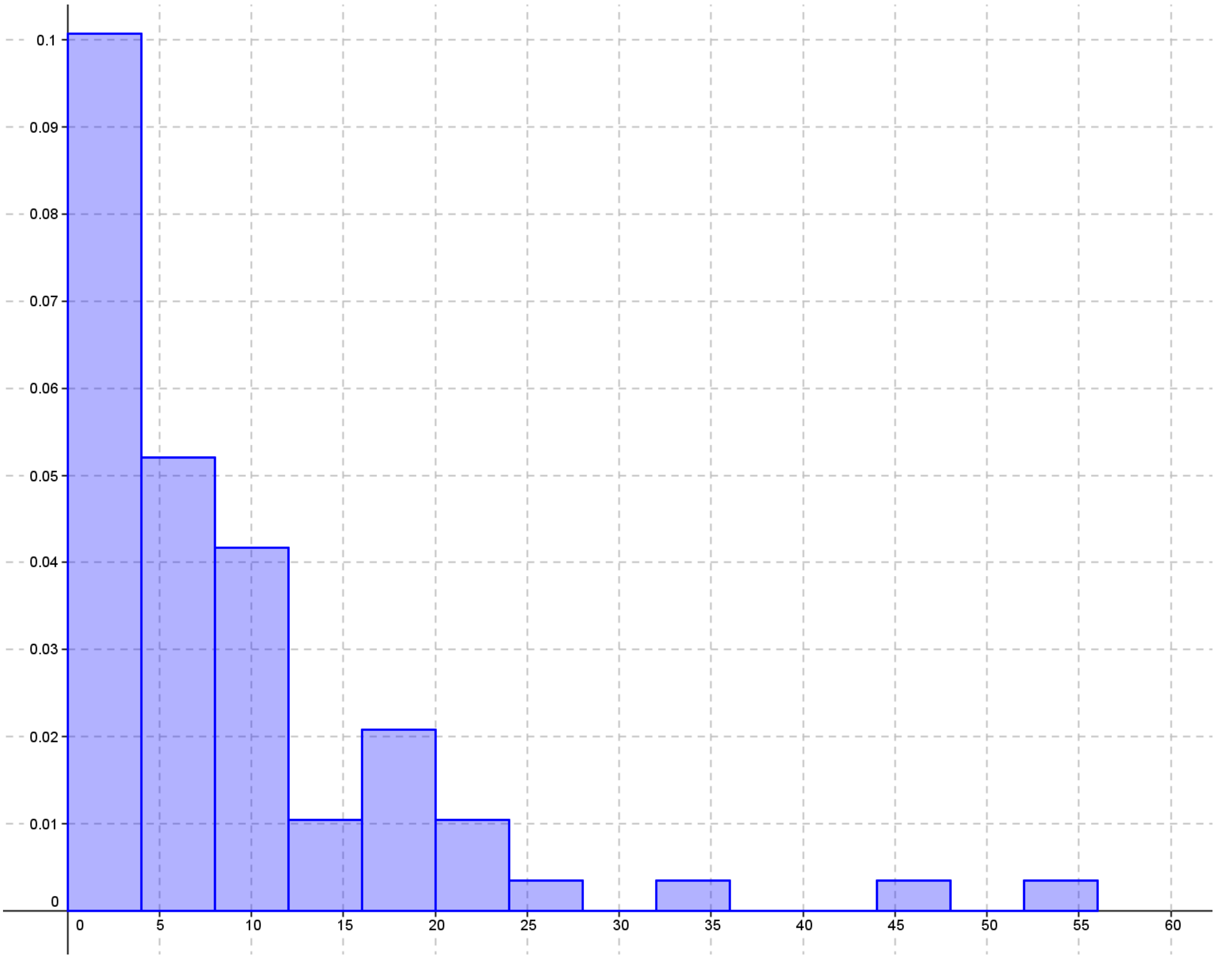
Appendice 1: Document distribué aux élèves

Le volcan Aso, situé sur l'île de Kyushu au Japon, est l'un des plus actifs au monde. On possède les statistiques de ses éruptions, régulièrement tenues depuis le XIIIè siècle. Nous avons, dans le document tableur, les années d'éruptions jusqu'au XIXè siècle (à partir du XXè siècle, les données, d'une autre nature, ne sont pas compatibles(*)).

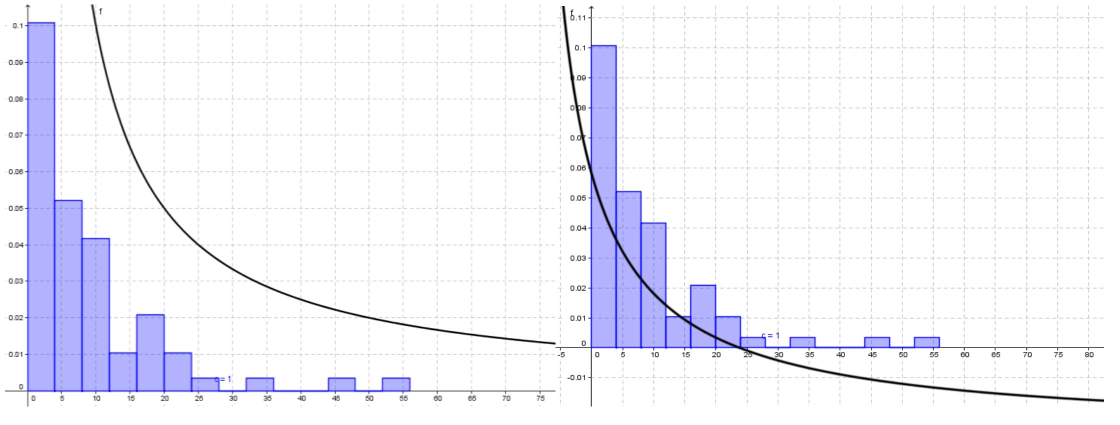
Années des 73 éruptions du volcan Aso du XIIIe au XIXe siècle

Donnée n°	Année	Temps d'attente	Donnée n°	Année	Temps d'attente
1	1229		34	1562	4
2	1239	10	35	1563	1
3	1240	1	36	1564	1
4	1265	25	37	1576	12
5	1269	4	38	1582	6
6	1270	1	39	1583	1
7	1272	2	40	1584	1
8	1273	1	41	1587	3
9	1274	1	42	1598	11
10	1281	7	43	1611	13
11	1286	5	44	1612	1
12	1305	19	45	1613	1
13	1324	19	46	1620	7
14	1331	7	47	1631	11
15	1335	4	48	1637	6
16	1340	5	49	1649	12
17	1346	6	50	1668	19
18	1369	23	51	1675	7
19	1375	6	52	1683	8
20	1376	1	53	1691	8
21	1377	1	54	1708	17
22	1387	10	55	1709	1
23	1388	1	56	1765	56
24	1434	46	57	1772	7
25	1438	4	58	1780	8
26	1473	35	59	1804	24
27	1485	12	60	1806	2
28	1505	20	61	1814	8
29	1506	1	62	1815	1
30	1522	16	63	1826	11
31	1533	11	64	1827	1
32	1542	9	65	1828	1
33	1558	16	66	1829	1
			67	1830	1
			68	1854	24
			69	1872	18
			70	1874	2
			71	1884	10
			72	1894	10
			73	1897	3

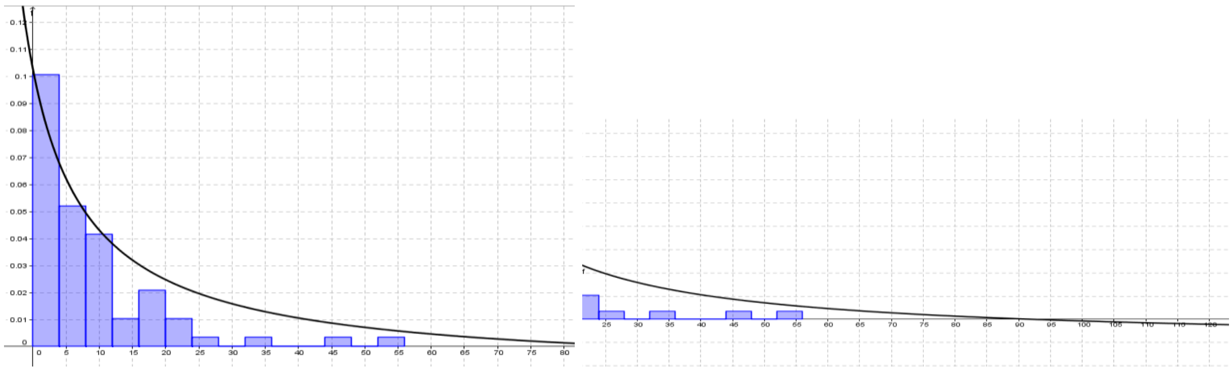
Appendice 2: Histogramme dont les élèves disposent durant la sous-tâche 3



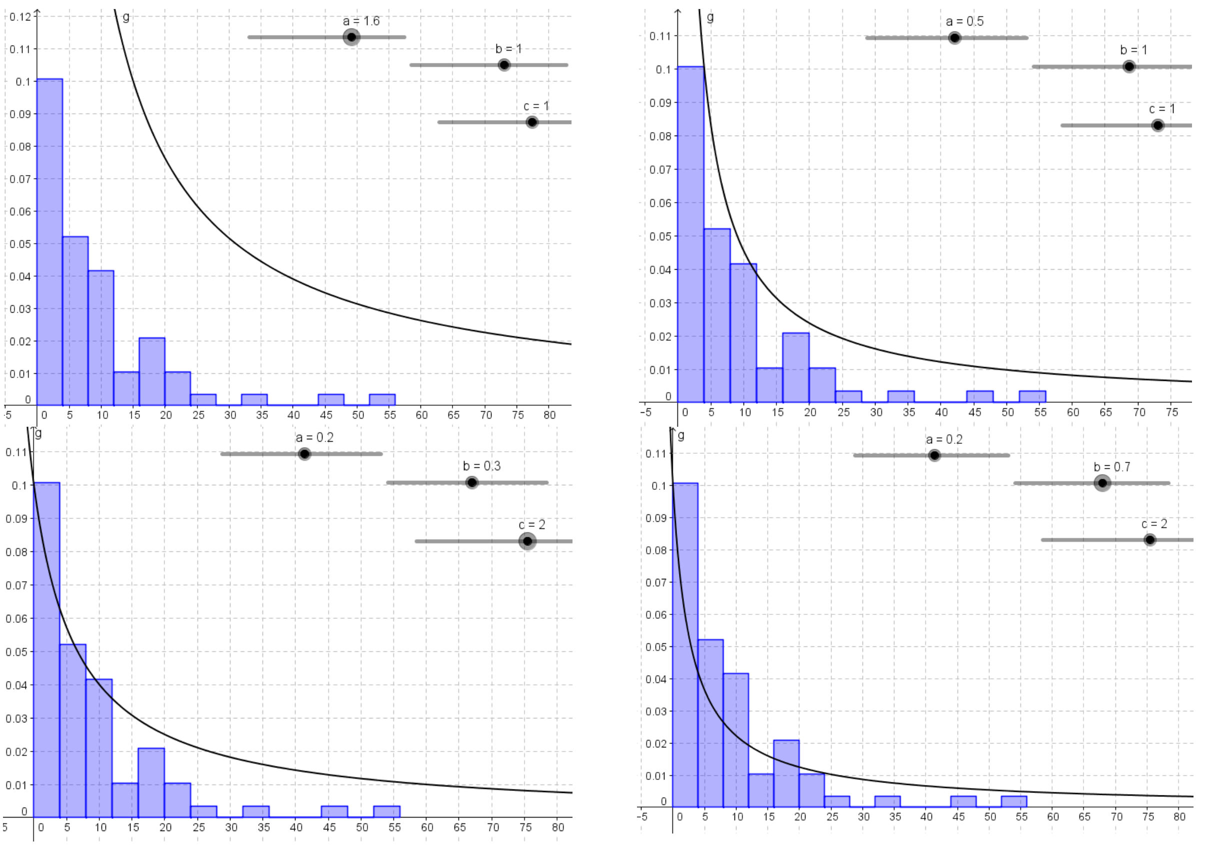
Appendice 3: Evolution des courbes proposées lors de la phase 4 de la sous-tâche 3



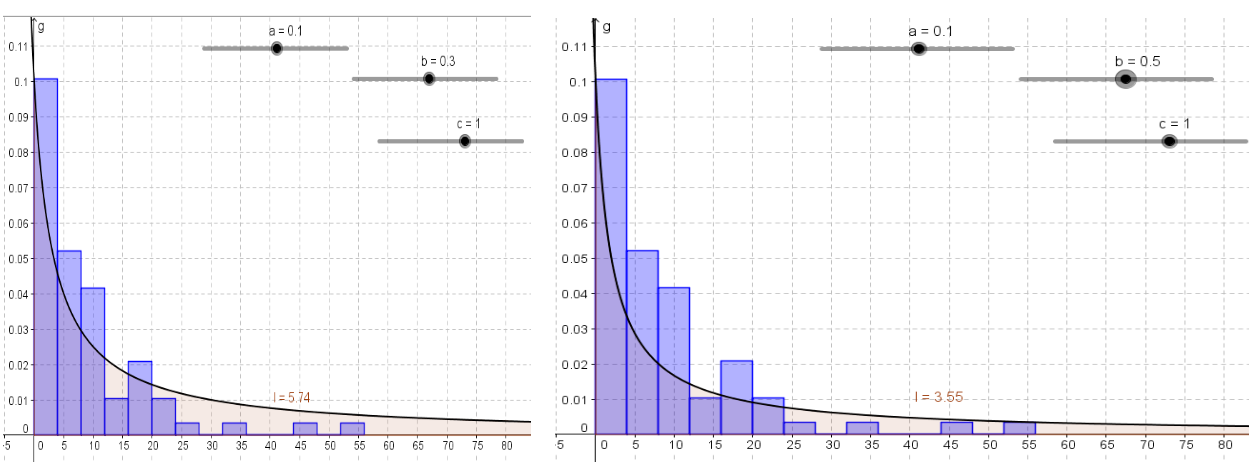
Sous-phase 3.4.1



Sous-phase 3.4.2



Sous-phase 3.4.5



Sous-phase 3.4.6

LES PERSPECTIVES DE LOCALITE DANS LE TRAVAIL EN ANALYSE[1]

Elizabeth Montoya Delgadillo[1], Rosa Elvira Páez Murillo[2], Laurent Vivier[3]

[1]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chili ; [2]Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Mexique ; [3]Laboratoire André Revuz–Université Paris Diderot, France

elizabeth.montoya@pucv.cl, rosa.paez@uacm.edu.mx, laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

L'objectif de cette étude est d'étendre les trois perspectives, ponctuelle-locale-globale, initialement avancées pour les fonctions, à d'autres objets de l'analyse et de les intégrer dans le modèle des ETM. Plus spécifiquement, nous montrons comment cette notion de perspective permet de préciser le travail mathématique sur l'objet tangente à une courbe en tenant compte des domaines de travail et surtout des paradigmes. La conclusion principale de notre étude, basée sur un questionnaire passé par des étudiants chiliens, français et mexicains, est que ces étudiants ne sont pas capables d'adopter une perspective locale, pourtant essentielle en analyse, lorsqu'ils ont à résoudre des problèmes relatifs aux tangentes.

Mots-Clés: *analyse, perspectives de localité, tangente, fonction, paradigmes*

INTRODUCTION

Vandebrouck (2011) a caractérisé le travail à la transition lycée/université en France en précisant des formes de travail et en s'appuyant sur trois perspectives, les perspectives ponctuelle, locale et globale. Nous pensons que ces perspectives sont importantes pour le travail mathématique et spécifiquement en analyse car elles permettent notamment de considérer le jeu local/global. Notre ambition est de généraliser ces perspectives à d'autres objets de l'analyse.

La tangente constitue un objet mathématique intéressant et riche pour étendre les recherches sur ces trois perspectives. Non seulement, le jeu local/global est fondamental comme l'a pointé Maschietto (2002) mais de plus il apparaît que la coordination des trois perspectives est cruciale pour cet objet. En outre, la notion de tangente appartient à des domaines variés que sont la géométrie, l'algèbre et l'analyse, avec des représentations sémiotiques elles aussi variées dans les registres graphique et algébrique, porteuses de significations différentes.

Pour mieux comprendre le travail en analyse, nous articulons ces trois perspectives dans le modèle des ETM (Kuzniak, 2011) avec la notion de paradigme. Nous utilisons les trois paradigmes de l'analyse, identifiés dans les travaux du projet ECOS-Sud C13H03[2] (Montoya et Vivier, 2016 ; Kuzniak et al., 2016). Le modèle des ETM est rapidement rappelé en section suivante où nous développons la notion de perspective.

L'étude expérimentale s'appuie sur nos recherches concernant la détermination des tangentes au lycée, en début d'université et pour des enseignants en formation initiale et continue, au Chili, en France et au Mexique. Un premier questionnaire dans le registre graphique nous permet d'illustrer la notion de perspective pour l'objet tangente. Puis, nous analysons un nouveau questionnaire qui s'appuie principalement sur le registre algébrique[3].

ETM ET PERSPECTIVES

L'ETM de l'analyse

Le modèle des ETM (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak et Richard, 2014) s'articule autour de deux plans : un plan épistémologique avec trois pôles et un plan cognitif avec trois processus (Figure 1). Les relations entre les deux plans sont modélisées par trois genèses s'activant souvent par deux ce qui détermine trois plans verticaux notés [Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Sem-Dis].

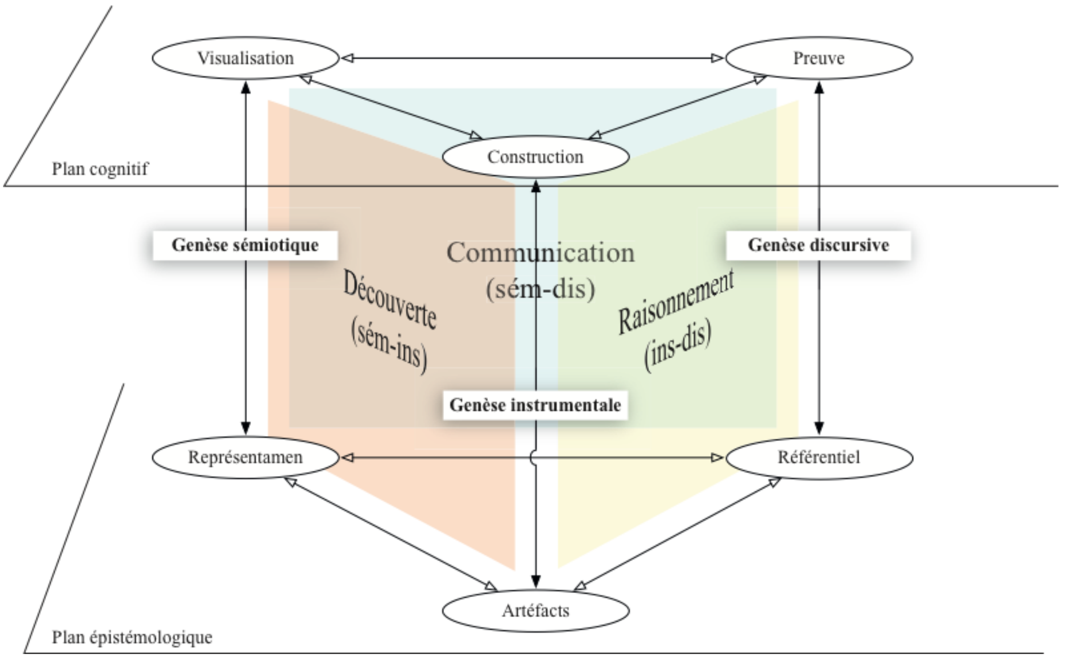


Figure 1: **L'Espace de Travail Mathématique, genèses et plans verticaux. (Kuzniak & Richard, 2014)**

Les trois paradigmes de travail de l'analyse identifiés dans (Kuzniak et al., 2016) et (Montoya et Vivier, 2016) sont :

- L'Analyse Arithmétique/Géométrique (AG), qui permet des interprétations, avec des implicites, basées sur la géométrie, des calculs arithmétiques ou le monde réel,
- L'Analyse Calculatoire (AC), où les règles de calcul sont définies plus ou moins explicitement et appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets en jeu,
- L'Analyse Réelle (AR), qui est caractérisée par un travail sur l'approximation et les voisinages, voire topologique ; les définitions et les propriétés sont établies théoriquement ce qui permet un « travail avec ε » spécifique de ce paradigme.

Il est important de préciser que les paradigmes ne sont a priori ni isolés ni hiérarchisés. Il est surtout important, pour le travail mathématique, de les articuler.

La notion de Perspective

Une notion mathématique peut souvent être perçue de différentes manières. Par exemple, une droite peut être vue en géométrie dans sa globalité, comme une ligne infinie ou une équation (global), ou comme un ensemble de points permettant de considérer des points sur une droite notamment par intersection (ponctuel). Nous retrouvons ici deux des trois *perspectives* introduites par Vandebrouck (2011) pour les fonctions. Il manque, dans cet exemple de la droite géométrique, la perspective locale.

Reprenant les travaux de Vandebrouck (2011) sur les fonctions, nous appelons *perspectives* différents aspects ou différentes manières de considérer des objets mathématiques. Ces perspectives peuvent se manifester à travers différents paradigmes et orientent le travail mathématique d'une certaine façon. Chaque perspective permet des constructions et déconstructions au sens de Duval.

Duval (2005), dans ses travaux sur la géométrie plane, propose une *déconstruction dimensionnelle* qui est cruciale dans le travail de preuve. Il s'agit de déconstruire, et reconstruire, les figures a priori en dimension 2 en éléments de dimension 1 (lignes) puis 0 (points). Nous considérons ici qu'il s'agit de perspectives dimensionnelles pour le domaine de la géométrie plane avec une structuration en 2D/1D/0D : chaque dimension apporte sa propre vision de la situation géométrique. Ces trois perspectives dimensionnelles sont spécifiques du domaine de la géométrie. Elles ne sont pas isolées.

Dans cette étude sur l'analyse, nous nous focalisons sur les perspectives de *localité* qui joue un rôle important dans le travail en analyse : perspective locale, perspective globale et perspective ponctuelle. Cela permet de détailler les genèses activées pour une notion particulière. Ensuite, nous illustrons plus spécifiquement les perspectives de localité par l'exemple du tracé d'une tangente dans le registre graphique.

Les perspectives locale, ponctuelle, globale

La *perspective ponctuelle* (PP) met en jeu, pour l'étude d'un objet, un ou plusieurs objets plus élémentaires de manière isolée. Les objets élémentaires dépendent du domaine. On peut penser aux points en géométrie euclidienne ou aux nombres réels en analyse réelle. On pourrait parler de perspective élémentaire : elle est à préciser pour chaque étude selon le domaine.

La *perspective globale* (PG) concerne la perception globale des objets (peut-être pas entièrement, mais au moins sur une *large* partie), indépendamment de leur définition par les objets élémentaires (les droites et les courbes à partir des points, les suites et les fonctions numériques à partir des nombres réels, etc.). C'est le cas d'une droite ou d'un cercle que l'on peut considérer comme un tout. On pourra percevoir une « fonction du second degré » ou une « fonction périodique » avec leurs propriétés globales.

La *perspective locale* (PL) est, quant à elle, plus spécifique de l'analyse dans le sens où elle nécessite une topologie sous-jacente (éventuellement implicite). Elle concerne les propriétés définies sur une base de voisinage. Toutes les propriétés s'exprimant avec « $\forall\varepsilon>0$ » sont de ce type. Mais selon les registres de représentations, il est possible que seule une partie de la base de voisinage soit concernée comme par exemple dans le registre graphique pour des raisons de visualisation.

La précision que permet le registre ou l'artefact en jeu est importante car elle peut fixer un voisinage. Par exemple, avec un grapheur, les zooms avant successifs sur une courbe régulière produisent la même image à partir d'un facteur d'agrandissement et, visuellement, on ne voit qu'une droite.

Illustrons ces trois perspectives par l'exemple du compas en géométrie. Tout d'abord, lorsque l'on veut reporter une longueur, c'est une perspective ponctuelle sur le cercle : les deux extrémités du compas sont à placer sur des points, objets élémentaires de la géométrie euclidienne. Lorsque l'on se sert d'un compas pour tracer un cercle, il y a la perspective ponctuelle pour le centre (on place la pointe sur un point) puis une perspective globale lorsque l'on trace tout le cercle. Mais la perspective locale peut aussi être mise en jeu par cet artefact. Dans la construction usuelle d'un triangle équilatéral ABC à partir du segment [AB], on *prend* la longueur AB (PP) puis on *pique* sur A (PP) et on trace un petit arc de cercle et on recommence avec B : le point C est à l'intersection des deux arcs de cercle. Il y a, dans cette construction, une perspective locale[4] sur les cercles puisque l'on localise un point C (voire les deux points), on visualise un voisinage de C, dans lequel on trace les deux arcs de cercle. Implicitement, c'est la topologie de $\mathbf{R}^2$ qui est en jeu.

Du point de vue du modèle des ETM, l'activation des trois perspectives dépend évidemment des domaines, des paradigmes et des genèses. Nous faisons l'hypothèse que AG permet les trois perspectives tout comme AR, mais ce dernier est absent des curricula secondaires, et que AC ne permet que les perspectives ponctuelles et globales, les procédures et les règles de calculs[5] "encapsulant" la perspective locale qui est ainsi masquée. Nous développons cette hypothèse à la suite en nous focalisant sur l'objet tangente.

Le cas de la tangente dans le registre graphique

Nous avons demandé à des étudiants de trois pays (Chili, France et Mexique), principalement en première année universitaire, de tracer une tangente à une courbe dans le registre graphique (juste la courbe et un point de celle-ci sont donnés). Nous reprenons ici certaines réponses pour illustrer les analyses avec les perspectives de localité.

Pour tracer une tangente à une courbe en un de ces points, la perspective ponctuelle est en jeu dès le début puisque l'on cherche une droite qui passe par un point donné[6]. Les genèses activées par les étudiants montrent que cette perspective ne pose aucun problème (Montoya et Vivier, 2015, Páez et Vivier, 2013). La suite du tracé nécessite de coordonner les perspectives locale et globale comme en figure 2. La perspective locale permet de tracer localement la droite (sa direction) puis la perspective globale permet de prolonger le tracé, pouvant aller jusqu'à recouper la courbe (une tangente est une droite). En figure 2, les trois perspectives sont vraisemblablement activées dans cet ordre, accompagnées de gestes instrumentés, l'ensemble des genèses étant dans le plan [Sem-Ins] :

1. PP, regard porté sur le point, règle placée sur le point, avec ou sans stylo pointé sur le point ;
2. PL, ajustement de la règle pour une coïncidence locale avec la courbe au voisinage du point considéré ;
3. PG, le regard est « dézoomé », tracé global de la droite.

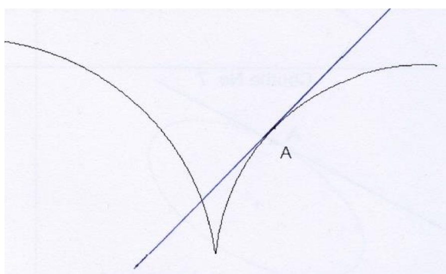
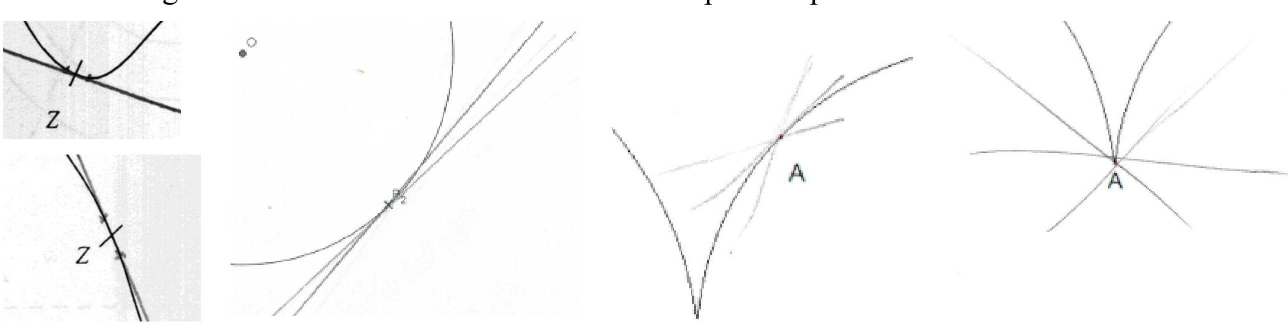


Figure 2: Tracé d'un étudiant-professeur de mathématiques en France

On peut retrouver ces trois points de vue dans d'autres productions, mais avec une déficience ou une adaptation de la PL ou de la PG (Montoya et Vivier, 2015, Páez et Vivier, 2013) :

- En figure 3a, la PL est associée à la PP dans AG pour deux points proches de part et d'autre du point de tangence.
- En figure 3b, une étudiante mexicaine propose un cône de tangentes.
- En figures 3c et 3d la PL semble totalement disparaître pour ces étudiants chiliens.



3a 3b 3c 3d

Figure 3: 3a, un élève de grade 11 option sciences ; 3b, 3c et 3d, trois étudiants de première année d'université

On trouve aussi une adaptation de la PG, sans doute pour avoir un « unique point d'intersection » (UPI), comme en figures 4, pour des enseignants.

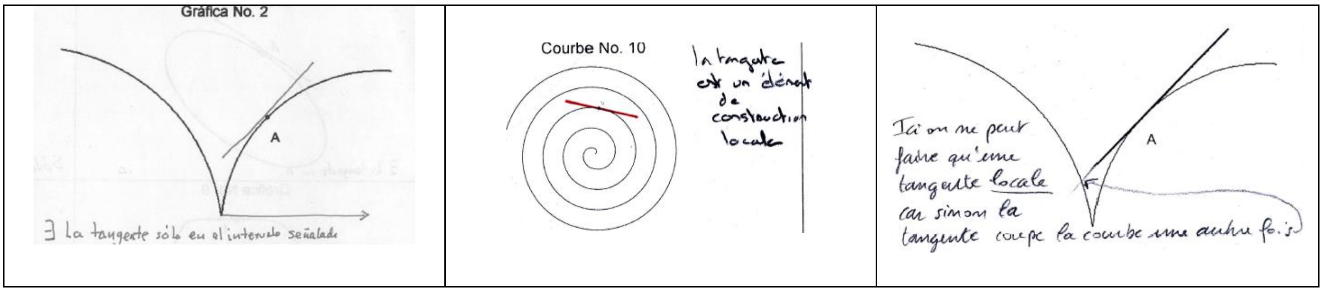


Figure 4a (Mexique) ; figure 4b (France) ; figure 4c (France)[7]

Au-delà de la difficulté de la notion de tangente, ce que nous avons voulu montrer dans (Montoya et Vivier, 2015) c'est le caractère explicatif des trois perspectives qui permettent de préciser, souvent par la déficience d'une des perspectives, le travail des étudiants, leurs difficultés, voire leurs erreurs, lorsqu'ils doivent tracer une tangente dans le registre graphique. Dans la suite, nous nous intéressons plus particulièrement au registre algébrique.

ANALYSE A PRIORI DU QUESTIONNAIRE

Nous complétons les études précédentes par l'analyse des questions Q2 à Q6 d'un questionnaire dont les tâches, centrées sur l'objet tangente, s'appuient plus spécifiquement sur le registre algébrique, complété par des courbes dans le registre graphique pour Q4, Q5 et Q6. Notre objectif est de croiser, dans le cadre des ETM et le domaine de l'analyse, principalement les trois paradigmes et les trois perspectives. En particulier, nous faisons les hypothèses suivantes sur le travail attendu des étudiants de cette étude sur les tangentes :

- un travail dans AC favorise la PP et masque la PL (alors qu'un travail dans AG nécessite les trois perspectives),
- le paradigme AC est dominant,
- le paradigme AR est très peu présent.

Dans les trois pays la notion de tangente apparait dès le premier cycle secondaire dans le cas spécifique du cercle. Ensuite, la notion réapparaît avec la dérivation pour définir les tangentes aux courbes représentatives des fonctions au grade 11 en France ainsi que dans certains lycées chiliens et mexicains, alors que cette définition n'est pas aux programmes d'études officiels de ces deux pays ce qui fait une différence dans les ETM de référence. Finalement, en début d'université, la définition par la dérivation est presqu'exclusivement utilisée dans les trois pays. Notons que la question des tangentes est souvent utilisée pour introduire la dérivation. Puis, après cette introduction, les tangentes constituent une application de la dérivation, essentiellement dans le paradigme AC.

Hormis la question 1 (« Pour vous, qu'est-ce qu'une droite tangente ? », voir (Montoya Delgadillo et al., 2016)), toutes les questions, Q2 à Q6, sont écrites dans le registre algébrique du domaine des fonctions. On peut penser que cela favorisera un travail dans le paradigme AC avec l'utilisation des règles de dérivation et de la formule de l'équation de la tangente.

En outre, les questions Q4 à Q6 proposent deux graphiques (un graphique *normal* et un zoom). Cela favorise-t-il un travail dans le paradigme AG ? ou bien le travail se centre sur le paradigme AC ? Y a-t-il une cohérence, une articulation, entre les différents paradigmes de travail ? Comment s'expriment les perspectives dans ces différents paradigmes ? Il y a, dans ce questionnaire, peu d'occasions de changer de domaine, nous le relèverons systématiquement. On ne s'attend pas non plus à un travail dans AR car les étudiants ont peu l'habitude de travailler dans ce paradigme à ce niveau.

Nous avons toutefois tenté de créer des conditions pour que AR puisse apparaître, notamment par des *provocations didactiques*. Ces dernières permettent-elles également un travail plus riche en facilitant des changements de domaines ou une articulation entre paradigmes ?

Nous essayerons de répondre à ces questions à l'aide du questionnaire dont nous donnons tout d'abord une analyse a priori question par question.

Question 2

On considère la fonction définie pour tout x réel par $f(x)=x^2+1$.

a. Déterminez, si possible, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

b. Combien de valeurs réelles k peut-on trouver pour que la droite d'équation $y=k(x–2)+3$ soit une tangente à la courbe représentative de f ?

Expliquez la manière d'obtenir cette (ces) valeur(s).

Q2a est une question de base posée aux étudiants (dès le secondaire en France, mais plutôt au début de l'université au Chili et Mexique). On s'attend à un travail dans AC par un calcul de f', évaluation de f' en 1 puis expression de l'équation de la tangente. La fonction est simple à dériver, tous les nombres sont entiers. Il n'y a pas de nécessité de faire un graphique mais il peut y en avoir un, pour illustrer ou contrôler dans AG le travail dans AC. Avec un travail dominant dans AC, dans le domaine des fonctions, la perspective ponctuelle, PP, sera sans doute largement dominante.

La question Q2*b* est moins standard dans le sens où on ne demande pas directement de déterminer la tangente en un point de la courbe. L'équation de la droite d dépend d'un paramètre k et est écrite de sorte que l'on peut voir (cela est-il vu ?) que d passe par (2,3) et a k comme coefficient directeur : il s'agit d'un faisceau de droites concourantes. La PP est ici problématique car on a l'habitude, dans ces équations de tangentes, que le point que l'on visualise, ici (2,3), appartienne à la courbe, ce qui n'est pas le cas, il est à l'*extérieur* de la courbe. Il y a donc deux tangentes possibles à la parabole.

On peut faire un schéma pour visualiser, dans le paradigme AG (y a-t-il un schéma ? voit-on le faisceau ?) qui nécessite l'activation des trois perspectives. A noter deux approches différentes, surtout graphiquement : faire pivoter une droite autour du point P(2,3) et noter celles qui sont tangentes à la courbe ou considérer un point M qui parcourt la courbe et noter soit les tangentes qui passent par P soit les droites (MP) qui sont tangentes.

Le fait que le point n'est pas sur la courbe peut entraîner un calcul de la tangente au point d'abscisse 2, $y = 4(x–2)+5$, pour affirmer que l'on ne peut pas trouver de valeur k.

On peut utiliser f', calculer toutes les tangentes $y=2a(x–a)+a^2+1$ et résoudre le système $k=2a$; $-2k+3=-a^2+1$ ce qui donne deux valeurs de a ($2\pm\sqrt{2}$) et de k ($4\pm2\sqrt{2}$). Il s'agit d'un travail dans le paradigme AC. La PP est dominante, la PL est absente.

On peut aussi chercher le nombre de points d'intersection avec la courbe (c'est une conique) et poser le système $y=k(x–2)+3$; $y=x^2+1$. On peut alors se limiter au calcul du discriminant Δ (équation du second degré en x) pour résoudre $\Delta(k)=0$. Il s'agit d'un travail dans le domaine de l'algèbre. La PP est dominante, la PL est absente.

D'autres procédures seraient possibles, mais on ne s'attend qu'à celles-ci.

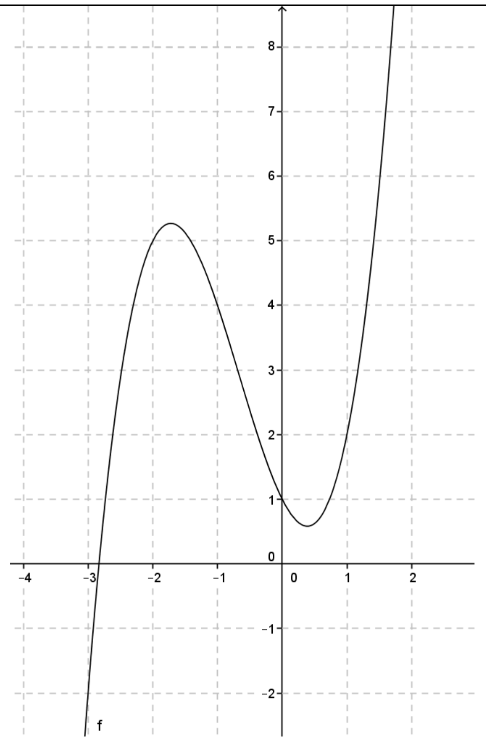
Question 3

Q3. Soit la fonction définie sur R par $f(x)=2x+5$. Si possible, déterminer une tangente à la courbe de la fonction f au point B de coordonnées (-2,1).

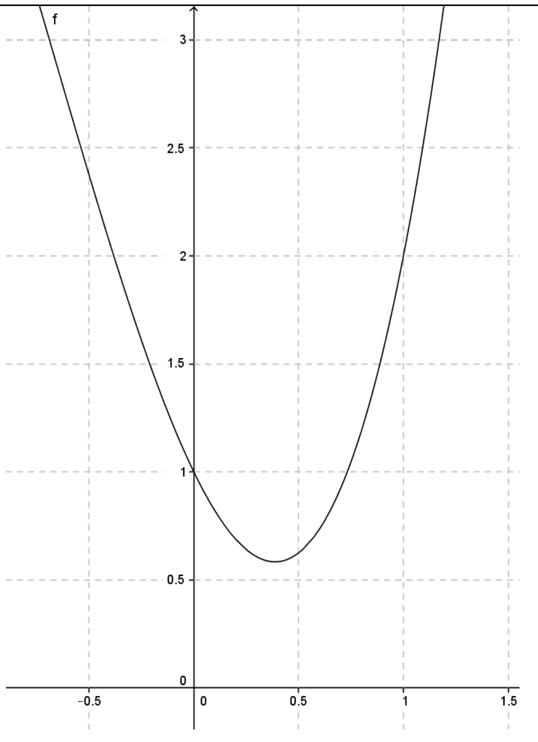
C'est le problème bien connu d'une courbe qui n'est pas *courbe* ! On s'attend à un calcul de f' et de l'équation de la tangente comme en Q2a. Ce travail dans AC évacue la perspective locale qui pose problème dans AG (Páez et Vivier, 2013 ; Montoya et Vivier, 2015). Y a-t-il un graphique ? Y a-t-il une vérification que (-2,1) est sur la courbe (PP) ? Y a-t-il une remarque qu'il s'agit de la même droite ? Dans cette question, il peut y avoir un conflit entre AC et AG.

Question 4a

Q4. Soit la fonction définie sur R par $f(x)=x^3+2x^2–2x+1$.



Graphique n°1



Graphique n°2

a. La droite d'équation $y=-2x+1$ est-elle une tangente à la courbe de la fonction f au point (0,1)?

Il s'agit d'une fonction du troisième degré, facile à dériver, dont on cherche la tangente en 0. On peut envisager :

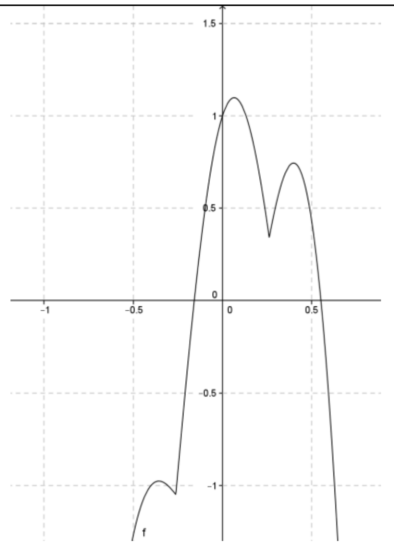
- Un calcul de la dérivée $f'(x)=3x^2+4x–2$ et $f'(0)=–2$ avec un travail standard dans AC ou une affirmation directe par une expression du développement limité de f en 0 (ou de ce type, un travail dans AR). La détermination de l'équation de la tangente permet alors une comparaison avec la droite donnée.
- Un tracé de la droite donnée sur les graphiques (travail en géométrie analytique) qui permet une vérification visuelle dans AG. La droite recoupe la courbe en Graph1 mais pas en Graph2 : y a-t-il des traitements différents selon le graphe comme l'affirmation d'une tangente *locale*, ou *sur un intervalle*, avec la perte du caractère global de la tangente ou une affirmation que la tangente n'existe pas ?

– Un tracé de la tangente sur le graphique, dans la paradigme AG, avec encore le problème d'existence, qui permet une comparaison avec la droite donnée. Cette détermination graphique d'une tangente sera sans doute peu fréquente car on a explicitement la fonction.

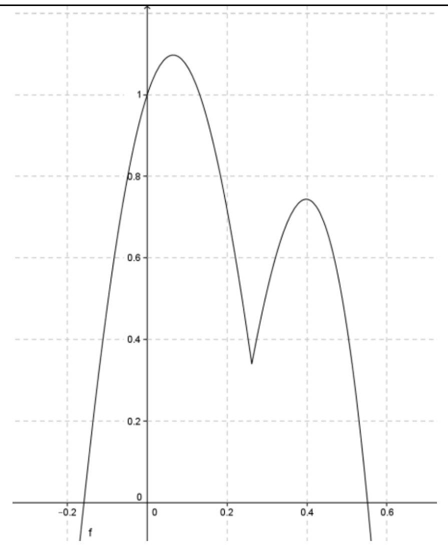
Enfin, si les deux paradigmes AC et AG sont présents : y a-t-il une cohérence ? une coordination ?

Question 5

Q5. Est-ce que la droite d'équation $y=3x+1$ est une tangente à la courbe représentative de la fonction $f(x)=-5x^2e^x+3x+|\cos(6x)|$ au point (0,1) ?



Graphique n°1



Graphique n°2

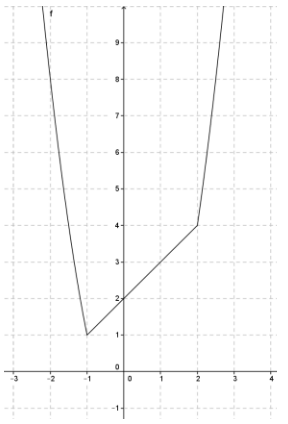
Comme Q4a, la question est standard mais, ici, la fonction n'est pas usuelle. En particulier, on visualise dans AG des points anguleux ce qui peut laisser un doute sur ce qui se passe en zéro même si la courbe y paraît lisse (AG). Cette *provocation didactique* favorise-t-elle la coordination des deux paradigmes AC et AG ? Le paradigme AC est-il toujours le paradigme dominant ?

Les mêmes procédures de calcul qu'en Q4a sont possibles, mais elles sont plus complexes et la présence de la valeur absolue risque de poser problème. Pour un travail dans AC, l'affirmation que la fonction n'est pas dérivable en 0 à cause de la valeur absolue est possible mais il est à noter que cela contredit la visualisation dans AG. On s'attend aussi à des dérivations (incorrectes mais qui peuvent donner la bonne solution) dans la valeur absolue ?

Comment la valeur absolue va-t-elle être gérée ? Un travail dans AR est possible et on précisera les perspectives activées : un calcul de f' « autour de 0 », ou par un début de développement limité, avec ou sans justification. On peut aussi faire un calcul du taux d'accroissement en 0, $-5xe^x+3+(|\cos(6x)|-1)/x$, pour chercher sa limite en 0, en utilisant par exemple un développement limité de cos en 0 ? Ces procédures sont plus économiques ici. Les étudiants y penseront-ils ?

Question 6

Q6. Soit la fonction définie sur R par $f(x)=x^2+|2+x–x^2|$. Préciser, selon les points, si la courbe de cette fonction admet ou non une tangente.



Il s'agit, comme en Q5, d'une provocation didactique avec une valeur absolue. La différence consiste en la présence de deux points non réguliers (visualisation dans AG, PP et PL) et de la portion rectiligne (cf. Q3). Cette question, contrairement aux autres, porte sur l'ensemble des points de la courbe et on s'attend à une réponse avec une PG, avec vraisemblablement une focalisation sur les points anguleux (PP et PL).

On s'attend, au minimum, à un contrôle graphique dans AG. Mais le travail est-il uniquement graphique ? Dans le paradigme AC, on peut exprimer la fonction sans valeur absolue : $f(x)=2x^2–2–x$ si $x<-1$ et $x>2$ et $f(x) = 2+x$ si $-1<x<2$ pour un calcul de f' sur chaque intervalle. On peut également affirmer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 ce qui donne (incorrectement) les solutions que l'on peut contrôler visuellement.

Comment les points anguleux sont-ils justifiés ? Y a-t-il uniquement un appui sur la visualisation dans AG ? Ou bien la justification s'appuie sur les propriétés de la valeur absolue (réponse incomplète) ou sur le calcul de f' à gauche et à droite (ou du taux de variation) avec une comparaison des limites (qui existent). Dans ce cas, comment la valeur absolue est-elle gérée ?

RESULTAT

Nous présentons dans cette section les résultats du questionnaire qui a été proposé à 14 étudiants chiliens (nommés de C1 à C14), 9 étudiants français (de F1 à F9), et 15 étudiants mexicains (de M1 à M15), tous volontaires, en première année d'université, après l'enseignement sur la dérivation. Nous laissons souvent les codes des étudiants afin de préciser la population d'où sont issues les réponses – en outre cela permet de *suivre* les réponses d'un même un étudiant.

Question 2a

Notre hypothèse selon laquelle le registre algébrique du domaine des fonctions favorise un travail dans le paradigme AC avec l'utilisation des règles de calcul, dérivation et formule de la tangente, est effective pour les trois populations. Presque tous ces étudiants calculent correctement la dérivée, mais en revanche, on voit des différences dans la réussite à l'expression de l'équation de la tangente (tables 1). Il y a très peu de travail graphique.

	AC	calcul correct de f'	Détermination correcte de la tangente
Mexique (15)	12	11	2
Chili (14)	14	14	11
France (9)	9	8	6

Table 1: réponses à Q2a

On relève notamment des formules inadéquates appliquées sans aucun contrôle, comme C6 ou F8 qui donnent une équation du second degré pour la tangente.

Quatre étudiants mexicains proposent des graphes inadéquats (dont une droite). Parmi ceux-ci, M11utilise la méthode de résolution des équations du second degré pour trouver les racines (une routine automatisée du paradigme AC). M13 (figure 5) et M15 travaillent dans le paradigme AG en proposant une droite verticale ayant un unique point d'intersection : la PP et la PG sont présentes, mais pas la PL.

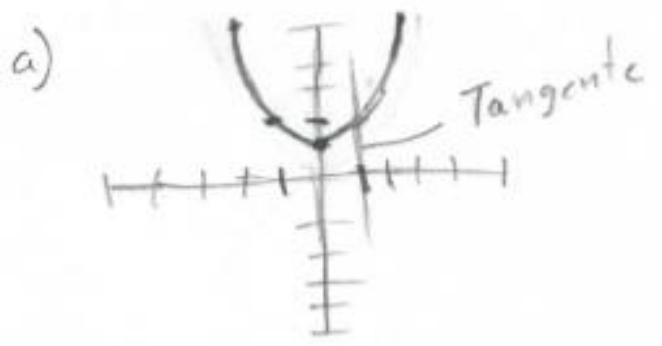


Figure 5: réponse de M13 en Q2a

Question 2b

La question Q2b s'est révélée difficile pour tous les étudiants. Un seul étudiant (F8) réussit cette question, dans le domaine de l'algèbre, en recherchant les points d'intersection et en annulant un discriminant. Pour beaucoup d'étudiants, la PP et la PL font défaut.

Un seul étudiant (C3) annonce que la droite passe par le point (2,3). La visualisation de l'équation n'active pas cette PP pour la plupart des étudiants. Plusieurs étudiants (2 chiliens et 4 français) réinterprètent la question par la recherche de la tangente au point de la courbe d'abscisse 2 (cf. Q3) avant de conclure, négativement, par un travail dans AC. La PP issue de la visualisation de l'équation proposée est inadéquate. Plusieurs étudiants tentent de résoudre cette question par l'algèbre (6 mexicains, 5 chiliens et 2 français), parfois en identifiant des coefficients avec $f'(x)$ ou avec la tangente de Q2a, et qui mènent à des expressions de k en fonction de x, voire de y.

Q2b est moins standard (3 étudiants chiliens et 2 français ne répondent pas) et cela explique en partie que la prédominance de AC pour cette question est moins claire avec seulement 4 étudiants français, 5 chiliens et aucun mexicain. Cela étant la PL est totalement absente, chez tous les étudiants, même pour les étudiants ayant fait un graphe. Ils auraient pu placer le point de coordonnée (2,3) pour tracer, dans le paradigme AG, les deux tangentes à la courbe passant pas ce point activant de ce fait les trois perspectives : on relève ici un manque de coordination des paradigmes AC et AG.

Question 3

Les réponses à Q3 sont données dans la table 2 qui est à rapprocher de la table 1 : les réponses sont similaires et renforce notre hypothèse sur la prédominance de AC.

	AC	calcul correct de f'	Détermination correcte de la tangente
Mexique (15)	9	7	3
Chili (14)	9	10	6
France (9)	9	9	6

Table 2: réponse à Q3

Il est notable qu'aucun étudiant n'écrit que le point B appartient à la représentation de *f*, ce qui montre que, comme en Q2b, la PP est défaillante dans le paradigme AC dès que l'on sort des questions standards : il y a une réinterprétation de la question en « trouver la tangente au point d'abscisse -2 de la courbe ». On retrouve cette réinterprétation liée à une PP inadéquate de Q2b.

Plus spécifiquement, deux étudiants mexicains et un chilien, après avoir calculé la dérivée, annoncent qu'il n'y a pas de courbe, car ce sont des droites. Deux autres étudiants chiliens, sans calcul dans AC, annoncent par un travail dans AG qu'il n'y a pas de tangente (ou doute du fait qu'il y en ait une). Des 15 étudiants qui déterminent correctement la tangente, seuls trois étudiants français remarquent qu'il s'agit de la même droite dont deux disent que c'est « logique ». Les réponses annonçant la non existence sont peu nombreuses en comparaison avec la demande d'une tangente à une droite dans le registre graphique (Montoya et Vivier, 2015). On peut y voir, encore, un signe de la déconnexion des paradigmes AC et AG.

On note également des travaux, dans AC, dans AG ou même en algèbre, menant à des droites *tangentes* qui coupent la représentation de la fonction (figure 6, à rapprocher de la figure 5). Pour ces étudiants, si la PP et la PG sont bien visible, en revanche la PL semble totalement absente.

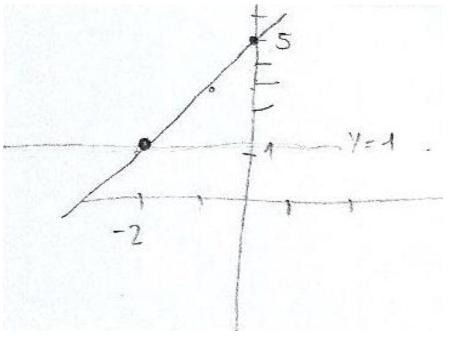


Figure 6: réponse de C14 en Q3

Question 4

La question 4a est traitée de manière presque identique à Q2a et Q3 pour les étudiants chiliens et français (table 3).

	AC	calcul correct de *f'*	Détermination correcte de la tangente
Chili (14)	12	11	9
France (9)	5	6	4

Table 3: réponse à Q4a

Ce n'est en revanche pas le cas pour les étudiants mexicains. Deux étudiants utilisent la dérivation dont M5 qui dérive l'application affine associée à la droite et 8 étudiants ne répondent pas (tous les étudiants chiliens et français répondent).

On voit des utilisations du paradigme AG : soit pour tracer les tangentes soit pour vérifier que la droite proposée, tracée en géométrie analytique, est bien tangente à la courbe (figures 7). Les graphiques donnés ne sont utilisés que par 5 étudiants chiliens, 3 étudiants français et 4 étudiants mexicains. Les autres s'en sont-ils servis pour visualiser ?

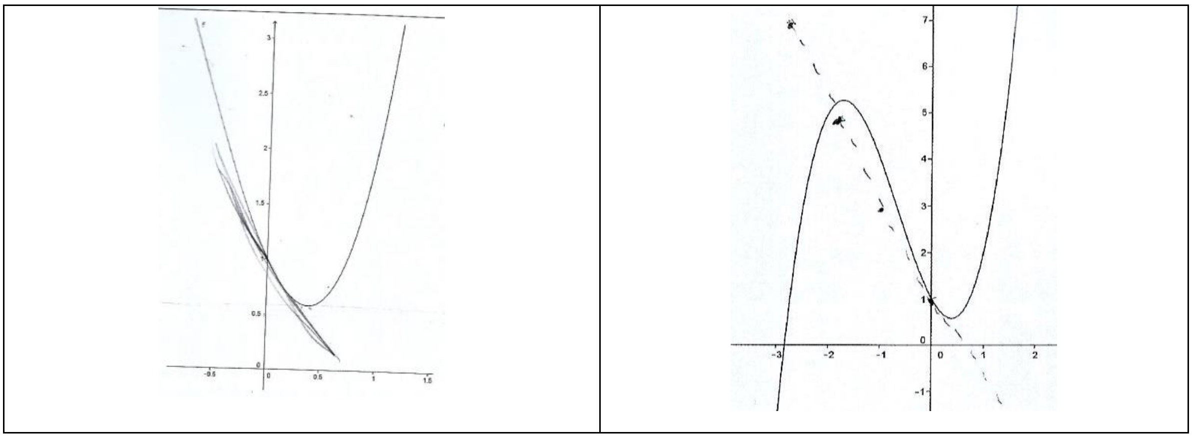


Figure 7a (C1) et Figure 7b (C10)

Malgré une cohabitation des deux paradigmes, on voit peu d'articulations AC/AG, et on a l'impression que, pour les étudiants chiliens, les deux paradigmes sont isolés. Seuls F7 et F8 annoncent clairement le travail dans AG qui permet de faire une conjecture qui peut ensuite être prouvée dans AC (ce que fait effectivement F7). L'étudiant F6 (figure 8) propose aussi un travail particulier, dans AG : il calcule les valeurs pour x=0,5 et remarque qu'elles sont proches et que donc la droite est bien tangente ; il s'agit ici d'un travail dans AG, s'appuyant sur le numérique.

a) si $f(0,5) \simeq y(0,5)$ alors $y=-2x+1$ est une tangente de f.

$(0,5)^3+2(0,5)^2-2(0,5)+1 = 0,125+0,5 \cancel{-1+1} = 0,175$.

$-2x+1 = -0,5\times 2+1 \simeq 0$

$f(0,5) \simeq -2(0,5)+1$ donc $-2x+1$ est une tangente de f.

Figure 8: réponse[8] de F6

Question 5

La question 5 est à peu près traitée de manière identique aux questions Q2a, Q3 et Q4a par les étudiants chiliens et français. La plupart des étudiants n'arrivent pas à dériver correctement la fonction avec la valeur absolue, en général en l'enlevant avant ou après la dérivation (C2 invoque la parité du cosinus), cette partie ne contribuant pas à la valeur de $f'(0)$ cela ne porte pas à conséquence, il n'y a pas de contradiction. Seul F3 justifie correctement la dérivation en affirmant que « cos 6x est positif pour x "proche" de 0 » avec une trace du paradigme AR. Bien que l'on puisse dire qu'il n'est pas assez précis, le raisonnement de F3 est correct, local et présente bien plus *l'esprit de l'analyse* que de savoir que $\cos(6x)>0$ sur $]-\pi/12;\pi/12[$.

F9 justifie un peu de la même manière, mais en distinguant $x>0$ et $x<0$ ce qui n'est pas correct et qui reste dans le paradigme AC avec une disjonction de cas.

On note aussi un travail dans AG pour conjecturer suivi d'une preuve dans AC (F7) ce qui montre une coordination des deux paradigmes. F8 réponds par une visualisation dans AG en affirmant « non car elle ne "frôle pas la droite" elle la coupe » puisqu'il a de fait représenté la droite $y=-3x+1$ et non celle proposée (figure 9). C6 trace la tangente et répond positivement en affirmant que les valeurs en 0 sont égales (PP) et, sans le faire, qu'on pourrait effectuer une analyse locale (PL évoquée).

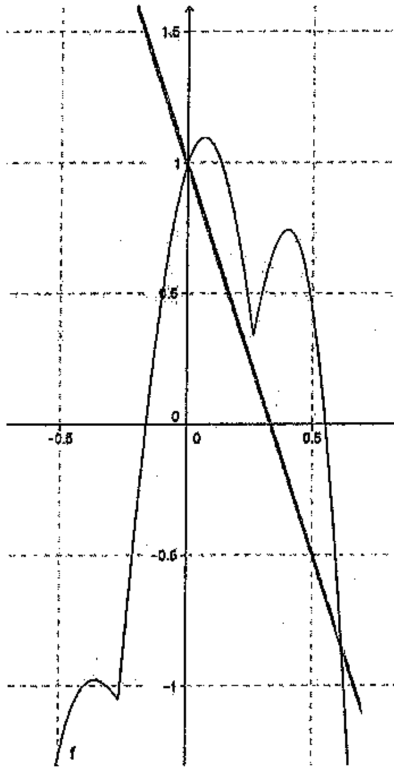


Figure 9: Tracé de F8

On ne voit aucune intention de dériver la fonction pour les 15 étudiants mexicains : 9 étudiants ne répondent pas et seul M5 utilise la dérivation mais, tout comme en Q4a, de la fonction affine associée à la droite donnée. Les étudiants M11 et M12 tracent des droites qui ne correspondent pas à celle proposée. M13, sans aucun tracé, répond « *No, porque la recta atravieza más de una vez la gráfica* », peut-être par une visualisation dans AG avec une conception UPI.

Question 6

Pour les étudiants chiliens et français, on retrouve les difficultés de Q5 avec la valeur absolue, souvent sans lien direct avec l'analyse (hormis F7 qui dérive sans tenir compte de la valeur absolue et trouve $f'(x)=2x+|1-2x|$). Beaucoup d'étudiants repèrent les deux points anguleux, sans doute dans AG, et certains le justifient algébriquement en cherchant les valeurs qui annulent la valeur absolue (l'argument est incomplet ; voir par exemple la figure 11). Des *tangentes* sont aussi tracées (figure 10a), montrant ainsi, dans ce cas, que la conception de la tangente n'est pas stable dans le registre graphique, la PL étant problématique (cf. Montoya et Vivier, 2015).

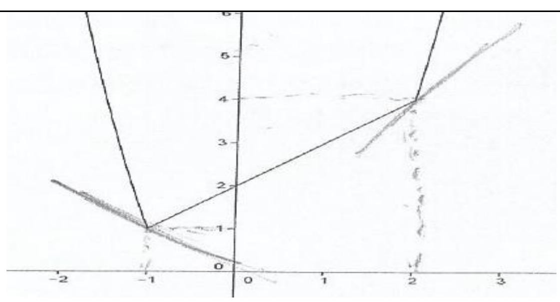


Figure 10a: réponse graphique de C1

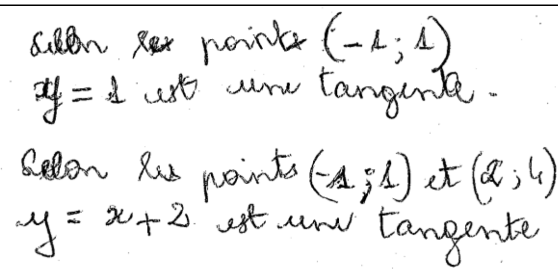

Selon les points (-1 ; 1)
y = 1 est une tangente.
Selon les points (-1 ; 1) et (2 ; 4)
y = x+2 est une tangente

Figure 10b: réponse[9] algébrique de F6

Le problème de la coordination de AG et AC est explicite en figure 11.

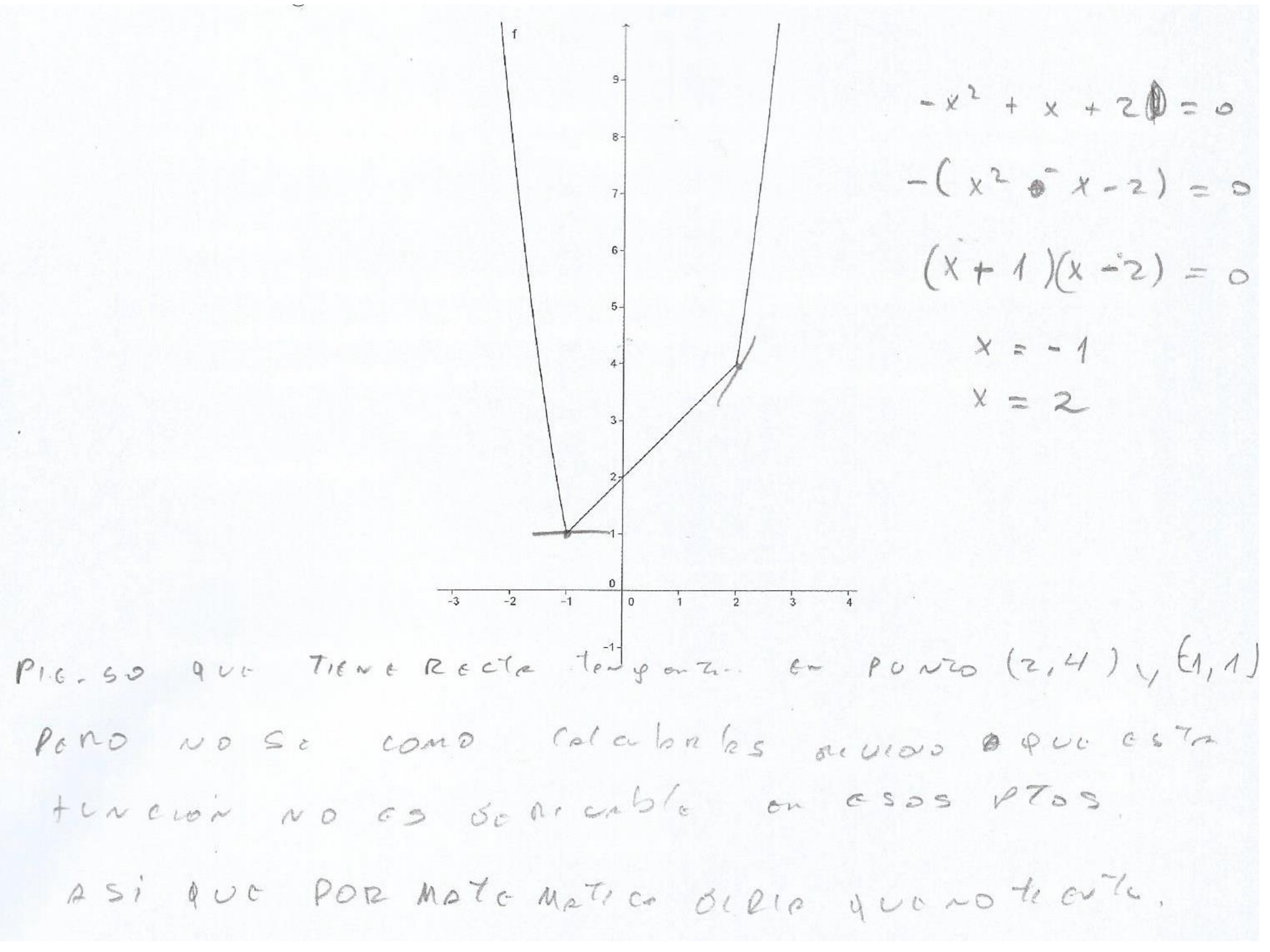


Figure 11: réponse[10] de C5

Le comportement des étudiants mexicains est similaire aux questions Q4a, Q5 et Q6. Beaucoup d'étudiants ne répondent pas et peu d'entre eux recourent à la dérivation. Dans ce cas, il semble que les représentations graphiques des fonctions (prévues comme une provocation didactique) inhibent leur travail mathématique personnel et les empêchent de fournir un travail dans AC. Dans le cas de Q6, seuls deux étudiants utilisent la dérivation mais sans tenir compte de la valeur absolue. Sur le graphique, seul M1 marque un des deux points anguleux ; il trace en outre une droite horizontale qui passe par ce point.

CONCLUSION

Utilisation des graphiques

Les graphiques proposés sont peu utilisés par les étudiants français et au maximum, on relève deux questions où un graphique est utilisé de manière tangible. Cela est un signe de la prédominance du paradigme AC sur le paradigme AG : sans graphique, l'utilisation de AG est limitée alors que ce serait utile pour certaines questions, notamment pour contrôler les résultats. Notons une particularité pour Q6 : le graphique ne présente aucune marque, mais on peut penser qu'au moins 6 étudiants ont travaillé dans AG, avec un processus de visualisation menant à l'identification d'un ou deux points anguleux.

L'utilisation des graphiques est beaucoup plus importants par les étudiants chiliens. Certains étudiants les utilisent dans les cinq questions du questionnaire avec souvent des traces graphiques pour Q6. De plus, de nombreuses tangentes sont tracés « à la main » (figure 7a), grossièrement, ce qui est un indicateur du fait qu'elle a été tracée dans AG, avec au moins les PP et PL. La PG est plus délicate car souvent il n'y a qu'une *petite* partie de la tangente. Il est possible que ce soit une conséquence du travail au lycée chilien qui porte particulièrement sur les graphiques.

A l'opposé, il semble que les graphiques proposés, avec une provocation didactique, inhibent le travail des étudiants mexicains qui avaient effectué un travail dans AC aux questions Q2a et Q3.

On voit peu la conception *Unique Point d'Intersection*, hormis en Q6, alors qu'elle est très importante dans un contexte graphique, avec un travail essentiellement dans AG (Montoya et Vivier, 2015). En Q4a par exemple, les étudiants ne disent pas qu'il n'y a pas de tangente malgré le fait qu'elle recoupe manifestement la courbe. Est-ce que AC « fait foi » ? Est-ce pour cela que, dans les quelques graphiques proposés, la tangente ne recoupe jamais la courbe ?

Paradigmes AG et AC

Une conséquence de la prédominance du paradigme AC, ou de l'utilisation de l'algèbre, est la centration du travail sur la PP, délaissant les deux autres perspectives et, notamment, la PL pourtant essentielle en analyse. Cela bloque de fait tout contrôle : pourquoi F1 ne contrôle-t-il pas sa réponse en Q2b alors qu'il a tracé un graphique en Q2a ? Un tel contrôle se rencontre malgré tout, chez certains étudiants, ce qui montre une articulation AC/AG, souvent en utilisant AG pour émettre une conjecture. Mais la présence des deux paradigmes ne signifie pas qu'il y ait une articulation, une coordination. De fait, l'articulation des deux paradigmes AC et AG est faible et lorsque les deux paradigmes cohabitent dans une même réponse, il semble que les travaux respectifs soient isolés (c'est le cas pour tous les étudiants chiliens).

Si les questions favorisent, a priori, largement un travail dans AG et/ou AC, nous avons fait en sorte que le paradigme AR puisse apparaître par endroit, notamment à Q5. Cela dit, comme on pouvait s'y attendre, AR est très peu présent, même si on en trouve quelques traces comme pour F3.

La prédominance de AC, avec essentiellement la PP, apparaît clairement, tout comme l'absence de AR. Nous avons choisi l'objet tangente car elle apparaît très tôt dans l'enseignement, pour le cercle, dans le domaine de la géométrie avec la possibilité d'une PL. On remarque que, malgré cette possibilité, le travail s'effectue très largement dans AC, sans la PL, avec une algébrisation du travail.

Conclusions finales

Il nous semble important, pour l'apprentissage de l'analyse, d'axer le travail, dès le début de l'enseignement, sur une articulation entre AG et AC. Cela permettrait d'enrichir le travail dans AC en permettant une PL. En outre, il serait intéressant, pour le développement à plus long terme, de commencer tôt à introduire des éléments du paradigme AR.

Il serait hasardeux d'étendre les conclusions de l'étude à l'ensemble des trois pays. L'identification des similitudes et différences, des ETM de référence, est une perspective de recherche. Il en est de même de l'identification des ETM personnels des étudiants et de l'influence des ETM idoines.

NOTES

1. Supporté par le projet ECOS-Sud C13H03.

2. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~ecosetma/

3. Le registre graphique est présent, mais pas de manière systématique.

4. Il est à noter que, comme pour les tangentes dont il sera question plus loin, les cercles sont des objets qui peuvent être étudiés dans plusieurs domaines : géométrie, algèbre et analyse.

5. Comme dans les calculs de dérivées ou de limites.

6. Dans le questionnaire « graphique » dont il est question dans cette partie, le point est systématiquement sur la courbe. Nous proposons une question où ce n'est pas le cas dans la section suivante.

7. Figure 4a : "∃ la tangente sólo en el intervalo señalado" ; figure 4b : "La tangente est un élément de construction locale" ; figure 4c : "Ici, on ne peut faire qu'une tangente locale, car sinon, la tangente coupe la courbe une autre fois."

8. "Si $f(0,5)\approx y(0,5)$ alors $y=-2x+1$ est une tangente de f. [...] $f(0,5)\approx-2(0,5)+1$ donc $2x+1$ est une tangente de f."

9. "Selon les points (-1,1) $y=1$ est une tangente. Selon les points (-1,1) et (2,4) $y=x+2$ est une tangente"

10. "Pienso que tiene una recta tangente en el punto (2,4) y (1,1) pero no sé como calcularlas [?] o que esta función no es derivable en esos puntos así que por matemática diría que no tiene."

REFERENCES

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie *Annales de Didactique et de sciences cognitives. 10,* 5-54

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak A., Montoya E., Vandebrouck F. & Vivier, L (2016). Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction, In Y. Matheron, G. Gueudet & al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la XIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Brest, 19-26 août 2015, 47-66, La Pensée Sauvage.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives, *RELIME, 17*(4-I), 17-28.

Maschietto, M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée: les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices.* Thèse doctorale, Université Paris VII.

Montoya Delgadillo, E., Páez Murillo, R. E., & Vivier, L. (2016). Conceptions spontanées et perspectives de la notion de tangente pour des étudiants de début d'université, *Actes du colloque INDRUM*, 31 mars-02 avril 2016, Montpellier.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico - Cambios de dominios y de puntos de vista, taller, *Proceedings of CIAEM XIV*, 5-7 june 2015, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM*, 48(6), 739-754.

Páez Murillo, R. E., & Vivier, L. (2013). Evolution of teachers' conceptions of tangent line, *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 209– 229.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 149 – 185.

Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 15,* 167-193.

UNA APROXIMACIÓN AL ETM IDÓNEO EN LAS SUCESIONES: EL CASO DE LA SUCESIÓN $(1+1/n)^n$ EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA Y UNIVERSITARIA[1]

Paula Verdugo-Hernández

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

paulasinttia@gmail.com

Este trabajo tiene como objetivo principal investigar elementos que podrían configurar el ETM idóneo de las sucesiones, identificando similitudes y diferencias que permitan la reestructuración de los ETM idóneos aquí analizados. Para ello se presenta un estudio de caso sobre el ETM idóneo de tres profesores de universidad enfocado en la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definida por $a_n = (1+1/n)^n$ para cada $n\in\mathbf{N}$. Se solicita a estos tres profesores realizar una producción donde aborden la enseñanza de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Los principales resultados evidencian diferencias entre los ETM idóneos, observándose que éstos se enmarcan dentro de los distintos paradigmas del análisis. Además, se obtienen elementos que harían factible la estructuración de un ETM idóneo de las sucesiones.

Palabras Claves: *ETM idóneo de las sucesiones, Estudio de la sucesión $a_n=(1+1/n)^n$, Enseñanza universitaria, Paradigmas del análisis, Activación de Génesis*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo tiene como objetivo principal identificar un posible ETM idóneo para la enseñanza-aprendizaje de las sucesiones en el segundo año de enseñanza universitaria. Nuestro estudio se enfoca en las sucesiones ya que ellas se relacionan con varios objetos tales como límites, funciones y ecuaciones diferenciales, por mencionar sólo algunos, lo cual hace de ellas un buen objeto para el estudio acotado de las diferencias tanto de contenidos como de enfoques matemáticos. Particularmente, en esta ocasión nos focalizaremos en la sucesión definida por $a_n = (1+1/n)^n$ para cada $n\in\mathbf{N}$. Hemos decidido analizar la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ debido a la presencia que ésta posee en el estudio del análisis, ya que es un ejemplo recurrente en algunos textos universitarios como Kuratowski (1962), Bobadilla and Labarca (2010), y Stewart (2008). Adicionalmente, creemos que esta sucesión constituye un importante ejemplo de aplicación del criterio de convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas, tal como se aprecia en algunos textos universitarios como los mencionados, que ejemplifican dicho criterio por medio de esta sucesión. Por último, dicha

ESPACIOS DE TRABAJOS MATEMÁTICOS

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2011, 2014) tiene por objetivo principal favorecer el funcionamiento del trabajo matemático en un contexto educativo. Para definir el ETM se introducen dos planos: el plano epistemológico y el plano cognitivo, que estructuran el ETM apoyando la comprensión tanto del modelo del trabajo matemático que se genera, como así también la articulación entre sus planos mediante tres génesis (Kuzniak, Montoya, & Vivier, 2016): semiótica, instrumental y la discursiva. En el Espacio de Trabajo Matemático se identifican tres tipos de ETM (Kuzniak, 2011): *ETM de Referencia* relativo a criterios matemáticos definidos por una institución, que requiere un *ETM idóneo,* del cual depende tanto el diseño de la clase como de las actividades y tareas encomendadas a los estudiantes, quienes deberán comprometerse a realizarlas de acuerdo a su *ETM personal*. Por lo anterior, de acuerdo con Kuzniak and Richard (2014), el ETM idóneo no es fijo y se debe ajustar a ciertas restricciones locales, que dependen del ETM de referencia.

Adicionalmente el ETM considera, según Kuzniak and Richard (2014), tres planos verticales. Dichos planos actúan sobre la base de ciertas génesis y sus relaciones con el plano epistemológico y cognitivo. El primer plano [Sem-Ins] está sustentado por la génesis semiótica e instrumental. El segundo plano [Sem-Dis] está sustentado bajo la génesis semiótica y discursiva. Por último, el tercer plano [Ins-Dis] se apoya en la génesis instrumental y discursiva, las cuales evidenciaremos en este escrito a través de entrevistas con tres profesores universitarios en ejercicio.

Finalmente, se han identificado los siguientes paradigmas en el dominio del análisis (Montoya & Vivier, 2016):

> *Análisis-Geométrico/Aritmético (AG),* el cual permite interpretaciones con hipótesis implícitas basadas en la geometría, el cálculo aritmético o el mundo real.
>
> *Análisis-Calculatorio (AC),* donde las reglas de cálculo están definidas más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.
>
> *Análisis-Real (AR),* el cual está caracterizado por un trabajo que involucra aproximación y vecindades, incluso lo topológicas; definiciones y propiedades son establecidas teóricamente permitiendo un "trabajo ε" específico a este paradigma; cotas, desigualdades, "lo despreciable".

ALGUNOS ELEMENTOS METODOLÓGICOS

El análisis que se presenta en esta investigación es de carácter cualitativo, mostrando un estudio de caso en relación al trabajo realizado por tres profesores universitarios, respecto a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definida por $a_n=(1+1/n)^n$ para cada $n\in\mathbf{N}$. La presencia de esta sucesión ha sido detectada tanto en textos de estudio (Swokowski, 1998; Stewart, 2008; Purcell, 2007), como en planes y programas universitarios (2016-2017).

Con el fin de identificar algunos elementos del ETM idóneo de las sucesiones, se entrevistaron 3 profesores de universidad los cuales serán nombrados como PU1, PU2 y PU3, respectivamente. Algunos antecedentes de los docentes son: PU1 de formación inicial pedagogo en matemática, magister en didáctica de la matemática, realiza clases de cálculo I y II, en carreras de ingeniería comercial. PU2 de formación ingeniero matemático, magister y doctor en estadística, realiza clases en los cursos de cálculo I, II y estadística, en carreras de ingeniería civil. PU3 de formación inicial pedagogo en matemática, magister en matemática, realiza clases en los cursos de cálculo I, II y ecuaciones diferenciales, en carreras de ingeniería civil. PU1 y PU2 dictan clases en la misma institución, mientras que PU3 dicta clases en otra institución universitaria.

A continuación se especifica lo solicitado, por medio de una entrevista, a los profesores PU1, PU2 y PU3: *"¿Cómo abordaría en sus clases el estudio de la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$*?"*. Para ello se les asignó un tiempo de una hora para desarrollar dicha pregunta por escrito, sin embargo los tres, al cabo de 20 a 30 minutos, solicitaron más tiempo para enviar con posterioridad sus respuestas.

Cabe señalar que, en la enseñanza universitaria, según los programas y textos universitarios, y por la propia experiencia de los tres profesores entrevistados, quienes enseñan la unidad de sucesiones en el curso de cálculo II, el estudio de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en cuestión, se trata como un ejemplo clásico de convergencia.

ESTUDIO DE LOS ETM IDÓNEOS DE PU1, PU2 y PU3

A continuación analizaremos las producciones de los tres docentes universitarios PU1, PU2 y PU3 respecto a la pregunta que les fue propuesta en la entrevista. En general, los tres profesores universitarios no generan tareas para abordar la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, sino más bien ellos utilizan distintas herramientas para estudiarla, con el objetivo principal de probar que es convergente.

Profesor Universitario 1 (PU1)

PU1 señaló que él haría preguntas a los estudiantes con la intención de guiar el problema solicitado. PU1 abordó la convergencia desde un punto de vista gráfico, proponiendo preguntas (ver Figura 1) y dando las respuestas que éste esperaría de parte de los estudiantes para calcular el límite (ver Figura 2). PU1 hizo dos preguntas en relación al comportamiento gráfico de la sucesión y se refirió, como señalado anteriormente, a lo que esperaría que los estudiantes respondan.

Observemos la producción de PU1 en la Figura 1 a continuación, en donde éste propone las preguntas para guiar a sus estudiantes en el análisis de la sucesión abordada.

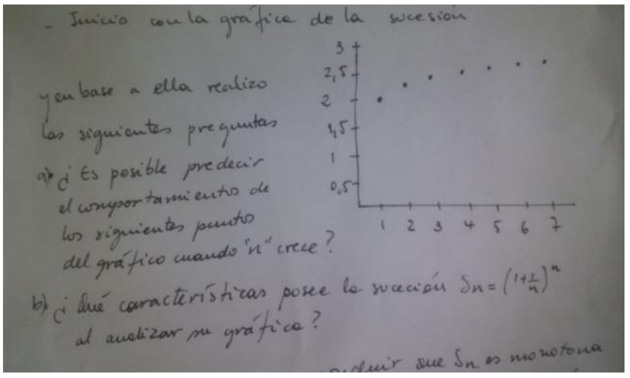
	Transcripción: Inicio con la gráfica de la sucesión y en base a ella realizo las siguientes preguntas: *a*) ¿Es posible predecir el comportamiento de los siguientes puntos del gráfico cuando "*n*" crece? *b*) ¿Qué características posee la sucesión $s_n = (1+1/n)^n$ al analizar su gráfica?

Figura 1: Propuesta de PU1

Posteriormente, el profesor escribió lo que él esperaría que los estudiantes le respondieran; ver Figura 2. Según la respuesta (R*a* y R*b*) que el propio profesor genera para (*a*) y (*b*), se observa que el docente pretende que con la pregunta (*a*) los estudiantes deduzcan que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es monótona creciente. De la pregunta (*b*) (Figura 1) y la respuesta R*b* dada por el propio profesor (Figura 2), se desprende que éste esperaría que los estudiantes utilicen la calculadora para que deduzcan que la sucesión "tiende a aproximarse" a 2,72 y que posiblemente tracen la recta y=2,72, de modo que ellos visualicen que la sucesión es acotada superiormente por 2,72. En definitiva, PU1 pretende que sus estudiantes hagan una deducción basada en cálculos numéricos realizados mediante una calculadora, y eventualmente en un gráfico, del hecho que la sucesión es monótona creciente, acotada superiormente y convergente, relacionando esta última propiedad más bien a lo numérico-gráfico y no a los dos primeros aspectos, que permitirían concluirla teóricamente.

A continuación se presenta la respuesta que PU1 esperaría de sus estudiantes.

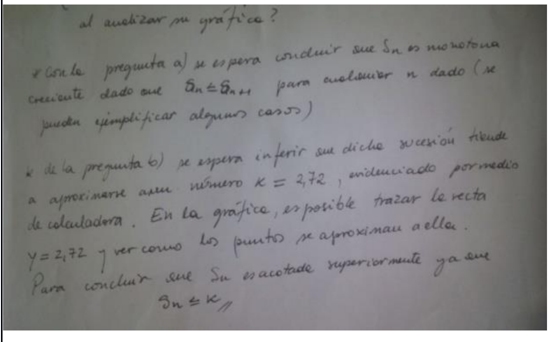
	Transcripción: R*a*) Con la pregunta a) se espera concluir que s_n es monótona creciente dado que $s_n \leq s_{n+1}$ para cualquier n dado (se puede ejemplificar algunos casos). R*b*) De la pregunta b) se espera inferir que dicha sucesión tiende a aproximarse a un número k=2,72, evidenciado por medio de calculadora. En la gráfica, es posible trazar la recta y=2,72, y ver como los puntos se aproximan a ella. Para concluir que $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es acotada superiormente ya que $s_n \leq k$.

Figura 2: Propuesta de PU1 (continuación)

En términos del ETM, PU1 activó la génesis semiótica y la instrumental, las cuales generan el plano [Sem-Ins]. Como artefacto se identifica el uso de la calculadora, y en términos de signos y registros el tratamiento es gráfico.

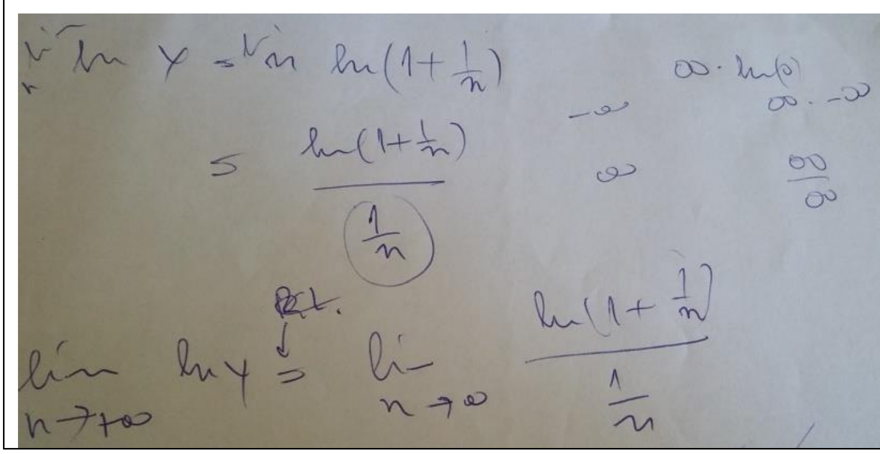
Por otro lado, dado que la producción de PU1 está basada en un gráfico, y que éste esperaba la utilización de una calculadora para que los estudiantes evidenciaran el límite, y eventualmente trazaran una recta (y = 2,72), de modo tal de visualizar que la sucesión es acotada superiormente, son indicios de estar en un paradigma de Análisis-Geométrico/Aritmético (AG) (Montoya & Vivier, 2016) que permite, entre otras, interpretaciones nacidas de la geometría.

Profesor Universitario 2 (PU2)

A continuación mostraremos la producción de PU2, la cual según se observa es totalmente diferente a la anterior, privilegiando el uso de herramientas como la Regla de L'Hôpital, la cual fue utilizada con el fin de calcular el límite de la sucesión.

Cabe señalar que, el análisis de convergencia de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ puede ser llevado a cabo mediante el criterio de convergencia de sucesiones monótonas y acotadas, que establece que toda sucesión creciente (respectivamente, decreciente) y acotada superiormente (respectivamente, acotada inferiormente) es convergente. Dado que PU2 aplicó la Regla de L'Hôpital en lugar de utilizar el criterio de convergencia mencionado, se ha tenido la oportunidad de realizar una segunda entrevista en donde se le solicitó a PU2 señalar las razones para utilizar dicha herramienta. A continuación se transcribe su respuesta.

PU2: Se debe a que los estudiantes están más familiarizados con esta herramienta debido a que en el curso previo la utilizaron bastante.



Transcripción:

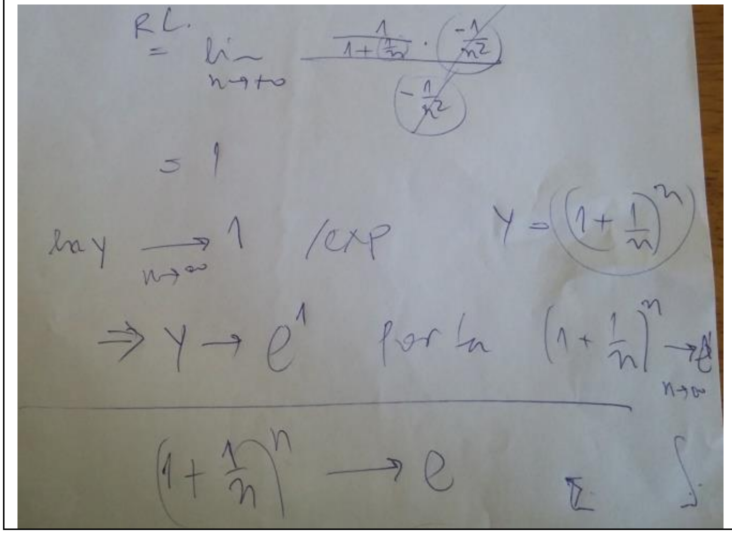
$$\lim \ln y = \lim\ n \ln\left(1+\tfrac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln y = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Figura 3: Propuesta de PU2.

En la Figura 3 y 4 se puede observar que PU2 no mencionó que para su desarrollo es necesario pasar del cálculo del límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a un límite de una función de una variable real, con el fin de aplicar la Regla de L'Hôpital, y enseguida devolverse del límite de esta función para obtener el valor del límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.Para ello, bastaría con utilizar el teorema de la caracterización del límite de funciones mediante sucesiones, el cual asegura que $f(x)$ tiende a L sí y solamente si para cada sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergente a a se tiene que la sucesión $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge a L. Pareciera que PU2 no hace explícitamente la diferencia sobre la naturaleza del trabajo con lo discreto y lo continuo, ya que éste no toma en cuenta la dialéctica discreto/continuo, en este sentido nos preguntamos ¿Qué consecuencias podría esto traer para los estudiantes?



Transcripción :

$$\overset{RL}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}} = 1$$

$\ln y \underset{n\to\infty}{\to} 1$ /exp $\quad y = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\Rightarrow y \to e^1$ por tanto $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} e^1$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$

Figura 4: Propuesta de PU2 (continuación)

Cabe señalar que PU2 en su cálculo (ver Figura 4) da por hecho que el número *e* existe cuando calcula el límite, pero el número *e* existe porque se puede definir como el límite de la sucesión analizada, es decir, lo que hace PU2 es utilizar precisamente lo que hay que probar que existe. De hecho, existe porque tiene aplicaciones y se le definió de forma especial por esa razón.

Por otro lado, tal como fue mencionado anteriormente, PU2 calculó el límite de la sucesión aplicando la regla de L'Hôpital, en lugar de aplicar el criterio de sucesiones monótonas y acotadas, por la razón que el mismo PU2 señaló. Para utilizar el criterio mencionado PU2 debería haber probado que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es monótona y acotada (en este caso, se puede probar que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es creciente y acotada superiormente). De hecho, posteriormente con el fin de abordar los aspectos previos, PU2[2] propuso las siguientes indicaciones (1) y (2) (sin demostración), las cuales él dejaría a cargo de los estudiantes:

(1) Probar que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es creciente usando el teorema del binomio y que $1- i/n < 1- i/(n+1)$, para cada $i = 1, 2,\ldots, n-1$.

(2) Para demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es acotada usar que $i! > 2i-1$, para cada $i \in \mathbf{N}$ (mostrar la desigualdad por inducción).

Desde el punto de vista del ETM, se observa que PU2 utilizó una herramienta de las funciones de variable real al aplicar la regla de L'Hôpital con el objetivo de calcular el límite. Luego, sugiere implícitamente utilizar el criterio de las sucesiones monótonas y acotadas, para lo cual propone los puntos (1) y (2), los cuales quedan completamente dentro del marco de las sucesiones, con el fin de probar que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es creciente y acotada superiormente. Consideramos que en esta propuesta se activaron la génesis instrumental, en el sentido de las herramientas utilizadas (artefactos teóricos), y la génesis semiótica, activando el plano [Sem-Ins]. Además, se activa el plano [Sem-Dis] en el momento que PU2 deja propuesto los puntos (1) y (2) induciendo a los estudiantes a realizar dichas pruebas.

Finalmente, la propuesta del docente se centra en el paradigma de Análisis-Calculatorio, puesto que utiliza reglas explícitas de cálculo, tal como la Regla de L'Hôpital, sin cuestionarse la naturaleza de los objetos matemáticos involucrados, ya que de hecho, desde el problema original que consiste en analizar una sucesión, pasa implícitamente a estudiar el límite de una función, sin cuestionarse ni el paso ni el nuevo objeto introducido (la función).

Profesor Universitario 3 (PU3)

A continuación mostraremos la producción del docente PU3. Preliminarmente, PU3 señaló que aplicaría algunas herramientas de cursos previos tales como el teorema del binomio, que si bien es cierto, en términos del ETM en otro curso podría ser parte del polo referencial teórico, en este curso en donde se estudian sucesiones deviene una herramienta teórica que permite comprobar que la sucesión analizada es acotada.

PU3: Conocidas algunas definiciones y desigualdades básicas en los cursos de matemática, como son el teorema del binomio, ser acotado y la monotonía de una sucesión. Por el teorema del binomio, se tiene:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n+1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

A continuación PU3 introdujo tres sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Éste sugirió entonces comparar término a término estas sucesiones a partir de n=3, con el fin de concluir que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es acotada.

PU3: Se comprueba que la sucesión está acotada. Para lo cual se consideran las siguientes expresiones:

$$a_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$b_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$c_n = 2 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{Progresión geométrica}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

En efecto, comparando término a término a partir de n=3 se verifica que: $2 < a_n < b_n < c_n = 3 - 1/2n-1$, de donde $2 < a_n < 3$; luego la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es acotada.

Ahora se demuestra que la sucesión es estrictamente creciente de la siguiente manera:

$$\text{M.A} > \text{M.G} \Leftrightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ Luego, an es monótona creciente.

Así PU3 concluyó, considerando los dos puntos anteriores que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es convergente. Además, señaló que, en consecuencia "tiene límite finito". Ese límite es precisamente el número *e*, irracional y trascendente. Para visualizar este resultado el docente consideró el siguiente gráfico (Figura 5) que indica el comportamiento de la sucesión que converge al número *e*. PU3 indica que *"el comportamiento de convergencia hacia el valor de e por medio del gráfico es lento"*, lo cual significa que numéricamente la sucesión se demora en acercarse hacia la recta $y=e$ (en el gráfico aún no se aprecia claramente que los puntos se acerquen a la recta $y=e$; creemos que hubiese hecho falta graficar más puntos de la sucesión para acercarse de mejor forma.

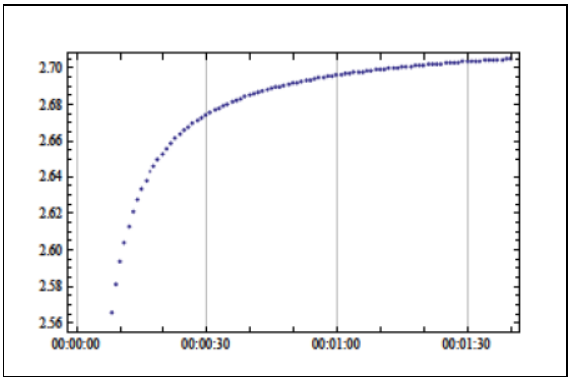


Figura 5: Gráfico de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$

En términos de ETM, PU3 realizó una propuesta en donde se movilizaron las componentes del plano epistemológico y cognitivo, presentando una entrada por la génesis discursiva, evidenciando la activación de los tres planos [Ins-Dis], [Sem-Dis] y [Sem-Ins], y activando la génesis discursiva, instrumental y semiótica. El plano [Sem-Ins] se observa explícitamente debido a que el docente propone un gráfico realizado por medio del software Maple. Además, se realiza una segunda entrevista a PU3 para consultarle si él genera actividades con Maple en sus clases, a lo cual él afirma que sí, pero dicha información no se pudo observar en su producción.

Mediante la respuesta a la pregunta inicial, se puede constatar que el docente ha utilizado elementos del paradigma AC, sin embargo también consideramos que ha utilizado el paradigma AR, debido a que PU3 trabaja utiliza conceptos como la mayoración. Además, a nuestro criterio, la propuesta de PU3 posee un razonamiento propio del dominio específico de las sucesiones, dado que utiliza herramientas relacionadas con las sucesiones, demostrando detalladamente el acotamiento y la monotonía. La importancia de estos aspectos radica en el referencial propio de las sucesiones, ya que por lo dicho anteriormente, una de las herramientas fundamentales para el estudio de la convergencia de las sucesiones, es el criterio de convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas. Entonces, de hecho, para aplicar este criterio, ni siquiera se necesita calcular el límite (el cual se debería calcular una vez que se sabe que la sucesión es convergente), sino que basta con probar la monotonía y el acotamiento para demostrar la convergencia. Por esa razón es una herramienta teórica importante, ya que ni siquiera se requiere conocer explícitamente el término general de una sucesión para probar que es convergente.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha constatado que las propuestas de los docentes privilegian distintas entradas de trabajo en el ETM. En principio no se puede confirmar que alguna de estas propuestas sea mejor que las otras, sin embargo, el estudio del ETM nos indica claramente que algunos docentes han desarrollado más ciertas componentes que otras. En este sentido, nosotros pensamos que al abarcar una mayor cantidad de componentes, génesis, o eventualmente generar una circulación en el ETM, se estaría ofreciendo la posibilidad de una mejor enseñanza y comprensión de las materias.

En esta oportunidad hemos entregado elementos que permiten analizar los ETM idóneos de cada profesor, a partir de lo cual observamos que PU1 favorece prioritariamente el desarrollo de la génesis semiótica en su propuesta, mientras que los otros dos profesores universitarios abordan lo solicitado de forma más teórica. Esto se puede deber a distintas razones, una de ellas puede ser por el tipo de carrera a las cuáles están dirigidas las clases, ya que PU2 y PU3, ambos realizan clases a carreras de ingeniería civil, donde supuestamente la complejidad matemática debería ser mayor, mientras que PU1 realiza clases en ingeniera comercial, donde la complejidad apuntaría a otras áreas del conocimiento.

En su propuesta, PU2 activa la génesis instrumental, en el sentido de que utiliza herramientas como la regla de L'Hôpital (artefactos teóricos), y la génesis semiótica, activando el plano [Sem-Ins]. Además se activa el plano [Sem-Dis] en el momento que PU2 deja propuesto dos indicaciones para que éstas sean demostradas, induciendo a los estudiantes a realizar dichas pruebas.

Por otro lado, PU3 activa los planos [Sem-Ins] y [Sem-Dis]. En efecto, observamos que dicho docente utiliza algunas herramientas, entre las cuales destacamos el software Maple, utilizado por PU3 para graficar la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$. A pesar que los ETM idóneos presentados obedecen a distintos paradigmas, observamos que el artefacto (software en este caso) podría jugar un rol importante en una mejor estructuración del ETM idóneo.

Por otro lado, observamos que hay distintas entradas (planos verticales activos) para resolver un mismo problema desde el punto de vista de los ETM idóneos en estas instituciones universitarias. Al respecto, hemos evidenciando dos aproximaciones distintas tanto por la génesis discursiva como por la génesis semiótica.

En relación a los paradigmas, en el trabajo de estos 3 profesores universitarios hemos constatado que los ETM idóneos cohabitan entre los paradigmas AG, AC y AR, los cuales al integrarlos, podrían concebir un posible ETM idóneo completo, en el sentido de presentar una propuesta que abarcaría la integración de los 3 paradigmas presentados, dando cabida a un trabajo de enseñanza más amplio, incorporando un proceso completo en el desarrollo del trabajo del docente.

Por una parte PU1 realiza una propuesta centrada en el marco del paradigma AG, mientras que PU2 se centra en el paradigma AC, puesto que utiliza reglas explícitas de cálculo, tal como la Regla de L'Hôpital, a pesar de que propone al final, un tratamiento de la sucesión por medio de una demostración, la cual no la desarrolla. En el caso de PU3, si bien es cierto se ha observado que su trabajo se enmarca prioritariamente en el paradigma AC, éste también trabaja conceptos relativos al paradigma AR, como la mayoración, además, el nivel de razonamiento del trabajo de PU3 lo lleva a una demostración considerada en un paradigma como el AR. Se podría decir que ésta sería la única propuesta en donde se consideran los tres paradigmas.

En consecuencia, creemos que es interesante que los profesores enseñen desplegando los tres paradigmas y puedan mostrar las limitaciones y las ventajas de usar uno por sobre el otro, y sobre todo las ventajas de integrarlos holísticamente de forma coherente. En este marco de enseñanza del docente, sería deseable obtener resultados desde el ETM personal del estudiante, en donde los docentes apliquen un ETM idóneo transitando entre los paradigmas AG, AC y AR y no solamente privilegiando un paradigma sobre otro.

De este modo, sería deseable integrar el aspecto gráfico de las sucesiones con el aspecto teórico (por supuesto sin descuidar este último), de manera de producir una mayor comprensión en los estudiantes sobre las tareas teóricas que se esperaría que ellos enfrentaran, algunas de las cuales sintetizamos en este trabajo por medio de la sucesión estudiada por los docentes universitarios. En este sentido, queda abierto analizar si efectivamente los estudiantes lograrían apropiarse más de los conceptos teóricos si se incorporaran los aspectos gráficos de las sucesiones, importante cuestión que será analizada en otro trabajo.

NOTAS

1. Agradecimientos: Beca de Doctorado año 2015-2016 Conicyt (21151243), Beca Gastos Operacionales año 2015-2016 Conicyt (R.E.: 5359/2015) y el proyecto ECOS-Conicyt C13H03.

2. Suponemos que PU2 propone las indicaciones transcritas debido a que considera importante probar la monotonía y el acotamiento de (a_n), ya que posiblemente éste considera que el cálculo del límite con la regla de L'Hôpital es insuficiente.

REFERENCIAS

Bobadilla, G., & Labarca, R. (2010). *Cálculo: Segunda versión Tomo 1*. Retrieved from http://calculo1.dmcc.usach.cl/archivos/tmp/tomo1.pdf

Kuratowski, K. (1962). *Introduction to calculus.* Location: Addison-Wesley Publishing Company Inc. Reading, Massachusetts, U.S.A.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathematique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24. Retrieved from http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Annales_16.pdf

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *17*, 1–16.

Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2016). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. In A. Ruiz (Ed.), *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática: Vol. 15. Investigación* (pp. 237–251). Universidad de Costa Rica. Retrieved from http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23942

Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM Mathematics Education*, *48*(6), 739–754.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas,* Sexta edición. Location: Cengage Learning Editores S.A. de C.V. México.

EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO COMO UNA HERRAMIENTA PARA EL ESTUDIO DE LA PRÁCTICA EN EL AULA DEL PROFESOR

Carolina Henríquez-Rivas
Universidad de La Frontera – Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[1]
carolina.henriquez@ufrontera.cl

En la presente comunicación se muestran avances de una investigación relativa a la creación de una herramienta tecnológica para analizar la práctica en el aula del profesor de matemática. El dispositivo está sustentado en el Espacio de Trabajo Matemático y constituye una innovación para el estudio del trabajo del profesor en la clase, pues permite analizar, caracterizar y diagnosticar de forma sistemática y organizada las circulaciones en su ETM idóneo. Presentamos la herramienta, la descripción de su funcionamiento basada en preguntas y, luego, resultados de una aplicación en una clase de geometría de un profesor en formación inicial.

Palabras Claves: *Espacio de trabajo matemático. Profesor. Herramienta tecnológica*

INTRODUCCIÓN

El propósito de la presente contribución está centrado en mostrar los avances de una investigación relativa a la creación de una herramienta tecnológica para analizar la práctica en el aula del profesor de matemática. El dispositivo está sustentado en el enfoque teórico *Espacio de Trabajo Matemático, ETM* (Kuzniak, 2011). La herramienta permite caracterizar las circulaciones en el ETM *idóneo* del profesor en la clase y analizar los datos obtenidos.

La investigación que analiza situaciones de enseñanza en las clases ha cobrado valor y vigencia en los últimos años, y ha sido objeto de estudio en diversos constructos teóricos en Didáctica de la Matemática. Según Badillo, Figueiras, Font y Martínez (2013), es necesaria una agenda de investigación que acerque a la práctica los modelos teóricos existentes. En este trabajo los autores abordan el estudio de la actividad matemática en el aula centrada en la práctica del profesor, mostrando la complejidad del análisis durante el desarrollo de una clase, además, la utilización de un instrumento para su estudio.

El trabajo de Fernández y Yoshida (2004), basado en la metodología *Lesson Study,* desarrolla un modelo de análisis colaborativo considerando al profesor en la planificación, implementación, observación y reflexión sobre las clases de matemática. En este orden de ideas, relativas al estudio de clases, la investigación de Isoda y Olfos (2009), la definen como "una actividad que favorece el mejoramiento de las capacidades para enseñar de los profesores participantes; además de impactar positivamente en los aprendizajes de los alumnos, en la profesionalización docente y en la calidad de la enseñanza y del currículo en la localidad en que se realiza" (p. 35). Los autores caracterizan dicha metodología como un proceso cíclico centrado en la reflexión y la acción, en el cual se identifican el proceso de preparación de la clase, el momento de implementación y el de la discusión evaluativa inmediata, para dar el paso a un eventual siguiente ciclo.

Algunos trabajos recientes que utilizan el ETM dan cuenta de la realización de ciertas fases de trabajo, en las que se define la coordinación de aspectos epistemológicos y procesos cognitivos activados por una tarea específica (Coutat & Richard, 2011; Kuzniak & Richard, 2014). En relación al rol de la tarea en el ETM del profesor, la investigación de Henríquez (2014), focalizada en los enfoques geométricos sintético y analítico, propone situaciones de referencia que favorecen *circulaciones* o *rutas* de trabajo particulares. En el estudio desarrollado por Henríquez y Montoya (2015), las autoras presentan los análisis al trabajo del profesor, usando el ETM como una herramienta teórica que permite caracterizar su quehacer en el aula. En este trabajo (*ibíd.*) se muestran las limitaciones en el ETM *idóneo* de los profesores estudiados y lo fructífero de utilizar el ETM como una herramienta que sistematiza los análisis de la práctica del profesor.

Las investigaciones han contribuido a reflexionar sobre la necesidad de disponer de una herramienta tecnológica basada en el ETM, sus planos y componentes, con la finalidad de obtener análisis teóricos más precisos y sistemáticos, considerando aspectos epistemológicos y procesos cognitivos respecto a la práctica en el aula del profesor de matemática. La presente investigación describe cómo se reconstruye el ETM del profesor en la clase mediante el uso de una herramienta tecnológica, la cual permite analizar los resultados de su aplicación para una sesión de geometría particularmente. En el siguiente apartado se presenta el constructo teórico que sustenta esta herramienta, el *Espacio de Trabajo Matemático*.

MARCO TEORICO

Espacio de Trabajo Matemático y sus componentes

La herramienta tecnológica se sustenta en el constructo teórico *Espacio de Trabajo Matemático, ETM* (Kuzniak, 2011), considerando el dominio de la geometría (ETM_G) en su diseño y aplicación. Asimismo, se consideran los aportes de Kuzniak y Richard (2014) relativos a los *planos verticales*, relacionando los planos epistemológico y cognitivo mediante la articulación entre las *génesis* en relación con una tarea específica. En el plano cognitivo las componentes son *visualización, construcción* y *prueba;* en el epistemológico, *representamen, artefactos* y *referencial*. Estas componentes se articulan mediante tres génesis: *semiótica, instrumental y discursiva*, y los planos verticales son: [*Sem-Ins*], [*Dis-Ins*] y [*Sem-Dis*] (Figura 1).

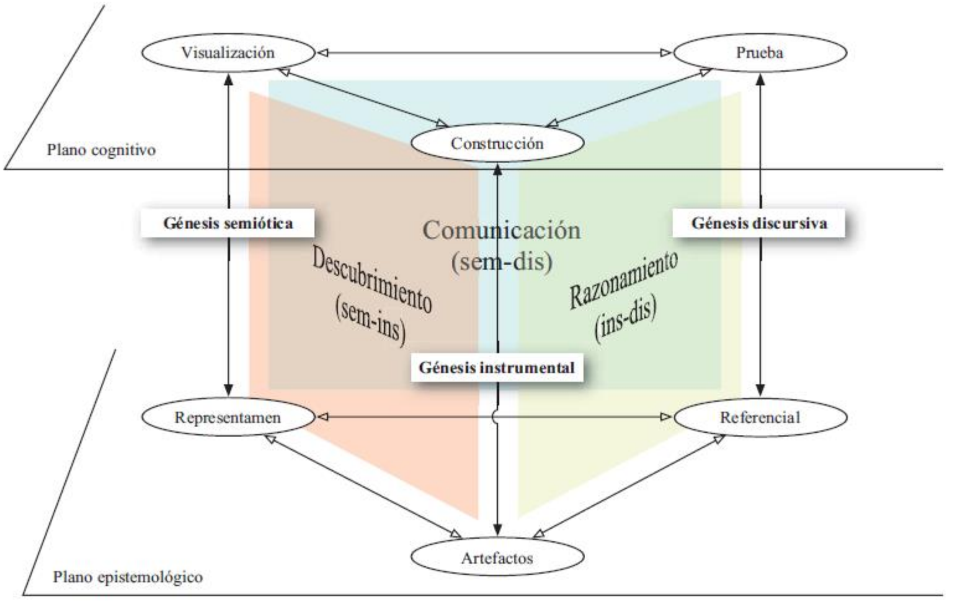


Figura 1: Los planos verticales en el ETM (Kuzniak & Richard, 2014)

En la *génesis semiótica*, el *representamen* está relacionado con la noción signo de Peirce (1978) y el enfoque semiótico de Duval (1995, 2005). Un signo remite a su objeto bajo un proceso semiótico, llamado *visualización*. En la *génesis instrumental*, inspirada en la concepción de Rabardel (1995), la componente *artefactos* distingue entre un sistema material o simbólico empleado como un medio en el proceso de *construcción*. La *génesis discursiva*, relacionada con la concepción de prueba de Balacheff (1987) y razonamiento de Duval (1995). La componente *referencial* remite a elementos de índole teórico y cómo estos se utilizan en un proceso de *prueba*.

Se identifican tres tipos de ETM: *de referencia*, *idóneo* y *personal*. En esta investigación los análisis se dirigen al *ETM idóneo* del profesor en su práctica en el aula.

Espacio de Trabajo Geométrico y Paradigmas Geométricos

En el ETM_G, el proceso de *visualización* (Duval, 2005) está basado en la producción de una representación semiótica (figuras geométricas, gráficos cartesianos) de un objeto. Consideramos la concepción de Duval, quien distingue dos modos de visualización: *icónica* y *no-icónica.* Para distinguir cómo se utilizan los objetos matemáticos en la componente *representamen*, consideramos si el conocimiento está disponible como herramienta u objeto (Douady, 1986). Los *artefactos* (Rabardel, 1995) pueden ser de origen *material*, como una regla, un compás o un software, o bien, estos pueden ser *simbólicos* y permiten producir un resultado en un registro semiótico distinto al figural. En el proceso de *prueba* (Balacheff, 1987) se distingue entre *pragmáticas* e *intelectuales*, y una tipología propia para cada una de estas según el estatus de los conocimientos y la naturaleza de la justificación subyacente. En un reciente trabajo (Richard, Oller & Meavilla, 2016), la noción de prueba en un contexto tecnológico es abordado desde la perspectiva del ETM, llamada *prueba instrumental*, muestra la posibilidad de coordinación entre las diferentes génesis y modos de validación.

Houdement y Kuzniak (1999, 2006) identifican los *paradigmas geométricos*: *Geometría Natural* (GI), *Geometría Axiomática Natural* (GII) y *Geometría Axiomática Formal* (GIII). En el paradigma GI, la fuente de validación es el mundo real y sensible; en GII, el razonamiento de validación está fundado sobre leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático involucrado, los objetos geométricos son descritos por una propiedad y su definición; en GIII el razonamiento de validación es realizado a través del sistema axiomático formal del modelo subyacente.

En lo que sigue, se describen las partes de la herramienta para su uso y análisis de la *circulación* entre las componentes del ETM_G que son activadas. Asimismo se describen las características de la unidad de análisis en el estudio de caso. Finalmente, los análisis permiten caracterizar cuál es el paradigma geométrico privilegiado.

METODOLOGÍA Y DESCRIPCION DE LA HERRAMIENTA

Aspectos metodológicos

Para estudiar el ETM *idóneo* del profesor, el trabajo se basa en el estudio de casos (Stake, 1999). En general, la población objetivo son profesores de nivel secundario en el momento de la realización de la enseñanza, por tanto tienen cabida para nuestros propósitos, futuros profesores en etapa de práctica profesional. La investigación es de tipo cualitativa sobre el análisis de un profesor en el aula; en el caso a presentar, se trata de un profesor en formación inicial –lo llamaremos FP–. Específicamente, en el uso de la herramienta tecnológica diseñada se privilegia la observación no participante de clases, análisis de clases grabadas y de las producciones de profesores.

Al momento de analizar la práctica en el aula, FP cursa la tercera (de 4) experiencia profesional –semestral–, denominada *Práctica Intermedia,* en una universidad chilena. La clase fue planificada por FP y corresponde a la última de 10 sesiones, la cual se desarrolló el segundo semestre del año 2015. La selección de la clase tiene relación con el dominio matemático, pues se trata de una clase de geometría en Primero Medio (estudiantes de 14 años) que tiene por objetivo (declarado por FP) "Aplicar los criterios de congruencia de triángulos para demostrar propiedades en polígonos". Lo anterior, es pertinente para los propósitos trazados en esta investigación, en el cual el modelo de interpretación del ETM es a través de preguntas diseñadas para geometría. FP selecciona los episodios de la clase que serán evaluados en la asignatura (Práctica Intermedia) y, el que se analiza en el presente trabajo trata sobre la prueba de una propiedad del paralelogramo.

Descripción de la herramienta

Para la creación de la herramienta fue necesario apoyo informático especializado y reuniones sistemáticas con el técnico. En una primera fase de trabajo conjunto (investigador e informático), previa al diseño de la herramienta, el informático requirió identificar aspectos generales del ETM, sus componentes y cómo estos se coordinan en el trabajo matemático de un individuo. La siguiente etapa de diseño, consideró momentos de prueba que, dada su extensión, no pueden ser presentados en el presente artículo.

La herramienta ha sido desarrollada en un lenguaje de programación que permite compatibilidad a través de la web (requiere conexión a internet), favoreciendo el contenido dinámico de la información científica. Específicamente, la aplicación web está desarrollada en lenguaje *PHP* y *Jquery,* con base de datos *MySql*; sistema de gestión de base de datos relacional. Lo anterior bajo la licencia de software libre.

La aplicación web fue desarrollada por medio del framework de desarrollo *CakePHP* bajo el patrón de arquitectura *MVC,* el cual propone la construcción de tres componentes: Modelo, Vista y Controlador. Por un lado define la representación de la información y por otro la interacción del usuario. Para el *front-end* –parte del programa que interactúa con el o los usuarios– se utilizó el framerork de desarrollo *Bootstrap*, herramienta para la creación de interfaces de usuario adaptables a todo tipo de dispositivos y pantallas.

En esta fase de diseño, experimentación y evaluación del funcionamiento de la herramienta, la aplicación se encuentra hospedada en un sitio web bajo un dominio específico. Al finalizar la etapa de programación, el informático señala que se recomienda hospedar la aplicación en un servidor destinado a ello.

La herramienta tecnológica que se propone –su implementación y los análisis de resultados– constituyen una real innovación para el análisis del trabajo del profesor en su clase y desde la perspectiva teórica del ETM, la cual se espera en el futuro sea mejorada y adaptada para distintos dominios matemáticos. Es decir, que esta herramienta tiene un doble propósito: por un lado, su uso como una herramienta para la investigación en el marco del ETM y, por otro, para la formación del profesor de matemática. La importancia del dispositivo reside su aplicación, los análisis y la información teórica que esta proporciona, lo cual permite analizar, caracterizar y diagnosticar de forma sistemática, específica y organizada el trabajo del profesor y los elementos (y procesos) que describen su trabajo. Además, como una potencial herramienta para favorecer el desarrollo de situaciones didácticas y/o como insumo para el estudio de las transposiciones didácticas que efectúa el profesor, reconstruir su ETM *idóneo,* tanto para la formación de inicial y continua de profesores.

Respecto a los detalles de implementación de la herramienta y su diseño, aquí tienen lugar ciertas precisiones y especificidades. Primero, en relación a su utilizador es necesario que este domine el ETM y los aspectos teóricos de sus componentes, es por esta razón que hablamos de un *utilizador/investigador*. Es decir, como se trata de un dispositivo para la investigación (o para la formación), que entrega información teórica del trabajo del profesor en el aula, esta debe ser observada e interpretados sus resultados por un experto en ETM.

En relación a las preguntas que se implementan en la herramienta, al ingresar al programa destaca la posibilidad de editar, añadir o eliminar tanto preguntas como las opciones de respuesta, siendo estas de selección múltiple y cerradas, tal como se muestra en la barra de elementos que exhibe el dispositivo (Figura 2A). Una vez seleccionado uno de estos elementos, por ejemplo, “Preguntas” se despliega el listado de las peguntas, las cuales van a permitir caracterizar la circulación en el ETM a analizar (Figura 2B).

A Ingreso

B Preguntas

Figura 2: Barra de elementos para preguntas y sus alternativas

Al seleccionar el elemento "Preguntas" –o bien "Opciones"– es posible realizar modificaciones, añadir preguntas o respuestas en ambos casos si esto fuera necesario, o bien eliminarla (Figura 3A). La elección de las preguntas, como se observa en las Figuras 2B, 3A, 3B, se relaciona con una de las componentes (o génesis) del ETM, y las respuestas se vinculan con aspectos teóricos relacionados con la pregunta (Figura 3B), o bien con el uso de componentes (como artefactos).

A Edición de Preguntas

B Edición de las respuestas a las preguntas

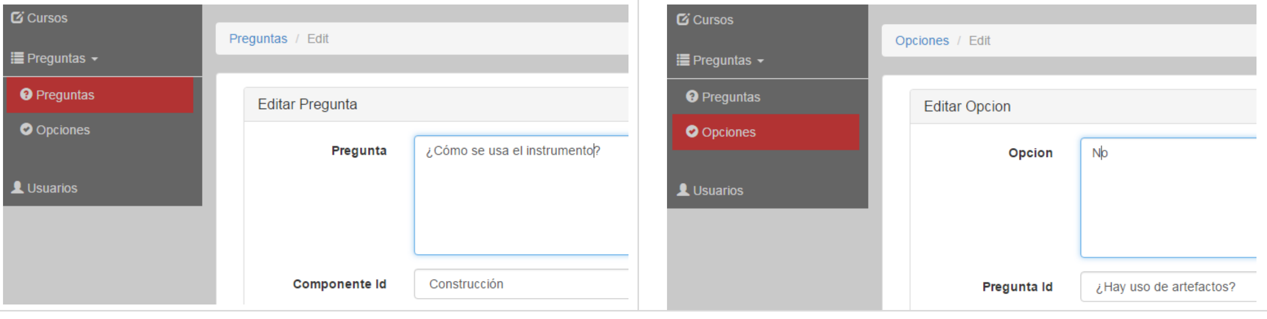


Figura 3: Etapa de diseño y concepción de las preguntas del dispositivo

El modelo de interpretación del ETM es a través de preguntas diseñadas para geometría. Inicialmente, se han seleccionado 11 preguntas relacionadas con las génesis y componentes, lo cual se organiza en tres *grupos* de acuerdo a la génesis involucrada, esto permite al programa (al finalizar su uso) identificar cuáles son los planos verticales activados y las componentes involucradas en el orden en que estas son movilizadas. Estas preguntas se muestran en la siguiente Tabla (1).

Como se observa en la Tabla (1), en el primer grupo de preguntas, 1 y 2 abordan una perspectiva semiótica más general referente a los registros representados, las preguntas 3 y 4 son específicas al proceso de visualización en geometría, en la perspectiva de Duval (2005) y, la pregunta 5, relativa a la disponibilidad del conocimiento en el marco de Douady (1986); en el segundo grupo relativo al trabajo instrumental en geometría, se contemplan distintos artefactos en alusión a Rabardel (1995) y distintos usos vinculados con el paradigma que subyace en el trabajo matemático analizado; en el tercer grupo, las preguntas abordan la perspectiva de los razonamientos discursivos y sus distintas formas de expansión, considerando el punto de vista de los trabajos de Duval (1995) y, específicamente en geometría, la prueba empírica que si bien podría no tener una naturaleza discursiva, se vincula a la componente prueba en la perspectiva de Balacheff (1987), lo cual igualmente aporta con información relevante respecto al ETM_G analizado.

Componente	Pregunta	Opciones de respuesta
	Grupo 1	
Génesis semiótica	1: ¿Qué registro semiótico privilegia?	Registro algebraico / Registro figural / Registro gráfico / Tabla / Lenguaje natural / Registro numérico
Génesis semiótica	2: ¿Otros registros semióticos?	Sí / No
Visualización	3: ¿Se activa el proceso de visualización?	Sí
Visualización	4: ¿Qué tipo de visualización?	Icónica (botánico) / Icónica (topógrafo) / No-icónica (constructeur) / No-icónica (inventeur-bricoleur) / Otra
Representamen	5: ¿Cómo aparecen las nociones matemáticas?	Objeto / Herramienta
	Grupo 2	
Artefactos	6: ¿Hay uso de artefactos?	Sí
Génesis instrumental	7: ¿Cómo se usa el instrumento?	Medir / Construir / Fórmula (artefacto simbólico)
Construcción	8: ¿Qué tipo de artefactos?	Material / Tecnológico / Simbólico
	Grupo 3	
Génesis discursiva	9: ¿Hay expansión discursiva?	Sí
Prueba	10: ¿Qué forma de expansión discursiva?	Argumentación / Demostración / Explicación / Prueba empírica
Referencial	11: ¿Qué elemento del referencial?	Propiedad / Definición

Tabla 1: Modelo de interpretación del ETM según componentes, génesis y respuestas

Se debe notar que las preguntas 3, 6 y 9 solo admiten una Opción de respuesta (Sí). En estos casos se trata de preguntas que dan cuenta de la activación de la componente visualización, artefacto y génesis discursiva, respectivamente. Para preguntas 6 y 9, en caso de no activar en el ETM analizado este bloque de preguntas (asociada a las génesis), no será necesario seleccionar dicha componente. En la pregunta 3, podría funcionar otra forma de visualización, lo cual se reflejaría en la respuesta “Otra” de la pregunta 4. Cabe precisar que al finalizar la observación de la práctica del profesor por el utilizador/investigador, los *planos verticales* aparecerán por la elección de una o más preguntas en dos grupos diferentes (componentes y/o génesis del ETM que determinan un plano vertical). Por esta razón, no se considera la respuesta “No” en las preguntas 3, 6 y 9, pues se evita la activación del plano vertical en caso que la respuesta sea negativa.

Para el empleo de la herramienta, el utilizador/investigador debe seleccionar la opción “Agregar Curso” al comenzar un nuevo análisis, en el cual debe completar información específica de la clase y profesor que analizará (Figura 4A). Notar que aquí se ha considerado en “Título” para la descripción de la tarea que activa el ETM analizado. Esta información es guardada por el programa y, posteriormente, en una síntesis de los análisis será posible acceder y realizar modificaciones si fuera necesario. Lo anterior se exhibe en la siguiente Figura (4B).

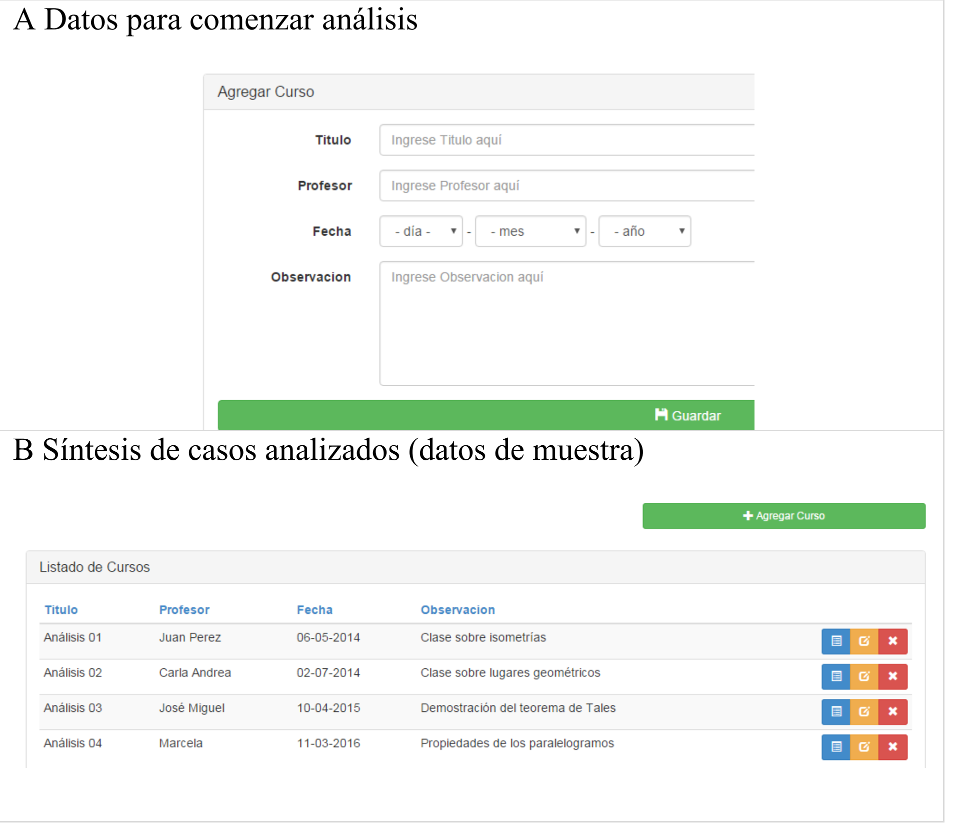


Figura 4: Información para realizar los análisis

Al comenzar un análisis –en este caso de FP en su práctica en el aula–, en la sección “Circulación”, el programa despliega el esquema del ETM (Figura 5A), y el usuario puede seleccionar (con un *click*) las componentes y/o génesis según identifique cuáles de estos han sido activados en el ETM del profesor analizado. Luego aparecerán la (o las) pregunta descrita en la Tabla (1) vinculadas a dicha componente que se ha seleccionado, por ejemplo, como se muestra en la Figura (5B). Cabe señalar que, durante la circulación analizada es posible que se activen las componentes más de una vez; el programa guarda el orden de selección de acuerdo al instante de la observación.

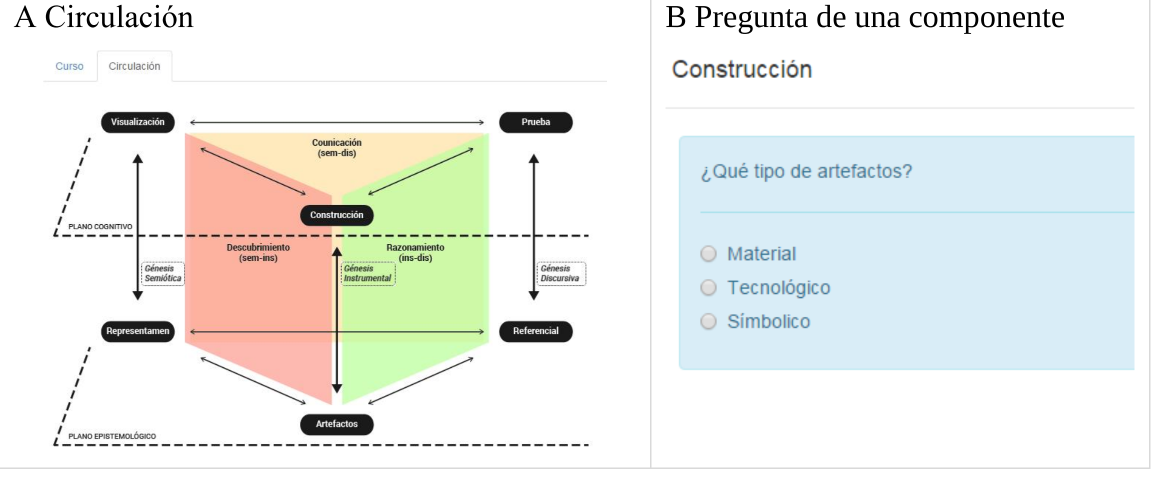


Figura 5: Funcionamiento de la herramienta

Una vez finalizada la observación del ETM, el programa proporciona las circulaciones a través de tres insumos: (1) resumen de circulación, (2) tabla de síntesis y (3) resumen de planos verticales. En el primer caso, se muestra una síntesis de las componentes y génesis activadas en el orden que estas aparecieron según el trabajo del utilizador/investigador; en el segundo, muestra los mismos elementos anteriores, se añade la pregunta asociada a la componente (o génesis) y la respuesta vertida en la aplicación realizada (Figura 6A); el tercer insumo muestra los planos verticales que son activados en el orden de la circulación y las componentes entre los dos *grupos* que se vinculan (Figura 6B).


A Tabla de Síntesis

Circulación

Resumen de Circulacion | Tabla de Sintesis | Resumen de Planos Verticales

Exportar

Orden	Componente	Pregunta	Respuesta
1	Representamen	¿Cómo aparecen las nociones matemáticas?	Herramienta
2	Construcción	¿Qué tipo de artefactos?	Material
3	Referencial	¿Qué elemento del referencial?	No se activa el referencial
4	Visualización	¿Se activa el proceso de visualización?	Sí

B Resumen de planos verticales

Circulación

Resumen de Circulacion | Tabla de Sintesis | Resumen de Planos Verticales

Exportar

Orden	Plano vertical	Circulación
1	Descubrimiento (sem-ins)	Representamen ➔ Construcción
2	Razonamiento (ins-dis)	Construcción ➔ Referencial
3	Comunicación (sem-dis)	Referencial ➔ Visualización
4	Descubrimiento (sem-ins)	Visualización ➔ Artefactos
5	Razonamiento (ins-dis)	Artefactos ➔ Referencial
6	Comunicación (sem-dis)	Referencial ➔ Génesis Semiótica

Figura 6: Resultados proporcionados por la herramienta

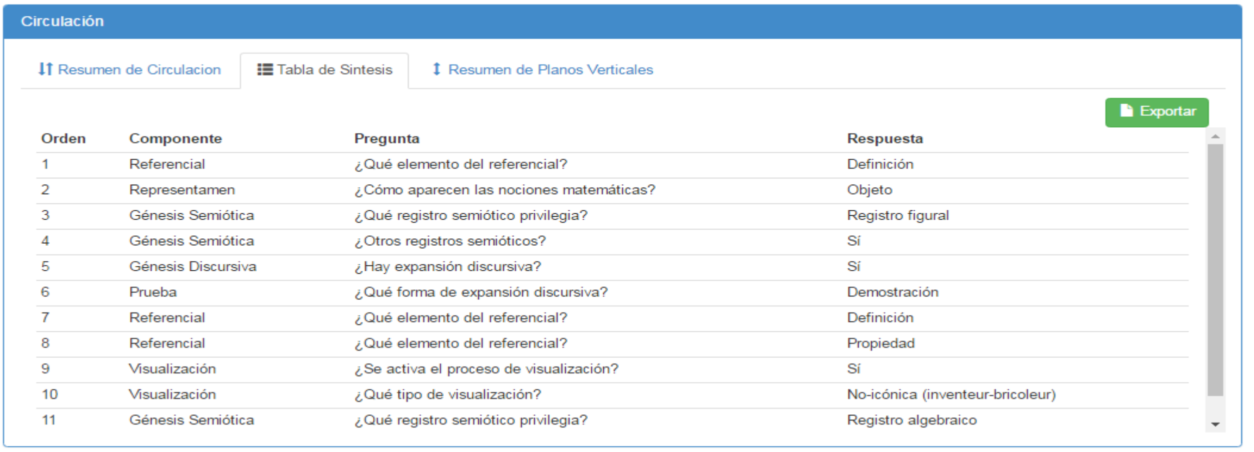
Finalmente, estos tres insumos para presentar la circulación entre las componente del ETM conforman la caracterización de las observaciones y conforman información para los análisis, es decir, se deben analizar en conjunto para poder interpretar de forma completa la información del trabajo matemático del caso que es objeto de investigación, e identificar cuál es el paradigma geométrico predominante. Aquí se denota la relevancia del rol que juega el utilizador/investigador, pues debe dominar el ETM para poder efectuar dichos análisis. Notar que es posible exportar la información a un archivo Excel.

En el apartado que sigue, se muestra una *circulación* entre las componentes del ETM$_G$ *idóneo* activadas por FP en su práctica en el aula empleando la herramienta anteriormente descrita.

ANÁLISIS DE UNA CIRCULACIÓN

Análisis de clase y experimentación de la herramienta en FP

En el análisis del episodio de la sesión 10 relativo a la prueba de una propiedad del paralelogramo, FP específicamente señala: *Probar que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes*. Los resultados de la circulación del ETM$_G$ *idóneo* vertidos por la herramienta diseñada son los que se muestran en la siguiente Figura (7).



Circulación

Resumen de Circulacion | Tabla de Sintesis | Resumen de Planos Verticales

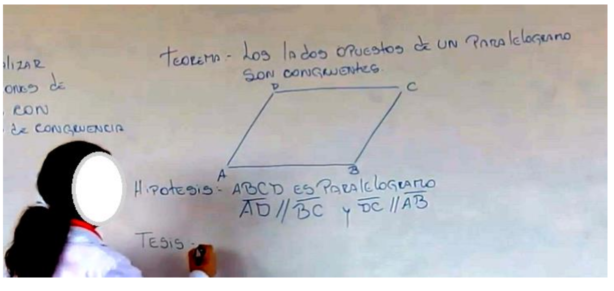
Exportar

Orden	Componente	Pregunta	Respuesta
1	Referencial	¿Qué elemento del referencial?	Definición
2	Representamen	¿Cómo aparecen las nociones matemáticas?	Objeto
3	Génesis Semiótica	¿Qué registro semiótico privilegia?	Registro figural
4	Génesis Semiótica	¿Otros registros semióticos?	Sí
5	Génesis Discursiva	¿Hay expansión discursiva?	Sí
6	Prueba	¿Qué forma de expansión discursiva?	Demostración
7	Referencial	¿Qué elemento del referencial?	Definición
8	Referencial	¿Qué elemento del referencial?	Propiedad
9	Visualización	¿Se activa el proceso de visualización?	Sí
10	Visualización	¿Qué tipo de visualización?	No-icónica (inventeur-bricoleur)
11	Génesis Semiótica	¿Qué registro semiótico privilegia?	Registro algebraico

Figura 7: Síntesis de la circulación del ETM *idóneo* por FP según utilizador/investigador

Al describir la *Tabla de Síntesis* –se ha omitido *Resumen de Circulación* por ser esta más completa– proporcionada por el programa (Figura 7), el trabajo es activado por la componente *referencial*, pues FP comienza enunciando la definición de paralelogramo, luego, señala que para esta demostración considerará el caso específico del romboide, movilizando así este objeto en el *representamen*. FP prosigue dibujando en la pizarra dicho objeto (a mano alzada), el cual emplea en la coordinación con el trabajo discursivo de la *prueba*, específicamente con la organización de una demostración (Figura 8A). Para estos efectos en el *referencial* recurre a una definición (analítica) del paralelogramo, teoremas de congruencia y propiedades de ángulos entre rectas paralelas, lo cual realiza descomponiendo la figura inicial en sus unidades significantes de igual y menor dimensión (deconstrucción dimensional), es decir, el trabajo discursivo se desarrolla en coordinación con la visualización *no-icónica* del tipo *inventeur-bricoleur*, y añadiendo un trazo suplementario ($\overline{AC}$) en esta fase del trabajo (Figura 8B). Finalmente, el resumen muestra el trabajo en registro algebraico que representa para nombrar los elementos involucrados en la demostración –notar que esta componente incluso podría haber sido mostrada antes–.

A Instante inicial del episodio por FP



B Instante final del episodio por FP

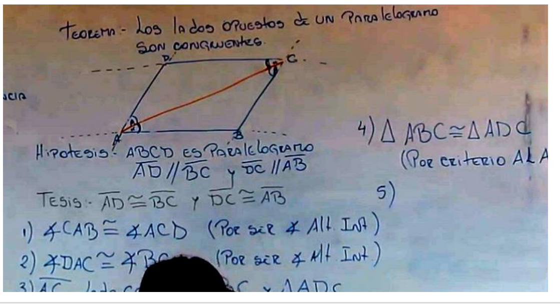
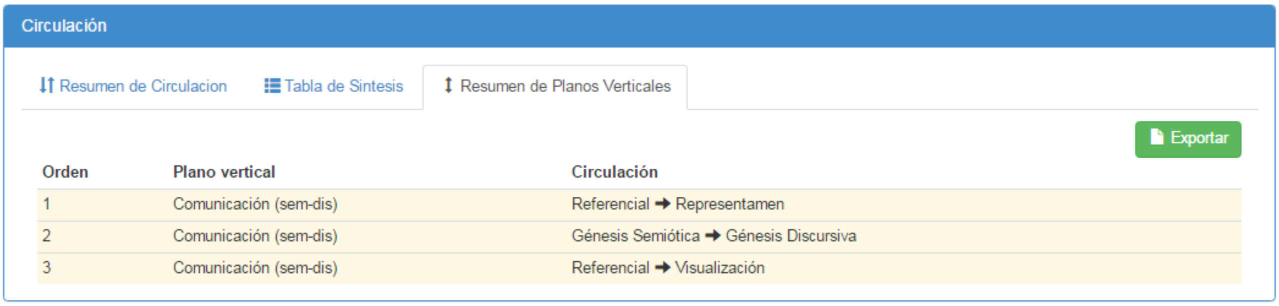


Figura 8: Imágenes a FP en su práctica en el aula

En relación a los planos verticales que se activan en este caso, notar que en el trabajo de FP existe un juego entre las componentes y génesis del plano [*Sem-Dis*]. El trabajo no activa la génesis instrumental, y por tanto los planos que se vinculan con dicha génesis no aparecen (Figura 9).



Orden	Plano vertical	Circulación
1	Comunicación (sem-dis)	Referencial → Representamen
2	Comunicación (sem-dis)	Génesis Semiótica → Génesis Discursiva
3	Comunicación (sem-dis)	Referencial → Visualización

Figura 9: Imágenes del ETM$_G$ *idóneo* por FP

Por último, de estos análisis se puede extraer cuál es el paradigma geométrico que caracteriza el ETM$_G$ *idóneo* de FP en la sesión analizada; FP privilegia el paradigma GII, pues el razonamiento deductivo de la prueba sustentado en elementos del referencial y en coordinación con el proceso de visualización, son propios de este paradigma y, el modelo geométrico (euclidiano) se emplea a nivel local, lo que Houdement y Kuzniak (2006) denominan *axiomatización parcial*.

CONCLUSIONES

El propósito de esta contribución es presentar los avances de una investigación que se augura más extensa, relativa a la creación de un dispositivo tecnológico basado en el ETM para describir y analizar la práctica matemática en el aula del profesor. Específicamente, esta herramienta permite analizar, caracterizar y diagnosticar de forma sistemática y organizada su el trabajo matemático; en otras palabras, permite cristalizar el ETM *idóneo* del profesor. Asimismo, proporciona información teórica específica respecto a la circulación del trabajo matemático realizado por el profesor, para ser empleada en investigación y en la formación de profesores, específicamente, podría ser empleada en cursos que involucren el análisis, diseño de clases y/o propuestas didácticas y su implementación, para la formación (inicial y continua) de profesores.

La razón por la cual se estudia en el dominio de geometría tiene relación con un objetivo de investigación más amplio, en el cual se profundiza en el proceso de visualización, la génesis semiótica y su coordinación con razonamientos discursivos en el ETM (de geometría), además indagar sobre cuáles tipos de tareas favorecen estos propósitos.

En el trabajo analizado, FP no activa la *génesis instrumental* y, por ende, los planos verticales que involucran dicha génesis –[*Sem-Ins*] e -[*Ins-Dis*]– no aparecen en la circulación. Es posible que en este tipo de tareas el trabajo instrumental tenga menos presencia; sin embargo, el uso de software para conjeturar (prueba instrumental) podría contribuir a movilizarla. En este asunto sería pertinente trabajar, y la herramienta de análisis que se presenta podría contribuir.

En Chile, investigaciones anteriores han identificado deficiencias relacionadas con la génesis discursiva y la componente referencial (Henríquez-Rivas & Montoya-Delgadillo, 2015), y específicamente sobre la demostración y dificultades ligadas al proceso de prueba en geometría (Montoya-Delgadillo, 2014). No obstante lo anterior, en el trabajo doctoral desarrollado por Henríquez-Rivas (2014) propone y evidencia que propiedades de figuras planas, como la que propone FP, favorecen y contribuyen hacia mejoras de estas dificultades, privilegiando una forma específica en el proceso de visualización (inventeur-bricoleur). En el caso analizado, si bien FP es quien desarrolla el razonamiento deductivo en la pizarra, se preocupa que los estudiantes interactúen durante su trabajo, y la tarea que selecciona permite cumplir con el objetivo que (FP) declara inicialmente.

En una siguiente fase de trabajo del presente dispositivo, se podrían incluir nuevas preguntas, o bien, mejorar las que ya existen, con el fin de proporcionar información teórica mejor y más precisa. También, constituye un avance poder incluir en los análisis la planificación de la clase realizada por el profesor en la concepción de su ETM *idóneo* y, luego, poder confrontarlo con el análisis de su práctica en el aula; aquí será necesario considerar el proceso de convergencia multidisciplinar en la construcción del ETM *idóneo* del profesor. Por otra parte, en una nueva versión se podría contemplar la posibilidad de escribir observaciones por parte del investigador mientras analiza (*in situ*) la práctica en el aula de un profesor, lo que permitiría afinar los análisis obtenidos de la observación y uso de la herramienta.

En el caso del presente trabajo, el propósito ha sido mostrar los avances relativos a la creación y aplicación del dispositivo tecnológico sustentado en el ETM, lo cual constituye la primera de 3 etapas en el desarrollo de la investigación, esto es: 1) diseño, implementación y mejoras del dispositivo de análisis de clases; 2) confrontación entre las planificaciones del profesor y los análisis de un experto; 3) análisis entre distintos ETM de profesores en torno a un tema común y diseños de circulaciones específicas. Como aquí se presenta, la primera etapa se encuentra en pleno desarrollo. En el caso de la segunda etapa, el dispositivo tendría relevancia y un potencial en la formación de profesores de matemática, pues permitiría tomar decisiones respecto a las mejoras en el quehacer de un docente (o futuro profesor), como resultado de la confrontación entre lo planificado y los análisis de la implementación. En la tercera etapa, el dispositivo permitiría comparar distintos ETM en torno a un tema matemático común y obtener una visión global o una tendencia en relación a un tema específico, permitiendo proponer situaciones didácticas de referencia con circulaciones específicas.

Finalmente, la herramienta tecnológica basada en el ETM deja en evidencia los enfoques teóricos que contribuyen en la profundización de los análisis, siendo el ETM un constructo más amplio (y fructífero) que favorece la complementariedad entre los enfoques; por ejemplo, la génesis instrumental, la perspectiva semiótica y el razonamiento discursivo. Queda abierta la idea de considerar otras dimensiones en los análisis del ETM, por ejemplo cómo inciden aspectos culturales en el ETM *idóneo* del profesor. Además, subrayar que el uso de la herramienta tiene como finalidad la investigación, y su usuario debe ser un entendido en el ETM para su correcta descripción.

[1]**Reconocimiento:** Beca Postdoctorado otorgada por PUCV en el año 2015.

REFERENCIAS

Badillo, E. Figueiras, L. Font, V. & Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 207-225.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics, 18*(2), 147-176.

Coutat, S. & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétes géométriques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 97-126.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-32.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Traducción al castellano de Myriam Vega. Berne, Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Fernández, C. y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Henríquez-Rivas, C. (2014). El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario. Tesis para obtener el grado de Doctor en Didáctica de la Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (no publicada).

Henríquez-Rivas, C. □ Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 51-70.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40,* 283–312.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Isoda & Olfos (2009). *Descripción y relevancia del Estudio de Clases. Capítulo 2.* Universidad de Tsukuba - Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista *Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*(4-I), 5-15.

Montoya-Delgadillo, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 227-247.

Peirce, C. (1978). *Ecrits sur le signe.* Paris: Seuil.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Richard, P. Oller, A. & Meavilla, V. (2016). The concept of proof in the light of mathematical work. *ZDM Mathematics Education, 48,* 843-859.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.

THE MATHEMATICAL WORKING SPACE IN THE CASE OF AREA AND PERIMETER: CONCEPTS' DEFINITIONS AND MEASUREMENT-CALCULATION PROCESSES

Matthew Anastasiadis[1] & Kostas Nikolantonakis[2]

[1]Elementary School Teacher, MSc, University of Western Macedonia

[2]Associate Professor, University of Western Macedonia

Mat.anastasiadis@gmail.com, knikolantonakis@uowm.gr

This study examined students' definitions and measurement-calculation processes concerning area and perimeter. The participants were 22 sixth graders and the findings are based on interviews. We first used the Tall and Vinner's (1981) theory as a basis for interpreting students' definitions and then we reframed our interpretation in the context of the MWS model. Students' definitions seem to be related to the suitable MWS and to prior experiences derived from work in the semiotic and the instrumental axes of their personal MWS. In the case of area/perimeter measurement, $MWS_{Geometry\text{-}GI}$ and $MWS_{Numbers}$ form a complex of workspaces. The instrumental axis, namely the availability and the choice of tools and the process indicated via the formulation of a task, play a key role to the shift from the one to the other MWS.

***Keywords**: area, perimeter, concept definition, measurement, instrumental axis*

INTRODUCTION

In this paper, the MWS model is applied to elementary education (Grade 6) and to the concepts of area and perimeter, which usually require coordinated work in geometry and arithmetic (Douady & Perrin-Glorian, 1989). Thus, we approach the question which arose in the previous symposia and concerns the description "of geometrical tasks requiring an important work with measurements and a shift towards numerical computations" (Tanguay, Kuzniak, & Gagatsis, 2015, p. 29). Furthermore, we examine the relation between the three vertical axes of the MWS and the relation between students' personal MWSs, the suitable MWS and the reference MWS.

In prior research using the MWS model, the way through which students construct their own definitions is not sufficiently examined. To address this, we will first use the main points of Tall and Vinner's (1981) theory as a basis for interpreting students' definitions and then, through the discussion of correspondences between the two theories, we will reframe our interpretation in the context of the MWS model.

The main research questions are:

- How to interpret students' definitions of area and perimeter, by using a) the Tall-Vinner's theory, and b) the MWS model?
- How to describe and interpret, by using the MWS model, the measurement-calculation processes that students use, including the mistakes they make, concerning area and perimeter?

A more specific question is whether there is a relation between processes and definitions.

$MWS_{Geometry}$, $MWS_{Numbers}$ and the role of measurement

The model distinguishes three levels (reference/suitable/personal MWS) (Kuzniak, Tanguay, & Elia, 2016). In Greece, the examination of the reference MWS could take into account the textbooks, since all schools use the same, centrally selected, textbooks (Kuzniak & Vivier, 2010).

Since area and perimeter concepts are included in the geometry unit of the Greek sixth grade textbook, we primarily focus on $MWS_{Geometry}$ (GWS) and particularly on Geometry I (GI), which is associated historically with practical problems (e.g. surveying) and could be seen as an empirical science (Kuzniak, 2013; Kuzniak & Vivier, 2010). In GI, practical proofs, measurement and the use of numbers are allowed; a typical example is a Chilean textbook's problem requiring the calculation of the area of a field by measuring on the drawing (Guzman & Kuzniak, as cited in Kuzniak, 2013). Contrarily, in Geometry II (GII) measurement is not considered a proof.

The $MWS_{Geometry}$ is made up of two planes (Fig. 1). Definitions and properties are part of the theoretical frame of reference, but some properties may also be utilized like an artifact (Kuzniak, 2015). Area formulas could also be seen as theorems used as measuring tools. The cognitive plane includes three kinds of processes: visualization processes with regard to space representation, construction processes related to model formation, and discursive processes conveying proofs/argumentation (Duval, 1998; Kuzniak, 2015).

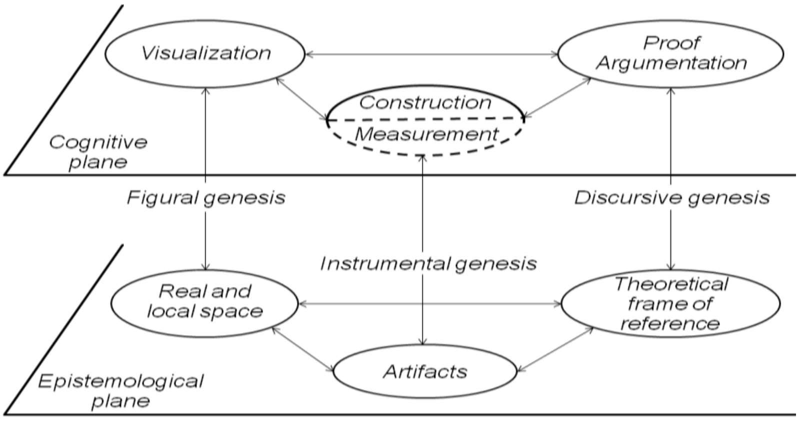


Figure 1: $MWS_{Geometry}$ and the place of measurement

In Fig. 1, measurement is included in the cognitive plane, first, because in GI some artifacts are used for both construction and measurement and, second, in order to represent the process related to the surveyor's way of seeing (Duval, 2005). This way of seeing is the historical entrance to geometry and includes measurement with a suitable tool on real objects and on drawings representing them. Geometric properties are mobilized when used as criteria for the choice of the way of measurement, and the comparison of numerical results serves as the source of validity.

Measurement is related to artifacts through the instrumental genesis. When directed "downwards", the instrumental genesis concerns the choice of a suitable artifact or function of the artifact and the construction or reconstruction of an artifact (instrumentalisation) (Kuzniak et al., 2016; Rabardel, 1995).

The process of geometric measurement presupposes abstraction of the measured attribute and iteration of a suitable unit (Battista, 2007). Moreover, area measurement via square-counting is related to five underlying cognitive processes: abstraction, formation of mental models, spatial structuring, units-locating and organizing composite units. These processes show the connection of area measurement to geometry; they refer to arrays which cover a particular surface and function like a two-dimensional coordinate system. Also, they require the perceptual apprehension of each small square and the re-composition of them into more complicated units. At the highest level of abstraction and interiorization, numbers symbolize the iteration. Thus, numerical calculation with formulas is meaningful, when it functions as a symbol of the geometric measurement processes.

Measurement facilitates entering $MWS_{Numbers}$. In Fig. 1, the dashed curved line indicates this possibility. In $MWS_{Numbers}$, a process related to instrumental genesis is the numerical calculation using material and symbolic artifacts (Fig. 2).

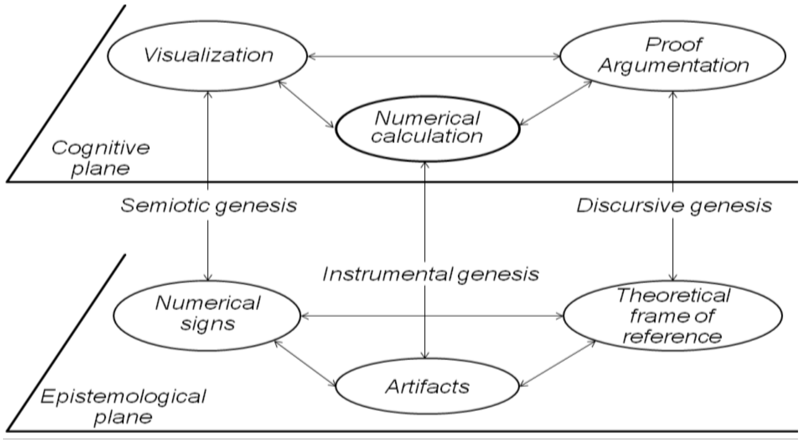


Figure 2: The $\mathrm{MWS}_{\mathrm{Numbers}}$

Construction of geometric objects, measurement of geometric quantities and numerical calculation are specific forms of the MWS's generic "construction", which could also be seen as empirical action mediated by instruments. In Fig. 3, the dashed oblique lines indicate that calculation is often involved in measurement and measurement is often involved in geometric construction. In the case of area/perimeter measurement, $\mathrm{MWS}_{\mathrm{Geometry\text{-}GI}}$ and $\mathrm{MWS}_{\mathrm{Numbers}}$ could be seen as a continuum; they are so interconnected that form a complex of workspaces [1], wherein $\mathrm{MWS}_{\mathrm{Geometry}}$ is usually the starting point for work and $\mathrm{MWS}_{\mathrm{Numbers}}$ is the workspace of arrival for related work. Thus, they function as the $\mathrm{MWS}_{\mathrm{Ds}}$ and $\mathrm{MWS}_{\mathrm{Dr}}$ respectively, where Ds is the source (or initial) domain and Dr is the domain of resolution (or arrival) (Montoya-Delgadillo & Vivier, 2014). However, a return may be needed for evaluating the results or drawing a conclusion, and some tasks may also require a continuous shift back and forth.

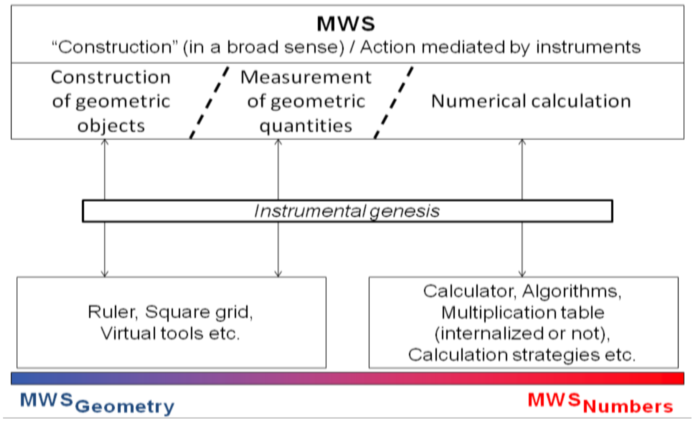


Figure 3: The instrumental axis in geometry and arithmetic

The Tall-Vinner's theory

A formal concept definition is a definition generally accepted by the mathematical community and is part of a formal mathematical theory (Tall, 1980; Tall & Vinner, 1981). On the other hand, a concept image is formed over the years and includes all the mental images, processes and properties that are associated in the individual's mind with a concept. According to Harel, Selden and Selden (2006), "one of the ways instruction attempts to enrich students' concept images is by helping them acquire the ability to visualize mathematical concepts" (p. 149). Finally, a personal concept definition is given by an individual, is part of her concept image and constitutes a partial description of her concept image (Tall, 1980) or a personal reconstruction of the formal concept definition (Tall & Vinner, 1981).

Area and perimeter concepts and students' difficulties

The Greek word for area (εμβαδόν) means the extent of a surface and the numerical result of a surface's measurement, while the Greek word for perimeter (περίμετρος) means the contour of a figure and the length of the contour (Babiniotis, 2005). However, both words derive from earlier forms of the Greek language and are not used in children's daily speech. Thus, children usually learn them through school mathematics.

Conversely, in French, English and Spanish, the words for "εμβαδόν" (aire, area, área) are polysemous and are used in daily speech. According to Balacheff (1988), this plays a key role in French children's construction of these concepts. More specifically, he noted that several students interchangeably used the words area and surface, and the words perimeter and contour [2]. To explain this, he referred to dictionaries' definitions, deducing that in daily speech there is a similar overlap. Douady and Perrin-Glorian (1989) described the same situation: "perimeter is the contour, area is the interior" (p. 395).

However, the words used by students could also be mediated by choices concerning the concepts' institutionalization. In Greece, classroom observations showed that primary school teachers provide definitions reduced to processes of construction, measurement and recognition, and confused with theorems (Ikonomou, Kaldrimidou, Sakonidis, & Tzekaki, 1999). For example, after a measuring process, two teachers gave the following definitions: "We call these 11 cm perimeter", and "The area of the rectangle is: base by height" (pp. 173-174).

Research has also emphasized the role of material and symbolic tools. According to Nunes, Light and Mason (1993), measuring tools and practices mediate reasoning; using a ruler and formulas is an indirect area measurement and hinders students' thinking, while area measurement with 2D units is a direct method and supports thinking. Also, Zacharos (2006) concluded that tools affect students' strategies and errors, and argued that premature emphasis on formulas is a cause of a didactical obstacle. Likewise, Battista (2007) argued that in many curricula formulas are taught too early, and students do not sufficiently practice spatial structuring. Thus, students do not maintain the connection between the two processes and have inadequate understanding.

Several studies also found that students often confuse area and perimeter, use formulas at the expense of other strategies, do not understand the result and invent erroneous formulas (Cavanagh, 2007; Douady & Perrin-Glorian, 1989; Zacharos, 2006). In addition, Cavanagh (2007) found that several Year 7 Australian students defined area as length by width, while others showed area-perimeter confusion. Moreover, only about half of them correctly calculated the area of a right triangle (pretest: 44%; posttest: 49%). Likewise, in Cyprus, 87% of sixth graders correctly calculated the area of a square, whereas only 39% found the area of a right triangle (Panaoura, 2007).

Finally, from a didactical point of view, the US Standards set the aim that students recognize area and perimeter as attributes of plane figures (Common Core State Standards Initiative, 2010); similarly, Douady and Perrin-Glorian (1989) have recommended teaching area as a quantity.

METHOD

This paper presents some findings from a larger research study, which included an instructional intervention and personal interviews with the students two weeks before and two weeks after the intervention. The research was conducted in Thessaloniki, Greece, and the participants were 22 sixth graders, aged 11-12. The intervention focused on the use of primary historical sources referring to isoperimetric figures and area-perimeter relationships. The findings we present here are mostly based on the recorded interviews and concern two issues that were not the focus of the intervention: concepts' definitions and calculation processes. Our focus is not on pre-post comparison but on the interpretation of the different kinds of answers. The pre- and post-test design is mostly related to the other goals of the whole research project.

In the interviews, the students were asked what the perimeter and then what the area of a plane figure is. Later on, each student was given a configuration (Fig. 4) adapted from Panaoura (2007). In her task the question concerned the length of the common side. In the present study the students were told that the figures were a square and a right triangle, and they were asked to calculate the perimeter of each figure and then the area of each figure. However, finding the length of the common side was still needed, albeit implicitly. The students could:

- Measure the common side, using the ruler as a tool (GI; Sem-Ins plane). In the present study this could lead to correct answers, since the figures' dimensions did not contradict textual information.
- Shift from 2D to the 1D line segment (dimensional deconstruction), consider that the segment was a side of the square and recall that a square has all sides equal (GII; Sem-Dis plane). In this task, visualization supports reasoning; it could help the students recall the square's property.
- Rely on a visual comparison, saying for example, "I can see that they are equal".

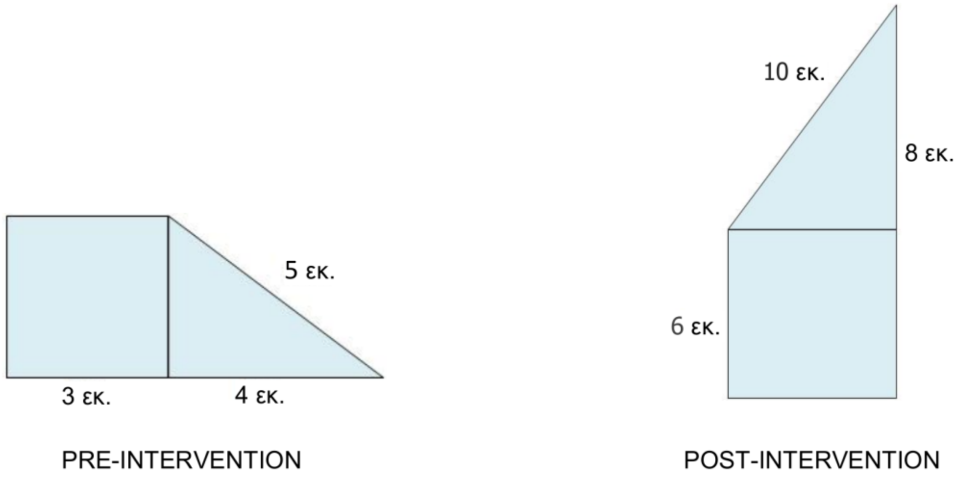


Figure 4: Calculation tasks: objects of the real space

Then, to calculate perimeter and area the students were expected to work within GI and enter $MWS_{Numbers}$; the verb "calculate" was an indicator for this shift (Montoya-Delgadillo & Vivier, 2014). However, the students were allowed to ask for any other tool used in teaching. So, a less expected strategy was to ask for a square grid and use it instead of area formulas. Finally, each student was given a two-way table to write the results; this could facilitate a metacognitive comparison of results.

The reference MWS regarding perimeter and area

The word perimeter is introduced in the Grade 2 textbook in brackets, modifying the word "around"; next, there is the rule: "To find the length around a figure (perimeter), we add the length of all its sides". In Grades 2-3 students also get acquainted with tiling and square-counting.

In Grade 4, students are taught that "the perimeter of a polygon is the total length of its sides". The word for area is introduced with the chapter title "I measure the surface, I find the area" and the definition "the result of the measurement of a figure's surface is called area of the figure". Moreover, students are taught that "to calculate the area of a rectangle, we multiply the length of two consecutive sides".

In Grade 5, students learn that "the perimeter of a geometric figure is the sum of the length of its sides" and that the area of a square is "side by side", the area of a rectangle is "length by width" and the area of a right triangle is "the product of the perpendicular sides / 2".

In Grade 6, students are taught that "the area of a plane surface is the number which expresses the result of its measurement" and learn area formulas for other figures.

To sum up, square-counting is introduced in Grade 2 and is used in some tasks even in Grade 5, but the grid is usually pre-drawn on the pages of the textbooks. Moreover, area could be seen as an attribute/quantity only indirectly through some tasks. Contrarily, it is defined explicitly as a number and as the result of measurement and is used with the words calculate/calculation, while the words measure/measurement are used only with the word surface.

Design of the intervention's suitable MWS

In this subsection, we provide some information on the suitable MWS (for more details, see: Anastasiadis & Nikolantonakis, 2016). The intervention, which was implemented prior to the teaching of the geometry unit, included (among others):

- Reading the first primary source (Pappus, *Collection* V.1-3, Hultsch ed.).
- Activation of prior knowledge: the students were briefly reminded of the definitions and formulas learnt in previous grades (that is, without the concise algebraic notation). An extra definition, through which area is seen more as an attribute, was also provided.
- History-based problem: the students were asked to examine if Pappus was right in stating that a honeycomb cell–that is, a regular hexagon–holds more honey than other isoperimetric figures that are suitable for tessellation.
- Solving process: all groups of students had to measure perimeters. As for area, one group of four students was allowed to use formulas; the others were asked to compare areas with other methods. One such method involved using a transparent grid (square grid printed on a transparency film); this was a new tool, since it is not provided by the reference MWS, but square-counting was not a new strategy.

RESULTS

Selected findings from the implementation of the suitable MWS

Several findings indicate the dominance of calculation with formulas in the students' past experiences. More specifically, the students of the square-counting group at first did not remember that in previous grades, to measure area, they counted squares. The dominance of calculation is also evident from several answers in the last worksheet: Paul wrote that something he learnt is "that I can find which figure has the biggest area without calculating it"; likewise, Bob reported that something which surprised him is "that there are so many different methods to measure which figure is bigger" (see also: Anastasiadis & Nikolantonakis, 2016).

Definitions

Most of the definitions could be classified into three categories. First, definitions indicating non-differentiation between perimeter and contour and/or between area and surface: perimeter is "the around" [3], outside or exterior and area is the inside/interior/surface. Some of these students showed non-differentiation in both questions. For example:

Mike: The line that surrounds a figure, in which there is the area... The around of a figure, the circumference that encloses the area. [perimeter; post-intervention]

It's the surface, in which there is the figure's content... that the perimeter encloses. [area; post-intervention]

Second, procedural definitions: perimeter is the total/sum of (the length of) the sides (the word length was mainly used after the intervention), and area is related to multiplication. For example:

Bob: Area, I can find it, but I don't remember [what it is]. (....) For example, this side is 5 [he writes the number next to each side of a quadrilateral he had drawn], we'll do 5×5 and we find it. [pre-intervention]

	PRE-INTERVENTION	POST-INTERVENTION
"The around" / exterior	8	15
Measurement of "the around"	0	1
Sum of the (length of) sides	3	5
Mixed definitions	1	0
Confusion	7	0
No definition	3	1
Total	22	22

Table 1: Perimeter definitions

Third, several students, mostly before the intervention, showed confusion or answered: "I don't remember". For example:

Kate: It is... once we find the perimeter of a figure, after the perimeter, we find the area too. It is... the result of a figure, hmm, the around, how much the figure is overall. [area; pre-intervention]

This answer also shows the effect of the didactic contract, since perimeter is usually asked first.

Furthermore, before the intervention, all students who gave multiplication-based definitions of area gave no definition in the question about perimeter or showed confusion. For example:

Joan: The total amount which results from the two sides, the length and the side. [perimeter]

The total amount; I have, let's say, the rectangle and I do side by length to find it. [area; she then added that her answer concerning perimeter was probably wrong and more suitable for area]

Finally, four students before the intervention showed confusion or gave no definition regarding both area and perimeter.

	PRE-INTERVENTION	POST-INTERVENTION
Inside / interior	6	4
Surface	1	5
Measurement of the surface	1	1
Multiplication based	4	5
Capacity in sq. cm/m/km	0	1
Mixed definitions	2	3
Confusion	5	1
No definition	3	2
Total	22	22

Table 2: Area definitions

Length of the common side

In this task, measurement (GI; Sem-Ins plane) was used very infrequently. Most students (pre-intervention: 18; post-intervention: 19; 17 of them both pre- and post-intervention) deduced the length of the common side from the given side of the square in both perimeter calculations. Some of them referred to the square and its property (GII; Sem-Dis plane), while others did not consider it necessary to argue.

Interestingly, two other students (Kate, Ann) deduced the length of the common side correctly when calculating the square's perimeter, but in the case of the triangle they drew a new conclusion on the basis of invalid properties of their theoretical frame of reference (a right triangle necessarily has two equal sides, and/or perpendicular sides necessarily have equal length).

Calculation processes

Before the intervention, six students did not calculate the perimeter of the triangle correctly and three of them also failed regarding the square's perimeter. Two of the three who failed in the case of the square used the area formula and had also shown confusion in defining perimeter. In addition, half of those who failed regarding the triangle's perimeter had given no definition or had shown confusion in defining perimeter. However, some students gave no definition or showed confusion in defining perimeter but succeeded in calculating the perimeter of the triangle.

Regarding area, 20 students failed in the case of the right triangle and seven of them also failed in the case of the square. Of these seven, six had given no definition or had shown confusion in defining area. However, two students gave no definition or showed confusion in defining area but succeeded in calculating the area of the square. Overall, two students failed in all calculations regarding both area and perimeter.

After the intervention, all students calculated the perimeter of the square correctly, but three failed regarding the right triangle's perimeter. Moreover, 16 students did not calculate the area of the right triangle correctly and four of the 16 also failed regarding the square's area. Of these four, two gave multiplication-based definitions of area, one gave no definition and one showed confusion in defining area. Regarding the six who calculated the right triangle's area correctly, four of them defined area as the figure's inside/interior/surface. Contrarily, all five who gave multiplication-based definitions of area used incorrect formulas to calculate the right triangle's area.

Overall, the students made several calculation errors before/after the intervention:

- Calculation of perimeter instead of area and vice versa.
- Area calculation via multiplication/division of perimeter by the number of sides.
- Regarding the right triangle's area [4]: side×side, leg×hypotenuse/2, leg×leg+hypotenuse, (side+side)/2, (side+side+side)/2, side×side×side/2.

Two case studies

Next, we present two case studies. Jim was a better student in maths, whereas Liz had obvious weaknesses. However, the two students were neither the best nor the worst in the class. During the intervention they had been placed in different groups and thus had used different methods (Liz: superposition-reconfiguration; Jim: square-counting using the transparent grid). Their answers represent two different kinds of work, related to the two MWSs (Geometry, Numbers).

Liz

Her pre-intervention definitions were:

Liz: The length of the sides, which we find when we multiply length by length. [perimeter]

The internal length of the sides, which we find when we multiply side by side... I think length by width? I'm confused now. [area]

Area-perimeter confusion is equally evident in the calculation of the square's perimeter:

Liz: I did side by side; I multiplied [3×3].

Likewise, in the case of the triangle's perimeter she multiplied the two given lengths (base×hypotenuse). Regarding area, she initially said:

Liz: I can't, I'm confused now.

Later on, using the ruler, she measured two sides of the square and answered:

Liz: Length by width. It makes 9.

Finally, she measured the legs of the right triangle and multiplied 3×4.

In $MWS_{Numbers}$, Liz used as a tool the internalized multiplication table (automatic number facts), while in $MWS_{Geometry}$ she was the only one who used the ruler (GI) when calculating areas; she even measured lengths that were given in an effort to find a way out, after realizing her confusion. Overall, she tried to adopt the surveyor's way of seeing, but the correct mathematical properties were not mobilized for the choice of the way of measurement. Contrarily, she mobilized incorrect properties-definitions and thus her work in the artifacts-measurement axis was invalid.

Post intervention, her definitions were:

Liz: The sum of the length of the sides of a figure. [perimeter]

It is when we find the internal surface of a figure; its surface. [area]

As regards perimeter calculations, she said:

Liz: Because this is a square and every side is equal, six [multiplied] by six, hmm, normally, it is six plus six plus six plus six; that is, four times six, it is 24 centimetres. And here [she points to the triangle], this is ten, this [she measures the common side] is six, [10+6] 16, [+8] it is 24 too, they are isoperimetric.

Concerning areas, she had some difficulty to remember what to do but eventually replied:

Liz: This should be six [multiplied] by six, [it is] 36. And here [concerning the triangle] I will multiply side by side; it will be divided by two.

However, she mentally multiplied the length of the three sides and then divided by two (10×8=80, 80×6=480, 480/2=240).

Therefore, Liz's theoretical frame of reference was not characterized by the pre-intervention confusion regarding definitions. Moreover, the definition of perimeter is relatively advanced and similar to that given in the textbook of the fifth grade. Likewise, she did not show confusion during perimeter calculations (with the slight exception of the phrase "six [multiplied] by six"). This is in line with her answer in the intervention's last worksheet: she wrote that one idea she changed was that "to find perimeter, I believed that I should do side×side", but "I discovered that we do side+side+side+side..."

As for the length of the common side, when she focused on the square, she worked in the reference-proof axis and gave an adequate proof (GII). Contrarily, when she focused on the triangle, she worked in the artifacts-measurement axis, using the ruler as a tool (GI). Thus, she did not treat the particular line segment as a common side with invariant properties.

However, her work concerning the triangle's area was incorrect again. Liz worked in the artifacts-calculation axis ($MWS_{Numbers}$), using as tools the internalized multiplication table and the internalized standard multiplication algorithm (mental exclusion of zero; 6×8=48; adding the zero, 480). Although she wrote the results in the two-way table, this was not enough for her to realize the mistake. In fact, she remained in the $MWS_{Numbers}$ (MWS_{Dr}) and did not return to the $MWS_{Geometry}$

(MWS_{Ds}) to mentally compare the two surfaces (space-visualization axis), so as to realize that so big a numerical difference (36 vs. 240) was inconsistent with the difference between the surfaces.

Jim

Both pre- and post-intervention:

- He gave the same definitions ("the around"; the surface of the figure), which are simple but show no area-perimeter confusion.
- He correctly calculated the perimeter of the figures, providing complete verbal proofs regarding the common side (GII), for example:

Jim: Because a square has equal sides and the one side is three centimetres, we understand that the other three will also be three centimetres. [pre-intervention]

As for areas, before the intervention, he calculated the square's area correctly but regarding the triangle he did: (4+5)/2=4.5. Post intervention, having calculated the square's area correctly, he said about the triangle:

Jim: Eight [multiplied] by ten, divided by... two? No! Mistake... Six [multiplied] by eight equals 48, divided by ten, 4.8? Too small.

Eventually, he asked for the transparent grid and after a while he said:

Jim: After all, [it's] not. It's 24.

In fact, he first counted 19 complete grid squares within the triangle, marking them with a marker and realizing that the result should be >19. Then, he mentally doubled the triangle, thus re-inventing the formula:

Jim: Because I first made, I put in my mind, to say it this way, one more triangle like this, to see how much the rectangle will be. Next, I divided by two and I found 24.

Therefore, he first chose to reconstruct the calculation tool (the triangle's formula) but metacognitively evaluating the results he found them inconsistent with his estimation. Thus, he selected the transparent grid using it as a tool for square counting, then for mentally constructing a rectangle and, through this, for re-inventing the formula. These processes (tool selection, function selection, tool reconstruction) are forms of instrumental genesis directed from measurement/calculation to the tools (instrumentalisation). The difference between him and Liz is, first, that he returned to the $MWS_{Geometry}$ (MWS_{Ds}) to work in the space-visualization axis and check for example that 4.8 is too small for the triangle's surface in comparison to the square's surface. Secondly, he used different tools and practices and compared the results. Thus, his work as a surveyor was finally valid (Duval, 2005). The same two differences are also evident between Jim's work pre- and post-intervention.

DISCUSSION

We next discuss the findings concerning, first, the definitions and, then, the measurement-calculation processes. The relation between definitions and processes is discussed in both subsections.

Definitions

Overall, in both tests the students gave simple definitions, using words from daily speech, even though after the intervention the words surface and length were used more often. Cavanagh (2007) also reported simple definitions concerning area.

In the present research, several students provided definitions that show non-differentiation between perimeter and contour and/or between area and surface. However, Balacheff's (1988) explanation would be inappropriate, since the Greek words for area and perimeter are not used in children's daily speech and the Greek word for area does not have so many meanings as the French word.

Interpretation using the Tall-Vinner's theory

The students' personal concept definitions could be considered as personal reconstructions of the formal concept definitions. For example, instead of the formal definition "the result of the measurement of a figure's surface" (Grade 4), some simply said: "the surface" or "the measurement of the surface". Likewise, the definitions "the around" or "the exterior" remind us of the way the concept of perimeter is introduced in Grade B.

At the same time, these definitions seem to be partial descriptions of the students' concept images: the definitions showing perimeter-contour and/or area-surface non-differentiation could be related to mental images of the students, while the definitions referring to arithmetical operations reflect the students' experiences from measurement-through-calculation processes.

Interpretation using the MWS model

Reframing the above interpretation, we consider formal concept definitions as a part of the reference MWS. On the other hand, concept images could be seen as conceptions related to all three axes of the personal MWS; these conceptions include properties and definitions and are related to processes (instrumental axis) and to images derived from the space-visualization axis. The role of visualization has also been highlighted by Harel et al. (2006).

Moreover, we suggest that students form their own, loose frame of reference, in which some properties are a simplified form of the institutionalized properties, some are derived from others through generalization and some emerge through experimentation. These properties may be valid or invalid; Kate's and Ann's deductions regarding the length of the common side are indicative of such properties.

Students' definitions are part of this frame of reference of their personal MWS and, to some degree, they are personal reconstructions of the corresponding definition that is part of the reference MWS (formal concept definition). However, this reconstruction is mediated by the didactical transformation of the formal definition during the designing and implementation of the suitable MWS.

At the same time, the definitions referring to arithmetical operations are related to repeated prior experiences of experimental work in the artifacts-measurement axis and, through it, in the $\text{MWS}_{\text{Numbers}}$. On the other hand, the definitions showing perimeter-contour and/or area-surface non-differentiation are related to images (space-visualization axis) and seem to express the students' need for connecting abstract concepts to reality. Thus, with the mediation of visualization, area and perimeter are related to objects of the real space and in particular to the contrast of forms (black line; white surface enclosed by the line).

Therefore, students' definitions are related to particular processes and needs of the students, while in some languages (e.g. French) the other meanings of the words seem to be an extra factor. In any case, the role of the suitable MWS is significant, since it includes the concepts' didactical transformation and simplification, as well as the choice of images and of experimental-work experiences that will be provided to the students. In Greek upper elementary education, experimental work involving area and perimeter is rather directed towards the $\text{MWS}_{\text{Numbers}}$, as indicated by the students' responses during the implementation of the suitable MWS. The concepts' simplification and connection to numbers and operations has also been described by Ikonomou et al. (1999).

Measurement-calculation processes

Regarding calculations, there was improvement in all four of them, but many students still failed regarding the right triangle's area. In addition, area calculations proved more difficult than perimeter calculations, and calculations concerning the right triangle proved more difficult than those concerning the square. Panaoura (2007) and Cavanagh (2007) also reported greater difficulty concerning the right triangle's area. Moreover, in Cavanagh's research, improvement after teaching was too small, even though the posttest was performed immediately after teaching. Incorrect area formulas have also been reported by other researchers (Douady & Perrin-Glorian, 1989; Zacharos, 2006).

In many cases, but not always, those who had given no definition or had shown confusion (especially in defining area), also made mistakes in the corresponding calculation. On the other hand, there were also students who gave acceptable definitions but made calculation errors, mainly in the case of the triangle's area. Thus, successful work in an axis of the MWS does not ensure success in the other axes.

The features of the situation also played a role. First, some errors were due to a wrong conclusion about the length of the common side, on the basis of invalid properties. Second, most students who applied the formula "leg×hypotenuse/2" used the two given lengths, so the didactical contract may have played a role. However, the same students acted contrary to the contract while calculating the triangle's perimeter, since they had found and added the length of the other leg too.

The students' answers also show that they had inadequate understanding of formulas: they had forgotten the meaning of formulas and the way these were produced. According to Battista (2007), this is related to the fact that students do not sufficiently practice spatial structuring with grids, and so they do not maintain the connection between this process and calculation with formulas. In other words, they do not maintain the connection between two different tools of the MWS as well as between the corresponding actions that are mediated by these tools. Thus, numerical calculation with formulas is not meaningful, since it does not function as a symbol of the geometric measurement processes.

Furthermore, it seems that repeated experiences from experimental work using formulas ($MWS_{Numbers}$) lead to a conception that area is something calculated through arithmetic operations (formulas). Formulas, however, function as cultural and symbolic tools, and their structure affects the construction of the concepts (Nunes et al., 1993; Zacharos, 2006). Thus, students construct area on the basis of the concept of side; an example is the definition "the internal length of the sides" (Liz). This conception is also involved in the construction of incorrect formulas: when a formula is unknown/forgotten, students try to (re)construct the tool, directed by the general idea that area is calculated through arithmetic operations. On the other hand, the case of Jim shows that the square grid, as a tool, facilitates remaining or returning to the $MWS_{Geometry}$, connecting numbers to surfaces—thus re-contextualising numbers in the context of geometry—and developing a better understanding of area formulas. The importance of the return to the MWS_{Ds} has also been highlighted by Montoya-Delgadillo and Vivier (2014).

Finally, the above findings and interpretations show the complexity of mathematic work in the case of area/perimeter measurement: $MWS_{Geometry\text{-}GI}$ and $MWS_{Numbers}$ form a complex of workspaces. Our aim was not to thoroughly specify all the points through which each student shifts from the one MWS to the other. Besides, we cannot know what each student is thinking at every moment. However, if the role of the semiotic axis to this shift is obvious due to the simultaneous existence of figures and numbers, what is made evident here is the role of the instrumental axis. That is, the availability and the choice of the one or the other tool and the process indicated via the formulation of a given task (e.g. the use of the verb "measure" or, contrarily, "calculate" as in the task we presented) direct mathematic work towards the one or the other MWS and facilitate or impede the shift from the one to the other.

NOTES

1. In architecture, a complex is a group of interconnected rooms/buildings/facilities that are on the same site and share a common function.

2. We do not assign to this non-differentiation the negative role assigned by Balacheff (1988).

3. In Greek: "το γύρω-γύρω" (colloquial). The adverb "γύρω" (=around), when doubled for emphasis and combined with the definite article, is used as a noun.

4. This is a concise description of the students' work; the term "hypotenuse" had not been taught.

REFERENCES

Anastasiadis, M., & Nikolantonakis, K. (2016). Primary sources and history-based problems about isoperimetry: a use of mathematics history in Grade Six. *MENON: Journal of Educational Research, 2nd Thematic Issue,* 31-50.

Babiniotis, G. (2005). *Dictionary of the modern Greek language* (2nd ed., in Greek). Athens: Lexicology Centre.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège* (Thèse d'état). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-909). Charlotte, NC: Information Age.

Cavanagh, M. (2007). Year 7 students' understanding of area measurement. In K. Milton, H. Reeves, & T. Spencer (Eds.), *Mathematics: Essential for learning, essential for life. Proceedings of the 21st biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers* (pp. 136-143). Adelaide: AAMT.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Douady, R., & Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 387-424.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10,* 5-53.

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced mathematical thinking. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 147-172). Rotterdam: Sense.

Ikonomou, A., Kaldrimidou, M., Sakonidis, C., & Tzekaki, M. (1999). Interaction in the mathematics classroom: some epistemological aspects. In I. Schwank (Ed.), *Proceedings of the 1st Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 168-181). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kuzniak, A. (2013). Teaching and learning geometry and beyond… In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 33-49). Ankara: Middle East Technical University.

Kuzniak, A. (2015). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-15). Cham: Springer.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48*(6), 721-737.

Kuzniak, A., & Vivier, L. (2010). A French look on the Greek geometrical working space at secondary school level. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 686-695). Lyon: INRP.

Montoya-Delgadillo, E., & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathematique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19*, 73-101.

Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993). Tools for thought: the measurement of length and area. *Learning and Instruction*, *3*, 39-54.

Panaoura, G. (2007). *The geometrical knowledge and abilities of the students at the end of primary education* (Doctoral Dissertation, in Greek). University of Cyprus.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Tall, D. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176). Berkeley, CA: PME.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tanguay, D., Kuzniak, A., & Gagatsis, A. (2015). The mathematical work and Mathematical Working Spaces. In I. M. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Working Space: 4th ETM Symposium* (pp. 27-32). Madrid: Instituto de Matemática Interdisciplinar.

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 224-239.

EXPLORING KINDERGARTNERS' FIGURAL GENESIS IN GEOMETRY

Androulla Petridou, Iliada Elia and Athanasios Gagatsis

Department of Education, University of Cyprus

petridou.androulla@ucy.ac.cy, iliadaelia@gmail.com, gagatsis@ucy.ac.cy

The present research assesses the figural genesis disclosed by 441 kindergartners, aged 4 to 6, in geometrical activities. To identify the components of this genesis, a test was developed. The analysis of the data showed that there is a four-factor structure of kindergartners' performance. Children exhibited different competence levels in the four key components of figural genesis. These findings are discussed in light of Kuzniak's theoretical framework of Geometrical Working Space focusing on children's personal Mathematical Working Space in the domain of geometry.

***Keywords**: Geometrical Figure Apprehension, Perceptual Thinking, Dimensional Deconstruction, Mathematical Working Space, Figural Genesis*

INTRODUCTION

Researchers' concern in early childhood mathematics education has significantly grown in the last ten years. Sarama and Clements (2009) indicate that the mathematical knowledge young children bring to school impacts on their mathematical learning for years thereafter. Usiskin (1997) stated that geometry is the domain that links mathematics with the real world and should start in the earliest years of education. The importance of promoting young children's geometrical understanding has been stressed by the National Association for the Education of Young Children, National Council of Teachers of Mathematics (2002).

THEORETICAL BACKGROUND

Previous work on geometry learning and teaching (Duval, 2014; Sarama & Clements, 2009) has been used in our study to address the issue of figural genesis of preschool children in geometry, based on the Mathematical Working Space model proposed by Kuzniak (Kuzniak & Rauscher, 2011).

The Domain of Geometry

It is generally accepted that geometry is a complex set of theoretical objects and relationships. To gain access to it, one must manage different semiotic systems, including graphical and linguistic (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015). The graphical semiotic system, that is, figures and drawings, requires perception to allow the visualization of spatial relationships and properties. As Laborde (2004) stated, drawings are parts of the perceptible surrounding environment. Hence, geometry can be considered as a model of space and it is connected to spatial knowledge. Bryant (2009) suggested that "[g]eometry lessons at school deal with the use of mathematics and logic to analyze spatial relations and the properties of shapes" (p. 4). According to the National Research Council (2006), thinking spatially involves three things, which have strong links to geometry: space, representation and reasoning.

Geometry instruction attempts to give children ways and tools to solve spatial problems, thus the construction of geometrical knowledge is based on the relationship between spatial and geometrical knowledge (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015). This is empirically supported by the recent study of Bartolini-Bussi and Baccaglini-Frank (2015), which examined 6 to 7 years old children's construction of the definition of rectangle with the use of a small programmable robot called "bee-bot", which provides a dynamic setting to study mathematical objects. They found that this robot promoted the usage of children's spatial skills and construction of 2-D figures (rectangles and squares) by the use of 1-D and 0-D components (e.g. line, vertices).

Geometrical Figure Apprehension

Children are exposed to geometrical figures from the earliest years of their life. A basic geometric domain is the understanding of geometrical figures which is a fundamental construct in cognitive development (Sarama & Clements, 2009). Duval (1998) distinguishes four types of apprehension of a geometrical figure: perceptual, sequential, discursive and operative. In early childhood it is more feasible to teach mainly two basic types of geometrical figure apprehension: the perceptual apprehension (e.g. the recognition and naming of geometrical figures), and the operative apprehension with emphasis on 'reconfiguration' (e.g. investigating and predicting the results of putting together and taking apart geometrical components in figures). Particularly, operative apprehension is the way of getting an insight to a problem solution when looking at a figure and it depends on the various ways of modifying a given figure: the mereologic, the optic and the placing way. The mereologic way refers to the division of the whole given figure into parts of various shapes and the combination of them into another figure or sub-figures (reconfiguration), the optic way is when one makes the figure larger or narrower, or slant, while the placing way refers to its position or orientation variation.

According to Sarama and Clements (2009), an important aspect of perceptual thinking is the ability of finding figures in increasingly complex geometric figures, including embedded figures. According to Gestalt theory this ability includes contour and area structures of figures. Each structure (contour and area) is divided into two subcategories, with different degree of complexity: primary and secondary structure (see figure 1). In particular, from the one hand, the first subcategory of the area structures refers to the identification of a geometric shaped composition which its surface is not penetrated by other line-segments (primary area structure, PAS). The second subcategory of the area structures is related with the identification of the shape which its surface is penetrated by straight parts of another structure of the composition (secondary area structure, SAS). From the other hand, the first subcategory of the contour structure refers to primary contour structure (PCS) shapes which their line segments were initially used in the construction of the configuration, or, in other words superposed shapes (Duval, 2014b). Precisely, those PCS shapes are usually symmetrical or as regular as possible. It is important to state that PCS shapes ought to be the fewest possible in a configuration. In addition, all the line segments of the configuration are involved in construction of the PCS and those segments may be crossed by segments of others shapes or not. The second subcategory brings up secondary contour structured (SCS) shapes which are "hidden" (not one of the shapes the construction of the configuration is based on) or, in other words, juxtaposed shapes (Duval, 2014b). SCS shapes include segments that belong to primary structures (basic shapes).

There is a limitation of researches on the topic of recognition of shape in geometrical configurations, but the study of Clements et al. (1999) shows that children at the age of five years old are more likely (than at the age of four) to identify embedded circles or squares in other structures. Sarama and Clements (2009) suggested that there is a need for more research on this area.

Precisely, in a more recent analysis of embedded-figures problems, Duval (2014b) suggests that in a configuration, several different closed outlines can be considered, so that shapes can be recognized either as superposed shapes or as juxtaposed shapes (see figure 1). But both are visually exclusive. Only one stands out at a glance and it blocks the other. According to Duval (2014b), students are inclined to perceptually recognize obvious shapes that are superposed to one another, rather than juxtaposed shapes in geometry problems, while moving beyond the perceptual recognition of shapes and using reconfiguration of possible juxtaposed shapes is a key component of geometrical problem solving.

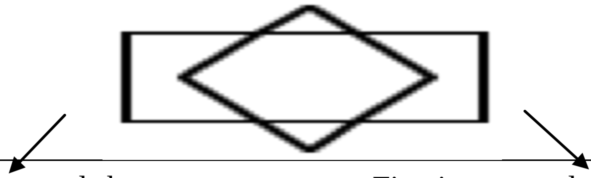
CONFIGURATION		
DUVAL’S THEORY SHAPES	Two superposed shapes: Two regular polygons (a rhombus superimposed on a rectangular one)	Five juxtaposed shapes: Five polygonal shapes (2 triangles, 2 pentagons and 1 hexagon)
GESTALT THEORY SHAPES	Two primary contour structures (PCS) and secondary area structures (SAS)	Five secondary contour structures (SCS) and primary area structures (PAS)

Figure 1: Two visually exclusive ways of recognizing shapes in a configuration (Duval, 2014b) analyzed in two alternative ways, based on Duval’s theory and on Gestalt theory

Perceptual Thinking and Dimensional Deconstruction

Children’s ability in “reading” diagrams (figures) is not limited to perceptual apprehension, but requires the creation of a correlation between perceptual and abstract thinking (Yakimanskaya, 1970). Duval (2014a) proposes the idea that to achieve the cognitive analysis of a visual geometric representation, one must bear in mind the dimensions of the represented object (e.g. 0-D, 1-D, 2-D, 3-D) and the dimensions of their physical support (e.g. for 2-D, it can be the screen of a computer or a sheet of paper). This allows discriminating the geometrical representation according to the actions and cognitive operations that can occur in relation to this visual representation. So, two forms of visualization occur: the epistemological form and the cognitive form. On the one hand, the cognitive form refers to the perception and the way the mental image is immediately anticipated as a figural unit (visually or by movements of the hands). On the other hand, the epistemological form supposes that figural units are visually recognised with tools, as constructions in configurations having specific geometrical properties, obtaining the mathematical identification of a figural unit.

The question Duval (2013) states is crucial: “How can all students learn to see the figures mathematically and not just perceptually in order to be able to solve problems by themselves?” Visualisation, he points out, must go against perception and focus on the recognition of all possible figural units in a given figure. Figural units represent “*all the elements that can be visually discriminated in any constructed figure*” (Duval 2014b, p. 155). There are four kinds of figural units according to the number of dimensions (1-D/2-D i.e. a straight line; 2-D/2-D i.e. a closed surface; 3-D/2-D i.e. a configuration of lines; 0-D/2-D i.e. a point or a vertex). The way to achieve this is through dimensional deconstruction of the forms perceptually recognized. According to Duval (2005), the dimensional deconstruction of geometrical shapes is the central process of geometrical visualization, which enables the perceptual recognition of a figure in a configuration of figural units of lower dimensions. Dimensional deconstruction of shapes is the change of dimension operated on any shape recognized or configuration given (Duval, 2005). This way of perceptually grasping a figure is beyond, and sometimes against, simple perception. Having in mind these cognitive operations of visualization, geometrical figures and their properties can be distinguished. Even more, these operations are fundamental for the apprehension of geometrical properties: the discrimination of figural units 1-D/2-D and 0-D/2-D in shapes 2-D/2-D requires breaking all the close outlines of the shapes. In fact, this dimensional deconstruction can be described by three operations. The first one is to extend all the sides to make the underlying straight line network appear, while the second one is to make new straight lines appear between the intersection points. Thirdly, from this wholly developed underlying network, one can recognize a lot of quite different basic figures or configurations and see how they can be transformed one into another (Duval, 2013).

The use of language in recognition of figures is essential. Several authors, such as Figueiras and Arcavi (2014), support the idea that the bond between language and perceptive experiences is very tight. Duval (2014a) suggests that, due to the process of conceptualization in geometry, mathematical language cannot be disconnected from the dimensional deconstruction of a figure and the perceptual recognition of it. The same researcher claims that the definitions of objects, such as triangles, entail the properties of the specific shape. These properties point out a relation between two units, a 0-D unit or a 1-D/2-D unit, that is, between figural units of smaller dimension than the 2-D shape that is being defined (Duval, 2005; 2013). For example, a square that is considered as a set of edges is a 2-D to 1-D deconstruction, and considering it as a set of vertices is a 2-D to 0-D deconstruction (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015).

Soury-Lavergne and Maschietto (2015) use dimensional deconstruction tasks in their study, which included a class-based intervention with 7-year-old pupils. They investigated a spatial problem involving the use of a grid and Cabri Elem e-book, in three different spaces: physical, graphical and geometrical. Results showed that children achieved 2-D to 1-D dimensional deconstructions when they used quadrilaterals and lines to construct a grid. Unfortunately, young children often have very little formal exposure to 1-D object, thus it is more difficult for them to obtain dimensional deconstruction in their understanding and reasoning about properties of a geometrical figure (Kaur, 2015). In their study, Hallowell, Okamoto, Romo and La Joy (2015) examined children's composition and decomposition of geometrical figures aimed at matching shapes in a configuration. The results showed that children had difficulties in the translation from 2-D lines in diagrams to 3-D visual solids, especially with projected curvature involved.

Given the above considerations, children need to use and develop the dimensional deconstruction process and reflect on it, as the simple perceptual approach to shapes is not sufficient for the learning of geometry at any level of education. Teachers must create geometrical situations and learning environments that involve dimensional deconstruction, so as to enable pupils to acquire progressively the process of geometrical reasoning (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015). However, too often, instruction in geometry during the early years is of poor quality, as it over-emphasizes what children already know, that is, the perceptual apprehension of figures, including the identification and naming of figures (Sarama & Clements, 2009), something Duval (2005, p. 5) qualifies as the "botanist" approach to learning geometrical figures. This does not contribute efficiently to geometry development and can make geometrical activity dispiriting for children of all ages.

Mathematical Working Space (MWS)

Kuzniak's theoretical framework called Mathematical Working Space (MWS) (Kuzniak & Rauscher, 2011) refers to an environment where mathematical problems can be individually solved. This environment is organised to combine two planes: epistemological and cognitive. More specifically, the epistemological plane concerns the mathematical content and the cognitive plane deals with the way of thinking in a problem solving process. This MWS includes also three types of genesis: semiotic, instrumental and discursive.

In geometry, properties and objects are "translated" into signs and they are formally manipulated. Geometric Working Space (GWS, see figure 2) is defined as a place organized to enable the work of individuals solving geometric problems (Kuzniak, 2015). According to that meaning, the epistemological plane refers to three interrelated parameters. The parameters are the real and local space (materials and objects in real life), the set of artefacts (drawing devices, including software) and the theoretical frame of reference (definitions and properties). The use of signs or representamen has an important role in the epistemological plane. The cognitive plane brings up three processes. Specifically, the processes used in an activity in geometry are the visualization process (representation of space), the construction process (instrumental/geometrical configurations) and the discursive process (argumentation and proofs). This paper focuses on the visualization process.

Perceptual Apprehension of geometrical figures

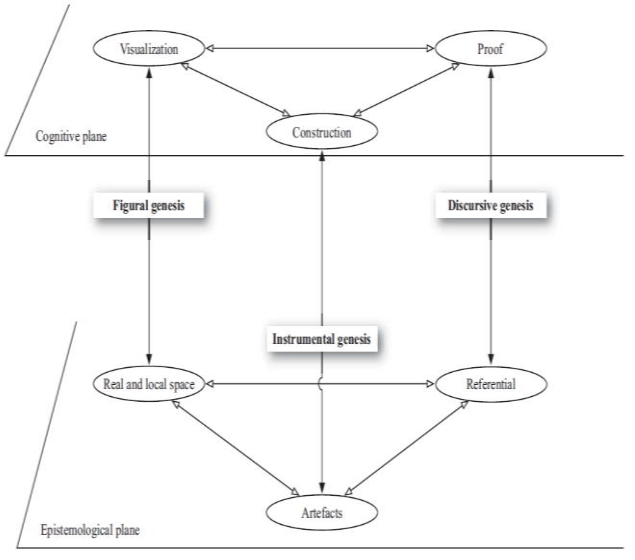


Figure 2: The Space of Geometric Working space and its geneses (Kuzniak & Richard, 2014)

Between the cognitive and the epistemological plane, three geneses are produced so that mathematical thinking works operatively. Genesis refers to development and transformation of interactions. Firstly, the figural genesis (or semiotic genesis) offers meaning on the tangible objects of the representation in a way that they can be operational mathematical objects. Secondly, the instrumental genesis transforms artefacts into operational active tools within the construction process. Thirdly, the discursive genesis of proof gives meaning to properties and theories that are needed in mathematical reasoning.

As Kuzniak (2015) proposed it, when an individual is trying to solve a problem in geometry, he/she goes back and forth between the paradigms and uses figures in various ways, sometimes as a source of knowledge and, at least for a while, as a source of validation of some properties. It must be said that in geometry, the image is a form in itself so it can be a sign and a model of representation at the same time (Coutat, Laborde, & Richard, 2013).

There are three GWS levels to describe geometric work: reference, suitable, and personal GWS (Kuzniak, 2015) observed in a schooling environment in geometry. In our study, we will focus on the personal GWS. When a problem is posed to an actual individual (pupil, student or teacher), the problem is handled within his/her personal GWS, which generally depends on the cognitive abilities (i.e. knowledge) of the individual (Xistouri, Pitta-Pantazi, & Gagatsis, 2014). This model of MWS, conceived as a circulation space between poles in the epistemological and cognitive planes, must be a tool of analysis, a tool for interpretation and description of tasks (Tanguay, Kuzniak, & Gagatsis, 2015). Specifically, in the present study, our focus is on the semiotic genesis in young children's personal MWS and in particular, on figural genesis and the process of visualization related to the representation of geometrical figures.

THE PRESENT STUDY

The present study has as its goal to contribute to gaining more insight into pre-schoolers' figural genesis. The focus is on kindergartners' ability to name and recognize 2-D shapes, including for example, triangles, squares and rectangles, in a collection of distinct shapes or in a geometrical configuration of shapes of a primary or a secondary structure.

Within the described framework and with the objectives outlined above, the following research questions guided our study:

- What are the components of kindergartners' figural genesis in geometry?
- What is kindergartners' performance regarding the items corresponding to each component of figural genesis?

METHODS

Participants

For the present study, a convenience sample was used. The participants of the study were 441 kindergartens (224 girls and 217 boys) from 15 public schools in Cyprus, aged 4 to 6 years old. The children had an average age of 5.6 years. Regarding the location of schools, both urban and rural schools in Cyprus were recruited.

Items and Procedure of Data Collection

To assess kindergartners' figural genesis with a focus on perceptual apprehension of geometrical figures, a series of paper-and-pencil items were developed based on Duval's theory (1995; 1999) about the apprehension of geometrical figures, and on Clements and Sarama (2009) research studies on early geometry learning.

The items are distinguished into three categories (see figure 3 for examples of items). The first category involves the recognition of a shape (rectangle, square and triangle) in a collection of separated shapes. The children must recognize the shape by its name, as the shape which were asked to find in the collection of shapes is not given to them as an image example (visually) in the instructions (e.g. see figure 3a, with the instruction "Find rectangles" without any visual example of it). Those items derived from other researches. Specifically, the item of rectangles (see figure 3a) and triangles have their origin from Clements and Battista (1991) research. In addition, squares are derived from Razel and Eylon (1991) research. In the second category, a geometrical configuration is given, which includes juxtaposed shapes, in other words, shapes of a PAS, that is, shapes whose area is enclosed by their own line segments and not crossed by other line segments (Sarama & Clements, 2009). Children are asked to identify specific shapes in the configuration by either recognizing (selecting) these shapes (see figure 3b) or naming them.

In the third category of items a configuration with superposed shapes are included. For this latter category, two sub-categories of items were developed. In the first sub-category of items children need to recognize a "hidden" shape, that is, a shape of a SCS which is not one of the shapes that the construction of the configuration is based on (Gestalt theory in Sarama & Clements, 2009) or, in other words, it is a juxtaposed shape (Duval, 2014b). For these items, the shape that the children are asked to recognize is represented visually in the tasks instructions in a separate space from the main configuration. For example, the geometrical configuration shown in figure 3c is constructed from a rectangle and a rhombus, while children are looking for a hexagon in the configuration which is illustrated also in the instructions. These items require mereologic recognition of the juxtaposed shapes in configurations of superposed shapes when the figure is given. The second sub-category refers to items in which the children are asked to identify a PCS, or in other words, a superposed shape which was used in the construction of the configuration. For example, the geometrical configuration shown in figure 3d is comprised by a rectangle and a square. Children were asked to look for a square in the configuration whose area is crossed by other line segments. For some items in this category, the shape that the children are asked to recognize is represented visually in the tasks' instructions. For some other items, it is given verbally.

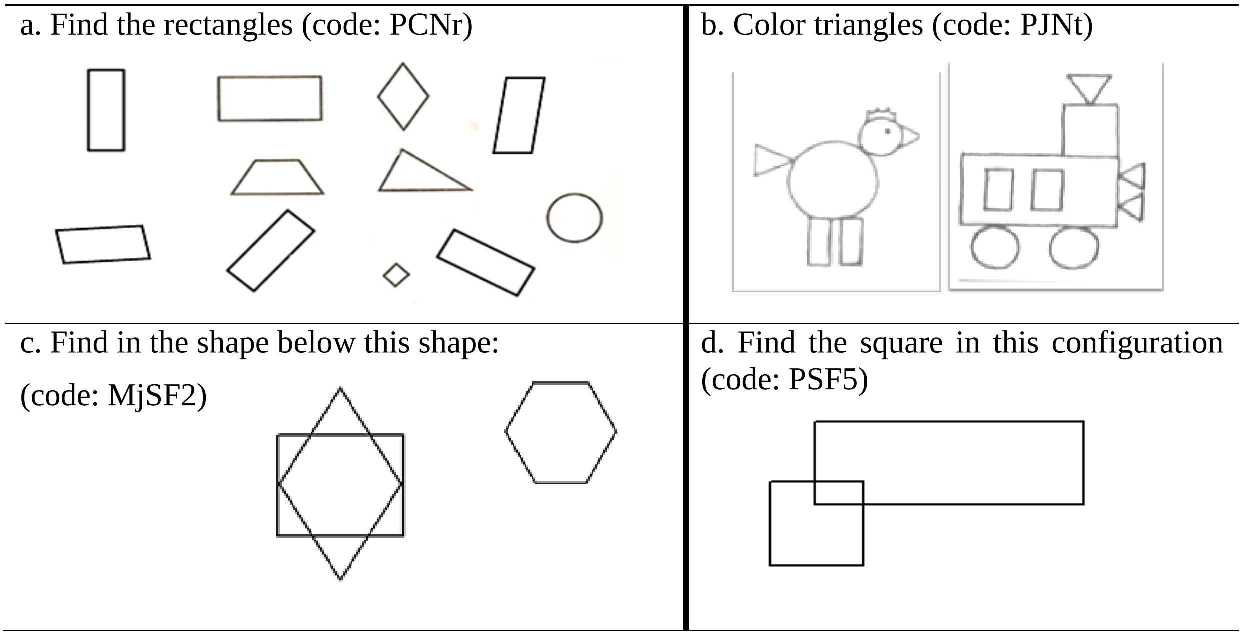


Figure 3: Examples of items

Based on the above description and a priori analysis of the items of the test, in terms of MWS, our assumption is that, on the one hand, the two former categories of items (including collection of separated figures and of juxtaposed figures) and the second sub-category in the third category of items (including superposed figures) activate mainly the semiotic genesis in children's work using to a great extent the perceptual apprehension of geometrical figures by which the mental image is created immediately as a figural unit (see figures 3a, b and d). On the other hand, in the first sub-category of the third category of items, which require the identification of "hidden" shapes (SCS), children have to use visualization processes (see figure 3c) within the semiotic genesis including mereologic apprehension. Children need to go beyond perception and use implicitly an early form of dimensional deconstruction. Specifically, for the identification of these shapes (such as the hexagon in item of figure 3c) children have to go beyond the PCS (e.g. the rectangle and the rhombus) and create new SCS (hidden shapes, e.g. hexagon), which includes segments that belong to the primary structures. So children (implicitly) identify line segments (1D figural units) that can belong to different structures (2D figural units) enabling the construction of new figures (2D figural units) (Gestalt theory, from Sarama & Clements, 2009). Our conjecture is that this is an implicit use of early dimensional deconstruction and also the children, who succeed in these items, belong at initial stage of dimensional deconstruction ability.

The above a priori analysis is reflected in the codification that was used to name the items and the corresponding variables, which is presented in Table 1.

Code	**Code Meaning**
P	Perceptual item
J	Juxtaposition – configuration with juxtaposed shapes
S	Superposition– configuration with superposed shapes
C	Collection of separated figures
N	Recognition by the name of the figure
F	Recognition of the figure (visual representation)

S	Square
R	Rectangle
T	Triangle
M	Mereologic
J	Juxtaposed shapes in a configuration of superposed figures

Table 1: Codification of items

Regarding the data collecting procedure, the administration of the test was conducted by trained researchers at the beginning of the school year in groups of four children, who were gathered in a quiet place in school. After a test item was read aloud to the children, the children had to answer by putting a circle or colouring the figure or figures that represent the correct answer.

Correct answers were coded as 1, and incorrect ones as 0. All the answers that the children provide using their colours in the area or engrave the contour of the shape requested are considered to be correct answers. In detail, to code a correct answer for an item of the first category (see figure 3a) children should colour the area or engrave the contour of all rectangles in the collection of separated shapes. If a child identifies some of the rectangles shapes (and not all of them) or his/her answer includes non-examples (e.g. triangle), his/her answer was considered as wrong. In the second category items (see figure 3b), if a child doesn't identify all the triangle of the configuration or mark as triangles any other non-examples of the given shape (e.g. circles) his/her answer was coded as wrong. In the configuration of the third category of items, the correct answers for the items of the first sub-category were considered the answers in which the children colour the entire area of the shape or engrave the contour as unity. Precisely, children in the configuration of the item of the figure 3c ought to colour only the area of hexagon or to engrave the contour of it. If any other shape or contour is marked the answer was coded as wrong. In the second sub-category items the correct answer was to mark the entire target shape of the configuration e.g. the square in the configuration given (see figure 3d). Children ought to colour the area of the square (including the overlap area of the rectangle given) or engrave the all contour of the square. If the area or the contour of the square was partly shaded the answer was coded as wrong.

Data Analysis Method

The SPSS software package was used to analyse the data. Specifically, exploratory factor analysis (see Fabrigar & Wegener, 2011) was conducted to identify the components of children's figural genesis. Also t-tests paired samples were carried out to explore kindergartners' possible performance differences between these components.

RESULTS

The findings of the study are organized in two sections, corresponding to the two research questions. In the first section, we examine which factors reflecting different types of early figural genesis are formed by the different items. In the second section we investigate kindergartners' performance in the components of early figural genesis in geometry.

Components of figural genesis in early geometry

Applying the exploratory factor analysis on the data resulted in a four-factor solution (see Table 2). This solution explains the 45% of the total variance of the children's responses. Correlations table has shown a lot of correlations between the tasks bigger than .30 (but not bigger than .90). The KMO measure was .882 and Bartlett's test was significant $p<.0001$ (x^2=3063.702; df=300).

Item	Factors[a]				h^2
	1	2	3	4	
PCNr	.81				.75
PCNt	.76				.64
PJNt2	.68				.50
PCNs	.68				.60
PJNr	.66				.55
PJFNs	.63				.45
PJNt1	.62				.43
PJFNr1	.59				.36
PJFNr2	.52				.40
PJFNt	.47				.27
PJNs2	.40				.40
PSNs		.67			.52
PSNt		.63			.52
PSF4		.63			.53
PSNr		.59			.42
PSF5		.46			.35
MjSF1			.72		.57
MjSF3			.72		.57
MjSF5			.56		.39
MjSF4			.55		.32
PSF2				.68	.47
PSF3				.67	.51
MjSF2				.43	.34
PJNs1				.33	.19
PSF1				.33	.13
Eigenvalue	6.30	2.00	1.58	1.31	
Percentage of variance explained	25.20	7.98	6.33	5.24	
Cumulative percentage of explained variance	25.20	33.18	39.51	44.75	

Table 2: Factor loadings of the four factors against the items on figural genesis in early geometry

[a]*Factor 1: Recognising and naming shapes in a collection of separated or juxtaposed figures, Factor 2: Recognising apparent shapes in a configuration involving superposed figures, Factor 3: Discrimination of juxtaposed shapes in a superposed configuration of shapes by implicitly using early dimensional deconstruction, Factor 4: Recognising non-apparent shapes in configurations.*

According to the Varimax rotation, the first figural genesis component explains around 25% of the variance. This first factor included 11 items which correspond to children's competence to recognise and name shapes in a collection of separated or juxtaposed figures.

The second factor explains around 8% of the variance and comprised five items. This factor reflects children's competence to recognize apparent figures in a configuration which involves two superposed shapes. Both superposed shapes (the one to be identified and the other one) are primary contour structure as they overlapped each other and they are not a part of the other as a whole (see for example figure 1d).

The third factor explains around 6% and corresponds to four items. Specifically, those items refer to children's competence in identifying juxtaposed shapes in a superposed configuration of shapes using mereologic apprehension and implicit processes of early dimensional deconstruction. The latter ability involves the recognition of shapes which are not the 2D units used for the construction of the configuration (SCS). Thus it may requires the mental construction of a new 2D figure by 1D units (segments) borrowed from the basic shapes of the configuration (PCS). This is a visualization process which is rather complex.

The fourth factor explains around 5% of the variance and involves five items. This factor pertains to children's competence to identify non-apparent figures mainly in configurations of two superposed shapes. Non-apparent figures are usually the outer figures in a superposed configuration with the inner figure being part of the other figure as a whole. In contrast to the second factor items in which both shapes are PCS, at the most items of the fourth factor the outer figures are PCS's (basic shapes in the construction of the configuration), while the inner figures are SCS. Thus, the identification of the non-apparent (outer) figures (with all their line segments) requires to children to go beyond the primary structure in order to be able recognize that the primary structure (2D figural unit) includes segments (1D figural units) that belong simultaneously to a secondary structure. Thus, solving these items requires (implicitly) the use of an early form of dimensional deconstruction which is also needed for the item MjSF2 (mereologic recognition of a juxtaposed shape in a configuration with superposed shapes).

Within the fourth factor, there is also the item PJNs1, which requires the recognition of a square in a non-horizontal orientation in a configuration of juxtaposed shapes. A possible interpretation for the inclusion of this item to the fourth factor, is that this square could be considered as a "non-apparent" figure, since to identify it as a square in such a non-prototypical orientation, children may implicitly use processes of dimensional deconstruction. That is, they may visualize it as a shape with four equal sides (1D figural units) and four right angles. This is further supported by the fact that children were asked to identify it by its name only, without any visual example in the instructions.

Kindergartners' performance in the items of the figural genesis components

To examine kindergartners' performance in figural genesis in geometry, the mean scores of the items comprising each of the four factors were calculated. Table 3 presents the mean scores and standard deviations of the children's responses to the items of each factor.

	N	Mean	SD
Factor 1	433	.58	.24
Factor 2	441	.46	.32
Factor 3	441	.10	.19
Factor 4	441	.41	.18

Table 3: Components of the kindergartners' figural genesis in geometry

Children's highest performance was found in recognising and naming shapes in a collection of separated or juxtaposed shapes in configurations (factor 1). This result could be explained by children's greater amount of learning experiences with this type of tasks and activities in kindergarten mathematics, which are included in the mathematics curriculum for the early grades, starting from the age of three years old (Ministry of Education and Culture of Cyprus, 2016). Thus, it could be that children's personal MWS was influenced by the suitable MWS in early geometry. Another interpretation for children's high performance is the low level of cognitive/visual complexity of this kind of items, which include identifying geometric figures represented separately from one another or juxtaposed, without any other structures (figural units) interfering in their surface or sides.

Children's performance was lower in recognising shapes in configurations with superposed figures. However, children performed better in recognising apparent shapes (factor 2) rather than non-apparent shapes (factor 4) in a configuration. This finding can be attributed to the higher visualisation demands of identifying a non-apparent figure that may be due to the implicit use of early dimensional deconstruction processes explained above, compared to the purely iconic ways of identifying apparent figures.

It is observed that the most difficult items were in the third factor where the children ought to apply the mereologic apprehension and to implicitly use partial dimensional deconstruction of the configuration in order to succeed. It seems that those tasks where the most complex ones for kindergartners, as they demand to go beyond perceptual visualisation. Specifically, children to succeed must go beyond the PCS (basic shapes whose line segments were used in the construction of the configuration) and create new SCS (hidden shapes), which include segments that belong to primary structures (basic shapes). This process demands the identification of the line segments (1D units) that can belong to different structures (2D units) enabling the construction of new figures (2D units) (based on Gestalt theory, from Sarama & Clements, 2009, p. 256-257).

Furthermore, t-tests paired samples were carried out to explore kindergartners' possible performance differences between these components (see Table 4). It is found that the four components have statistically significant differences ($p<.05$).

	Mean	**N**	**SD**	**T**	**df**	**Sig. (2-tailed)**
Pair 1: Factor 1 &	.58	433	.24	8.94	432	.000
Factor 2	.46	433	.32			
Pair 2: Factor 1 &	.58	433	.24	37.01	432	.000
Factor 3	.10	433	.19			
Pair 3: Factor 1 &	.58	433	.24	11.55	432	.000
Factor 4	.40	433	.18			
Pair 4: Factor 2 &	.46	441	.32	24.36	440	.000
Factor 3	.10	441	.19			
Pair 5: Factor 2 &	.46	441	.32	2.96	440	.003
Factor 4	.41	441	.18			
Pair 6: Factor 3 &	.10	441	.19	-23.74	440	.000
Factor 4	.41	441	.18			

Table 4: Performance differences between kindergartners' figural genesis components in geometry

In more detail, kindergartners score statistically higher in items of the first factor relative to the items of the other factors. The performance of kindergartners seems to be higher in the second factor than in the third ($t=24.35$, $p=.000$) and forth ones ($t=2.96$, $p=.003$). Children have higher performance in items of the forth factor than in the items of the third factor ($t=-23.74$, $p=.000$).

Overall, the differences in the levels of children's factor scores indicate that in children's personal GWS, geometrical figures are approached visually, in a perceptual way without adequate use of dimensional deconstruction. Children encountered difficulties in moving beyond the perceptual object that they could recognize at first glance in a configuration and in obtaining a mathematical way of seeing geometrical figures.

DISCUSSION

The present study is aims at exploring kindergartners' figural genesis in geometry by identifying its key components and investigating their performance in these key components. The findings of the study provide evidence for the multidimensional structure of kindergartners' figural genesis in geometry. A four-factor structure was found to reflect major aspects of figural genesis in early geometry. This structure includes the recognition and naming of shapes in a collection of separated shapes or in a configuration of juxtaposed shapes, the recognition of apparent shapes in a configuration which involves superposed shapes, the recognition of non-apparent shapes in a configuration and the discrimination of shapes by implicitly using early dimensional deconstruction.

Children perform differently in the four key components of figural genesis. Specifically, they are more competent in the recognition and naming of shapes in a collection of separated shapes or in a configuration of juxtaposed shapes and less competent in the recognition of apparent shapes in a configuration which involves superposed shapes and the recognition of non-apparent shapes in a configuration. Children encounter the greatest difficulty in the discrimination of SCS shapes which may require the use of early dimensional deconstruction processes of figures into 1D figural units.

On the one hand, these findings indicate towards a four-level framework to explain the figural genesis in early geometry based on the young children's personal MWS. Further analyses are needed though to investigate a hierarchical progression of the competences reflected by the four factors and possible types of children's personal MWS based on these competences, that might have implications for the suitable and reference MWS, and particularly for instruction and curriculum design.

On the other hand, these findings suggest children's lack of flexibility in the visualisation of geometrical figures, that is, in manipulating mental images and figural units. This could be explained by the dominance of perception in children's thinking which might act as an obstacle to the mathematical way of looking at figures (Duval, 2014b). Even though perceptual apprehension has a crucial role for figural apprehension, it can also be misleading for the children's recognition of figures, as it blocks their way of looking at figures beyond what is captured when looking at figures at first glance. In other words, it is an obstacle that children face in figural genesis and therefore, in the articulation between the epistemological and cognitive plane. Thus, children are not able to proceed to further modifications of the figure involving dimensional deconstruction (Michael - Chrysanthou & Gagatsis, 2013), which is an essential process for visualisation flexibility in geometry.

These findings suggest that teaching geometry in a way that initiates the development of skills which enhances the mobility of seeing (Mathé, 2009) could start already in the early years. Teaching early geometry should not overemphasize the botanist approach to geometrical figures (Duval, 2005), but include practices focusing on developing the children's perceptual apprehension in a way that it will function as a basis, and not as an obstacle, for enabling them to mobilize the proper way of looking at figures. Thus, young children should be engaged in learning experiences that involve tasks from all four components which compose figural genesis and, thus, connect figural genesis with other geneses and the epistemological plane with the cognitive plane. How such an approach could be implemented to support children's development of flexibility in geometrical figure visualisation requires further investigation. In addition to checking for a hierarchical progression of competences (learning trajectory) in geometrical figure visualisation and the interrelations of these competences, investigating systematically children's specific difficulties and errors in figural genesis using qualitative approaches as well as the associations of figural genesis with instrumental and discursive genesis could be advantageous to this end. Furthermore, in future studies in early education and beyond, it would be interesting to study and analyse dimensional deconstruction within the cognitive plane component, namely construction, and its role in the instrumental genesis. The present study, as well as the implementation of future perspectives that have been discussed here, could be important and useful resources for initial and continuous training of teachers.

From a methodological perspective, it would be interesting to reflect on how quantitative data analysis, which is used in the present study, could be integrated with qualitative methods of analysis (more common in studies within MWS), to study and improve our understanding of different theoretical and applied research aspects of mathematics education in the framework of MWS. Precisely, qualitative researches may interview young children about the way they "see" a figure in geometry and explore their personal MWS.

Finally, a limitation of our study is that our collection of items did not cover the full domain of figural genesis and visualisation of geometrical figures. Exploring young children's competences in the operative apprehension of geometrical figures is therefore our next step.

ACKNOWLEDGMENTS

This work falls under the project of A. G. Leventis Foundation in Cyprus 2014-2016 entitled "The contribution of gestures in geometrical thinking development in early childhood".

REFERENCES

Bartolini-Bussi, M. G. & Baccaglini-Frank, A. (2015). Geometry in early years: sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM, 47*(3), 391-405.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1991). *Logo geometry* [Computer program]. Morristown, NJ: Silver Burdett & Ginn.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education,* 30(2), 192-212.

Coutat, S., Laborde, C, & Richard, P. R. (2013). L'apprentissage intrumenté de propriétés en géometrie: propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics.*

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana and V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues for learning. Retrieved from ERIC ED 466-379.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10,* 5-53.

Duval, R. (2013). The first crucial point in geometry learning: Visualization. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(1–2), 23–37.

Duval, R. (2014a). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM, 46*(1), 159-170.

Duval, R. (2014b). Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 149-161.

Fabrigar, L. R., & Wegener, D. T. (2011). *Exploratory factor analysis*. Oxford University Press.

Hallowell, D. A., Okamoto, Y., Romo, L. F., & La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *ZDM, 47*(3), 363-375.

Kaur, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles: prototypicality and inclusion. *ZDM, 47*(3), 407-420.

Kuzniak, A. (2015). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. In *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-15). Springer International Publishing.

Kuzniak, A., & Rauscher, J. C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics, 77* (1), 129–147.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Spaces for Mathematical Work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4), 17-27.

Mathé, A.C. (2009). Quelle articulation entre conceptualisation et confrontation aux objets sensibles en geometrie a l'ecole primaire? *Cyprus and France Research in Mathematics Education*, 119-137.

Michael – Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2013). Geometrical figures in geometrical task solving: An obstacle or a heuristic tool? *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, 13, Proceedings of PME15*17-32.

Ministry of Education and Culture of Cyprus (2016). Preschool Education's Curriculum. Retrieved by: http://archeia.moec.gov.cy/ed/5/ap_nip_proscholiki_ekpaidefsi.pdf

National Association for the Education of Young Children, National Council of Teachers of Mathematics (2002). *Position statement on early childhood mathematics: Promoting good beginnings*. Washington, D.C.: NAEYC.

National Research Council (2006). Learning to think spatially: GIS as a support system in the K-12 curriculum. Washington, DC: National Academy Press. http://www.nap.edu/download.php?record_id=11019.

Razel, M., & Eylon, B. S. (1991). Developing mathematics readiness in young children with the Agam Program. Proceedings of PMEIS, Genova, Italy.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM, 47*(3), 435-449.

Tanguay, D., Kuzniak, A., & Gagatsis, A. (2015). The mathematical work and mathematical working spaces. In I. M Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak and P. R. Richard (eds), Espacio de Trabajo Matemático Mathematical Working Space Espace de Travail Mathématique. *Actas Cuarto Simposio Internacional ETM Proceedings Fourth ETM Symposium. Actes Quatrième Symposium ETM* (pp.2732).

Xistouri, X., Pitta-Pantazi, D., & Gagatsis, A. (2014). Primary school students' structure and levels of abilities in transformational geometry. *Proceedings of Relime, 17* (4), 149-164.

Yakimanskaya, I. S. (1970). Individual differences in solving geometry problems on proof. *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, 4.

TÂCHES EMBLEMATIQUES DANS L'ETUDE DES ETM IDOINES ET PERSONNELS : EXISTENCES ET USAGES

Alain Kuzniak et Assia Nechache

LDAR-Université Paris-Diderot et ESPE d'Orléans-Université d'Orléans

kuzniak@math.univ-paris-diderot.fr, assia.nechache@hotmail.fr

Dans cette communication, nous développons la notion de tâches emblématiques conçues comme des tâches qui vivent dans l'institution scolaire et qui favorisent une circulation optimum entre les différentes composantes de l'Espace de Travail Mathématique de façon à développer le travail mathématique des élèves. Nous précisons quelques caractéristiques que doivent posséder ces tâches. Puis, nous envisageons leur intérêt et impact possibles sur la mise en place des ETM idoines.

Mots Clés: *Tâches emblématiques, Espace de Travail Mathématique, travail mathématique complet*

INTRODUCTION

Lors du colloque ETM4 à Madrid, la question de l'usage du modèle des ETM pour l'analyse des tâches mathématiques a fait l'objet d'intenses discussions (Gomez-Chacon, 2014, p. 35). Plus précisément, il s'agissait de s'assurer que :

> Le modèle de l'ETM, conçu comme un espace de circulation entre les pôles dans les plans épistémologique et cognitif, peut être un outil d'analyse (tant a priori qu'a posteriori), d'interprétation et de description de tâches.
> Le modèle peut ainsi servir à la mise en place et à l'ajustement de tâches déjà construites mais aussi permettre l'élaboration ou le calibrage de situations d'enseignement nouvelles et encore à expérimenter.
> Enfin, le modèle des ETM doit pouvoir étoffer l'observation et le compte rendu d'expérimentations pour en faciliter l'examen, en décrivant notamment le cheminement d'élèves pris isolément ou en groupe dans leur travail mathématique. (Ibid, p. 35)

Dans cette contribution nous reprenons la question de l'usage du modèle comme outil méthodologique, en dégageant l'idée de *tâches emblématiques*. Il s'agit de tâches spécifiques dont l'adaptabilité doit permettre de faciliter l'usage du modèle des ETM, tant en recherche que dans l'enseignement. Cette idée de *tâche emblématique* résulte pour partie de l'adaptation au contexte scolaire de la notion de problèmes *exemplaires* de Kuhn (1966). Dans son ouvrage sur les révolutions scientifiques, Kuhn présente d'abord un paradigme comme un ensemble de croyances, de techniques et de valeurs que partage un groupe scientifique. Cet emploi du paradigme a notamment été utilisé dans le cadre des ETM pour étudier les différents paradigmes existant dans l'enseignement de la géométrie (Houdement et Kuzniak, 2006), des probabilités (Parzysz, 2011) et de l'analyse mathématique (Montoya et Vivier, 2016). Mais, un deuxième sens du mot paradigme est également proposé par Kuhn : il réfère cette fois à des problèmes *exemplaires*. Ces problèmes servent de modèles auprès des étudiants pour traiter ensuite les autres problèmes qu'ils rencontreront et ce conformément au paradigme retenu. En effet, un paradigme ne fait généralement pas l'objet d'un enseignement explicite mais sa diffusion auprès des étudiants et des chercheurs passe par la fréquentation d'un certain nombre de tâches particulières et caractéristiques. Dans l'enseignement actuel des mathématiques, les élèves sont supposés être actif et résoudre des tâches, à la fois pour découvrir de nouveaux concepts, mais aussi pour en comprendre les usages et les limites. De ce fait, il nous semble possible et nécessaire d'identifier un certain nombre de tâches qui ont un rôle significatif dans les classes, à la fois pour construire et fréquenter les objets mathématiques, mais aussi pour asseoir une culture et une mémoire communes.

Dans cette communication, nous nous proposons de caractériser et d'analyser ces tâches que nous avons choisies d'appeler *tâches emblématiques* pour insister sur leur importance dans la reconnaissance et l'identification du travail mathématique scolaire. Nous commençons par les définir à partir de trois conditions nécessaires qu'elles doivent vérifier pour justifier ce statut emblématique dans la vie de la classe et dans le travail des professeurs et des élèves. Nous présentons, ensuite, une tâche en probabilité dont nous montrons qu'elle est emblématique selon notre définition. Puis, nous indiquons l'intérêt des tâches emblématiques comme support pour les recherches utilisant le modèle des ETM. Enfin, nous présentons un exemple de scénario de formation et de recherche qui s'appuie sur les transformations, dans différentes institutions scolaires, de la tâche probabiliste précédemment identifiée.

À priori, les tâches emblématiques que nous recherchons doivent êtres des tâches qui bénéficient d'une large mise en œuvre dans les classes, mais il peut aussi s'agir de tâches relativement récentes qui sont portées par l'institution dans les documents ressources et disponibles dans les ETM idoines potentiels décrits par les manuels. Pour faciliter l'exploration du travail mathématique que nous recherchons, elles doivent, selon nous, satisfaire trois conditions nécessaires dont aucune prise isolément n'est suffisante pour parler de tâche emblématique.

1. Être disponible dans les ETM de référence, autrement dit bénéficier d'une reconnaissance qui témoigne de leur adéquation au travail mathématique visé par l'institution scolaire pour les élèves.

Cette reconnaissance peut-être institutionnelle mais aussi provenir des travaux de recherches en didactique. Ainsi, les tâches présentées et utilisées dans les institutions de formation initiales et continues des enseignants font partie, selon nous, de cet ETM de référence, même si elles ne sont pas toujours citées ou développées dans les textes officiels. Ces tâches peuvent provenir des travaux effectués par les groupes IREM (Institut de recherches sur l'enseignement des mathématiques) ou d'ingénieries didactiques développées dans le cadre de la recherche en didactique des mathématiques. Parmi ces dernières, il est naturel de penser aux travaux de Brousseau qui a toujours cherché à mettre au point des *situations didactiques* qui pouvaient s'insérer dans le cadre de sa théorie sans forcément se préoccuper de leur large diffusion hors du champ spécifique de la recherche. On peut, par exemple, citer la situation dite du *puzzle de Brousseau* pour travailler les questions de linéarité et de proportionnalité, et qui a été abondamment utilisée tant en formation des enseignants du primaire et du secondaire que dans les classes.

2. Être vivante dans les ETM idoines, autrement dit faire partie des tâches qui sont effectivement proposées d'abord dans les ETM idoines potentiels définis par les manuels mais aussi et surtout dans les classes ordinaires. Le travail d'enquête devra faire apparaître ces points ce qui permettra le cas échéant :

- soit de ne pas retenir certaines tâches de l'ETM de référence n'ayant pas rencontré le succès dans les classes comme les tâches en relation avec le théorème de Moivre-Laplace. Ce théorème fait, en effet, l'objet d'une présentation détaillée par les auteurs des ressources pour le programme de Terminale de 2012, mais il n'a pas été intégré par les professeurs dans leur enseignement (Derouet et Parszysz, 2016);
- soit, au contraire d'identifier des tâches nouvelles ne faisant pas partie des ETM de référence mais fréquentes dans la pratique des classes. De fait, ce cas est relativement rare, en France, et difficile à repérer car les initiatives individuelles doivent bénéficier de relais institutionnels ou associatifs pour pouvoir être diffusées.

3. Être potentiellement porteuse d'un travail mathématique complet. Les tâches emblématiques doivent permettre une circulation entre les pôles et les plans verticaux des ETM (Kuzniak et

Richard, 2014) assurant ainsi un travail mathématique complet dans le sens défini par Kuzniak, Nechache et Drouhard (2016), à savoir :

> The mathematical work will be considered complete when the following conditions are satisfied:
> (A) A genuine relationship between the epistemological and cognitive planes. This aspect means that students be they generic or not are able to select the useful tools to deal with a problem and then to use them appropriately as instruments to solve the given task.
> (B) An articulation of a rich diversity between the different geneses and vertical planes of the model. This aspect means that various dimensions of the work related to tools, techniques and properties are taken into account. This point reflects how different working contexts are involved during students'activity (Ibid., p. 862).

Du point de vue du travail mathématique, une tâche emblématique permet une circulation complète qui supposera souvent des changements de domaines mathématiques et des changements de registres (Montoya et Vivier, 2014). Nous pouvons y ajouter l'usage de différents artefacts traditionnels ou digitaux.

Pour conclure, une tâche emblématique doit être reconnue dans les ETM de référence et utilisée dans les ETM idoines, mais ces deux conditions ne peuvent être considérées comme suffisantes, car ces tâches doivent aussi permettre de produire un travail mathématique complet et mathématique cohérent. Pour nous, seules les tâches remplissant ces trois conditions seront considérées comme emblématiques. Un travail de recherche préalable doit, en quelque sorte, permettre d'identifier les tâches emblématiques.

POTENTIALITÉ DES TÂCHES EMBLÉMATIQUES POUR L'ÉTUDE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Usage dans la construction globale du travail mathématique : situations fondamentales et tâches emblématiques

Selon Brousseau, une *situation fondamentale* mathématique, associée à une connaissance, est une situation qui correspond à un théorème fondamental.

Chaque connaissance peut se caractériser par une (ou des) situation a-didactique qui en préserve le sens et que nous appellerons *situation fondamentale*. (Brousseau 1986 p. 49).

Cette situation génère le curriculum par des déductions et par la construction progressive des objets d'études. Les situations s'articulent sur les questions qu'elles soulèvent ainsi que sur les réponses qu'elles apportent. Toujours selon Brousseau, la situation fondamentale est ainsi le point de départ, le premier maillon d'une genèse épistémologique d'un ensemble de connaissances, leur organisation mathématique est la phase finale du processus. Les tâches emblématiques ne visent pas forcément, selon nous, à être les premiers maillons de la genèse épistémologique dont parle Brousseau mais elles font partie de la chaîne qu'il évoque. D'autre part, dans le cadre des ETM, la dimension cognitive est essentielle. Autrement dit, une tâche emblématique doit avoir une double assise, épistémologique et cognitive.

Ainsi compris, le repérage de tâches emblématiques et l'étude de leur mise en œuvre participent d'une meilleure compréhension de la réalisation et de la planification du travail mathématique dans les classes. L'ensemble du travail mathématique ne se réduit cependant pas aux seules tâches emblématiques et des tâches, comme les tâches de pratique des techniques ou les tâches d'évaluation, sont aussi très importantes sans nécessairement être emblématiques.

La disponibilité des tâches emblématiques doit également faciliter la description des ETM idoines globaux en s'appuyant sur un ensemble de tâches jugées représentatives du travail mathématique dans les ETM idoines. En effet, la question du passage de l'observation de quelques cas à l'identification globale du travail mathématiques reste une question fondamentale de la didactique des mathématiques et le fait de bénéficier d'une base bien identifiée de tâches emblématiques permet de fonder plus scientifiquement cette généralisation à partir d'études partielles.

Adaptabilité des tâches emblématiques.

Il est important de s'assurer de la viabilité des situations emblématiques qui pourront ensuite servir de support à la recherche ou à la formation. Pour cela, il faut s'assurer des possibilités d'adaptabilité d'une tâche dans différents contextes différents de celui qui lui a donné naissance. Cette capacité d'adaptation doit faciliter leur intégration par les professeurs dans les classes dont ils ont la charge. Il est ainsi possible et plus aisé de faire l'étude de leur adaptation dans les classes et de mener des études comparatives riches pouvant s'appuyer sur les ETM. Il est aussi important que les tâches proposées puissent supporter des modifications qui ne les dénaturent pas immédiatement en faisant perdre de vue la connaissance mathématique en jeu. Les tâches qui supporteront ce type de modifications seront qualifiées de robustes. Ce point est plus difficile à déterminer et nécessite soit des observations dans des classes soit des études de trajectoires des problèmes (Kuzniak, Parzysz et Vivier, 2013) au sein notamment des institutions de formation qui apparaissent ainsi comme des incubateurs de situations emblématiques.

Usage des tâches emblématiques pour la recherche et pour la formation

Les tâches emblématiques peuvent aider à mieux interpréter les ETM de référence et aider à comprendre la constitution des ETM idoines. En s'appuyant sur le modèle des ETM et le principe d'une circulation, a priori, complète dans le modèle, il est possible de repérer les éléments de blocage, de résistance et, *a contrario*, de rebond quand l'activité se déroule harmonieusement en classe. La visualisation de la circulation du travail mathématique qui s'opère à partir de ces tâches au sein de l'ETM permet de voir à la fois leurs possibilités et leurs limites. Il est notamment possible de s'intéresser aux transformations des tâches qui aboutissent à une dénaturation par perte de l'objectif mathématique. Les tâches emblématiques permettent ainsi d'aborder les questions de reproductibilité et d'obsolescence des situations didactiques.

Par ailleurs, en analysant des tâches, initialement non nécessairement emblématiques, il est également possible d'aider à une meilleure transposition de ces tâches de façon à ce qu'elles remplissent les conditions attendues pour être emblématiques. Leur analyse fine permet progressivement de parvenir à un meilleur calibrage de situations d'enseignement qui facilite, par la suite, l'étude en profondeur du travail personnel des élèves du fait d'une meilleure connaissance des conditions de leur mise en place dans les ETM idoines.

Enfin, du fait de l'accumulation d'expériences et d'observations qu'elles procurent grâce à leur possibilités d'implémentation dans les classes, il est naturel de penser à utiliser ces tâches emblématiques en formation des enseignants, d'une part, pour initier le travail mathématique dans le sens attendu et, d'autre part, de sensibiliser les professeurs aux conditions de leur mise en œuvre particulière. L'étude des transformations opérées par les étudiants et les professeurs permet aussi d'avoir accès à leurs ETM personnels.

UN EXEMPLE DE TÂCHE EMBLÉMATIQUE

Nous allons décrire brièvement, dans la suite, un problème de probabilité que nous considérons comme une tâche emblématique. Ce problème, énoncé ci-dessous, fait l'objet d'une présentation dans les ressources officielles associées au programme de la classe de troisième (élèves de 14 ans) :

Sur un segment S, on prend au hasard deux points A et B. On considère l'événement D : « La longueur du segment [AB] est strictement supérieure à la moitié de celle du segment S ». Quelle est la probabilité de cet événement ?

Nous avons pu vérifier son existence et sa faisabilité en classe ordinaire (Kuzniak, Nechache, Drouhard 2016, Nechache 2016). Cette tâche remplit ainsi nos deux premières conditions car elle est à la fois présente dans l'ETM de référence et dans des ETM idoines.

Il nous reste à étudier dans quelle mesure elle permet de développer un travail mathématique complet. Pour cela, nous détaillerons tout d'abord la mise en oeuvre proposée par les auteurs du document ressource puis celle réalisée par un professeur dans une classe.

Une mise en œuvre proposée dans l'ETM de référence

Les auteurs du programme proposent aux professeurs d'organiser la séance en deux phases : la première est axée sur l'obtention de la probabilité de l'événement D, et la seconde propose une validation théorique du résultat obtenu dans la première phase.

Phase 1. Exploration et découverte de la probabilité de l'événement D.

Cette phase comporte trois étapes.

- Construction d'un modèle comme tirage au hasard de deux nombres réels appartenant aux segments [0;1]. Cette interprétation s'appuie sur la dimension discursive pour introduire un modèle numérique qui peut être identifié à l'ensemble $\Omega = [0 ; 1]\times[0 ; 1]$.
- Ce modèle est implémenté par le professeur dans un tableur. Une genèse instrumentale est au centre de cette étape où le travail mathématique se situe essentiellement dans le plan [Sem-Ins].
- Les résultats sont visualisés à l'aide d'un grapheur qui fait apparaître que les fréquences tendent plus ou moins vers 0.25. En invoquant la loi des grands nombres, les auteurs concluent que la probabilité vaut 0.25. Cette fois, le travail mathématique est dans le plan [Ins-Dis].

Phase 2. Validation théorique de la probabilité estimée précédemment

Il s'agit de prouver que la probabilité de D, précédemment estimée, est exactement égale à 0,25. Le document ressource propose une démonstration basée sur l'étude de la distance |X-Y| entre deux lois uniformes continues X et Y définies sur [0 ; 1]. Le carré [0 ;1]× [0 ;1] devient le support géométrique de la preuve puisqu'il s'agit alors de déterminer tous les couples (x ; y) tels que $|x\text{-}y| >1/2$ (où x et y sont respectivement les abscisses des deux points A et B). Cette inéquation est alors étudiée graphiquement en traçant les deux droites d'équation (d_1) $y= x – 1/2$ et (d_2) $y = x + 1/2$. Les segments [AB] dont la longueur est supérieure à 0.5 sont représentés par des points dans le carré et ils recouvrent une surface dont il est alors facile de calculer l'aire (0,25). Cette valeur valide le résultat obtenu expérimentalement précédemment. Dans cette deuxième phase, le travail mathématique est placé dans le plan [Sem-Dis].

Nous résumons l'évolution du travail mathématique dans l'ETM de référence dans la figure ci-dessous :

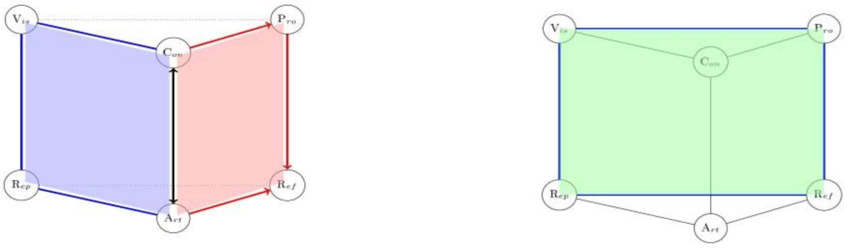


Figure 1: L'évolution du travail mathématique dans l'ETM de référence

Cette proposition de mise en œuvre fait donc partie de l'ETM de référence mais il s'agit aussi en quelque sorte d'orientation pour un ETM idoine potentiel comme en trouve dans les manuels, mais cette proposition prend une valeur plus institutionnelle et officielle. Pour évaluer la nature de cette proposition et son impact sur l'ETM, nous allons considérer les registres et domaines mathématiques mis en jeu, les artefacts utilisés et enfin les modes de validation attendus.

Registres et domaines. Le document ressource suggère dans la phase 2, l'usage d'un carré pour calculer la probabilité à l'aide des aires. Ainsi, le domaine des probabilités se trouve-t-il articulé au domaine de la géométrie grâce au registre figural. Cette transformation n'est normalement pas nouvelle pour les élèves puisque le document ressource propose une première tâche (le jeu de Franc-Carreau) qui repose sur cette transformation. Par contre, ce qui est nouveau est le passage par l'algèbre à travers l'étude non standard, à ce niveau, de l'inégalité $|x-y| > 1/2$. Ainsi, cette tâche suppose une articulation entre trois ETM, celui des probabilités, de l'algèbre et de la géométrie, dont les deux premiers sont largement en construction à ce niveau de la scolarité.

Usage des artefacts.

Le principal artefact mobilisé ici est le tableur (phase 1). Il est mis en œuvre dans une situation relativement complexe qui suppose le tirage aléatoire simultané de deux nombres. La compréhension de la simulation associée et l'exploitation des résultats à partir d'un test sont complexes surtout si, comme c'est le cas ici, il n'y a pas eu de première sensibilisation à l'expérience aléatoire réelle. De plus, il faut noter l'ambiguïté des formulations des auteurs sur la question de la valeur de la probabilité car, à ce stade, 0,25 n'est a priori qu'une valeur parmi d'autres dans un intervalle de fluctuation autour de la valeur obtenue avec 500 tirages (cas présenté dans le document).

Formes de validation.

La remarque précédente nous renvoie à la question de la forme de validation attendue dans cet ETM. Les auteurs suggèrent que l'emploi d'un tableur, dans de telles simulations, permet de donner une formulation naïve de la loi des grands nombres, que les élèves admettent volontiers lorsque le nombre d'expériences augmente. Mais ici, le degré d'approximation reste flou car normalement le résultat produit doit se situer dans un intervalle. Il s'agit ici de ce que nous avons caractérisé comme le niveau 2 de l'approximation[1]. Or les auteurs concluent sur la donnée approximative d'un résultat (niveau 1).

L'étude de cette suggestion d'une mise en œuvre dans l'ETM de référence pose quelques questions nouvelles et pour certaines inattendues. En effet, les limites que nous avons pu observer conduisent à se demander dans quelle mesure la mise en œuvre proposée est-elle adaptée à la classe et aux élèves de troisième. Autrement dit, l'ETM de référence aide-t-il les professeurs à construire un ETM idoine adéquat ?

Mise en œuvre dans un ETM idoine

La question de savoir comment un professeur peut intégrer cette tâche dans l'ETM idoine de sa classe devient particulièrement intéressante dans notre problématique sur les tâches emblématiques. Elle suppose nécessairement une adaptation importante qui va permettre d'étudier la flexibilité de la tâche et aussi sa résistance à une dénaturation rendue possible par les simplifications que le professeur peut proposer pour faciliter le travail des élèves. Nous allons ici présenter une réalisation possible, dont une présentation détaillée figure dans Kuniak, Nechache et Drouhard (2016) et dans Nechache (2016).

La mise en œuvre proposée par le professeur dans sa classe de troisième comporte également de trois phases distinctes. Dans une première phase, les étudiants sont confrontés à la réalisation de l'expérience aléatoire. Ensuite, le professeur propose un modèle discret de l'expérience en s'appuyant sur le tirage de deux dès à six faces. Enfin, il valide le résultat trouvé en utilisant un dénombrement à l'aide d'un tableau.

Phase 1. Exploration de l'expérience aléatoire initiale

Il est demandé aux vingt élèves de la classe de construire un segment S de six centimètres puis de choisir au hasard deux points A et B sur ce segment. Les élèves mesurent alors la longueur du segment et la compare avec le nombre 3, qui est la moitié de la longueur de S. Après une discussion guidée par le professeur, les élèves concluent que cette méthode ne leur donnera pas le résultat correct pour deux raisons : la taille insuffisante de l'échantillon et le caractère non aléatoire du choix des deux points.

Dans cette première phase, les élèves ont pu tenter de réaliser l'expérience aléatoire initiale en utilisant des outils technologiques de géométrie. Le travail mathématique d'exploration produit lors de cette phase se situe dans le plan [Sem-Ins].

Phase 2. Vers une autre expérience aléatoire et estimation de la probabilité

Cette fois le professeur suggère de remplacer l'expérience aléatoire initiale par une autre qui en constitue, d'après lui, un modèle réel. Les élèves tracent un segment de cinq centimètres et le graduent de 1 à 6. Le choix de deux points A et B sur le segment est alors assimilé au tirage de deux dès à six faces. Les élèves, par groupe de deux, procèdent au tirage des deux dés (50 fois) puis calculent la différence des valeurs obtenues sur chaque faces comparent ensuite cette différence avec 2,5 (moitié du segment de longueur 5). Enfin, ils calculent la fréquence de l'événement D sur les cinquante tirages. A partir du regroupement de tous les résultats obtenus (soit 500 tirages), ils estiment, à l'aide du professeur que la probabilité de l'événement D est proche autour de 30 %.

Le modèle ainsi proposé est très différent sémantiquement du modèle donné dans l'ETM de référence: cette fois l'univers décrivant l'expérience aléatoire est un ensemble fini et discret $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ au lieu de l'intervalle continu [0,1].

Cette seconde phase permet une exploration et une découverte de la probabilité de l'événement D. Le travail mathématique situé dans le plan [Ins-Dis].

Phase 3. Validation théorique de la valeur estimée pour la probabilité.

Le professeur insiste sur le fait que la valeur obtenue avec cette première simulation est une estimation qu'il est nécessaire de prouver. (Il faut noter ici que cela induit l'idée que toute probabilité associée à une expérience aléatoire peut être calculée ou démontrée sans recours à une expérience).

Pour cela, il donne à compléter aux étudiants un tableau (6 x 6). Les lignes et les colonnes correspondent aux résultats des tirages possibles de chaque dès. Dans chacune des 36 cases du tableau, les élèves écrivent la valeur absolue de la différence entre les deux faces supérieures des dès. Dans le cas étudié, les étudiants on entouré les 12 résultats favorables (avec une valeur strictement supérieure à 2,5). Ils ont alors obtenu la probabilité de D en appliquant la formule de Laplace. Précisons que le professeur ne justifie pas que les 36 cases du tableau sont équiprobables. D'après le calcul des élèves, la probabilité de l'événement D est égale à 1/3 ce qui est considéré comme relativement proche de la valeur estimée dans la phase 2. Cette validation de la valeur estimée utilise le tableau comme outil sémiotique favorisant le discours de preuve. Le travail mathématique est situé dans [Sem-Dis].

En résumé, le travail mathématique proposé par le professeur favorise une articulation entre différents contextes de travail mettant en jeu les plans verticaux du modèle des ETM. De manière imagée, nous pouvons dire que chaque phase favorise un déplacement à l'intérieur du modèle : à partir du plan [Sem-Ins] pour comprendre l'expérience aléatoire ; au plan [Ins-Dis] pour obtenir la valeur expérimentale de la probabilité ; et enfin au plan [Sem-Dis] pour obtenir une validation théorique basée sur un dénombrement.

Cependant, cette réalisation pose à nouveau plusieurs questions. Comme précédemment, on peut considérer que le travail mathématique est complet et il est de plus cette fois adapté aux possibilités des élèves. Mais, le résultat obtenu et validé par le professeur est 1/3 (obtenu dans le cas discret) qui est différent de celui attendu dans l'ETM de référence (qui est égale à 1/4 obtenu dans le cas continu). De fait, l'expérience retenue par le professeur (phase 2) n'est pas sémantiquement congruente à l'expérience aléatoire initiale proposée dans l'ETM de référence. De plus, le passage d'un modèle continu à un modèle discret reste très implicite, voire absent, dans l'ETM idoine mis en œuvre par le professeur. Ce passage par un modèle discret change le résultat qui dépend, par ailleurs, du nombre de faces du dès : on peut montrer que si l'on introduisait un modèle discret avec des dès à n faces, ce modèle permettrait d'obtenir le même résultat que le modèle continu par un passage à la limite, lorsque n tend vers l'infini.

Cet exemple montre la nécessité de vérifier, d'une part, la complétude du travail mathématique mais, aussi, de s'assurer de cohérence finale d'un point de vue mathématique du travail effectué.

Enfin, les deux mises en œuvre présentées questionnent également la relation entre le travail du professeur et le travail de l'élève. Pour qui le travail mathématique est-il réellement complet ? L'est-il pour les élèves ou plutôt pour le professeur qui a dû prendre en charge la plupart des changements de domaine et des changements de registres laissant à l'élève la seule responsabilité de l'exécution de tâches simplifiées la mise en œuvre ? Cela nous conduit aussi à préciser qu'il ne faut pas penser qu'une tâche isolée peut à elle seule remplir toutes les conditions pour permettre un travail mathématique complet. De la même manière, il est important de ne pas considérer nécessairement une tâche emblématique comme une seule tâche isolée qui remplirait seule toutes les conditions énoncées mais plutôt comme un ensemble cohérent de sous-tâches permettant de réaliser un travail complet sur un thème donné. Par exemple, dans Kuzniak et Nechache (2015), nous analysons une séquence sur l'enseignement de la notion de cercle à la fin de l'enseignement primaire (éléves de 11 et 12 ans) proposée par Fenichel et Taveau (2009). Dans cette séquence, la circulation complète du travail mathématique nécessite trois séances étroitement articulées qui permettent d'abord d'introduire la définition du cercle, comme ensemble de points équidistants d'un point donné, puis de justifier une construction géométrique en utilisant cette propriété.

TÂCHE EMBLÉMATIQUE ET DISPOSITIF DE RECHERCHE ET DE FORMATION DES ENSEIGNANTS

Comme nous l'avons indiqué, l'intérêt des tâches emblématiques provient de leur capacité à être adaptées et enseignées dans des conditions relativement diverses. Pour pouvoir utiliser ces possibilités, nous avons développé un dispositif permettant le double usage des tâches emblématiques, à la fois dans une perspective de recherche et dans une perspective de formation des enseignants. Le cadre de la formation des maîtres permet de développer et contrôler plus aisément la mise en place des tâches dans des classes et ainsi d'asseoir une recherche en didactique avec ses propres objectifs. Mais on peut aussi y ajouter deux objectifs propres à la formation : utiliser le côté emblématique d'une tâche pour initier les étudiants à une forme de travail mathématique en probabilité qui ne leur est pas nécessairement familière ; étudier l'impact de cette approche sur les représentations des étudiants en analysant les différentes transformations et adaptation de cette tâche. Le modèle des ETM est utilisé pour mener à bien ces études.

Nous ne rendons compte ici que du dispositif de formation et de recherche mis en place sans développer, comme nous venons de le faire, la description des différents ETM idoines rencontrés. Nous avons repris et adapté la méthodologie mise au point par Kuzniak, Parzysz et Vivier (2013) pour étudier les trajectoires d'un problème posés dans différentes institutions. L'idée est de suivre les *transformations d'un problème* à travers différentes institutions scolaires (I_k), dont certaines sont des institutions de formation ce qui, de fait, transforme l'étudiant (S_k) de l'institution de formation (I_k) en professeur (T_{k+1}) dans l'institution I_{k+1}. Dans ce modèle (Fig. 2) chaque problème (P) connaît au moins trois transformations appelées avatars : P_1 (avatar 1) qui est le problème donné en formation, à des étudiants ou des professeurs stagiaires, sans nécessairement avoir d'intention didactique pour des classes ; P_2 qui est le problème, dit virtuel, que l'étudiant-professeur anticipe de poser à des élèves ; et enfin le problème P_3 qui est celui effectivement posé dans une classe. La mise en place effective de P_3 fait ensuite l'objet d'une étude en formation par les étudiants professeurs qui peuvent éventuellement changer leur proposition initiale et proposer un nouvel avatar P_4.

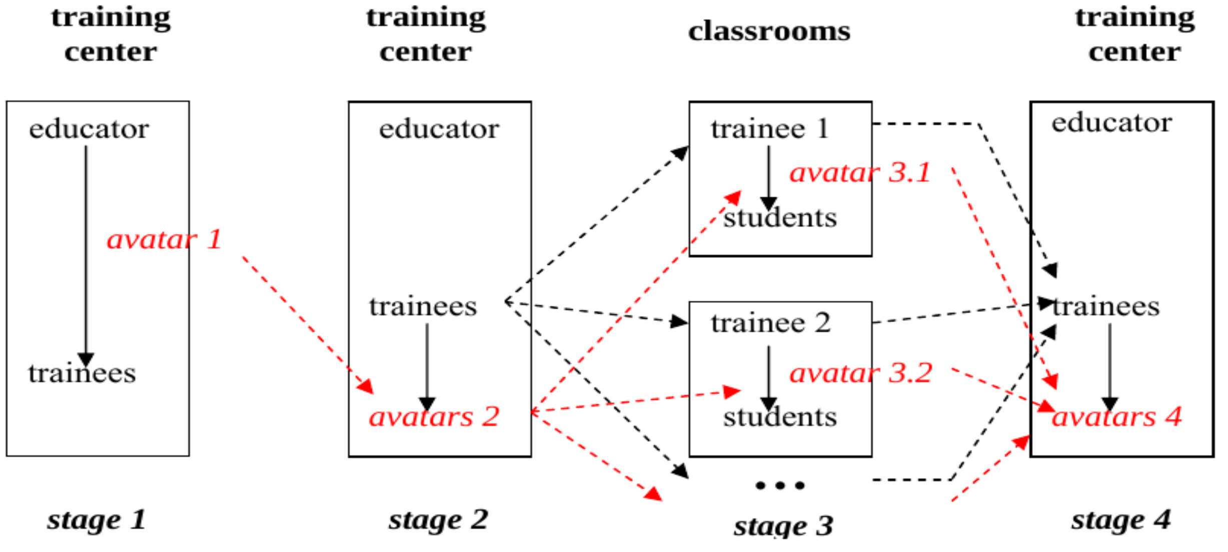


Figure 2: Exemple d'une trajectoire d'un problème (Kuzniak et al. 2013, p. 434)

Dans notre exemple, les étudiants sont des étudiants-professeurs inscrits en Master 1 et Master 2. Notre scénario suit celui décrit dans la figure (Fig. 2) mais avec une variante importante. Dans notre cas, l'avatar P_3 n'est pas celui proposé par les étudiants-professeurs, mais celui proposé par un professeur expérimenté dans sa classe. Dans l'étape 4, un verbatim de la séance, en M1, et une vidéo de classe, en M2, ont été étudiés avec les élèves-professeurs.
Le scénario de formation associé à notre recherche peut se résumer dans le tableau 1 qui met en parallèle les deux formations.

La mise en place de cette tâche emblématique dans la formation des M1 et M2 permet d'identifier le travail effectué par les étudiants et étudiants-professeurs. Les transformations effectuées sont étudiées avec le modèle des ETM qui permet de repérer certaines difficultés et blocages dans la circulation du travail mathématique. Il est ainsi possible de faire apparaître certaines ruptures ou certains confinements dans une des dimensions ou un des plans du modèle. Cette situation de formation a permis aux étudiants de prendre conscience de leurs propres difficultés et de l'intérêt de cette tâche pour l'enseignement. Et, d'autre part, elle a fourni au chercheur des données expérimentales pour étudier plusieurs questions de recherche relatives à la transformation du développement des ETM idoines et aussi des ETM personnels des étudiants.

	Master 1 (20 étudiants)	Master 2 (30 étudiants)
Stage 1 P_1	Il est proposé aux étudiants de résoudre le problème. Une aide est énoncée « Pensez à modéliser la situation, vous pouvez aussi utiliser vos calculettes et vos ordinateurs ».	Il est proposé aux étudiants-professeurs de résoudre la tâche et de rédiger une solution mathématique qui n'est pas obligatoirement destinée à des élèves. Aucune aide n'a été proposée.
Stage 2 P_2	Retour et rappel sur la tâche donnée la semaine précédente. 1. Proposer une expérience aléatoire réelle permettant de réaliser l'expérience proposée. 2. Proposer une expérience dans un modèle et qui permet une simulation. 3. Proposer un traitement de cette seconde expérience.	Il est demandé dans cette phase aux stagiaires de proposer un scénario (avec l'ensemble des étapes) de la mise en œuvre de la tâche dans une classe de 3e (grade 9) ou de 2^{nde} (grade 10). Il est alors demandé de bien expliciter l'expérience aléatoire, le modèle choisi, la simulation. Dans cette phase les stagiaires devront proposer si possible les procédures d'élèves, les aides, les difficultés des élèves.
Stage 3 P_3	L'avatar P_3 est proposé à une classe par un professeur expérimenté.	
Stage 4 P_4	Étude par les étudiants d'un verbatim de la mise en œuvre de la tâche P_3. Dans cette phase, les étudiants doivent proposer un découpage de la séance en repérant les différentes tâches proposées par le professeur. Les étudiants doivent ensuite étudier plus particulièrement le modèle probabiliste proposé par le professeur (un dé à six faces).	Étude par les étudiants-professeurs d'une vidéo de la mise en œuvre de la tâche P_3. Dans cette phase il s'agit de confronter les différents scénarios conçus par les étudiants-professeurs avec une mise en œuvre de cette tâche par un professeur expérimenté dans une classe de troisième. Il s'agit d'étudier les différences et les similitudes entre ce qui a été prévu et ce qui peut réellement se faire dans une classe.

Tableau 1: Tableau comparatif des scénarios utilisés en Master 1 et Master 2

CONCLUSION

Le modèle des ETM peut être un outil méthodologique d'analyse et de description des tâches mises en œuvre dans les ETM idoines. Parmi ces tâches, nous avons relevé l'importance particulière pour la recherche et la formation de certaines tâches que nous avons qualifiées d'emblématiques pour insister sur leur importance dans la reconnaissance et la description du travail mathématique. Les tâches emblématiques doivent bénéficier d'une reconnaissance institutionnelle et être utilisées dans les classes ordinaires mais elles doivent aussi permettre de réaliser, au moins potentiellement, un travail mathématiques complet.

Ces tâches doivent être adaptables dans différents contextes et l'étude de leurs différentes transpositions, tant en formation des enseignants que dans des classes ordinaires. Elles permettent ainsi d'identifier plus finement le fonctionnement des ETM idoines et personnels. Cette étude peut s'appuyer sur le modèle des ETM pour repérer les ruptures et les confinements du travail mathématique dans certaines des dimensions du modèle. Utilisées comme support pour la recherche, les tâches emblématiques peuvent aussi se révéler comme un outil de formation pour expliciter et discuter l'avancée du travail mathématique avec les étudiants-professeurs et les autres formateurs d'enseignants.

NOTES

1. Dans l'article Houdement et Kuzniak (2002), nous avons introduit trois niveaux d'approximation qui permettent également une distinction des paradigmes en jeu : 1) L'estimation d'un résultat par un nombre 2) La donnée d'un encadrement du résultat par un intervaille 3) La maitrise du degré d'approximation.

REFERENCES

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Derouet, C & Parzysz, B. (2016). Le théorème de Moivre-Laplace ay lycée : une illustration d'un travail centré dans le plan sémiotico-instrumental. *Communication au cinquième symposium ETM. Florina.*

Fenichel, M. & Taveau, C. (2009). Enseigner les mathématiques au cycle 3. Le cercle sans tourner en rond, DVD, CRDP Créteil.

Gomez-Chacon, I. (Ed.) (2014). *Actes du quatrième symposium ETM (pp. 207-216). Madrid : IMI.*

Houdement, C & Kuzniak, A. (2002). Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation. *Actes de la IX École d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La Pensée sauvage.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* (11), 175 - 193

Kuhn, T.,S., (1966), *The Structure of Scientific Revolutions*, The University of Chicago Press, first edition 1962.

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2014). Using the geometric working spaces to plan a coherent teaching of geometry. In *Proceedings of CERME9.* Prague, Czech Republik.

Kuzniak, A., Parzysz, B. & Vivier, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training. *The Mathematics Enthusiast*, 10, 407-440.

Kuzniak, A., Nechache, A. & Drouhard, J.P. (2016). Understanding the development mathematical work in the context of the classroom. *ZDM-Mathematics-Education*, 15-6.

Kuzniak, A. & Richard, P.R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and perspectives. *Relime* 17 (4), 17-27.

Montoya, E. & Vivier, L. (2014 Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*.. (19) 73-101

Montoya, E. & Vivier, L.(2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *ZDM-Mathematics-Education, 16.5*

Nechache, A (2016). La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire. Thèse de l'université Paris Diderot. Paris.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et de sciences cognitives. (16) 127-147*

ARTICULATION DES GENESES DE L'ETM$_{PROBA}$ DANS LE TRAVAIL MATHEMATIQUE DES TACHES PROBABILISTES FAISANT INTERVENIR LA MODELISATION : UNE ÉTUDE DE CAS

Assia Nechache

ESPE Centre Val de Loire (Université d'Orléans) et LDAR-Université Paris-Diderot;

assia.nechache@hotmail.fr

L'usage de la modélisation dans la résolution de tâches probabilistes requiert la construction d'un modèle pour y répondre. Cette construction passe par la mise en œuvre des différentes étapes de la modélisation, induisant des changements de paradigmes et de domaines, en particulier ceux de la statistique descriptive et la statistique inférentielle. De fait, le traitement de ces tâches probabilistes, basées sur la modélisation, est différent selon le modèle choisi. Dans cette contribution, nous proposons d'étudier le traitement d'une tâche probabiliste en fonction du modèle choisi induisant différentes articulations entre les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive au sein du travail mathématique.

Mots Clés*: Probabilité, modélisation, espace de travail mathématique, genèses*

INTRODUCTION

En France, l'enseignement des probabilités débute en classe de troisième. Les élèves sont confrontés à des « *situations de la vie courante pouvant être modélisées simplement* » (MENCOL 3^{e}, 2008). Dans le but de leur faire dégager la notion de modèle, il s'agit donc, pour l'enseignant, de leur apprendre à modéliser des expériences aléatoires diverses afin de mettre en évidence leurs points communs. À partir de ce niveau scolaire, les programmes du secondaire mettent l'accent sur la notion d'expérience aléatoire de référence, mais aussi sur la simulation, à l'aide de l'ordinateur ou de la calculatrice. Or, l'usage de la simulation suppose l'intervention d'un modèle probabiliste.

La résolution des problèmes probabilistes faisant intervenir la modélisation requiert la construction d'un modèle pour y répondre. Cette construction passe par la mise en œuvre des différentes étapes du cycle de modélisation et entraîne des changements de domaines (Montoya-Delgadillo et Vivier, 2014) et des jeux de paradigmes probabilistes (Parzysz, 2011). La mise en place de ces problèmes au niveau scolaire nécessite l'usage des genèses sémiotique et instrumentale pour les résoudre. Ces deux genèses participent à l'élaboration du discours de la preuve. Comment les genèses sont-elles imbriquées dans le travail mathématique d'une tâche probabiliste relevant de la modélisation ? En particulier qu'en est-il du discours de preuve et de son articulation avec les genèses de l'ETM$_{PROBA}$?

L'objectif de cette contribution est d'apporter des éléments de réponses à ces deux questions à partir de l'étude d'une tâche probabiliste. Pour ce faire, nous précisons dans un premier temps les paradigmes probabilistes, l'importance de la modélisation dans l'enseignement et l'apprentissage du domaine des probabilités au niveau secondaire en France. Ensuite, nous présentons brièvement la modélisation et les différents modèles probabilistes enseignés au niveau secondaire. Enfin, en nous appuyant sur le modèle des espaces de travail mathématique (Kuzniak & Richard, 2014) ainsi que sur la notion de paradigmes probabilistes (Parzysz, 2011), nous analysons une tâche probabiliste faisant référence à la modélisation.

PARADIGMES PROBABILISTES

À partir des travaux de Houdement et Kuzniak (1999), Parzysz (2011) a entrepris un travail de transposition de l'idée de paradigme dans le domaine des probabilités que nous avons complété, en précisant notamment l'horizon du travail probabiliste.

Paradigme P1

Dans ce paradigme, il s'agit de décrire un protocole expérimental précis associé à une expérience concrète, assurant ainsi la reproductibilité de l'expérience dans les mêmes conditions « *donnant lieu à des observation permettant d'attribuer une chance d'apparition à chacune des différentes issues* » (Parzysz, 2014, p. 68). Les outils associés à ce paradigme sont des diagrammes comme les arbres, les tableaux à double entrée, et les diagrammes relevant de la statistique descriptive (diagrammes en bâtons, histogrammes, etc.). Cette probabilité donne un horizon d'expériences et d'émission d'hypothèses concordant avec les résultats de l'expérience.

Paradigme P2

Dans le paradigme 2, on définit l'expérience aléatoire générique et la notion de probabilité. L'étude des propriétés de cette probabilité fait appel à des notions et à des propriétés ensemblistes mais aussi à des modèles classiques (modèle d'urne) et les principales lois de probabilité (binomiale, exponentielle, géométrique, etc.). Les outils associés à ce paradigme sont les techniques de calcul intégrés dans les modèles ou propres aux divers registres de représentation (tableau à double entrée, arbre pondéré, etc.). À ceux-ci, s'ajoutent des outils de la statistique descriptive (SD) ou de la statistique inférentielle (SI). Cette probabilité donne un horizon théorique à l'expérience et à la modélisation dans un système proto- axiomatique.

Paradigme P3

Le troisième paradigme est fondé sur une axiomatique de type Kolmogorov avec hiérarchisation des propriétés. Cette probabilité donne un horizon axiomatique et formel.

Dans cette contribution, nous n'envisageons pas le paradigme P3 puisqu'il ne concerne pas l'enseignement secondaire. En effet, P3 est un paradigme que l'on rencontre uniquement dans l'enseignement universitaire en France.

LA PLACE DE LA MODELISATION DANS LE DOMAINE DES PROBABILITES

En France, l'enseignement du domaine des probabilités débute en classe de troisième. À ce niveau de classe, il s'agit d'introduire la notion de probabilité sous une double approche, laplacienne et fréquentiste. L'introduction de la notion de probabilité *via* l'approche fréquentiste est effectuée

> À partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes). La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante (MENCOL 3^{e}, 2008, p. 34).

L'introduction des nouveaux outils performants, tels que l'ordinateur ou la calculatrice, permet alors d'aborder la question de la modélisation du réel *via* la simulation numérique d'expériences aléatoires à l'aide de l'ordinateur ou de la calculatrice. Or, le recours à la simulation suppose nécessairement l'intervention d'un modèle probabiliste. Ainsi, la mise en lien d'une expérience aléatoire réelle avec la théorie des probabilités conduit à interroger la modélisation en termes de processus. Proposer des situations faisant appel à la modélisation permet de donner du sens aux connaissances enseignées.

MODELISATION DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

La modélisation d'une expérience aléatoire commence par la description de l'expérience. Cette description s'effectue d'abord à l'intérieur du domaine de fonctionnement en utilisant un langage courant. Ensuite, elle aboutit à une représentation théorique utilisant un langage probabiliste appartenant au domaine d'interprétation du modèle. C'est à partir des cycles de modélisation établis par Kaiser (1995), Blum et Leiss (2005), Borremeo-Ferri (2006) que nous avons construit le cycle de modélisation adapté à l'enseignement des probabilités présenté ci-dessous :

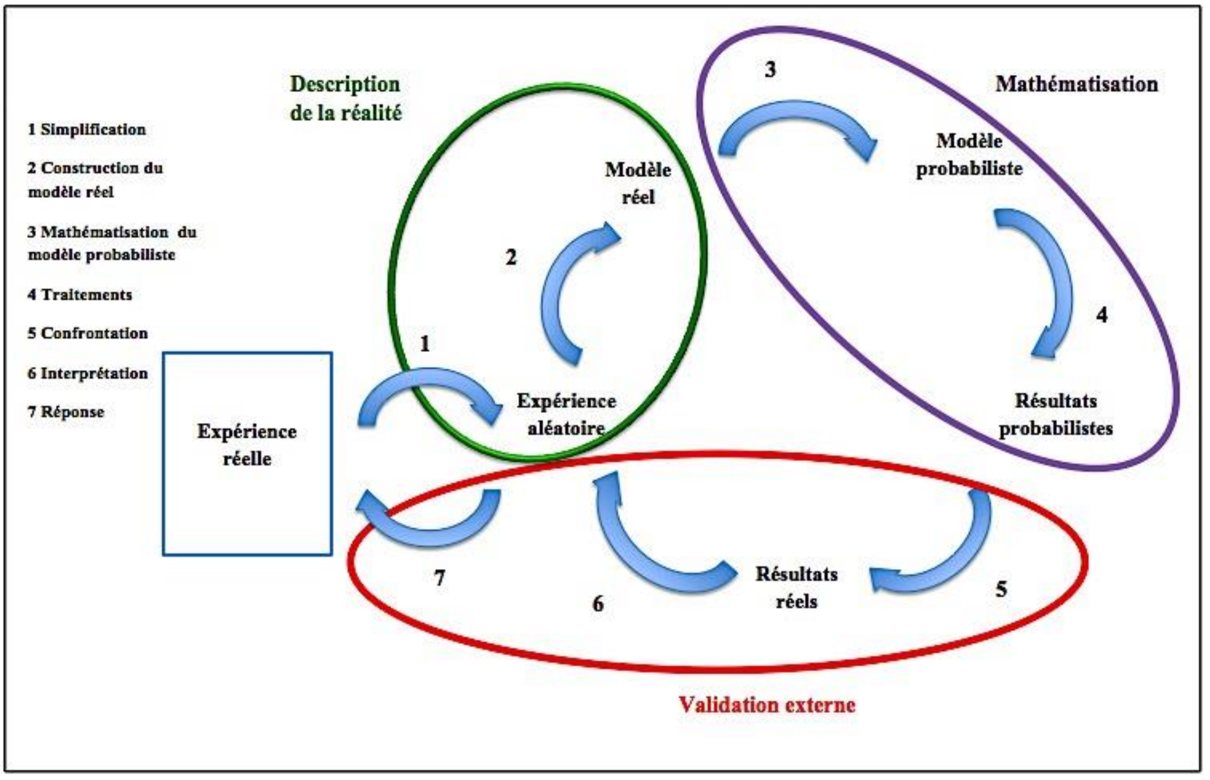


Figure: 1 Cycle de modélisation dans l'enseignement des probabilités (Nechache, 2016)

À partir des travaux d'Henry (1999), nous avons défini ces trois étapes du cycle de modélisation comporte trois étapes[1] fondamentales :

- étape 1 ***Description de la réalité***

  Il s'agit de décrire la situation réelle dans le langage courant et de la traduire en « *système simplifié et structuré : c'est le niveau du modèle probabiliste, donné en termes pseudo-concrets* » (Henry, 1999, p. 29).

- étape 2 ***Mathématisation***

  Il s'agit de la « *mathématisation ou le formalisme du modèle* » (Henry, 1999, p. 29). Autrement dit le choix du modèle mathématique ou sa construction.

- étape 3 : **Validation externe**

  Cette étape débute par une traduction des résultats probabilistes dans les termes du modèle réel. Dans le cas où les résultats mathématiques sont corrects, il s'agit de confronter les deux modèles, mathématique et réel, afin de formuler des réponses et de « *relativiser ces réponses par rapport aux hypothèses de modèle (sous-entendu ceux du modèle réel)* » (Henry, 1999, p. 29). Soit les résultats mathématiques (corrects) sont en adéquation avec la réalité, auquel cas on accepte le modèle puis on formule des réponses au problème posé dans la situation réelle. Soit les résultats mathématiques ne sont pas conformes et on recommence le cycle de modélisation. En revanche, dans le cas où les résultats mathématiques ne sont pas corrects, on ne peut pas conclure.

Modèles probabilistes d'une expérience aléatoire

Nos avons identifié à partir de l'étude de l'$\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ de référence (Nechache, 2016) dans l'enseignement secondaire trois sortes de modèles qui sont proposés dans l'enseignement :

- **Modèle 1 avec les ensembles.** Ω l'ensemble fini des issues de l'expérience aléatoire (univers de l'expérience), C une partie de Ω qui modélise les événements liés à l'expérience aléatoire considérée, et p une application de C dans l'intervalle [0 ;1]. Ainsi, si l'univers de l'expérience contient n issues, notées $x_1, \dots, x_n$, la loi de probabilité est le n-uplet (p_1. . . ., p_n) avec p_i la probabilité de l'issue x_i, $0 \leq i \leq n$.

- **Modèle 2 avec les variables aléatoires et leurs lois de probabilité. Ces lois de probabilité** sont explicitées dans les programmes du secondaire : loi binomiale et la loi géométrique tronquée (à partir de la classe de 1^re^), la loi normale et la loi à densité continue définie comme une loi uniforme sur l'intervalle [a ;b] ou loi exponentielle sur R^+ (en classe de Terminale) ;

- **Modèle 3 avec les arbres pondérés** qui figurent officiellement dans les programmes de la classe Terminale, mais qui est largement utilisé par les enseignants dès la classe de 3^e^. Les probabilités inscrites sur les branches de l'arbre sont fournies soit par l'énoncé du problème posé soit par l'une des lois de probabilité citées précédemment.

Tel qu'il est envisagé par l'institution scolaire, le travail mathématique dans les deux premiers modèles est dirigé par le paradigme P2. La genèse discursive est privilégiée pour bâtir le discours de preuve fondé sur les éléments du référentiel théorique. De plus le travail mathématique dans ces deux modèles est possible qu'à partir de la classe de 1^re^ où les lois de probabilités et la notion de variables aléatoires sont introduites dans l'$\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoine et personnel des élèves.

Le paradigme probabiliste qui pilote le travail mathématique dans le troisième modèle n'est pas le même selon que l'on se place au niveau des classes de 3^e^ et de la classe de 2^nde^, ou si on se place en classe de Terminale. Cette différence provient du statut de l'arbre pondéré qui n'est pas suffisamment précisé dans les documents institutionnels. En effet, en classe de terminale, les propriétés justifiant la construction de l'arbre pondéré font partie de l'$\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoine et personnel (des élèves). L'institution scolaire place alors le travail mathématique dans ce troisième modèle dans le paradigme P2. En classe de 3^e^ et de 2^nde^, les arbres pondérés apparaissent comme des outils permettant d'illustrer, de décrire des situations aléatoires et d'effectuer des traitements calculatoires. Or, les propriétés permettant de justifier la construction des arbres pondérés ne sont pas explicitées dans le référentiel théorique de l'$\mathrm{ETM}_{\mathrm{PROBA}}$ idoine et personnel (des élèves). L'institution scolaire semble alors placer le travail mathématique dans ce modèle dans le paradigme P1 appuyé implicitement sur les propriétés de P2 ($\mathrm{P1}|_{\mathbf{P2}}$).

La simulation et la modélisation

Dans l'enseignement du domaine des probabilités, en particulier en début de l'apprentissage (classe de 3^e^ et de 2^nde^), il est très fréquent que le modèle probabiliste ne soit pas accessible par les élèves car il n'est tout simplement pas intégré dans le programme du niveau de classe considéré. Pour détourner cet obstacle, Parzysz (2009) suggère l'utilisation de la simulation qui selon lui est un outil pertinent pour établir des conjectures et résoudre des tâches faisant intervenir la modélisation lorsque le modèle probabiliste n'est pas disponible. Il s'agit donc, pour Parzysz de construire un modèle réel (cf. Figure 2) en choisissant des hypothèses aussi proches que possible de l'expérience initiale permettant ainsi de faire le lien entre l'expérience initiale (expérience 1) et l'expérience simulée (expérience 2).

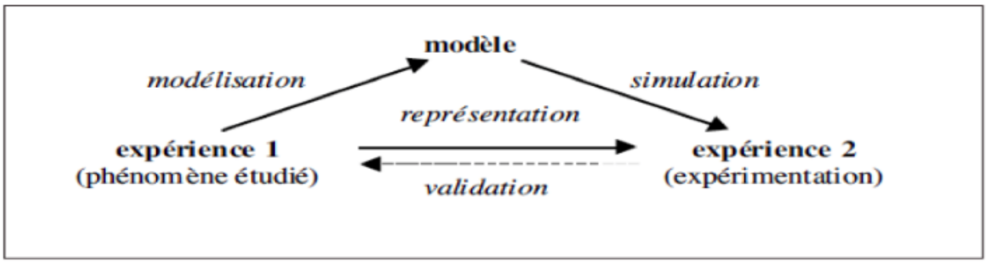


Figure 2: Correspondance entre simulation et expérience (Parzysz, 2009, p. 95)

ETAPES DE LA MODELISATION ET LE TRAVAIL MATHEMATIQUE

Dans la **première étape** (« **la description de la réalité** ») du cycle de modélisation, on associe à l'expérience réelle une liste d'issues et un protocole expérimental garantissant la répétition de cette expérience dans les mêmes conditions. Celle-ci devient alors une expérience aléatoire que l'on modélisera par la suite. La construction du modèle réel de l'expérience aléatoire conduit à émettre des hypothèses qui permettent de justifier cette construction. Or, ces hypothèses sont fondées sur des propriétés probabilistes. Les hypothèses sont donc construites à partir des éléments du référentiel théorique de l'ETM_{PROBA}. Le travail mathématique de la tâche probabiliste est dans ce cas clos sur la dimension discursive et dirigé par le paradigme P1.

Dans la **deuxième étape** de la modélisation, plusieurs cas peuvent se présenter :

- *1er cas* : on utilise l'un des deux modèles probabilistes (**espace probabilisé (*Ω, C, p*)** ou **espace probabilisé avec les variables aléatoires et leurs lois de probabilité**). Dans ce cas, le travail mathématique de la tâche est clos sur la dimension discursive. Ce travail mathématique est piloté par le paradigme P2 puisque les traitements sont des outils mathématiques (les formules, par exemple) intégrés dans le référentiel théorique.

- *2^{e} cas* : on utilise le modèle **espace probabilisé avec les arbres pondérés**. Dans la résolution d'une tâche probabiliste, l'arbre pondéré est un outil permettant d'illustrer la situation aléatoire et d'effectuer des calculs probabilistes. Le travail mathématique de la tâche est alors placé dans le plan [Sem-Ins] ou [Ins-Dis] et est dirigé respectivement par le paradigme P1 ou P1 articulé avec P2 (P1|P2). L'arbre pondéré peut également être utilisé comme élément du discours de preuve et de ce fait, le travail mathématique est placé dans le plan [Sem-Dis]. Le travail mathématique est alors orienté par le paradigme P2.

- 3^{e} cas : on utilise **la simulation**. La résolution de la tâche probabiliste privilégie la dimension instrumentale pour construire la solution. La simulation fournit alors des résultats qui relèvent du domaine de la statistique descriptive ou inférentielle. Par ailleurs, la simulation est basée sur des modèles probabilistes. Par conséquent, la simulation est construite à partir des éléments du référentiel théorique. Ainsi, le travail mathématique de la tâche est placé dans le plan [Ins-Dis] et dirigé par le paradigme P1 articulé avec le paradigme P2.

Dans la **troisième étape**, les résultats mathématiques obtenus sont selon le modèle choisi soit théoriques soit empiriques. Ces résultats vont être confrontés aux résultats réels afin d'accepter ou de rejeter le modèle probabiliste choisi. Il s'agit d'interpréter les résultats théoriques ou empiriques en les relativisant avec les hypothèses du modèle réel choisi. Le travail mathématique est alors clos sur la dimension discursive et dirigé par le paradigme P2, ou P1 articulé avec P2.

ETUDE D'UNE TACHE PROBABILISTE FAISANT APPEL A LA MODELISATION

Rappelons que notre objectif est d'étudier la manière dont les genèses de l'$\text{ETM}_{\text{PROBA}}$ sont imbriquées dans le travail mathématique d'une tâche probabiliste qui requiert l'usage de la modélisation. Il s'agit également d'analyser l'articulation de ces genèses au sein du discours de preuve dans le cas de la résolution de tâches probabilistes. Pour ce faire, nous avons choisi d'étudier une tâche probabiliste issue des documents ressources de la classe de première S (RESPREM-PROB, 2010) intitulée « la politique nataliste » :

> *Pour limiter le nombre de filles dans un pays imaginaire, on décide que :*
>
> a) *chaque famille aura au maximum 4 enfants ;*
>
> b) *chaque famille arrêtera de procréer après la naissance d'un garçon.*
>
> *On considère que chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille et que, pour chaque couple de parents, le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents. Ce choix a-t-il la conséquence attendue, à savoir diminuer le nombre de filles dans la population ?*

Analyse de la tâche

De manière implicite, l'énoncé suppose que les familles continuent de procréer jusqu'à ce que l'une ou l'autre des conditions a) et b) soit remplie.

Modèle réel (choix des hypothèses)

L'énoncé ci-dessus décrit une expérience aléatoire avec les deux informations traduisant les hypothèses du modèle réel :

1- « *chaque enfant a une chance sur deux d'être un garçon ou une fille* » traduit l'hypothèse d'équiprobabilité, autrement dit la probabilité d'avoir un garçon est la même que celle d'avoir une fille ;

2- « *le sexe d'un enfant est indépendant du sexe des précédents* » traduit l'hypothèse de l'indépendance des naissances.

Travail mathématique selon le choix du modèle probabiliste

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour traiter cette tâche. Ces méthodes se distinguent par le choix du modèle utilisé.

***Méthode 1**. Espace probabilisé avec les variables aléatoires et la loi géométrique tronquée*

L'expérience aléatoire, telle qu'elle est décrite dans cette énoncé, consiste à répéter dans des conditions identiques une expérience de Bernoulli de paramètre p (la probabilité d'avoir un garçon) avec au maximum quatre répétitions ($n = 4$) et arrêt du processus au premier succès. On définit alors Y la variable aléatoire qui représente le rang du 1^{er} succès. Y suit la loi géométrique tronquée de paramètre $n = 4$ et $p = 1/2$, avec :

- $Y = 0$ si il n'y a aucun succès ;
- $Y = k$ avec $1 \leq k \leq 4$ si le premier succès est obtenu à l'étape k.

On a donc :

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	1/16	1/2	1/4	1/8	1/16

On considère de plus la variable aléatoire X, X étant le nombre de succès (nombre de garçons). X prend les deux valeurs : 0 ou 1. Alors :

$$P(X= 0) = P(Y = 0) = 1/16$$

$$P(X= 1) = P(Y=1) + P(Y = 2) + P(Y= 3) + P(Y= 4) = 15/16$$

L'espérance de la variable aléatoire X est E(X) = 15/16.

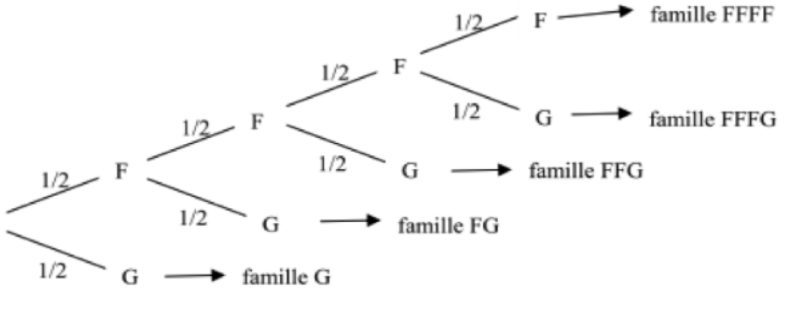
On considère N la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre d'enfants nés dans une famille. Alors l'espérance de N est E(N) = 15/8.

E(X)/E(N) = 1/2. On en déduit que cette politique nataliste n'a aucune influence sur la proportion de filles dans la population considérée.

Le travail mathématique mis en œuvre dans cette méthode nécessite l'usage de la loi de la géométrie tronquée, de la notion de variable aléatoire ainsi que celle d'espérance mathématique. Le discours de preuve est alors bâti à partir des éléments du référentiel théorique. C'est donc la dimension discursive qui est privilégiée dans ce travail mathématique. Ce travail est orienté par le paradigme P2.

Méthode 2. *L'arbre pondéré associé à l'usage d'un tableau de dénombrement*

On note G l'événement « l'enfant né est un garçon » et l'événement F : « l'enfant né est une fille ». Les probabilités des événements G et F sont égales à 1/2. On a alors l'arbre pondéré dit asymétrique ci-dessous :



On a donc cinq sortes de familles (qui représentent les issues possibles) ayant de un à quatre enfants

La probabilité de chacune des cinq familles est donnée dans le tableau ci-dessous :

Type de famille	G	FG	FFG	FFFG	FFFF
Probabilité	1/2	1/4	1/8	1/16	1/16

Si on considère par exemple 16 familles, pour faciliter les calculs, alors on a le tableau de dénombrement suivant :

Type de famille	Nombre de familles	Nombre d'enfants	Nombre de garçons
G	8	8	8
FG	4	8	4
FFG	2	6	2
FFFG	1	4	1
FFFF	1	4	0
	16	30	15

Ainsi, on a 15 garçons sur 30 enfants, soit 1/2. Pour *n* (avec n = 16 x k) familles, le nombre de garçons est égal à 15k sur le nombre total d'enfants soit 30k. On a donc autant de garçons que de filles dans cette population. Notons que ce calcul correspond à l'espérance du nombre de garçons par rapport à celle du nombre total d'enfants. La politique nataliste n'a donc aucune influence sur la proportion de filles dans la population considérée.

L'utilisation de l'arbre pondéré pour résoudre cette tâche s'articule avec l'utilisation d'un tableau de dénombrement. Dans ce cas, l'arbre pondéré, tel qu'il est construit et utilisé, peut être considéré comme un outil sémiotique pour décrire les issues possibles. L'arbre pondéré peut également être considéré comme un artefact permettant de calculer la probabilité de chacune des issues. Dans ce cas, le travail mathématique de cette tâche est placé dans le plan [Sem-Ins] afin de construire la solution. Ensuite, l'usage du tableau de dénombrement entraîne le basculement du travail mathématique de cette tâche dans le plan [Ins-Dis] afin de fournir une justification de la solution. Le paradigme qui dirige ce travail mathématique est celui de P1 articulé avec le paradigme P2.

En résumé, le travail mathématique mis en œuvre dans cette méthode nécessite l'articulation des deux dimensions sémiotique et instrumentale pour découvrir la solution et pour la justifier. De plus, les deux dimensions sémiotique et instrumentale participent à l'élaboration du discours de preuve.

***Méthode 3*. Construction d'un modèle et simulation.**

L'expérience aléatoire peut être simulée de différentes manières. Par exemple on peut utiliser une simulation informatique à l'aide du générateur aléatoire du tableur (ALEA ()) ou de la calculatrice (Random). On traduit alors chacune des données et les hypothèses en instruction informatique (dans le langage du tableur ou de la calculatrice) afin de réaliser la simulation.

Le traitement de la tâche à l'aide de ce modèle induit l'usage de la simulation pour construire la solution. La dimension instrumentale est alors privilégiée dans le travail mathématique de cette tâche. Mais il faut noter que la simulation est construite à partir des éléments du référentiel théorique de l'ETM_{PROBA} afin de fournir une solution. Cette solution peut à son tour être justifiée à partir des éléments du référentiel théorique (loi des grands nombres) ou par les outils de la statistique. Ainsi, le travail mathématique de cette tâche est mis en oeuvre dans le plan [Ins-Dis] et est orienté par le paradigme P1 articulé P2.

En résumé, selon la méthode choisie, l'usage des dimensions de l'ETM_{PROBA} dans le travail mathématique lié à la résolution de cette tâche est différent. En effet, dans la première méthode, le travail mathématique fait appel seulement à la dimension discursive afin de bâtir le discours de preuve. Alors que, dans la deuxième méthode, l'entrée dans le travail mathématique s'effectue dans le plan [Sem-Ins] pour découvrir la solution et s'achève dans le plan [Ins-Dis] afin de justifier cette solution. Enfin, dans la troisième méthode, le travail mathématique débute dans la dimension discursive afin de construire l'expérience aléatoire à simuler. Cette expérience est alors implémentée dans la machine (calculatrice ou ordinateur). Le travail bascule dans la dimension instrumentale. Pour finir, la solution fournie par la simulation est justifiée avec les éléments du référentiel théorique. Ainsi, le travail mathématique est placé dans le plan [Ins-Dis]. L'usage de la simulation peut toutefois être envisagé dans les méthodes 1 et 2 afin de conjecturer ou de découvrir le résultat. Par la suite, ce résultat pourra être justifié à l'aide des méthodes 1 et 2. Dans ce cas, nous avons une articulation des deux dimensions instrumentale et discursive, ou bien des trois dimensions sémiotique, instrumentale et discursive dans la mise en œuvre du travail mathématique.

CONCLUSION

Notre étude porte sur l'articulation des genèses dans le travail mathématique des tâches probabilistes faisant intervenir la modélisation. À partir de l'étude d'une tâche probabiliste nous avons pu observer les différentes articulations des dimensions associées respectivement à l'une des trois genèses de l'ETM_{PROBA}. On constate que selon la méthode choisie, les genèses ne sont pas articulées de la même manière au sein du travail mathématique. Ainsi, dans la méthode 1, où le modèle « espace probabilisé avec les variables aléatoires et leurs lois de probabilité » est utilisé, le travail mathématique est clos sur la dimension discursive et orienté par le paradigme P2. Dans la méthode 2, le modèle « espace probabilisé avec les arbres pondérés » est choisi, les deux dimensions sémiotique et instrumentale sont alors utilisées conjointement dans le travail mathématique. Enfin, la méthode 3 nécessite l'articulation des deux dimensions instrumentale et discursive pour exécuter le travail mathématique.

Les trois méthodes présentées ici mettent en œuvres différents modèles probabilistes pour l'exécution de la tâche. Précisons que dans l'enseignement secondaire en France, la première méthode est rencontrée uniquement à partir de la classe de première, alors que les deux dernières méthodes sont rencontrées en classe de 2^{nde} voire en 3^{e}. Il semble que l'articulation des dimensions sémiotique et instrumentale dans l'exécution de la tâche probabiliste soit importante au début de l'apprentissage du domaine des probabilités.

L'étude d'une seule tâche probabiliste ne permet cependant pas de rendre compte totalement de la manière dont les genèses sont articulées dans le travail mathématique en lien avec la modélisation. Il faudrait donc envisager l'étude d'autres tâches afin d'observer l'existence d'autres articulations possibles des genèses de l'ETM_{PROBA}. Il serait également intéressant d'observer la mise en œuvre de ces tâches (comme celle traitée dans cette contribution) dans les classes (à différents niveaux) afin de rendre compte des articulations possibles des genèses dans le travail mathématique au sein d'ETM_{PROBA} idoines.

NOTES

1. Les étapes sont représentées sous forme d'ellipses sur la figure 1.

REFERENCES

Blum, W. & Leiss, D. (2005). « Filling Up»- the problem of independance-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M.Bosch (Ed.), *Proceedings for the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Spain : Universitat Ramon Llull, 1623-1633

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theorical and empirical differenciation of phases in the modeling process. *ZDM* 38 (2), 86-95

Henry, M. (1999) L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM* 36, 15-34.

Kaiser, G. (1995). Realitätsbezügeim Mathematikunterricht- Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. In Grauman et al. (Eds) *Materialen für einen realitätsbezogenen Mathematikubterricht.* Franzbecker., Bad Salzdetfurth ü. Hildesheim.

Kuzniak, A. (2011) L'espace de travail mathématiques et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 11, 175-193.

Kuzniak, A & Richard, JP. (2014). Espaces de travail mathématique. Points de vue et perspectives. *Acte du troisième symposium ETM, Montréal.*

Kuzniak, A & Vivier, L. (2011). *La modélisation dans l'enseignement des mathématiques : Mise en perspective critique*. Paris: IREM de Paris 7

MENCOL 3e, 2008. Programme de la classe de 3e.
http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf

Montoya-Delgadillo, E. & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des espaces de travail mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 19, 73-101

Nechache, A. (2016) *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire*. Thèse. Université Paris-Diderot. Paris.

Parzysz, B. (2009) De l'expérience aléatoire au modèle, via la simulation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 16, 127-147.

Parzysz, B. (2011) Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 16, 127-147.

RESPREM-PROB, 2010. Documents ressources de la classe de première. http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/12/7/LyceeGT_Ressources_Maths_1_Statistiques_Probabilites_182127.

LE THÉORÈME DE MOIVRE-LAPLACE AU LYCÉE : UNE ILLUSTRATION D'UN TRAVAIL CENTRÉ DANS LE PLAN SÉMIOTICO-INSTRUMENTAL

Charlotte Derouet[*] et Bernard Parzysz[*,**]

[*]Laboratoire de Didactique André Revuz – Université Paris Diderot ; [**]Université d'Orléans ;

charlotte.derouet@univ-paris-diderot.fr, parzysz.bernard@wanadoo.fr

Cet article a pour objet l'introduction du théorème de Moivre Laplace en probabilités, dans la classe terminale scientifique (grade 12) en France. Ce travail se réfère au modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) et nous nous intéressons plus particulièrement aux ETM idoines proposés par les manuels scolaires de terminale S. Après une rapide présentation de l'histoire de ce théorème, nous présentons l'analyse des huit manuels disponibles sur le marché. Nous dégageons une trame commune proposée par ces manuels et mettons en avant un certain nombre de différences spécifiques. Nous montrons comment l'absence de connaissances théoriques suffisantes pour démontrer ce théorème est compensée par un travail dans le plan sémiotico-instrumental.

Mots Clés: *Espace de Travail Mathématique, probabilités, théorème de Moivre Laplace*

INTRODUCTION

Dans les programmes de mathématiques du lycée français, comme dans beaucoup d'autres pays, notamment en Europe, l'enseignement des probabilités s'est sensiblement étoffé au cours des dernières années, dans le double but de se rapprocher des pratiques de la vie professionnelle et sociale et de profiter des nouvelles possibilités liées aux technologies à disposition des élèves. En France, en terminale (grade 12), plusieurs lois de probabilité à densité sont maintenant au programme de différentes filières du lycée. Dans la filière scientifique notamment (MENJVA, 2011), trois types de lois sont étudiées : les lois uniformes sur un segment, les lois exponentielles et les lois normales. Les lois normales sont une nouveauté quel que soit la filière envisagée. Dans cet article, nous souhaitons pour cette raison nous intéresser à ces lois et plus particulièrement, nous souhaitons aborder le lien établi en classe de Terminale S entre la loi normale centrée réduite et la loi binomiale (déjà étudiée en Première) par le théorème de Moivre-Laplace. Nous rappelons ce théorème :

> Si, pour tout $n\in\mathbf{N}$, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $B(n,p)$ avec $p\in]0;1[$, alors la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0;1)$,

c'est-à-dire que, pour tous réels a et b, $P(X_n\in[a;b])$ tend vers $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ quand n tend vers $+\infty$.

Il est explicitement demandé dans le programme de terminale scientifique d'introduire la loi normale centrée réduite en s'appuyant sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}$, où X_n suit une loi binomiale de paramètres n (avec n prenant de grandes valeurs) et p, et de s'appuyer sur le résultat du théorème de Moivre-Laplace. Ce résultat est bien entendu admis, ce qui est compréhensible quand on regarde la démonstration d'une dizaine de pages proposée dans les documents d'accompagnement à destination des enseignants et pose également la question de la pertinence de son introduction à ce niveau.

Quelques travaux de didactique des mathématiques ont déjà porté sur la loi normale, notamment ceux de Batanero et al. (2004) concernant le raisonnement des étudiants sur la loi normale dans un cours d'introduction à l'université. Cependant, il nous semble qu'aucune recherche n'ait fait référence au théorème de Moivre-Laplace pour l'introduction des lois gaussiennes, qui pose entre autres la question du passage du discret (la loi binomiale) au continu (la loi normale)[1].

Les élèves de terminale scientifique n'ayant pas le bagage théorique nécessaire pour démontrer ce théorème, d'autres voies sont donc à utiliser. Le document ressource (MENJVA & DGESCO, 2012) accompagnant le programme propose de passer par l'« observation », notamment en utilisant des logiciels tels que *GeoGebra*.

Nous nous proposons, dans cet article, d'analyser les ETM idoines potentiels proposés par les manuels de terminale scientifique. Nous nous demanderons quels choix les manuels ont adoptés pour « visualiser » ce théorème.

Dans un premier temps, nous expliquerons le cadrage théorique qui sous-tend et oriente notre travail. Après un bref rappel historique, nous présenterons la méthodologie que nous avons choisie, ainsi que les analyses et résultats qui en découlent.

CADRAGE THÉORIQUE

Nous basons notre recherche sur le modèle théorique des Espaces de Travail Mathématique (ETM), proposé par Kuzniak (2011) et Kuzniak & Richard (2014). L'objectif de ce modèle est de décrire globalement le travail en jeu lorsqu'un individu résout une tâche mathématique. Le travail ne désigne pas seulement les savoirs mathématiques en jeu mais aussi l'activité cognitive qui accompagne la résolution de problème. Le modèle des ETM (cf. fig. 1) distingue deux plans pour décrire le travail mathématique : un plan épistémologique et un plan cognitif, tous deux en interaction (Kuzniak, 2011). Le premier plan est composé de trois composantes :

- Un ensemble de signes : représentations sémiotiques (Duval, 1995) ou *representamen* au sens de Peirce,
- Un ensemble d'artefacts (ou instruments, quand les schèmes d'utilisation sont conjointement pris en compte),
- Un système de référence théorique.

Le second plan est constitué de trois processus : reconnaissance (visualisation dans un sens large), construction et preuve. Ces deux plans sont articulés selon trois dimensions :

- Sémiotique, basée sur la production de représentations, en relation avec les registres de représentation de Duval (1995) et la visualisation ;
- Instrumentale, relative aux constructions déterminées par l'utilisation des instruments (par exemple, l'utilisation de logiciels) ;
- Discursive, en lien avec le référentiel théorique et la preuve.

L'hypothèse associée à ce modèle est qu'une prise en compte des différentes dimensions, accompagnée d'une articulation entre elles, favorise la compréhension d'une notion.

Nous avons parlé des deux plans horizontaux mais les trois dimensions décrites ci-dessus peuvent aussi être reliées entre elles, ce qui est symbolisé par des plans verticaux appelés : plan sémiotico-instrumental, plan sémiotico-discursif et plan instrumento-discursif.

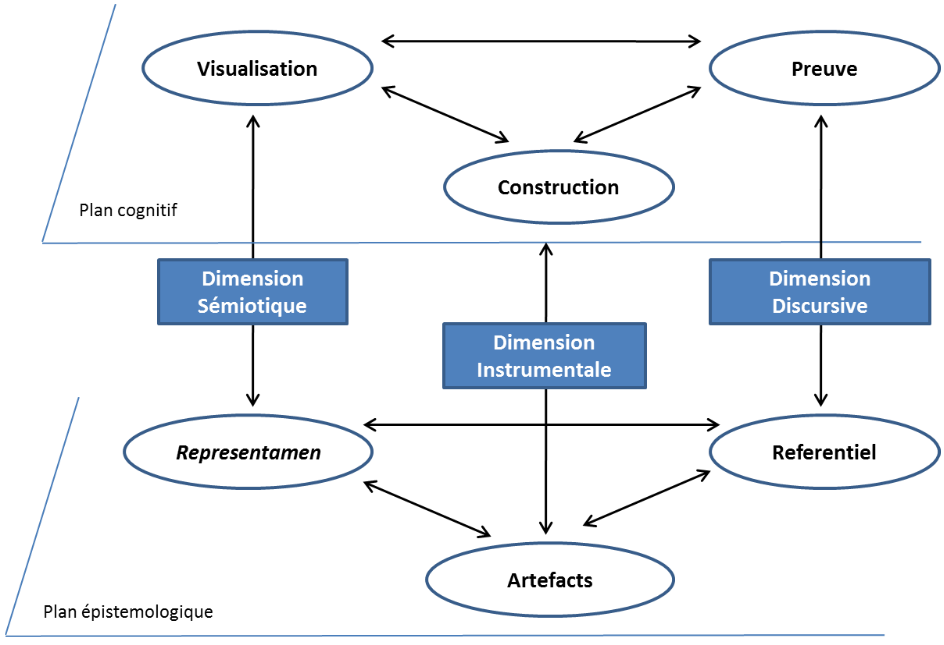


Figure: Le modèle des ETM (d'après Kuzniak, 2011)

Trois niveaux d'ETM sont à distinguer : l'ETM de référence, décrivant ce que l'institution attend, principalement repérable dans les textes officiels (programmes, documents Ressources) ; l'ETM idoine, qui décrit le travail planifié par un enseignant pour être effectif dans une classe ; l'ETM personnel, relatif à chaque élève (ou enseignant).

Dans cet article, notre intérêt se limite aux ETM idoines proposés par les manuels : nous les qualifierons d'ETM idoines potentiels (Nechache, 2015). En effet, un manuel propose des possibles, qui peuvent ensuite être adaptés par les enseignants pour leur classe.

Le théorème de Moivre-Laplace fait partie du domaine des probabilités. Dans ce domaine, Parzysz (2011) a identifié plusieurs paradigmes se référant à ce domaine mathématique :

- Un paradigme probabiliste « pseudo-concret » (P1) constituant un premier pas théorique, peu formalisé, à partir de situations réelles ;
- Un paradigme plus formel (P2) basé sur la notion d'espace probabilisé fini, dont l'horizon théorique est un système axiomatique de type Kolmogorov (paradigme P3).

Nous avons besoin ici de distinguer la version standard du paradigme P2 limité aux probabilités finies et une extension de celui-ci, que nous appellerons P2+, incluant les probabilités continues (Derouet & Parzysz, 2016).

Nous pouvons alors reformuler notre question de recherche : Comment est prise en charge l'introduction du théorème de Moivre-Laplace dans le plan sémiotico-instrumental dans les ETM idoines potentiels proposés par les manuels de terminale scientifique ?

CADRAGE HISTORIQUE

Il nous semble utile de rappeler quelques points d'histoire des mathématiques, ayant pour but de mieux faire apparaître la particularité des choix opérés en terminale scientifique. La progression suivie dans le programme de Terminale mène de la loi binomiale à la loi normale ; de manière analogue, ce sont les divers travaux autour de la loi binomiale au long du 18^{e} siècle qui, *via* la formule de Stirling, ont finalement abouti au passage du discret au continu et de la loi de probabilité binomiale à la densité de la loi normale.

Le théorème de Moivre-Laplace est un jalon dans le long cheminement scientifique qui aboutira à la loi normale. Celle-ci est en effet née de la convergence de deux voies de recherche : l'une, initiée par Jacques Bernoulli (1654-1705) dans son *Ars conjectandi* (1713), s'est intéressée au comportement à l'infini de la loi binomiale, débouchant une formulation élémentaire de la loi faible des grands nombres ; l'autre, issue de l'astronomie et de la géodésie, avait pour objet la détermination de la distribution des mesures et la recherche d'une « loi des erreurs » (Parzysz, 2013).

Les premiers travaux sur les probabilités considéraient des expériences aléatoires dans lesquelles les événements élémentaires (les « cas ») étaient considérés comme équiprobables, cette hypothèse s'appuyant généralement sur des considérations de symétrie « physique », en particulier pour les jeux de hasard et les problèmes d'urne ; dans un tel cas, la probabilité d'un événement est déterminée comme le quotient du nombre de cas favorables par le nombre total de cas possibles. Cependant, un certain nombre de phénomènes aléatoires − le lancer d'un osselet, par exemple – ne pouvaient se prévaloir de cet argument, et c'est Bernoulli qui, le premier, a envisagé un autre moyen d'aborder la notion de probabilité :

> Mais à la vérité s'offre ici à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables. [Bernoulli, 1713]

Autrement dit, en répétant un grand nombre de fois une même expérience aléatoire, la fréquence d'un événement lié à cette expérience permettra d'en trouver la probabilité. Bernoulli s'intéresse à la loi binomiale B(n, p), et plus précisément à la probabilité que la fréquence observée s'écarte de la probabilité d'une quantité donnée. L'énoncé du théorème de Bernoulli, traduit en français contemporain dans Henry (2004), est le suivant :

> Théorème : Soit E une issue possible d'une épreuve de Bernoulli. On suppose que la probabilité de E est $p = \frac{r}{t}$. Cette épreuve est répétée un nombre nt de fois. Soit F_{nt} la fréquence de réalisations de E au cours de ces nt épreuves.
>
> Alors, pour tout nombre c aussi grand que l'on veut, pour n assez grand, la probabilité que F_{nt} soit comprise entre $\frac{r-1}{t}$ et $\frac{r-1}{t}$ est plus grande que $\frac{c}{C+1}$. [Henry, 2004, p. 128]

Il montre donc que la fréquence converge en loi vers la probabilité, mais ne parvient pas à la quantifier ; c'est Abraham de Moivre (1667-1754) qui y parviendra en 1738, grâce à la formule trouvée conjointement avec « son ami » James Stirling (1692-1770) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

qui fournit un équivalent de $n!$ à l'infini. Ce travail sur la loi binomiale sera poursuivi, dans sa *Théorie analytique des probabilités* (1820) par Pierre-Simon Laplace (1749-1827) qui, à partir de la fréquence de succès f_n observée sur n épreuves, donnera un intervalle de confiance faisant intervenir une intégrale[2] :

$$P\left[f_n - \frac{T}{\sqrt{n}}\sqrt{2f_n(1-f_n)} \leq p \leq f_n + \frac{T}{\sqrt{n}}\sqrt{2f_n(1-f_n)}\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{e^{-T^2}}{\sqrt{2f_n(1-f_n)}}$$

(avec T réel donné).

Parallèlement, les astronomes se posaient la question de la distribution des mesures d'un même objet. Adrien-Marie Legendre (1752-1833) énoncera en 1805 :

> De tous les principes que l'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exact, ni d'une application plus facile que celui dont nous avons fait usage dans les recherches précédentes, et qui consiste à rendre minimum la somme des carrés des erreurs[3]. [Legendre, 1805]

Deux principes sont alors admis : 1° les erreurs se répartissent symétriquement par rapport à la moyenne, et 2° les grandes erreurs se produisent plus rarement que les petites.

Après différentes propositions pour la distribution des erreurs, Carl-Friedrich Gauss (1777-1855) proposera la fonction $f : x \to Ce^{-\frac{k(x-\mu)^2}{2}}$, où C et k sont des constantes respectivement égales à $1/_{\sigma\sqrt{2\pi}}$ et $1/_{\sigma^2}$ (μ étant la moyenne et σ^2 la variance des observations) : c'est la « loi de Laplace-Gauss » $N(\mu,\sigma^2)$.

La probabilité qu'une erreur se situe dans un intervalle I est alors donnée par l'intégrale de cette fonction sur I.

Quant au théorème dit « de Moivre-Laplace », il fait le lien entre les deux directions de recherche précédentes en posant la loi de Laplace-Gauss comme limite de la loi binomiale ; plus précisément, il dit que, si la variable variable aléatoire X_n suit la loi $B(n,p)$, alors la variable aléatoire centrée réduite

$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np\,(1-p)}}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi N(0;1).

Historiquement, l'émergence de la loi normale est essentiellement due à un travail dans le plan sémiotico-discursif, où le référentiel théorique de l'analyse a joué un rôle essentiel. Les éléments de la dimension discursive n'étant pas à la portée des élèves de terminale, l'introduction de ce théorème doit se réaliser à travers un travail dans le plan sémiotico-instrumental ; il s'agit alors de se poser la question de la façon dont ce travail se met en place.

MÉTHODOLOGIE

Les données

Dans cette recherche, nous avons décidé d'étudier l'introduction de la loi normale par l'intermédiaire du théorème de Moivre-Laplace dans les manuels de la classe de terminale scientifique en France. Nous avons fait le choix d'étudier les ETM idoines potentiels proposés par les manuels dans le but d'essayer de proposer quelques éléments pour construire un ETM idoine cohérent. Nous avons analysé l'ensemble des manuels de cette classe disponibles sur le marché, qui sont au nombre de huit. Nous nous sommes focalisés sur l'analyse des activités d'introduction au théorème de Moivre-Laplace qui se trouvent dans la partie Activités (en début de chapitre) de chaque manuel. Tous les manuels proposent au moins une activité dédiée à ce théorème.

Notre choix est de dégager la démarche retenue par chaque manuel, ainsi que les dynamiques entre les dimensions de l'ETM dans le travail demandé dans l'activité. Dans cet article, notre objectif est d'identifier une éventuelle trame commune à toutes les démarches repérées dans les différents manuels en termes de contenus rencontrés. Et, à partir de cette trame commune, de s'attacher à mettre en évidence les singularités propres à chaque manuel.

Méthode d'analyse

Nous avons analysé, dans les huit manuels, l'ensemble des activités d'introduction de la loi normale centrée réduite à partir de l'étude de la loi binomiale. La loi binomiale est étudiée pour elle-même en classe de première scientifique (grade 11), et on y aborde notamment : paramètres, distribution, représentation graphique, espérance, variance. Il s'agit plus précisément d'étudier l'ETM idoine potentiel mis en œuvre dans ces manuels, en s'intéressant notamment aux domaines en jeu, aux registres d'appui et aux justifications apportées. Nous avons pour cela distingué six points principaux :

- la problématique mise en avant,
- la contextualisation éventuelle de la situation,
- les domaines mathématiques convoqués,
- la présentation du centrage et de la réduction de la variable binomiale,
- les outils graphiques supports,
- le recours éventuel aux outils technologiques.

ANALYSE DES MANUELS

Dans tous les manuels, nous avons repéré une trame commune du point de vue des contenus mathématiques abordés, ce qui n'est pas étonnant puisque le programme de la classe impose la démarche générale. L'activité part de l'étude d'une loi binomiale, qu'il s'agit ensuite de centrer et réduire, puis – le plus souvent – on « continuise » le diagramme en bâtons associé pour arriver à une approximation de celui-ci par une courbe continue (la courbe de densité de la loi normale centrée réduite réalise correctement cette approximation pour les différents choix des paramètres n et p lorsque p n'est pas trop voisin de 0 ou 1 et n assez grand). Du point de vue de l'ETM, le domaine mathématique naturellement associé est celui des probabilités. Il se limite, au départ, au paradigme P2 des probabilités comprenant les notions d'espace probabilisé fini et de variable aléatoire discrète pour la loi binomiale, pour arriver ensuite à un paradigme plus étendu qui inclut les notions de densité et de distribution continue, P2+. Cependant, au-delà de cette similitude globale, une étude fine fait apparaître des différences, parfois importantes, d'un manuel à l'autre.

Problématique

La problématique historique n'est prise en compte que dans *Symbole* (pp. 419-421), de plus de façon très partielle et souvent implicite[4]. L'activité fait d'abord déterminer la valeur la plus probable M_n d'une variable X_n qui suit la loi B(n,p), avec p=0,46 et n=10,20,30,40,50,60. Puis on demande de comparer M_n à np (comme l'avaient fait Bernoulli et Moivre) et d'en rechercher une justification. On passe ensuite à la formule de Stirling, en faisant calculer $M_n \times \sqrt{np(1-p)}$ et vérifier que ce nombre se rapproche de $1/\sqrt{2\pi}$ lorsque n augmente[5]. Puis on procède au centrage et à la réduction, en posant

$$Z_n = (X_n - np)/\sqrt{np(1-p)}.$$

En fin d'activité, un petit encadré fournit quelques éléments (mais sans donner aucune date) :

> Les mathématiciens A. de Moivre et P.-S. de Laplace ont démontré que si u et v sont deux réels quelconques, alors :
>
> $$\lim_{n\to\infty} P(u \leq Z_n \leq v) = \int_u^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.$$
>
> La loi suivie par la variable Z_n lorsque n tend vers l'infini est appelée **loi normale centrée réduite.**

Le manuel *Repères*, quant à lui, choisit une problématique calculatoire : il affirme que « *le calcul de* $P(X_n \in [E(X_n) - 2\sigma_n; E(X_n) + 2\sigma_n])$ *est impossible à effectuer lorsque n est grand* » (p. 372), après avoir fait constater que tel est le cas, avec une calculatrice, pour n=10 000 et p=0,5.

Les autres manuels ne problématisent pas l'activité, et ce n'est qu'à la fin que l'élève peut constater la convergence d'un graphique vers un autre, avec une question du type : « *Qu'observe-t-on quand n augmente ?* ». Le manuel *Hyperbole* va même jusqu'à affirmer : « *Plus n prend de grandes valeurs, plus les bords supérieurs des rectangles se rapprochent d'une courbe dont une équation semble être de la forme* $y = ke^{-0,5x^2}$ » (p. 399), et à faire conjecturer par l'élève la valeur de k, c'est-à-dire $1/\sqrt{2\pi}$, à partir du maximum de la courbe (voisin de 0,4).

Contextualisation

Dans tous les manuels, sauf un, la loi binomiale B(n,p) est d'abord envisagée de façon tout à fait générale, avec n et p quelconques, puis particularisée en attribuant des valeurs numériques à n et/ou p. Seul le manuel *Math'x* fait usage de supports pseudo-concrets (nous y reviendrons plus loin) :

> Les foies gras commercialisés en 2012 par un producteur réputé du Sud-Ouest ont un poids dont la moyenne est 750 grammes et dont l'écart type est 100 grammes. (*ibid.*, Act. 3 p. 400)
>
> Dans une population, la proportion des personnes possédant le gène A actif est p=0,4. (*ibid.*, Act. 4 p. 400)

Domaine mathématique et paradigmes

Comme nous l'avons vu au début, le seul domaine qui intervient ici est, en principe, celui des probabilités avec les paradigmes P2 et P2+. Cependant, le manuel *Math'x* (voir ci-dessus) est très ambigu sur ce point : il prend en effet l'exemple d'une production agricole, dont il commence par donner la « moyenne », et non l'espérance ; nous sommes donc ici dans un paradigme de statistique descriptive (SD), bien que le texte parle d'une « variable aléatoire » Z et demande de calculer $E(Z)$, ce qui nous place *de facto* dans un paradigme probabiliste (P2). La même démarche se reproduit ensuite avec la production de l'année précédente, et « *on suppose que la variable aléatoire centrée réduite correspondante* Z_1 *suit la même loi de probabilité P que* Z ». En fait, rien n'empêcherait de rester dans SD tout au long de cette activité, car on centre et on réduit aussi bien un caractère statistique qu'une variable aléatoire. Mais, d'une part, le fait que le programme situe cette opération dans P2, et d'autre part, la volonté de lui donner un support concret, conduisent les auteurs à se situer dans un domaine flou qui leur fait confondre la terminologie de P2 et celle de SD.

Centrage-réduction

Le passage de la variable binomiale X_n à la variable centrée réduite Z_n intervient toujours très rapidement, pratiquement dès le début de l'activité (5 cas sur 8). Le manuel *Math'x* traite ce problème pour une variable aléatoire quelconque (dans l'Activité 3), mais les autres manuels considèrent uniquement une variable binomiale. Un seul de ceux-ci (*Odyssée*) traite le cas général, tandis que les 6 autres s'appuient sur des exemples numériques, en donnant toujours cependant la formule générale du changement de variable.

Cependant la justification de ce changement de variable est totalement absente, sauf dans *Math'x* qui, comme on l'a vu, commence par proposer une activité spécifique destinée à « *donner du sens au centrage et à la réduction* » (p. 400), demandant de situer une valeur par rapport à la moyenne d'une série en prenant l'écart-type comme unité, avec pour objectif affiché de « standardiser » plusieurs séries dans le but de les comparer :

> En centrant et en réduisant les variables, on les rend indépendantes de l'unité choisie pour leurs valeurs, avec une moyenne et un écart type standardisés de 0 et 1.

La comparaison de plusieurs variables s'en trouve ainsi facilitée. (*ibid.*)

Dans les autres manuels, on se contente de demander à l'élève d'effectuer un changement de variable imposé, comme par exemple dans le manuel *Symbole* (p. 420) :

Pour pouvoir suivre l'évolution des diagrammes avec *n*, il faut :

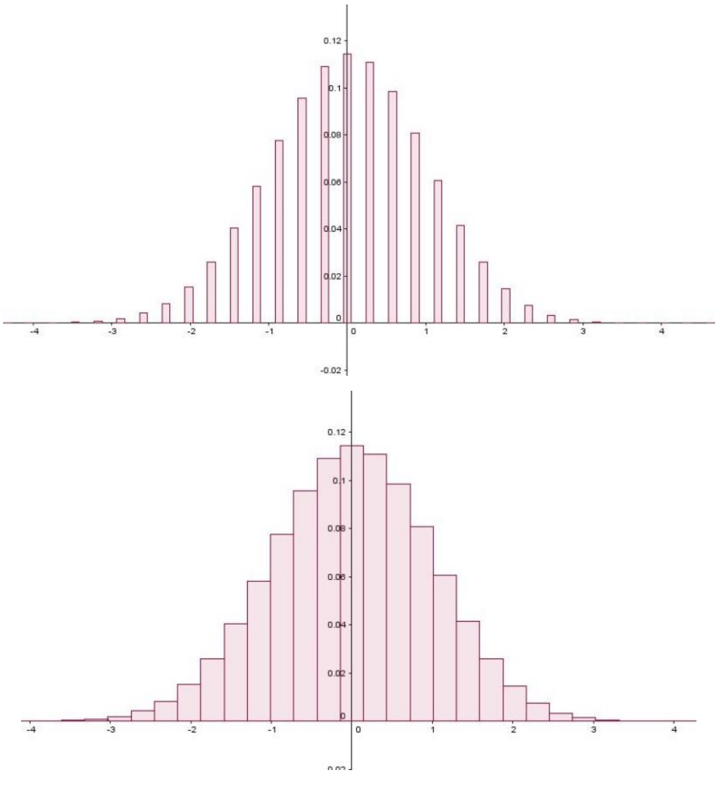
- **centrer** les variables X_n en leur retranchant leur espérance *np* […],
- **réduire** ces variables, en les divisant par leur écart type $\sqrt{npq}$ […].

Outils graphiques

Quatre types de graphiques interviennent dans les activités :

- diagramme en bâtons (D),
- histogramme,
- « pseudo-histogramme »[6], (qui n'est autre qu'un diagramme en bâtons contigus),
- courbe « en cloche » d'une distribution continue.

Le diagramme en bâtons est celui de la variable binomiale centrée réduite[7] et la courbe continue est explicitement la courbe de densité de la loi normale centrée réduite. L'histogramme, lui, est une création *ad hoc* transitoire, créée pour permettre la comparaison des deux autres diagrammes : en effet, ce type de graphique est normalement associé à une variable continue, non à une variable discrète. Dans la figure 2, nous présentons les différents diagrammes que nous pouvons rencontrer dans le cas d'une loi binomiale B(50;0,6).



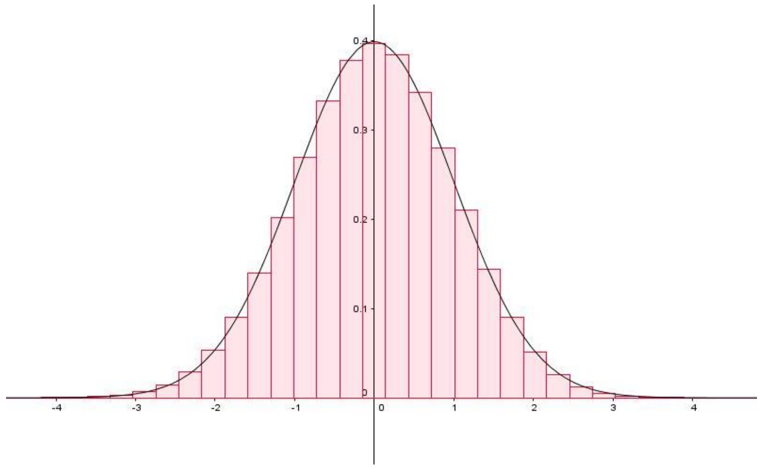


Figure 2: Du diagramme en bâtons d'une binomiale centrée réduite à la courbe de Gauss (diagramme en bâtons, pseudo-histogramme, histogramme et courbe)

Le tableau 1 résume leur présence respective dans les manuels :

Manuel	*Déclic*	*Hyperbole*	*Indice*	*Math'x*	*Odyssée*	*Repères*	*Symbole*	*Transmath*
D. en bâtons			X			X	X	X
Histogramme[8]	X	X		X	X			X
Pseudo-histogramme						X		
Courbe	X	X	X	X	X	X	X	X

Tableau 1: Présence des différents diagrammes dans les manuels

Le tableau montre que deux manuels seulement font comparer directement diagramme en bâtons et courbe en cloche (*Symbole*, *Indice*). Les autres :

- soit partent d'un diagramme en bâtons, qui est ensuite transformé en un histogramme (ou un « pseudo-histogramme »)[9],
- soit partent directement de l'histogramme (ou du « pseudo-histogramme »).

La comparaison du diagramme en bâtons (pour la variable centrée réduite Z_n), ou du « pseudo-histogramme », avec la courbe en cloche présente une difficulté : les ordonnées ne sont comparables qu'au coefficient $\sqrt{npq}$ près (dépendant de n), puisque les valeurs de Z_n sont espacées de cette quantité et non de 1. Pour y remédier les ordonnées sont modifiées, et les manuels sont contraints d'imposer le changement d'échelle, sous une forme ou sous une autre. C'est ainsi que :

- le manuel *Symbole* indique : « *Pour éviter que les diagrammes ne s'affaissent pour n croissant, on multiplie chaque probabilité* [de la binomiale centrée réduite] *par* $\sqrt{npq}$. » (p. 420) ;
- le manuel *Repères* fait au contraire diviser les ordonnées de la gaussienne par $\sqrt{npq}$ (p. 372), sans donner de justification.

Cette difficulté montre l'intérêt de passer par l'histogramme (et non par le « pseudo-histogramme ») pour remédier à ce problème de coefficient, puisque dans l'histogramme c'est justement l'aire des rectangles qui représente la fréquence (ou la probabilité ici) et non l'ordonnée.

Nous remarquons enfin que la courbe de densité est donnée dans tous les manuels. La recherche de cette courbe n'est jamais un attendu de l'activité.

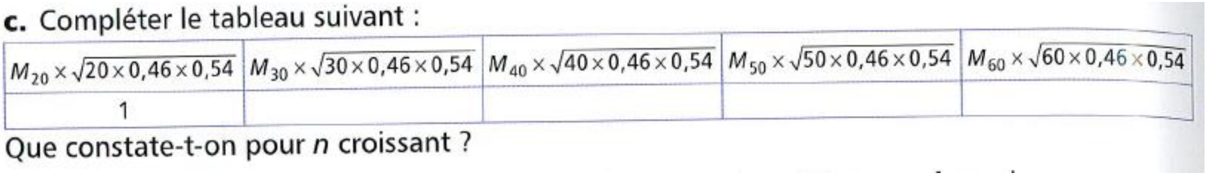
Outils technologiques

De façon attendue, notamment pour permettre une visualisation rapide de nombreux cas (notamment en augmentant *n* autant que voulu), les outils technologiques sont très présents dans les activités. Seul le manuel *Transmath* n'utilise aucun logiciel. Il fait tracer le diagramme en bâtons sur papier quadrillé, puis demande de le transformer en (vrai) histogramme, lequel servira également pour la variable centrée réduite, au prix d'un changement de graduation. C'est ce travail sur les graduations qui justifie l'absence d'un recours à la technologie. Cependant, un tel choix ne permet pas de jouer sur les valeurs des paramètres et en particulier, *n* étant fixe, on ne s'intéresse pas à sa limite (ce qui pourtant est important dans le théorème).

Le tableur-grapheur est utilisé par 5 manuels sur 8, pour obtenir une distribution binomiale et sa représentation en bâtons, et 4 manuels, pour tracer les différents diagrammes, utilisent le logiciel *GeoGebra* qui permet notamment le passage d'un diagramme en bâtons à un histogramme, pour arriver ensuite à la courbe. Les curseurs permettent de rapidement voir évoluer les diagrammes lorsque *n* varie. Un manuel a recours à *Open Calc*. On note aussi que *Repères* recourt à la calculatrice, en liaison avec sa problématique (montrer qu'un calcul est impossible, voir plus haut).

Enfin, on peut remarquer que seul le logiciel *Geogebra* permet d'obtenir un histogramme et offre la possibilité de modifier *n* rapidement en le mettant en curseur.

Comme il est de règle, les instructions données à l'élève sont, soit très vagues (« comparer les diagrammes »), soit du type « presse bouton » ; il s'agit uniquement de compléter un tableau, d'effectuer un calcul, de suivre une suite d'instructions… Voici deux exemples extraits de deux manuels :


c. Compléter le tableau suivant :

$M_{20} \times \sqrt{20 \times 0{,}46 \times 0{,}54}$	$M_{30} \times \sqrt{30 \times 0{,}46 \times 0{,}54}$	$M_{40} \times \sqrt{40 \times 0{,}46 \times 0{,}54}$	$M_{50} \times \sqrt{50 \times 0{,}46 \times 0{,}54}$	$M_{60} \times \sqrt{60 \times 0{,}46 \times 0{,}54}$
1				

Que constate-t-on pour *n* croissant ?

Figure 3. Tâche proposée dans *Symbole* (p. 420)

b. Superposer la courbe de $\frac{f}{\sigma_n}$ en utilisant les colonnes **C** et **D**.

→ Dans **Open Calc**, cliquer-droit sur le graphique précédent, choisir « **PLAGE DE DONNÉES** » puis « **AJOUTER** » en entrant pour X la colonne **C** et pour Y la colonne **D** ; le rendu sous forme de ligne s'obtient en double-cliquant sur les nouveaux points et en choisissant le style « **CONTINU** » dans les propriétés de la ligne au lieu de « **INVISIBLE** ».

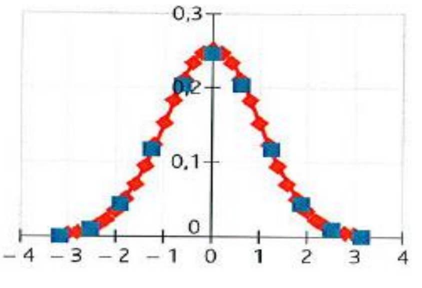


Figure 4: Tâche proposée dans *Repères* (p. 373)

RESULTATS ET PISTES POUR CONSTRUIRE UN ETM IDOINE PLUS COHERENT

Cette étude montre que le travail attendu dans les différentes activités est quasi-exclusivement limité dans le plan sémiotico-instrumental. La dimension instrumentale peut être sollicitée par le biais de divers outils technologiques (calculatrice, tableur, *GeoGebra*…). Cependant cette dimension se limite dans beaucoup de cas à du « presse bouton ». L'utilisation du logiciel est simplement un support commode (voire indispensable) à la visualisation, qui est le maître mot de cette découverte du théorème de Moivre-Laplace. C'est un moyen de voir rapidement et facilement ce qui se passe lorsque n augmente. Pour autant, cet atout n'est pas exploité dans tous les manuels, ce qui alors peut faire disparaître l'intérêt de cet outil. C'est la dimension sémiotique, principalement *via* la visualisation « graphique », qui fait avancer le travail. L'aspect discursif n'apparaît que de façon très fugace, le plus souvent pour des justifications peu exigeantes et/ou *a posteriori* :

> On considère X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ avec p un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ 1[$ et n un entier naturel non nul. On s'intéresse dans cette activité à la loi de probabilité de la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
> Les parties **A**, **B**, **C** et **D** peuvent être traitées indépendamment.
>
> **PARTIE A. Loi de probabilité et représentation graphique**
>
> **1** Justifier que la variable aléatoire Z prend les valeurs suivantes :
> $$z = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{où } k \text{ est un entier naturel tel que } 0 \leqslant k \leqslant n.$$
> **2** **a.** Préciser le nombre de valeurs prises par la variable aléatoire Z.

Figure 5: La dimension discursive dans le manuel *Odyssée* (p. 392)

Cet aspect est sans aucun doute lié – au moins en partie − à la nature même des activités dans les manuels : il faut intéresser l'élève (donc lui poser des questions) et éviter absolument qu'il ne soit bloqué et abandonne (d'où des questions faciles). En classe, on pratiquerait sans doute différemment, en sollicitant davantage de réflexion de la part des élèves. Dans la même optique, en ce qui concerne les outils technologiques, les manuels tablent sur une connaissance minimale du fonctionnement des logiciels et sont tentés de détailler la marche à suivre. En classe, les aides liées à l'utilisation des logiciels pourraient apparaître seulement en cas de besoin, même si nous pouvons penser que des aides seront certainement nécessaires à un grand nombre d'élèves.

La mobilisation de la dimension sémiotique, avec les différents graphiques convoqués, s'avère indispensable, mais pour autant la succession de tous les graphiques est souvent absente. La dimension instrumentale n'est, quant à elle, pas entièrement exploitée (notamment le fait de ne pas faire tendre n vers l'infini). Ces deux manques peuvent avoir tendance à faire disparaître le sens du théorème.

On a vu que, même si la démarche suivie n'est pas sans rapport avec la progression historique − dans les deux cas on s'appuie sur la loi binomiale pour arriver à la loi normale − la motivation pour y arriver est, elle, différente. Pour Bernoulli, de Moivre et leurs successeurs il s'agissait en fait, même si le problème ne se présentait pas sous cette forme, de déterminer un intervalle de fluctuation pour une variable binomiale. Or, cette notion est également au programme de la classe, d'abord pour la loi binomiale puis pour la loi normale (intervalle asymptotique). Opérer une transposition didactique explicite de la référence au problème historique pourrait, d'une part, permettre de problématiser la question, et d'autre part faire apparaître la cohérence interne du programme.

D'autre part, nous avons également observé que des éléments essentiels de la démarche ne sont pas justifiés, à savoir la centration et la réduction de la variable binomiale, la multiplication de la probabilité par σ_n, le choix de la fonction continue permettant d'approximer le diagramme en bâtons. Mais serait-il possible de fournir aux élèves des justifications de la démarche ?

Tout d'abord, pour justifier le fait de centrer/réduire, il semble intéressant de chercher à comparer deux lois binomiales. Si on veut par exemple comparer la forme de deux distributions binomiales, par exemple B(50, 0,1) et B(200, 0,4), on s'aperçoit qu'on peut difficilement le faire directement, car 1° elles ne sont pas dans la même zone du plan graphique (les maximums sont respectivement situés aux abscisses 5 et 80) , et 2° l'une est plus aplatie que l'autre (les maximums ont pour valeurs respectives environ 0,2 et 0,6 environ). L'idée peut alors émerger d'effectuer des changements d'unité sur les axes destinés à « calibrer » les graphiques. Et, comme l'espérance et l'écart type correspondent respectivement à une valeur moyenne et à la dispersion de la distribution, on peut convenir de ramener l'espérance à 0 (nouvelle origine) et l'écart type à 1 (nouvelle unité sur l'axe des abscisses). Les distributions auront alors toutes une forme assez similaire, centrée en 0, plus ou moins aplatie.

La question de l'aplatissement – on l'a vu – est résolue dans les manuels par le passage à l'histogramme, pour faire apparaître l'aire : comme les valeurs de la variable sont distantes de $1/\sigma_n$, la hauteur des rectangles sera égale au produit de la probabilité par σ_n.

Pour que les élèves puissent eux-mêmes trouver la courbe qui se cache derrière, il semble qu'une solution soit que la loi normale centrée réduite soit rencontrée en amont, en tant qu'exemple, lors de l'étude des distributions de probabilité continues. Les élèves pourraient alors la mobiliser lors de l'étude de distributions binomiales et reconnaître la fameuse courbe en cloche.

Au lieu de construire l'histogramme, une autre façon de faire serait – si les élèves ont déjà rencontré la loi normale – au contraire, après avoir constaté la similitude de la courbe de Gauss avec le diagramme en bâtons, de « discrétiser » la distribution normale, en partitionnant **R** selon les valeurs de la variable centrée réduite considérée et en concentrant la probabilité de chacun des intervalles en son centre[10] (Parzysz, 2007). La superposition des deux diagrammes permettrait alors, en faisant varier *n*, de constater la convergence.

DISCUSSION

Dans ces différents manuels, nous avons pu mettre en avant que le théorème de Moivre-Laplace en terminale S est une illustration d'un travail mathématique centré dans le plan sémiotico-instrumental. Faute de pouvoir s'appuyer sur la dimension discursive, les notions en jeu étant au-delà de la portée des élèves, les manuels prennent alors appui sur le sémiotique et l'instrumental. Cependant sans aller jusqu'à la preuve du théorème, nous avons vu que quelques éléments de justification pourraient être apportés pour donner du sens au travail de l'élève et ne pas le cantonner à un rôle de spectateur, sans réellement comprendre ce que l'on fait. Même si nous n'avons pas proposé de réelles alternatives pour cette introduction par la visualisation, nous avons mis en évidence certains obstacles à sa compréhension.

L'absence d'un substrat théorique suffisant chez les élèves de ce niveau a eu pour conséquence directe le fait que la présence de ce théorème dans le programme de terminale fait polémique. On peut légitimement se poser la question de la nécessité d'introduire de tels théorèmes au niveau du lycée, et des voix se sont récemment élevées pour proposer « *de renvoyer à l'université* […] *l'étude de la loi normale, de se concentrer au lycée sur les lois discrètes (lois binomiale, de Poisson, géométrique…) et d'utiliser ces connaissances de probabilités pour faire aussi de la statistique* » (Perrin, 2015, p. 63).

NOTES

1. Nous avons par ailleurs étudié, également dans le cadre théorique des ETM, un autre aspect de la gestion de ce passage en classe de terminale (Derouet & Parzysz, 2016).

2. Qui est maintenant connue sous le nom d'intégrale de Gauss.

3. Par « erreur », il faut entendre ici « écart à la moyenne ».

4. Les noms de Moivre et Laplace sont cités dans 4 manuels (*Déclic*, *Math'x*, *Odyssée*, *Symbole*).

5. Stirling et Moivre sont mentionnés, mais sans dates.

6. En ce sens que ce n'est pas l'aire, mais, l'ordonnée, qui est égale à la probabilité de l'intervalle.

7. Parfois précédé par celui de la variable binomiale initiale.

8. Le mot « histogramme » n'est employé que par *Transmath*, *Hyperbole* et *Math'x* ; les autres manuels se contentent de parler de « rectangles », ce qui est sans doute dû au fait qu'il ne s'agit pas de « vrais » histogrammes.

9. *Repères* présente deux activités successives, la première avec passage direct des bâtons à la courbe, la seconde avec transition par des rectangles contigus.

10. Sauf les deux extrêmes, bien sûr.

REFERENCES

Batanero, C., Tauber, L. M., & Sánchez V. (2004), Students' reasoning about the normal distribution. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 257-275). Dordrecht : Kluwer.

Bernoulli, J. (1713). *Ars conjectandi*. 4ème partie. Traduit du latin par N. Meusnier. Ed. IREM de Rouen 1987.

Derouet, C. & Parzysz, B. (2016). How can histograms be useful for introducing continuous probability distributions. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 757-773.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Henry, M. (2004). La démonstration par Jacques Bernoulli de son théorème. In E. Barbin & J.-P. Lamarche (Eds.), *Histoires de probabilités et de statistiques* (pp. 121–140). Paris : Ellipses Edition.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014), Espaces de travail mathématique. Points de vue et perspectives, in *Relime*, especial 2014, Tomo 1.

Laplace, P.-S. (1820), Théorie analytique sur les probabilités. In *Œuvres complètes de Laplace*, Tome 7, Paris.

Legendre, A.-M. (1805), *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.* Paris : Firmin Didot.

Ministère de l'Éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative (MENJVA). (2011). Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques. Classe terminale de la série scientifique. *Bulletin Officiel spécial*, n°8 (13 octobre 2011).
http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

Ministère de l'Éducation nationale, de la Jeunesse et de la Vie associative (MENJVA) & DGESCO. (2012). *Ressources pour la classe terminale générale et technologique. Probabilités et statistique.*
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/11/5/LyceeGT_ressources_Math_T_proba-stat_207115.pdf

Nechache, A. (2015), Comparaison de la démarche de validation dans les espaces de travail idoines en géométrie et en probabilité, In Gómez-Chacón, M. I., Escribano, J., Kuzniak, A., Richard, P. (Eds.), *Espace de Travail Mathématique, Actes Quatrème Symposium ETM.* (pp. 51-68).

Madrid : Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid.

Parzysz, B. (2007) Loi normale, courbe en cloche et tableur. *Bulletin de l'APMEP* 473, pp. 880-886.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 16, 127-147.

Parzysz, B. (2013) La longue genèse de la loi normale. *Bulletin de l'APMEP* 502, pp. 29-40.

CORPUS DES MANUELS DE CLASSE TERMINALE SCIENTIFIQUE ÉTUDIÉS

Barros, J.-M., Bénizeau, P. & Morin, J. (dir.). (2012). *Transmath. Term S. Enseignement spécifique.* Paris : Nathan.

Beltramone, J.-P. (dir.). (2012). *Déclic mathématiques TS. Enseignement spécifique et de spécialité.* Paris : Hachette Education.

Bruneau, F., Choquer-Raoult, A., Cocault, M., Ferré, F., Hanouch, B., Joffrédo, T., Lavancier, F., Mauxion, H. & Simon, D. (2012). *Term S Maths repères. Enseignement spécifique et de spécialité.* Paris : Hachette Education.

Deschamps, C. (dir.). (2012). *Symbole maths Term S*. Paris : Belin.

Le Yaouanq, M.-H. (dir.). (2012). *Math'x. Term S. Enseignement spécifique*. Paris : Didier.

Malaval, J. (dir.). (2012). *Hyperbole. Mathématiques. Term S. Enseignement spécifique*. Paris : Nathan.

Poncy, M., Bonnafet, J.-L. & Russier M.-C. (dir.). (2012). *Indice. Maths. Term S. Enseignement spécifique*. Paris : Bordas.

Sigward, E. (dir.). (2011). *Odyssée. Mathématiques. Tle S. Enseignement spécifique.* Paris : Hatier.

MATHEMATICAL WORKING SPACE: THE CASE OF ALGEBRA-RELATED TOPICS IN PRIMARY SCHOOL

Eleni Demosthenous

University of Cyprus

demosthenous.eleni@ucy.ac.cy

Even though the importance of engaging primary school students with algebra-related topics is widely acknowledged, there is limited evidence of students' work with relevant tasks in ordinary classrooms. In this paper, we adapt the Mathematical Working Space model to study the classroom work with algebra-related tasks. We draw on two classroom episodes from fifth-grade classrooms and discuss the implementation of the same pattern task. The analysis indicates the ways the epistemological and cognitive planes are shaped in the two episodes. We also elaborate on the role of the teacher in activating the semiotic, instrumental and discursive geneses. Finally, we discuss the adaptation of the MWS model for the case of algebra-related topics in primary school considering its affordances and limitations.

Keywords*: algebra, pattern task, primary school, discursive*

INTRODUCTION

Algebra is a gateway to higher mathematics and is considered essential for full participation in modern society since it provides a language that enables a person to express relationships, to form generalisations and to solve certain families of problems (Usiskin, 1995). This language is articulated using symbolic representations conveyed through graphs, tables, spreadsheets and traditional formulas that are considered "among the most powerful intellectual tools that our civilisation has developed" (Kaput, 2000, p.4). Both researchers and curriculum frameworks recommend that primary school students should be offered learning opportunities that can prepare them for formal algebra learning at secondary school (e.g., Carpenter, Franke & Levi, 2003; NCTM, 2000). Even though there is current evidence that young students can engage successfully with algebra-related topics from the early grades, students' and teachers' work in ordinary classrooms has not been sufficiently explored in order to develop a comprehensive picture of the class work. Hence, it is meaningful to develop or adapt frameworks that could help us to explore the teaching and learning of algebra-related topics in primary school in order to identify aspects of the mathematical work in class that could be potentially enhanced.

One framework that could provide the lens for delving into the classroom is the Mathematical Working Space (MWS) model since it could be used as a tool for tasks interpretation and description, for supporting the observation of teaching episodes, and for tracking the progression of students' mathematical work (Tanguay, Kuzniak, & Gagatsis, 2014). The model was based on Kuzniak's (2012) model regarding the Geometrical Working Space. The recent efforts are aimed at exploring the application of the model to other mathematical domains. In this paper, we explore, through the lens of the MWS model, in what ways teachers engage students with algebra-related topics in primary school and in what ways the MWS model delineates for the case of algebra-related topics. We first discuss the nature of algebra and algebra-related topics in primary school in order to describe the relevant mathematical content. We then present the MWS model, the analysis of the task, and its implementation in two classrooms. We discuss the analysis and the findings by elaborating on the interweaving of the three geneses, and the affordances and limitations of the model.

ALGEBRA IN PRIMARY SCHOOL

Two prevailing approaches to the progression from arithmetic to algebra in primary school are that of pre-algebra and early algebra. On one hand, the supporters of pre-algebra emphasise students' cognitive obstacles and the need for evolution and adjustment from arithmetical notions to algebraic language through a transitional phase (Filloy & Rojano, 1989; Kieran, 2004). On the other hand, the advocates of early algebra suggest that arithmetic has an inherently algebraic character that needs to be revealed from the beginning of schooling onwards (Kaput, 2000; Schoenfeld, 2008).

In this paper, we use the rather broad term algebra-related topics in primary mathematics to refer to the mathematics topics that are associated (implicitly or explicitly) with algebra as they are taught in primary mathematics. This is a rather open stance that allows space for both pre-algebra and early algebra, since it does not reflect particular views about the place of algebra in the curriculum, students' difficulties and relevant pedagogical approaches. In these topics, the use of letter symbolism is not seen as a necessary or sufficient condition for thinking algebraically (Radford, 2010). According to Sfard (1995, p.18), algebra is "concerned with generalised computational processes, whatever the tools used to convey this generality".

A synthesis of the existing characterisations of algebra has led to defining the tasks that belong to algebra-related topics in primary mathematics, namely, the algebra-related tasks. These are grouped into the following three categories based on the relations between numbers and quantities: arithmetically situated relations, rule-based relations and known-unknown relations (Demosthenous & Stylianides, 2014). Arithmetically situated relations tasks focus on the structure of arithmetic by attending to the behaviour of arithmetic operations and properties and why they work. This category of tasks relates to algebra as generalised arithmetic (Carpenter et al., 2003; Kaput, 2008). Rule-based relations tasks focus on the relations that are determined by a rule. These tasks could engage students in forming rules, extending these to near and far cases, and generalising rules. This category of tasks relates with the study of patterns, functions, and variation (Kaput, 2008; NCTM, 2000) and the generalisation perspective within the introduction to algebra, as proposed by Bednarz, Kieran and Lee (1996). Known-unknown relations tasks focus on the relations between known and unknown quantities and numbers. The nature of the relations range from simple direct relations to complex non-direct relations (i.e., relations for which there is no direct bridge between known and unknown). This category of tasks draws on the description of algebra as a cluster of modelling languages by Kaput (2008) and the problem-solving approach within the introduction to algebra by Bednarz et al. (1996).

In this paper, we take a preliminary step in exploring the application and adaptation of the MWS model for the case of algebra in primary school, and we focus only on rule-based relations tasks.

UNPACKING THE CLASS WORK WITH RULE-BASED RELATIONS TASKS

Unpacking the way students and teachers work with algebra-related tasks helps to identify processes that would be substantial in terms of the epistemological and cognitive planes. In this section, we focus only on pattern tasks that belong to the rule-based relations task category, since we will elaborate below on the implementation of a growing geometric pattern task in two fifth-grade classrooms. Pattern tasks are recommended for their dynamic representation of variables, the potential of discovering generality, forming justifications and developing functional thinking, which are key aspects of algebra (Carraher, Martinez & Schliemann, 2008; Mason, 1996).

A growing geometric pattern task often allows students to notice the first pattern terms, identify what changes and what stays the same, find consecutive terms, and generalise the relation between the position number and the number of elements in each position (i.e., forming a functional rule). Students tend to focus on the variation within a single data set rather than on the co-variation between two data sets (e.g. Warren & Cooper, 2008). Using this recursive strategy, students can find subsequent position of a pattern, but it does not support them in seeing the co-variation between the two data sets and in finding the underlying functional rule (Moss & McNab, 2011). Others use the counting strategy by drawing the pattern and counting the number of elements, while others often use incorrect proportional thinking and the guess-and-check strategy by guessing a rule without focusing on why the rule works (Lannin, 2005).

Several intervention studies have shown that young students can engage successfully with pattern tasks and develop functional rules using various representations (e.g. expressing the rule verbally) (e.g., Moss & McNab, 2011). Didactic processes that support students in thinking about the relationships between two data sets are the explicit questioning to link the position to the pattern, using colour to represent different growing components of the pattern, and generalising from small position numbers to large position numbers (Warren & Cooper, 2008).

Even though students in suitable working spaces are able to engage meaningfully with pattern tasks, many teachers seem to lack the ability to exploit fully the potential of patterning activities in classroom teaching, as indicated in Asquith et al.'s (2005) study, where teachers missed the opportunity for generalisation in pattern tasks. Additionally, pre-service primary school teachers in Zazkis and Liljedahl (2002) regarded that engagement with algebra is manifested exclusively in the use of letter symbolism. Teachers seem to lack a robust understanding, which might restrict the potential for students' learning and the development of algebraic habits in pattern tasks.

MATHEMATICAL WORKING SPACE AND ALGEBRA-RELATED TOPICS

According to the MWS model, mathematical work is achieved during the process of giving meaning to the epistemological and cognitive planes, and its organisation in two levels is the result of three geneses (i.e., instrumental, semiotic and discursive) (Kuzniak & Richard, 2014) (Figure 1). In the case of algebra-related topics, the epistemological plane is closely related to the domain of algebra while the cognitive plane is related to the thinking of a person when solving an algebra-related task. Through the instrumental genesis, the artefacts are made operative within the construction process, and this contributes to completing the mathematical work. The semiotic genesis gives meaning to the objects based on semiotic registers and provides them status of operative mathematical objects. The discursive genesis of proof relies on the theoretical frame of reference for developing mathematical reasoning and validation (Kuzniak, 2012; Kuzniak & Richard, 2014).

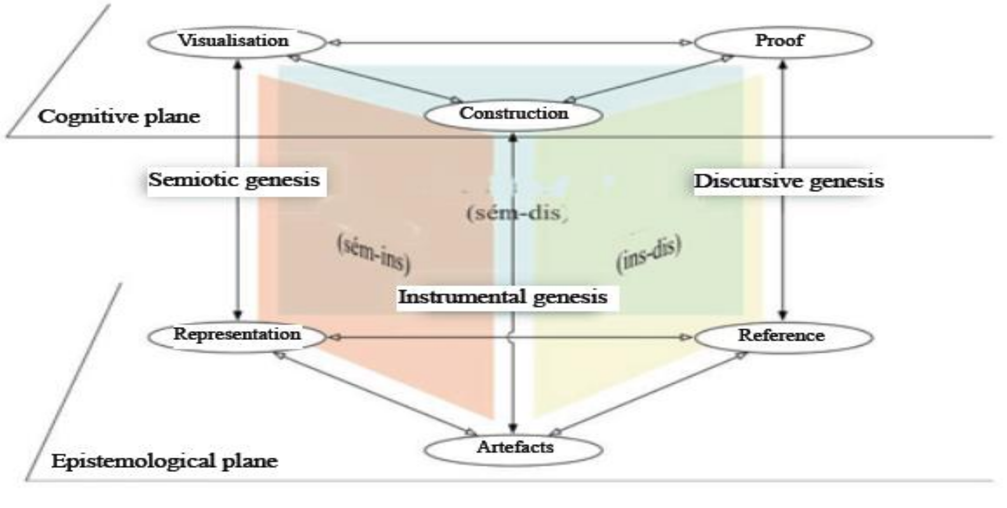


Figure 1: The mathematical working space model (adapted from Tanguay, Gagatsis & Kuzniak, 2014)

For the case of algebra, Hitt, Saboya and Cortés Zavala (2016) explored the possibility of constructing an arithmetic-algebraic working space and adopted the stance of enhancing the transition from arithmetic to algebraic thinking. They suggest that while examining the three geneses, one must take into consideration the visualisation between arithmetic and geometric processes, the visualisation of a general arithmetic-algebraic rule, the recognition of the pattern, and the activities that promote validation processes (with technology and paper-and-pencil).

The visualisation process is about interpreting and giving meaning to the representations leading to a semiotic genesis. The construction process is about experimenting and exploring the tasks using the artefacts from different perspectives, leading to an instrumental genesis. The proof process is about making arguments about the properties and rules that make up the theoretical frame of reference, leading in this way to a discursive genesis, in which the articulation of relations between objects and quantities occurs. In this paper, we will refer to the suitable type of mathematical working space to explore whether the implementation of a task was effective in classroom, whether it enabled the students to engage in a task purposefully and whether it was organised in a valid way by considering its various components (Kuzniak, 2012).

TASK ANALYSIS

The task presents a growing geometric pattern, that of triangular numbers, which was drawn from the mandated textbook series used at the time of data collection in all state schools in Cyprus (Figure 2). The task provides the first four pattern terms and asks students to find the fifth and sixth term (both the geometric figure and the number of dots). Also, the task asks students to find the number of dots that will appear on the figure of the tenth tablet and to justify their answer. At the epistemological level, the given representation consists of a table that shows the position number, the geometric figures and the number of dots on each tablet. The available artefacts are students' everyday mathematical instruments and possible drawings that could be used to identify how the pattern grows (e.g. making a circle around the number of dots that are added in each consecutive figure). The theoretical frame of reference draws on the relation between the consecutive figures (recursive rule) or between the position number and the number of dots (functional rule). At this grade level, students are expected to express the relations verbally or arithmetically (e.g., with reference to a generic example) since they have not been introduced to letter symbolism. The algebraic expression n.(n+1)/2 is not expected at this grade level. Letter symbolism is not a necessary condition for thinking algebraically (Radford, 2010) and the syntactic and symbolic aspects of generalisation are expected to be developed in differing extents according to the grade level (Kaput, 2008). Also, regarding the related proof, according to Stylianides (2007, p. 291), it could be "communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community", such as oral language, pictorial, tabular, and symbolic.

Series Number	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
Tablet	●	● ●●	● ●● ●●●	● ●● ●●● ●●●●		
Number of dots	1	3	6	10		

Complete the table.
How many dots will be on the 10th tablet? Justify your answer.

Figure 2: Textbook Task (MEC, Grade 5 Volume A, 1999, p. 56)

The task does not explicitly asks for the functional rule between the position number and the number of dots, as students can find the number of dots on the tenth tablet just by working recursively from the seventh to the tenth tablet. However, the task seems to offer the opportunity for students to find a functional rule since students were already expected to work recursively in the first question of the task, and the second question also asks for a justification that would involve a valid argument. Given that pattern tasks are considered meaningful opportunities for engaging with generalisation and functional thinking, which are key aspects for algebra, we consider that forming a functional rule would provide the class a working space for algebra-related topics in primary school. A generalisation of the functional rule could be "To find the number of dots for any position number, we add all the integer numbers starting from 1 to that of the position number" and a justification "In each tablet, there are rows made of dots that form a triangular shape. In the first row, there is one dot, in the second row, there are two dots and so on until the last row in which there are as many dots as indicated by the position number. Hence, that's why we add the integer numbers from 1 to that of the position number". Even though this is an additive functional rule, it still shows the variation of the number of dots in each tablet depending on the position number. In any event, there are various ways of seeing and interpreting the pattern in Figure 2.

CLASSROOM DATA ANALYSIS

We now present and discuss the implementation of the same pattern task (shown in Figure 2) in Michalis' and Gianna's classrooms and we frame our analysis using the MWS model. The classroom data were drawn from a larger study in which lessons were observed in primary schools in Cyprus. The participating teachers were regarded as effective teachers by their headteachers and were observed during lessons that involved algebra-related tasks. In addition to the observations, semi-structured interviews were conducted with the participating teachers to elicit their conceptions about the teaching of algebra-related topics in primary school and their reflection about the lesson observed.

Both teachers were teaching in 5th grades and were quite experienced. Michalis had 18 years of experience while Gianna had 11 years of experience. Both acknowledged that they did not have a clear understanding of what is the nature of tasks relevant to algebra. Michalis mentioned, 'I admit that I went back to my own textbooks to distinguish what is algebra, because it was not clear in my mind at the beginning'. Gianna also mentioned, 'I thought of what may be the boundaries of algebra. I mean, where algebra starts and where it ends, if it is something that continues, if it is something that is found in other units and other topics'. Their explicit conceptions indicate that they possibly did not have a robust understanding about the potential of these tasks, possibly having difficulties in reflecting on the epistemological components of the task.

We clarify here that we refer to the cognitive plane of the class and not of individual students, as the available data do not allow us to explore in depth individual students' thinking. In the classroom episodes below, the two classes worked on the second question of the task and tried to find the number of dots on the tenth tablet and to justify their answer.

Classroom Episode 1: Michalis' Class

Teacher: Let's answer the second question. Let's count how many dots will be on the eighth, ninth and tenth tablets. You can draw the tablets on the paper.
(After students worked independently, they return to whole class discussion, and the students proposed then the number of dots for the eighth, ninth and the tenth tablet after drawing the triangular numbers)
Teacher: So, how many dots will the tenth tablet have?

Stella: Fifty-five. (The teacher writes 55 on the board)

Teacher: Now, if I asked you to find the [number of dots for the] twentieth and thirtieth tablet, how could you do that? Shall we find some kind of calculation, some pattern?

Rafael: Fifty-five times two, because it is double the tenth tablet.

Teacher: What if I asked you to find the number of dots on the nineteenth tablet? You could not then double the number [of dots]. Can we think of a way to find this? [..] Without drawing anything.

Marina: It is the multiplication table of three [referring to the sequence of triangular numbers].

Teacher: Is twenty-eight in the multiplication table of three?

Students: No.

Teacher: It is not easy, you need to think. I am looking for a relation between the position number and the final result [the number of dots].

Rafael: For the ninth is forty-five.

Teacher: If I ask you to find the nineteenth, you need to know the eighteenth.

Alexis: Three times one, makes three, minus two equals one. Three times three makes nine, minus three, makes six.

Teacher: Sometimes you subtract two and sometimes three. How many are we going to subtract to find the nineteenth? We need to find a way, an equation so when I have this number (showing the position number), then to multiply, and afterwards divide to find the result (showing the numbers of dots).

Philippos: We can do two times three divided by two, makes three. Three times four divided by two, makes six. Four times five divided by two makes ten.

Teacher: Two times three divided by two, equals three. (The teacher writes the expression (2x3)/2=3 on the board) Who has understood what Philippos did? Who wants to continue?

Students: Five times six, divided by two, fifteen. Six times seven, divided by two, twenty-one. Seven times eight, divided by two, twenty-eight, eight times nine, divided by two, thirty-six. Nine times ten, divided by two, forty-five.

In Michalis' class, students constructed the fifth and sixth figure and counted the number of dots. Also, they mentioned that from the first to the second tablet, they added two, then three and then four. In the episode above, Michalis asked students to draw the eighth, ninth and tenth triangular numbers and to count the number of dots (line 1). The representations (table and figures) were interpreted through the visualisation process, in which students observed the first four geometric figures, then tried to explore how the pattern grows and engaged in constructing the next figures, hence being in a semiotic genesis. Since students worked recursively and counted the number of dots, no justification was given to explain why 55 was the tenth triangular number, as requested by the task. By this point, students were not encouraged to articulate the relation between the consecutive figures or between the position number and the number of dots in order to reason and justify their answer.

It is interesting that even though Michalis encouraged students to work recursively to find the tenth triangular number, he then asked students to find the nineteenth and twentieth triangular numbers for which students had to find a functional rule as it was no longer possible to work recursively (lines 10-12). At this point, Michalis seems to have given the opportunity for students to develop arguments regarding the general rule that describes the pattern and thus setting the class into a discursive genesis. Rafael made an unsuccessful attempt to find the twentieth triangular number as he employed a proportional strategy (line 13). Michalis then revised the question and asked students to find the nineteenth triangular number, so that it was no longer possible to double the number of dots of the tenth tablet (line 14-16). The teacher asked students not to rely on drawings, possibly aiming for a functional rule.

Afterwards, Alexis attempted to form a rule (lines 25-26) but Michalis rejected the idea explaining that Alexis was using the rule inconsistently (lines 27-28). Michalis then guided students by revealing that the rule would involve a multiplication and a division (lines 29-30). Philippos figured out a rule and showed that it worked for the first four triangular numbers (lines 32-34). The teacher seemed to approve of Philippo's idea (lines 35-37) and the students tested the suggested rule for the next five triangular numbers (lines 38-41). Even though the functional rule was accepted, the class did not provide an argument to explain why it is valid and why it holds true for any case, but instead seemed to have relied on the guess-and-check approach and empirical evidences that the rule worked for the cases the class had tested. Overall, the class ended up in a functional rule, which can be regarded as being part of the theoretical frame of reference in the epistemological plane for this task. However, no meaning was given to the rule based on the figural representations, the exploration of the first geometric figures of the pattern and the construction of the following ones. Neither was developed argumentation to justify the rule, nor was explained verbally why the relation holds to lead the class in a discursive genesis. The epistemological plane does not seem to have been meaningfully linked to the cognitive plane in giving meaning to the rule. Tools such as drawings, that could have made visible which components of the figure change and which stay the same, do not seem to have been employed, during the construction process.

Classroom Episode 2: Gianna's Class

1 Teacher: Have a look at these [the figures shown in the textbook]. Do you
2 observe any pattern?
3 Melios: Every time, according to how many we add, the base is that number
4 and then it goes up with fewer dots.
5 Teacher: So Melios has observed that, the number that I add to find the number

of dots of the following figure, it is the number that shows how many dots are at the base of the pyramid. Here (showing the second figure) I have added two [from the first to the second figure], and this is how many dots are at the base of the pyramid [two dots at the base of the triangle]. Here, three (the teacher shows that from the second to the third figure, they have added three, and the third figure has three dots at the base of the triangle) and so on.
[..]
Teacher: How can we justify our answer?
Antonis: Now, the base of the tablet will have ten dots, and then it will go, nine, eight, seven, six and will continue like that.
Teacher: Bravo Antonis. Now, the base [of the figure] will have ten dots on the tenth tablet. How can we be certain about this? What would be another way of working about it?
Marios: We can make a table.
Teacher: We can continue the table in the textbook. So, how many dots will be in the seventh tablet? How many will we add?
Vasia: Plus seven.
Teacher: In total?
Vasia: Twenty-eight. (The teacher writes 28 on the board)
(The students claimed similarly the number of dots on the ninth and tenth tablet)
Teacher: So if we extend the table, we observe that the tenth tablet will have fifty-five dots. (The teacher writes 55 on the board)
(The teacher encourages students to draw the figures in their textbooks)
Teacher: How are we going to justify our answer? The justification comes from the two ways we discussed before. We need to write a general rule here. Yes, Nikoletta.
Nikoletta: As the tablets go on, that’s how many the dots are.
Teacher: So which pattern do we follow every time?
Nikoletta: Plus one.
(The teacher dictates a general rule and students write it in their textbooks)
Teacher: Every time we go from one tablet to the next, we add an additional

number to the pattern. The number which we add is the base of the pyramid. So, we create the pyramid and add all the dots of the pyramid and this gives us the answer for every tablet.

In Gianna’s class, students made some initial observations about how the pattern grows and constructed the fifth and sixth figure. In the episode above, Melios attempted to form a recursive rule in general terms of how the pattern grows (lines 3-4) from the very beginning. Gianna revoiced Melios’ response and showed how Melios’ rule works by showing the geometric figures (lines 5-12). This seems to indicate attempts for a discursive genesis since the rule was given meaning using mathematical reasoning and reference to the figural representation. The representation served in visualising the relation by showing which components stay and which change, indicating a semiotic genesis.

When students were asked to find the number of dots on the tenth tablet, Antonis seems to have suggested that because they are asked to find the tenth tablet, then there will be 10 dots in the base, then nine, eight etc, which indicates that he possibly saw that the position number is related to the number of dots (lines 15-16). Gianna then encouraged students to work recursively (line 21-22) in order to find the number of dots on the tenth tablet. They did not draw the seventh, eighth, ninth and tenth figures but they found recursively the number of dots for these figures (lines 23-29). However, afterwards Gianna asked them to draw the figures in their textbooks (line 30-31).

Gianna then asked students to justify their answer (line 32-34). Nikoletta attempted to articulate the relation (line 35) and Gianna’s question (line 36) guided her in offering a recursive rule (line 37). The teacher tried to summarise the previous contributions and dictated to the students the final form of the justification, which was a recursive rule (lines 40-43). The teacher mentioned that they ‘add an additional number’, which meant that it was essential to know the ninth triangular number in order to find the tenth one, and that ‘the number which we add is the base of the pyramid’. However, it was not made explicit that the number of dots at the base of the triangle corresponds to the position number, which could have indicated the dependent relation between the two data sets (the position number and the number of dots). In Gianna’s class, students articulated an argument, that of Antonis, that could have led to a functional rule to link the proof at the cognitive plane with the theoretical frame of reference at the epistemological plane through a discursive genesis. Nonetheless, Gianna guided students towards adopting a recursive way of thinking. The mathematical work in that class seems to have missed a critical opportunity for engaging students in looking at and representing the relation between two varying quantities.

DISCUSSION

In this paper, we presented the analysis of two classroom episodes in fifth grade classrooms, using the MWS model to examine the class work. The two 5th grade classes worked on the same algebra-related task, which was a growing geometric pattern.

The epistemological plane was shared in the two classrooms since they worked on the same task. However, the cognitive plane of the class as a whole seems to differ. In Michalis’ class, the students constructed the figures and counted the number of dots on each figure. During a discursive genesis, instead of relying on the representation and developing valid arguments and mathematical reasoning in order to give meaning to the functional rule, the class found a functional rule with guess-and-check. Hence, no explanation was given based on the given representation to explain and prove why that rule works. In Gianna’s class, the class formed a general recursive rule, which was explained according to the figural representations by interpreting the structure of the figures. However, the discussion of how the pattern grows and students’ responses indicate that the teacher might have missed opportunities to focus on the co-variation of the two data sets. Students’ tend to focus on single variation of a data set (Warren & Cooper, 2008), in this case of the number of dots of each tablet, and it would have been important to engage in forming a functional rule and thus in functional thinking, which is considered a key aspect of algebra.

Hence, in both classrooms, teachers faced difficulties in handling the discursive geneses, particularly in linking the theoretical frame of reference of the epistemological plane with a proof in the cognitive plane. Also, during the semiotic genesis, the representation could have been explored further to account for how the pattern grows and to explain the functional relation. Considering that the teachers' role is to set a suitable working space for engaging with the task, the mathematical work could have been enhanced by attending to discursive and semiotic geneses. Also, Hitt et al. (2016), who presented the Arithmetic-Algebraic Working Space, mentioned that activities involving validation processes need important consideration. However, in the two cases presented in this paper, this kind of activities do not seem to have been attended to adequately.

These observations relate with teachers' challenges possibly due to teachers' limited understanding about the potential of algebra-related tasks (e.g. Asquith et al., 2005). For example, it may be possible that teachers face difficulties in encouraging the class to develop valid arguments about the functional rule and emphasising the role of the representation in finding the relation because they are not fully aware of the mathematical potential of this task at the epistemological level. The importance of representations in students' engagement with algebra-related topics is particularly examined in recent studies (e.g., Carpenter et al., 2003; Carraher et al., 2008; Blanton & Kaput, 2005). Interpreting the representations and the semiotics as well as constructing tables, graphs and using symbolic language that relate to instrumental and semiotic geneses are critical components of the class' work with algebra-related topics.

The analysis of the two classroom episodes using the MWS model showed that the framework could be adapted and adjusted for the case of algebra-related topics in primary school. Nonetheless, we analysed only one kind of task, namely a growing geometric pattern which belongs to the rule-based relations tasks, that provided the context for visual representations and the construction of figures. Hence, further studies are needed to employ the model for analyzing also arithmetically-situated relations tasks and known-unknown relations tasks, so to explore in what ways the model can support the analysis of related classroom episodes.

As shown in this paper, the MWS model has the potential to be used in exploring whether the mathematical working space is suitable for students' learning, as well as for identifying components of the classroom work that could be potentially improved. In the two episodes above, we highlighted teachers' actions that seem to have facilitated or hindered the three geneses, and we concluded that both teachers faced more difficulties in handling the emergence of the discursive genesis in class. A limitation is that we only relied on the available utterances from students who explicitly articulated their ideas. It was not possible to study the cognitive plane of individual students and even of the teacher. Taking into account these different cognitive planes would support the development of a more comprehensive picture regarding the implementation of mathematical tasks and the mathematical working space. Nonetheless, beyond studying the implementation of tasks in classroom, there are several other aspects that shape the classroom work such as teachers' knowledge and conceptions. The MWS model, at least in the way that it framed the analysis of the classroom episodes in this paper, did not make it possible to capture fully such other contributing factors to the classroom work. Complementary analyses as well as future adaptation of the MWS model maybe indicate ways for addressing these concerns.

REFERENCES

Asquith, P., Stephens, A.C., Grandau, L., Knuth, E.J., & Alibali, M.W. (2005). Investigating middle-school teachers' perceptions of algebraic thinking. Paper presented at the American Educational Research Association, Montreal, Canada.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. (Eds.). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M.L., & Kaput, J.J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *ZDM*, 37(1), 34-42.

Carpenter, T.P., Franke, M.L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D.W., Martinez, M.V., & Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, 40, 3-22.

Demosthenous, E., & Stylianides, A.J. (2014). Algebra-related tasks in primary school textbooks. In C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 369-376). Vancouver, Canada.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Hitt, F., Saboya, M., & Cortés Zavala, C. (2016). An arithmetic-algebraic work space for the promotion of arithmetic and algebraic thinking: triangular numbers. *ZDM*. Advance online publication.

Kaput, J.J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

Kaput, J.J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. In J.J. Kaput, D.W. Carraher & M.L. Blanton (Eds), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it?. *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Kuzniak, A. (2012). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformation. In S.J. Cho (ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education*. Seoul, Korea.

Kuzniak, A., & Richard, P.R. (2014). Spaces for mathematical work: viewpoints and perspectives. *Relime*, 17(4-I), 17-27.

Lannin, J.K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 231-258.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ministry of Education and Culture. (1999). *Mathematics Textbook for Grade 5* (Vol. A). Nicosia: Ministry of Education and Culture.

Moss, J., & McNab, S.L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalising about functions and co-variation. In J. Cai &

E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp.277-302). Heidelberg: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Schoenfeld, A.H. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J.J. Kaput, D.W. Carraher & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479-510). New York: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 15-39.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

Tanguay, D., Kuzniak, A., & Gagatsis, A. (2014). The mathematical work and mathematical working spaces. In I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. Richard (Eds.), *Proceedings of the 4th ETM Symposium* (pp. 27-32). Madrid, Spain.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn?. *American Educator,* 19, 30-37.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171-185.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379-402.

PARADIGMAS ALGEBRAICOS Y ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO[1]

Mauricio Gamboa Inostroza[1], Arturo Mena-Lorca[2]

[1]Universidad de Concepción, [2]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

maurigamboa@udec.cl, arturo.mena@pucv.cl

En este trabajo se presenta la idea de configurar un "Espacio de Trabajo Matemático" (ETM) en la disciplina del álgebra, sustentado en la idea de "paradigmas algebraicos" desde antecedentes provenientes de un estudio histórico-epistemológico, del análisis del currículo, y de elementos del estado del arte de la investigación frente a los fenómenos de enseñanza y aprendizaje del álgebra. Tales antecedentes evidencian la presencia de distintos significados encerrados en una única palabra "álgebra", a partir de los cuales proponemos "paradigmas" explícitos para este ETM algebraico.

Palabras Claves: *ETM, Espacio de Trabajo Algebraico, Paradigmas Algebraicos, Enseñanza del Álgebra*

INTRODUCCIÓN

Usamos aquí la terminología descrita en Kuzniak (2011) y Kuzniak y Richard (2014).

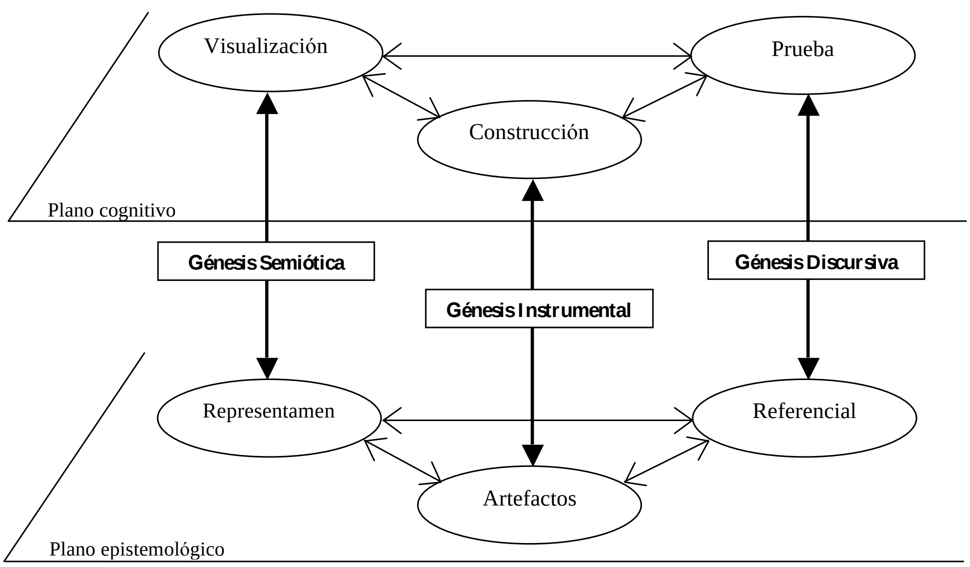


Figura 1: El Espacio de Trabajo Matemático y sus Génesis. Kuzniak (2011)

En el ETM se concibe el estudio de matemáticas como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos de un dominio, en un ambiente *ad hoc*, mediante la articulación de un *plano epistemológico*, referido a la matemática en juego, y un *plano cognitivo*, centrado en el sujeto y estrechamente ligado al anterior; en tales planos se identifican componentes o polos (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014), que se señalan en la Figura 1.

La ampliación del marco del Espacio de Trabajo Geométrico, ETG (Houdement y Kuzniak 1999, 2006), hoy ETM_{Geom}, hacia el trabajo matemático en general, requirió de ciertos cambios. Si bien los artefactos y el referencial teórico como componentes de base en el plano epistemológico no sufrieron modificaciones, la componente ligada al espacio y a las configuraciones geométricas (entonces llamada *espacio real y local*) debió ser reinterpretada. Por lo anterior, y a partir de Teoría de registros de representación semiótica (Duval, 1995), pareció pertinente utilizar la noción de signo o *representamen* (Kuzniak y Richard, 2014), en el sentido de Peirce (1931): algo que, para alguien, toma lugar de otra cosa (el objeto del signo) de acuerdo con cierta forma o capacidad. Subsecuentemente, se necesitó repensar el polo de la visualización para que encontrara su lugar en la extensión del marco a dominios diferentes de la geometría, pues se debía asociar a ese polo con esquemas y operaciones de uso de los signos, de los que nada permitía afirmar que dependieran, *a priori*, de la visualización propiamente tal, ni de una concepción extendida de esta. Hoy se lo considera como el proceso de estructuración de las informaciones aportadas por los diagramas y los signos; además, alimenta la intuición de las propiedades y, en algunas ocasiones, fundamenta cognitivamente su validez (Kuzniak y Richard, 2014).

El marco del ETM tiene un carácter paradigmático, en el sentido que se ocupa de cómo una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento. Al espacio de trabajo tal como es definido por esta comunidad, se le llama ETM *de referencia*. La teoría hace una distinción además, entre el ETM *personal*, que es el que usa un individuo (estudiante, profesor) en su propia construcción de conocimiento, y el ETM *idóneo* que es el que utiliza un profesor o enseñante para cooperar en la construcción del ETM personal de un aprendiz. El diseño del ETM idóneo por parte del profesor depende, naturalmente, de su ETM personal, mientras que el ETM personal de un estudiante (o de un individuo en general) se pone en evidencia cuando se enfrenta a una situación problemática.

UN ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO EN EL ÁLGEBRA

Consideraciones preliminares

Un ETM algebraico, ETM_{Alg}, debería dar cuenta de estudiantes trabajando en problemas algebraicos; las maneras de trabajar en las distintas etapas escolares; el tipo de explicaciones del profesor; los diversos puntos de vista en el aula y su injerencia en el rol de los objetos y/o el tipo de argumentación; el rol de la experimentación, la conjetura, el dibujo, la deducción, la *"intuición"*, la manipulación algebraica (Mena-Lorca, Mena, Morales, 2012).

En comparación con el ETG, parece claro que la visualización es diferente en el caso algebraico. Además, los métodos del álgebra tienden a ser implícita o aun explícitamente universales, y ya en los primeros estadios el lenguaje parece decididamente más codificado. La vinculación con la "realidad", la modelación, discurren en carriles diversos en los casos del álgebra y de la geometría.

En este trabajo nos ocupamos de paradigmas para el caso algebraico, a partir de (Mena-Lorca, Mena-Lorca y Morales, 2012). Tales paradigmas deberían ser comprobados empíricamente. *A priori*, sin embargo, hay varias elecciones que hacer, la más ostensible de las cuales es si acaso se considerará a la aritmética (elemental) como parte del álgebra.

Una primera observación es que se debe establecer qué caracteriza a los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes; además, en la práctica importaría que el profesor y el alumno no trabajen en distintos "espacios de trabajo" algebraico.

Otra consideración, de sumo interés, proviene del examen del caso del ETM_{Geom}. Allí aparece con claridad que los paradigmas están ordenados de la manera que se puede apreciar en la historia general de la ciencia y, en particular, de la física y aun en la lógica los cuales, expresados en la acepción habitual, de raíz etimológica son, respectiva y sucesivamente: concreto, abs-tracto (de *ab-trahere*, traído desde y separado de los objetos), y (puramente) formal (la referencia a los objetos no es indispensable). (Cf. Bochenski, 1985).

Aproximación histórica

Haremos pues, a continuación, una aproximación histórica a nuestro asunto, en lo relativo a la diferencia entre aritmética elemental y álgebra elemental.

Se suele decir que el álgebra comienza con el uso del lenguaje simbólico. Sin embargo, ese punto de vista no es universal.

Nesselmann (1842) introdujo tres fases históricas en el álgebra: retórica, sincopada y simbólica.

En la primera, el lenguaje utilizado es la lengua materna; hacia 250 d. C., Diofanto inaugura esta fase al usar abreviaturas para las operaciones, símbolos para operaciones y letras iniciales para palabras de uso común; todo ello para resolver ecuaciones de coeficientes y soluciones racionales –reductibles al caso entero–.

El álgebra simbólica comienza con la aparición de las cantidades literales con Viète en el s. XVI (*Ibíd.*); unos pocos años antes, Bombelli trabaja con letras como si fueran números, y ya el título de su libro explicita su punto de vista respecto de la relación aritmética-álgebra: *L'Algebra,… con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoría dell'Aritmetica"* (Bombelli, 1579, portada). Él no hace una separación de dominios entre aritmética y álgebra, y desde esa época se acumula evidencia de que el álgebra surge como una manera de operar con letras como si fueran números –esto es, que el álgebra es concebida como una extensión de la aritmética elemental–.

Más aún, hoy en día se entiende la aritmética como la teoría, algebraica y/o analítica (en el sentido del cálculo infinitesimal) de los números enteros. De tal manera, si se separara del álgebra la aritmética elemental, una segunda etapa (un segundo paradigma) de esta aritmética sería naturalmente el álgebra *diofántica*, más dificultosa que el álgebra elemental común, pues en aquella se necesita hacer consideraciones de divisibilidad.

Respecto de considerar a la aritmética (elemental) como parte del álgebra, Drijvers (2003) expone que esta tiene sus raíces en la primera y depende fuertemente de su fundamentación aritmética, puesto que la aritmética ofrece muchas oportunidades para simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. Además, las investigaciones concuerdan en que la aritmética es fundamental para poder iniciarse en el álgebra elemental simbólica; en este sentido Novotná y Sarrazy (2005) establecen que las dificultades que se generan en el álgebra se originan en insuficiente claridad en los aspectos estructurales de la aritmética. Lo anterior podría pensarse aún como una relación entre dominios diferentes, pero Schliemann *et al.* (2003), por ejemplo, argumentan que la aritmética es la parte del álgebra que se ocupa, entre otros aspectos, de los sistemas de números, la recta numérica, las funciones numéricas.

Etapas operacionales en el álgebra

Por otra parte, es oportuno considerar la idea de *epistemología genética* de Piaget y García (1989) de que en el desarrollo histórico o del aprendizaje de un determinado dominio se podrían reconocer etapas operacionales (de los esquemas) bien definidas, que no son solo períodos sino que representan además maneras de organizar el conocimiento. Ellos las denominan etapas *intraoperacional, interoperacional* y *transoperacional,* o, simplemente, *intra, inter* y *trans*: los componentes del esquema están, inicialmente aislados unos de otros, luego integrados en una perspectiva común, y son finalmente llevados a otra perspectiva. Cada etapa comienza con una reorganización de lo que se ha heredado de la precedente; una vez alcanzado un nuevo nivel, lo sobrepasado es integrado siempre en las nuevas estructuras.

En Mena-Lorca (2010; Cf. también Nixon, 2005) se identifica y comprueba esas etapas para el álgebra. La primera comienza con ecuaciones lineales tratadas por egipcios y babilonios. La etapa inter se inicia propiamente con Lagrange, en 1770, quien, al procurar (sin éxito) extender los resolventes de Fontana, Cardano y Ferrari para ecuaciones de grados 3 y 4 al caso de la ecuación quíntica, reúne lo hasta allí desarrollado en una mirada comprensiva y articulada. La etapa trans comienza con la introducción de los grupos por Galois en las memorias que presenta a la Academia de Ciencias de París entre 1829 y 1832, en las cuales establece que la resolubilidad por radicales de una ecuación depende de la resolubilidad del grupo de la extensión de cuerpos correspondiente, y que comporta el término del álgebra centrada en resolver ecuaciones y el comienzo de una etapa en que predominan las estructuras (Mena-Lorca, 2010).

La investigación y el currículo

El estudio del currículo refuerza nuestra idea de no separar la aritmética elemental del álgebra elemental.

Ya desde la década de los ochenta diferentes autores argumentaban la necesidad de iniciar una enseñanza del álgebra desde la educación primaria, que preparase a los alumnos para abordar los aspectos epistemológicos involucrados en la transición de la aritmética al álgebra que se daba en la secundaria (Cf. Davis, 1985).

En la actualidad, en varios países (ver, por ejemplo, NCTM, 2000), se recomienda que el desarrollo del pensamiento algebraico sea abordado desde los primeros años de escolarización. Una idea similar proviene de tendencias de desarrollo temprano del álgebra en el currículo, tales como *early algebra* y *pre-algebra* (Drijvers, 2003).

Early algebra pretende introducir el álgebra desde la educación inicial. Ella nace como consecuencia de diversas investigaciones de la última década (Bastable y Schifter, 2007; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 1998, 2008; Kaput, Carraher, y Blanton, 2008). La idea principal es desarrollar simultáneamente el pensamiento numérico y el algebraico en los estudiantes desde la enseñanza primaria, a fin de lograr un aprendizaje que facilite el estudio posterior del álgebra (Blanton y Kaput, 2005).

Respecto de lo anterior, es necesario destacar que toda la evidencia indica que existe una relación inextricable entre el pensamiento aritmético elemental y el algebraico, lo cual deriva en una gran complejidad al intentar clasificar un tipo de tarea en uno u otro. Ante esto, Carraher y Schliemann (2007) y Kieran (2007) explicitan que no hay respuestas claras sobre qué tareas y formas de aprendizaje son algebraicas y cuáles no, qué tipo de evidencias se necesitan para evaluar la presencia de pensamiento algebraico, y qué enfoques pedagógicos y tipo de formación de profesores deben promoverse. Esa falta de claridad pone de manifiesto que la pretendida separación entre la aritmética y el álgebra no está claramente delimitada en términos epistemológicos (Socas, 2011).

En Cortés, Hitt y Saboya (2016) se plantea también desarrollar un Pensamiento Aritmético articulado con el Pensamiento Algebraico. Su aproximación es, sin embargo, diferente (no se proponen paradigmas) y sus fuentes, diversas de las nuestras.

Paradigmas en el álgebra

Con base en los antecedentes antes expuestos, hacemos explícito que, para esta investigación, consideramos que no podemos separar de manera estricta el álgebra de la aritmética, y que pensar en un cambio dominio considerando cuestiones solamente semióticas no nos parece compatible con la naturaleza del marco teórico ETM; por ello, estimamos que el constituir un ETM algebraico debería considerar implícitamente al trabajo aritmético.

De tal manera, asumimos los siguientes paradigmas algebraicos, que fueron presentados en (Mena-Lorca, Mena y Morales, 2012):

A1: etapa de la *aritmética elemental*, en donde ya hay números y algún lenguaje numérico, incluso escrito. Además del trabajo con los números, los individuos pueden establecer relaciones entre variables, si bien no explícitas por medio de símbolos.

A2: etapa del *álgebra elemental*, que ya presenta una posibilidad de trabajar con letras, variables, incógnitas, parámetros. Los individuos son capaces de escribir situaciones en lenguaje algebraico, operar algorítmicamente, generalizar, etc.

A3: etapa de las *estructuras algebraicas*, estadio avanzado y contemporáneo, que corresponde además a ideas generales de conjuntos y de estructuras algebraicas.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La fase experimental

Con base en lo expuesto y discutido anteriormente, el objetivo que ahora se persigue es el de recolectar antecedentes que permitan validar los paradigmas A1 y A2. Nos focalizamos específicamente en estos, para poder analizar la ruptura cognitiva entre la *aritmética* y el *álgebra elemental*, y detectar eventualmente qué elementos podrían propiciar el tránsito entre ellas.

En el caso de la geometría, la emergencia de los paradigmas nace de una mirada al currículo y de diversas observaciones desde un supuesto paradigmático respecto de la práctica docente; ello no obstante, detectamos que tras el levantamiento de esos paradigmas estos se relacionaban, como dijimos, directamente con el desarrollo histórico de la geometría.

En nuestro caso, hemos procedido al revés, comenzando por una mirada de carácter histórico y epistemológico, como primer paso de una triangulación de fuentes en el marco de una investigación de tipo cualitativa. Una segunda fuente corresponde al desarrollo actual del currículo con respecto a la disciplina del álgebra y a elementos del estado del arte de la investigación acerca de fenómenos ligados a la enseñanza del álgebra. Juntamente con lo anterior, hacemos un levantamiento de datos, con el pretendemos también fundamentar los paradigmas.

Instrumentos

Usamos dos instrumentos para conformar las respuestas a nuestras hipótesis, en el sentido de relacionar las etapas históricas del desarrollo del álgebra con etapas que consideramos naturales en el aprendizaje de aula.

Para el primero de ellos haremos un análisis más detallado. El segundo se usará para corroborar ese análisis y agregar alguna consideración.

c) ***El problema del Gavilán***

"Un gavilán atacó a un palomar. Las palomas unidas enfrentaron con éxito el ataque de tal ave de rapiña.

Furioso, el gavilán exclamó: ¡Adiós, mis cien palomas! (insinuando que el triunfo de las palomas se debía a su cantidad).

A ello, una de las palomas respondió: - No somos cien como Usted dice, Sr. Gavilán; pero, nosotras más nosotras, más la mitad de nosotras, más la mitad de la mitad de nosotras, más usted, Sr. Gavilán, sí sumamos cien…"

Entonces, ¿cuántas palomas había en el palomar?

d) ***La reja de maderos***

Se desea construir una reja con palos de 1 metro de largo, dispuestos como en la figura (Figura 3). Se pregunta:

a) Cuántos palos se necesitan para construir 6 metros de reja.

b) Cuántos palos se necesitan para construir 30 metros de reja. Explique

c) Cuántos metros de reja se pueden construir con 209 palos. Explique.

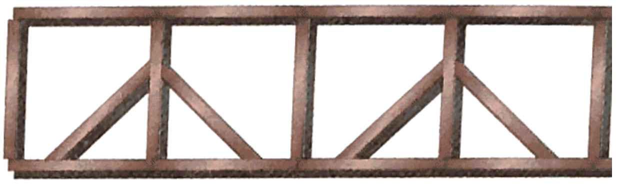


Figura 2: Reja de maderos

Manifestación de los paradigmas

A nuestro modo de ver, en una primera etapa, (enseñanza primaria específicamente), se trataría cada uno de los problemas propuestos como una cuestión de números, buscando el resultado por tanteo, ensayo-error, postulando alguno y examinando si satisface las condiciones del problema. Naturalmente, según nuestra propuesta, esto corresponde a la llamada aritmética elemental, y revela una estrategia correspondiente al paradigma A1.

En una segunda etapa, en la cual se dispone ya del álgebra elemental así como los números podían representar objetos, ahora las letras reemplazan a los números. Si se escribe una ecuación adecuada, ella contiene la información necesaria escrita en un lenguaje distinto al disponible en la etapa anterior; una vez escrita esa ecuación, la solución se obtiene por medio de algún algoritmo para la resolución de ecuaciones, correspondiendo a nuestro parecer a A2.

No obstante lo anterior, puede darse el caso de que algunos individuos planteen el problema en lenguaje algebraico, pero no sean capaces de aplicar y/o recordar el algoritmo correspondiente.

El Gavilán: posibles estrategias de solución

Para el problema planteado consideramos *a priori* tres tipos de estrategias de resolución*:*

- ***Ensayo y error (tanteo).***

Tras los primeros experimentos, se vislumbra que las palomas son menos de 99; además aparece la necesidad de trabajar con números pares cercanos a la tercera parte de 99. Se prueba con varios valores y se persiste hasta encontrar la solución (o bien se ve no la hay –por ejemplo, si se requiere un número fraccionario–. Este asunto muestra claramente el trabajo en el paradigma A1, el uso de los números y su instrumentalización, e incluso algún trabajo semiótico que ayude a dicho proceso; en este sentido, *a priori* el trabajo matemático estaría ligado al plano semiótico instrumental, pero con mayor presencia de la génesis instrumental.

- ***Uso de bloques o representaciones.***

Esta estrategia dice relación con poder disponer de una estructura (bloque) que se pueda dividir en mitades y luego en cuartos. En este sentido se piensa en las 99 palomas y la cantidad de particiones de bloques (11 partes); finalmente bastaría con dividir 99 por 11, encontrando el valor de un bloque, el cual, al multiplicarlo por cuatro, daría, según la figura 2, el valor de *nosotras* (36), es decir las palomas.

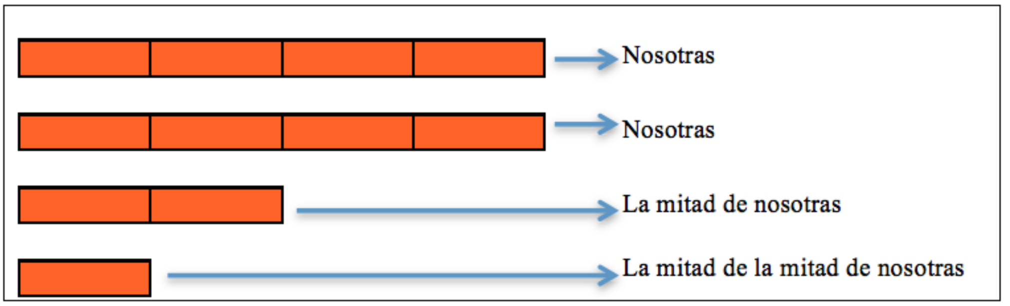


Figura 3: Uso de bloques para la solución del problema

Si bien en esta estrategia existe un trabajo matemático ligado a la génesis semiótica, se debe también usar elementos operatorios, activando además la génesis instrumental; específicamente, podemos afirmar que un individuo que utilice esta estrategia estará operando completamente en el plano semiótico-instrumental, a diferencia de la anterior, en la cual podría darse el caso, pero bastaría con la instrumentalización. En función de nuestros paradigmas algebraicos, podríamos afirmar que un individuo que evidencia tareas de este tipo estaría mostrando elementos que permiten hacer el tránsito desde A1 hacia A2.

- ***Planteamiento y resolución de una ecuación***

Plantear la ecuación $x+x+(x/2)+(x/4)+1=100$ y usar algún método de resolución, ya sea comenzando por multiplicar por 4 u operar directamente las fracciones del lado izquierdo de la igualdad, y luego despejar la incógnita para llegar a que su valor es 36. Claramente, lo anterior evidencia que un trabajo matemático de este tipo estaría en A2, diferenciando que en este caso la instrumentalización ocurriría por medio del uso de algoritmos de resolución de ecuaciones, considerando trabajo semiótico ligado a lo anterior y justificando por medio de las propiedades del cuerpo **R** de los números reales. Puede haber individuos que planteen la ecuación, pero que no posean los elementos que permitan la instrumentalización, lo que daría luces de que el trabajo semiótico es insuficiente para considerar a un individuo en A2; es decir, el solo hecho de escribir una expresión en lenguaje algebraico no demuestra que un individuo esté posicionado en el paradigma A2.

Aplicación de los instrumentos

El problema del Gavilán se aplicó a un grupo de 12 estudiantes de primer semestre de la carrera de Educación General Básica de una universidad tradicional chilena. La elección del grupo se hizo pensando en individuos que cumplieron con su enseñanza secundaria, es decir trabajaron los contenidos de álgebra que el currículo escolar de Chile propone, además de haber rendido la Prueba de Selección Universitaria[2], la cual presenta tareas de un nivel de dificultad similar a la del problema propuesto. Se espera que estos individuos respondan por medio de la estrategia de resolución de la ecuación, pero también que, si alguien no recuerda el algoritmo, sea capaz de recurrir a tanteo entre los números para encontrar la solución. Para propósitos del análisis, se numeró a los estudiantes i01, i02,… i12.

Por su parte, el problema de la Reja de maderos se aplicó a un grupo de 10 profesores de matemática de la enseñanza secundaria chilenos. Para realizar el análisis de sus respuestas, los hemos denotado P1, P2,… P10, respectivamente.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

- **El problema del Gavilán: Análisis *a posteriori***

Tras la aplicación del problema se contrastaron las respuestas de los informantes con el análisis *a priori*, en función de las tres estrategias distintas de resolución planteadas anteriormente.

1. ***Estrategia Ensayo-Error***

La respuesta de i04, que se reproduce en la Figura 4, a continuación, es bastante interesante, ya que inicia el proceso de resolución planteando la ecuación, pero no desarrolla la operatoria para el cálculo mediante el algoritmo de resolución de una ecuación, y busca la respuesta mediante exploración, indicando explícitamente que su interés estaba en encontrar el número que fuera la mitad del que andaba buscando, como se muestra en la Figura. Este individuo confirma lo que se expuso anteriormente referente a que realiza su trabajo matemático en A1, pese a manifestar que puede plantear el problema en el "lenguaje algebraico"; esto nos refuerza la idea de que no basta que un individuo escriba alguna expresión o fórmula para indicar que está en el paradigma A2 propuesto; no obstante el hecho de relacionar mitades y mitades de mitades de números que están relacionados entre sí, muestra una transición hacia los inicios de un pensamiento algebraico en el sentido habitual.

$$(X+x)+\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{\frac{x}{2}}{2}\right)+1=100$$

R: 36 palomas

$$(36+36)+\left(\frac{36}{2}\right)+\frac{\left(\frac{36}{2}\right)}{2}+1=100$$

fui buscando el numero ~~(el nu)~~ que me diera el numero o el resultado de "la mitad de las palomas" el cual me dio "18" y asi pude resolver el resto de los plantiamientos.

Figura 4: Respuesta de i04: «fui buscando el numero (el nu) que me diera el numero o el resultado de "la mitad de las palomas" el cual me dio "18" y asi pude resolver el resto de los planteamientos»

2. ***Estrategia de bloques o representación***

A pesar de que *a priori* se pensó que usar bloques sería una estrategia bastante útil para poder abstraer el problema, los informantes del grupo no evidenciaron recurrir a ella entre sus respuestas. La justificación puede estar en el tratamiento tradicional que se da a la enseñanza del álgebra en el país, tratamiento en el cual por lo general el contrato didáctico es rígido y el profesor impone la estrategia que deben usar los estudiantes.

3. ***Estrategia planteo y resolución de la ecuación***

Esta fue la estrategia que la mayoría de los informantes usó para dar solución al problema; algunos con distintas técnicas en el trabajo con la operatoria algebraica, terminando en la expresión $x = 36$, ya que tras hacer esa operatoria y encontrar el valor de la incógnita, rápidamente afirmaban que dicho valor era la respuesta correcta, sin escribir la respuesta al modo de "eran 36 palomas", tal como se aprecia en la Figura 5:

$$x+x+\frac{x}{2}+\frac{\frac{x}{2}}{2}+1=100$$

$$x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=100 \quad /\cdot 4$$

$$4x+4x+2x+x+4=400$$

$$11x+4=400$$

$$11x=396$$

$$x=36$$

Figura 5: Respuesta de i12

En estos individuos se evidencia claramente que están situados en el paradigma A2, pues realizan el trabajo operatorio del álgebra en el sentido habitual sin ningún inconveniente, además de estar convencidos de que el solo hecho de resolver la ecuación (y todo lo que esto conlleva: leyes de cancelación, axiomas de cuerpo, etc.) les daría la respuesta.

Un caso particular de esta estrategia es lo que hace i01, quien plantea y resuelve la ecuación de manera correcta, pero comprueba si el resultado es el correcto, según los datos del problema.

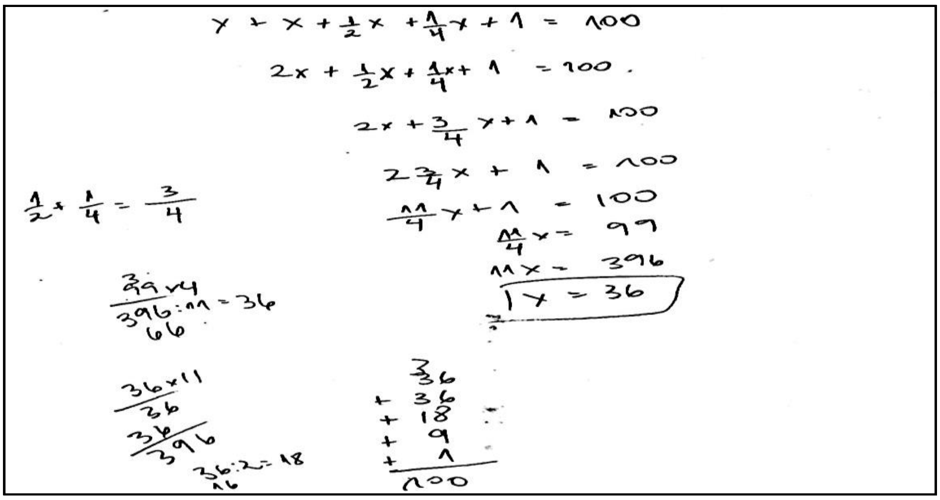


Figura 6: Respuesta de i01

La Reja de maderos

Para analizar los datos en relación con este problema, distinguiremos entre las partes *a*, *b* y *c* de la tarea planteada.

Entre las respuestas, podemos encontrar profesores que realizan su trabajo algebraico para la parte *a* por medio de la continuación (construcción) del dibujo y conteo. Tal es el caso de P10, quien muestra inicialmente un trabajo en A1 para las partes *a* y *b* de la tarea.

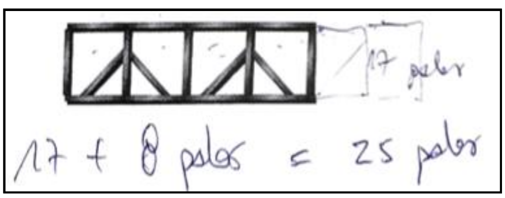


Figura 7: Respuesta de P10 a la parte *a* de la tarea

No obstante, en la parte *b*, el trabajo algebraico realizado por P10 se relaciona con un modelo proporcional, ya que multiplica por 5 el resultado obtenido anteriormente. Se puede vislumbrar que el trabajo realizado en la parte "*a*", impide ver a P10 realmente cuál es la característica de la tarea a la que se le está enfrentando, evidenciando que su trabajo algebraico frente a esta tarea está fuertemente relacionado a la génesis semiótica.

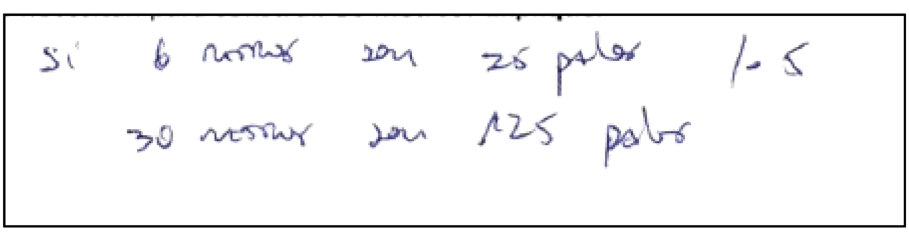


Figura 8: Respuesta de P10 a la parte *b* de la tarea

Es interesante notar que este mismo individuo, en la parte *c* de la tarea, cambia su forma de proceder, ya que se percata de que para responderla es necesario hacer un trabajo operatorio; para llegar a establecer una “fórmula”, inicia su trabajo por medio de una representación en la que se percata que se puede establecer una relación funcional para saber, en función de la cantidad palos, cuántos metros se pueden construir, evidenciando claramente trabajar en A2, como se muestra en la siguiente figura.

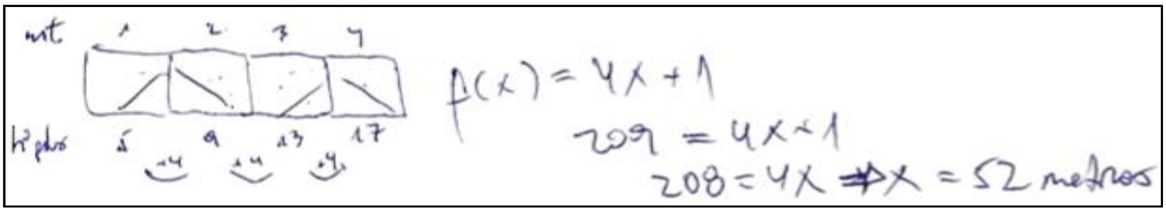


Figura 9: Respuesta de P10 a la parte *c* de la tarea

Por su parte, P1 evidencia iniciar su trabajo de manera semiótica, traduciendo la figura a números, pero esto lo lleva a proponer una fórmula que le permita responder la pregunta. Si bien su trabajo se inicia de manera similar a lo realizado por P10, P1 va más lejos, mostrando que entiende cuál es el patrón que se forma en la construcción de la reja respecto a la cantidad de palos. Utilizando este mismo antecedente, resuelve las partes *b* y *c* de la tarea, lo que evidenciaría que este individuo realiza su trabajo algebraico en A2.

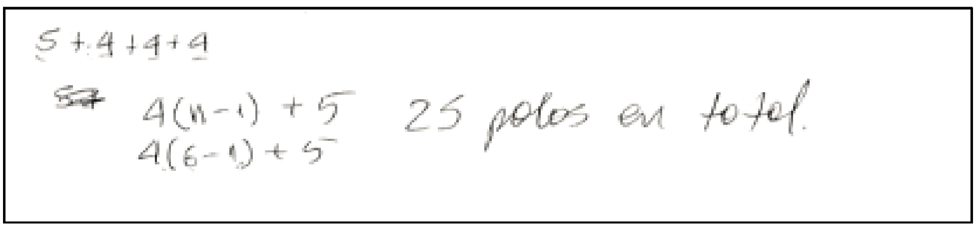


Figura 10: Respuesta de P1 a la parte *a* de la tarea

Un trabajo que evidentemente se sitúa en A2 es el demostrado por P6, quien utiliza una estrategia de sucesiones para establecer respuesta de la parte *b* de la tarea; es decir, este individuo demuestra un manejo del álgebra elemental e identificación de la característica de la tarea. Además para la parte *c* de la tarea encuentra el término *n*-ésimo, como se evidencia en la Figura 11.

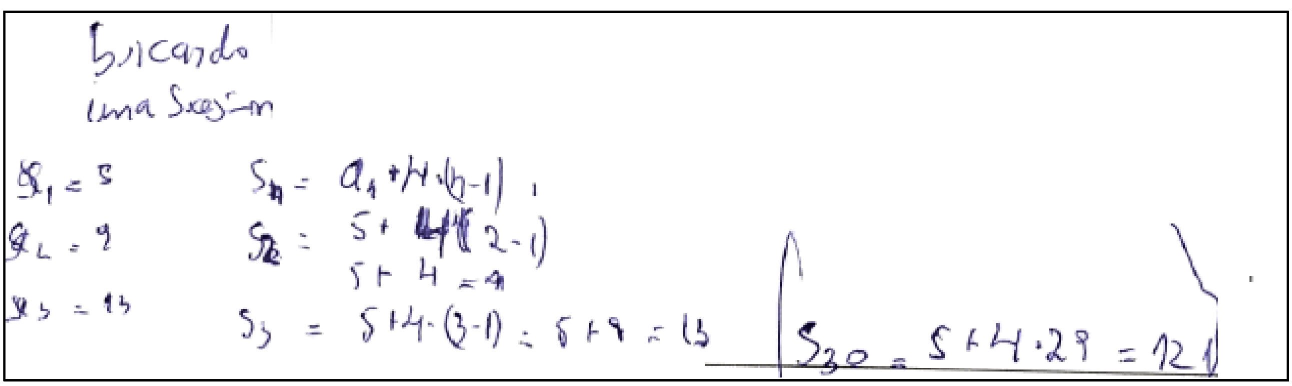


Figura 11: Respuesta de P6 a la parte *c* de la tarea: “buscando una sucesión”

DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los datos de nuestro estudio teórico muestran la estrecha relación entre la aritmética elemental y el álgebra. Hemos sugerido ya varias razones que indican que separarlas como dominios diferentes no solo es difícil, sino, además, incongruente. La primera de esas razones consiste en que hacer tal separación comportaría ignorar el tránsito natural que en la historia se hizo de la aritmética al álgebra. La última que presentamos es de carácter experimental, y muestra, ante determinadas tareas, un tránsito que podríamos llamar hesitante de algunos entre lo que llamamos A1 y lo que definimos como A2 –y que no cabe calificar de deslizamiento de contenido, pues es una misma tarea la que permanece ante un individuo, el cual no se aparta de ella por oscilar entre uno y otro de los paradigmas propuestos–.

Debemos explicitar, además, que separar la aritmética elemental y el álgebra elemental en dominios diferentes no debería realizarse atendiendo solo a una de las génesis, pues ello comportaría una visión en exceso parcial y limitada del ETM.

Al respecto, vale la pena recordar la premisa citada por Freudenthal (1974) de que la mayoría de los problemas aritméticos, en cuanto traspasan las fronteras del simple cálculo, son enteramente problemas algebraicos lineales o de sistemas de ecuaciones lineales.

Seguramente datos experimentales adicionales permitirán caracterizar con mayor precisión la diferencia entre A1 y A2; sin embargo, los datos provistos aquí muestran la coherencia de la elección de paradigmas que hemos hecho.

En relación a los datos, respecto al problema del Gavilán, los informantes, en su mayoría mostraron que su paradigma dominante frente a la tarea es A2. Lo anterior se relaciona con las características del grupo, ya que estos individuos han ingresado recientemente a la universidad, y durante su formación secundaria fueron atendidos por docentes en cuyo discurso predominó dicha estrategia de resolución; un estudiante que no recordaba la técnica de resolución, realizó una aproximación por medio de números, pensando en *la mitad de la mitad* y considerando *la mitad* como el número clave, lo que evidencia que si bien no posee manejo expedito en el trabajo con las letras, sí es capaz de relacionarlas para encontrar la respuesta.

Respecto al problema de la Reja de maderos, se pensó *a priori* que lo individuos, al ser profesores, en su totalidad evidenciarían estar en A2. Sin embargo, persiste en algunos de ellos~~,~~ una fuerte tendencia al trabajo focalizado puramente en el polo semiótico, lo cual no permite en una primera instancia percatarse de la naturaleza de la tarea, lo que incluso lleva a cometer errores.

Esta investigación se prolongará por la vía de ampliar las tareas a otros ámbitos del trabajo algebraico, relativos a los diferentes enfoques que a través del mundo se hace en la iniciación al álgebra.

Para ello, podemos seguir utilizando el recorrido histórico de las ecuaciones, tal como lo presentamos en este escrito, y como se hace dentro de las perspectivas curriculares de algunos países (Artigue, 2012). Ello no obstante, se hace necesario estudiar además la forma de reconocimiento de patrones y la generalización, lo cual, según Artigue, no intenta necesariamente enseñar estructuras algebraicas, sino más bien identificar lo que se llaman *patrones* en secuencias de números y en configuraciones geométricas, para expresarlos algebraicamente y utilizar esa expresión algebraica para estudiar, caracterizar, comparar (Ibíd.).

Otro caso para analizar es el camino de ingreso al álgebra por medio de la modelación, a menudo vinculado con situaciones extra-matemáticas.

NOTAS

1. Con financiamiento parcial de Becas de Doctorado Nacional, CONICYT, Chile.

2. La prueba única de selección a las universidades tradicionales chilenas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2012). *Enseignement et apprentissage de l'algèbre*, Disponible en: http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-artigue-1. Consultado el 19 de septiembre de 2016.

Bastable, V. y Schifter, D. (2007). Classroom stories: Examples of elementary students engaged in Early Algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Bochenski, J. M. (1985). *Historia de la Lógica Formal*. Madrid: Gredos.

Bombelli, R. (1579). *L'Algebra*. Bologna: G. Rossi.

Cortés, J. C.; Hitt, F., y Saboya, M. (2016). Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un Ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria. *Bolema, v* 30, nº 54, p. 240- 264.

Davis, R. B. (1985). ICME–5 Report: Algebraic thinking in the early grades. *Journal of Mathematical Behaviour, 4,* 195-208.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter.* Tesis doctoral no publicada. Utrecht: Universidad de Utrecht.

Duval, R. (1995). *Semiosis et Pensée Humaine*. Paris: Peter Lang.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching Algebra at the lower grades of the Elementary School. *Educational Studies in Mathematics,*5, 391-412.

Houdement C., y Kuzniak A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x. 51, 5-21*. IREM de Grenoble

Houdement C., Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 11, 175-193. IREM de Strasbourg. 1

Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is Algebraic Reasoning?. In: Kaput, J.; Kaput, J.;

Carraher, D.; & Blanton, M. (Eds.), (2008). *Algebra in the Early Grades.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics

Kieran, C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In: LESTER JR, F. K., (Ed.). Second handbook of research on mathematics teaching and learning**.** Greenwich: Information Age Publishing, p. 707-762.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME,* número especial.

Mena-Lorca, A. (2010). *Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo*. Tesis doctoral, no publicada. Centro de Investigación Avanzada y de Tecnología Aplicada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Mena-Lorca, A; Mena-Lorca, J.; Morales, A. (2012). Hacia una noción de espacio de trabajo algebraico. *Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático*, Universidad de Montreal, Canadá, noviembre.

Peirce, Ch. S. (1931). *The collected papers of Charles Sanders Peirce, Vol. I.* (C. Hartshorne and P. Weiis, Eds). Cambridge, MA: Harvard University Press.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council for the Teaching of Mathematics.

Nesselman, G. H. (1842/1984). *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer.

Nixon, G. (2005). *Creating and learning abstract algebra: historical phases and conceptual levels.* Ph. D. thesis, University of South Africa.

Novotná, J. & Sarrazy, B. (2005). Model of a professor's didactical action in mathematics education. Professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problem. In J.-P. Drouhard (Ed.), *CERME 4, Working Group 6*. Sant Feliu de Guíxols, Španělsko, 17.-21.2.2005. Retrieved from http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/6/NovotnaSarrazy.pdf

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psychogenesis and the history of Science*. New York: Columbia University Press.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara–Roth, S. et al. (2003). Algebra in elementary school. En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 4 (pp. 127-134). Honolulu, Hawaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, Revista de Didáctica de la Matemática.* 7, p- 5-34.

TOPIC 2/ TEMA 2/ THÈME 2

SPECIFICITIES OF TOOLS AND SIGNS IN THE MATHEMATICAL WORK

ESPECIFICIDAD DE LAS HERRAMIENTAS Y LOS SIGNOS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO

SPÉCIFICITÉ DES OUTILS ET DES SIGNES DANS LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

SYNTHESIS/ SÍNTESIS / SYNTHÈSE

Jean-Baptiste Lagrange, Université Paris Diderot, France

Tomás Recio, Universidad de Cantabria, España

Philippe R. Richard, Université de Montréal, Canada

Laurent Vivier, Université Paris Diderot, France

SPECIFICITIES OF TOOLS AND SIGNS IN THE MATHEMATICAL WORK

1. Description of theme and thematic continuity

By focusing specifically on tools and signs, considered both as vehicles of knowledge and as tools of mathematical work, this theme maintains continuity with previous symposia. We were therefore questionning once again their effects. It was first necessary to explore the potential offered by technological environments and sign systems to evaluate the mathematical work of students, thinking of *milieu* (semiotic or technological), as well as of *subject* (student or teacher) or of *activity* (interactions between student, teacher and milieu). The perspective of the interaction between signs and tools is crucial in the MWS model and has been enriched by the consideration of their relationship to discourse, and more specifically, to discursive genesis. Another questioning arose from the consideration of the epistemological plan at the base of the MWS. It involved studying how tools, sign systems and discourse affect the construction and implementation of student knowledge, and guide their mathematical work. As an example, this dealt with the nature of the mathematical objects constructed and their domains of validity, including mathematically acceptable proofs, with the role of investigative approaches or modeling tasks and with issues related to the work on the situation model in a modelling cycle.

2. Topics of the contributions

The sessions of theme 2 were based on eleven contributions and allowed significant discussion, including the reactions of the thirteen participants that had been prepared prior to the symposium (two reactions assigned for each contribution). Taking advantage of the participation in the workshops, of the discussions in the themes or plenaries, ten contributions were reworked for the proceedings. Whilst the dominant written language was Spanish with six texts, French (two texts) and English (two texts) were also present and well-represented in the slideshow during the oral presentations. The underlying school grades ranged from the first primary school grades (6-7 years) to the last ones at secondary school (17-18 years). There were also contributions dealing with teacher training and university mathematics. Relatively to mathematical contents, processes or attitudes, the contributions:

- dealt with functional analysis or calculus, trigonometric functions, linear algebra, vectorial algebra, geometry, descriptive statistics, algorithmics, with variations determined by curricula, levels and regions (see the list of contributions of theme 2 in Table 1);
- dealt with intra and extra-mathematical modelling, reasoning, proving and communication skills, as well as achievement in mathematical tasks with technological tools, starting from their design according to didactic principles, up to their use in mathematics teaching and learning.

More specifically with regard to mathematical work, we can add the integration of the APOS (Action, Process, Object, and Schema) theory into the MWS model, interactive modelling in a convergent process that evokes the design of an idoneous mathematical working space, the idea of tutorial work, the use of historical document resources, problem-solving, mathematisation, on-line evaluation, dichotomy, instrumented modelling, semiotic mediation, coordination of genesis, the representation of data, and processing of instrumented data and sense mediated by signs or tools. The methods of research were both qualitative and quantitative, with a clear predominance of qualitative approaches such as pilot studies, case studies, grounded theory methods, ethnographic approaches or didactical engineering. Considering this diversity, the MWS model has enabled questions relative to education, teaching and learning to be raised in a didactic and scientific way, moving away from ideologically-oriented tendencies, while relying both on educational sciences and didactics of mathematics. In fact, the authors have all referred to the MWS model in their contributions, which is why it appears largely in our text, although the specificity of tools and signs in mathematical work were pivotal to discussions.

Table 1: Topic list for theme 2

Title	Authors	Contents and approaches	Country
Connected working spaces for secondary students' understanding of calculus: modelling a suspension bridge through "jigsaw" group work	Jean-baptiste Lagrange	Modelling scenarios Fibration and foliage between MWS Conceptual interaction: algebra, analysis, geometry and physics Jigsaw approach Casyopée software	France
Exploración de una transformación lineal de R^2 en R^2. El uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales	Gisela Camacho Espinoza Asuman Oktaç	Linear algebra: Linear transformation between vectorial subspaces APOS theory APOS-MWS articulation Mental structures and passage mechanisms from one structure to another Géogébra software	Mexico
ETM en el dominio de la estadística temprana: dos casos de alumnos de grado 2 y sus representaciones de datos	Soledad Estrella Pedro Vidal-Szabó Raimundo Olfos	Descriptive statistics Study of origins Construction of a table (iconic) and a bar chart Analysis of personal MWS Pencil and paper environment	Chile

Análisis de la concepción de un banco de problemas en línea aleatorios para la evaluación en matemáticas	<u>Jorge Gaona</u>	Functional analysis Creation of a bank of problems On-line evaluation Comparison of suitable teacher MWS: paper and pencil assessment and online Moodle platform and Wiris software	France
L'algorithme de dichotomie « discret » : une stratégie « *rapide* » et « *gagnante* »	<u>Dominique Laval</u>	Algorithmic conditions Activation of genesis and plans in an MWS Study of personal MWS Didactic engineering Pencil and paper environment	France
Mathematical working spaces support the teaching of proof with historical texts	<u>Vasiliki Tsiapou</u> Kostas Nikolantonakis	Geometry Planning of didactics using MWS Ancient Chinese and Greek texts Reasoning and proof skills GeoGebra software and pencil and paper	Greece
Étude prospective d'un système tutoriel à l'aide du modèle des espaces de travail mathématique	Nicolas Leduc Michèle Tessier-Baillargeon <u>Jean-Philippe Corbeil</u> Philippe R. Richard Michel Gagnon	Geometry and artificial intelligence Resolution of problems of proof Didactic work and mathematical work Teacher interactions and student interactions in an MWS QEDX tutorial system	Canada
Significados asociados a las funciones sinusoidales	<u>Minerva Martínez Ortega</u> Hugo R. Mejía Velasco Mª de los Ángeles Martínez Ortega	Sine functions Modelling of harmonic phenomena Genesis analysis MWS and paradigms in functional analysis Movement capture and generation of graphics	Mexico
El uso de la escritura como herramienta metacognitiva en los problemas de geometría	<u>Luz Graciela Orozco Vaca</u>	Resolution of problems in geometry Communication and written treatment Activation of components of an MWS Figural representation coordination and discourse Paper and pencil environment	Mexico

El uso de artefactos y signos en el paradigma del trabajo con gráficas cartesianas	Ulises Salinas-Hernández José Guzmán-Hernández Isaias Miranda-Viramontes	Graphical analysis Coordination of genesis in an MWS Movement, gesture and verbal expression of thought Distinction between true movement and graphical representation Movement capture and data collection software	Mexico

3. Themes of the discussions: from introduction to synthesis, through open-ended research questions

Each presentation (around 20 minutes) was followed by the reactions of two reviewers (around 10 minutes each) followed by a general discussion (around 10 minutes). The order in Table 1 is also the order of presentation of contributions. While most of the presentations took place in the working group sessions, the first two presentations were delivered in a plenary, following the introduction of the theme by the group leaders. The aim was to ensure an initial appropriation of the theme by participants of all working groups, while *de facto* suggesting a certain quality standard for the presentations following in the group sessions. In addition, by selecting experienced researchers to present and discuss the first contributions, we wanted to introduce the new researchers to the process in the symposium, where discussing the theme is a key for the progress of ideas. At the end of the work in group sessions, a synthesis of the work was presented in a plenary by the leaders. In the following section, we summarise the key phases of the work.

3.1. Specificities of theme 2

After studying in more depth the question of the relationship between, on the one hand, signs and tools, and on the other hand, the discursive genesis, the discussions made possible to better understand how subjects, students or teachers, who interact with different milieus, show or develop various coordination between geneses. This fits with the notion of *valence of mathematical work* (Richard et al., 2016), which is a tool to study the operational domain of actual or potential interactions in an MWS. During the introduction of the theme, three examples of issues were presented in this perspective. The first concerned the coordination of geneses in a $\text{MWS}_{geometry}$. In Fig. 1, we can see a situation of geometry and geometric calculations in which the user is engaged from the start in the coordination of the semiotic and instrumental genesis. At that point, if he or she interacts with the dynamic figure or if he or she creates a calculation from measurements, the interaction at the software interface deals both with signs and with the tool. When the interaction is oriented towards a goal, to discover, model or validate a mathematical property, the discursive genesis occurs jointly to control the procedure, to allow description of the process of sign-tool coordination and, of course, to make possible the expression of reasoning or calculations by discursive-graphic expansion.

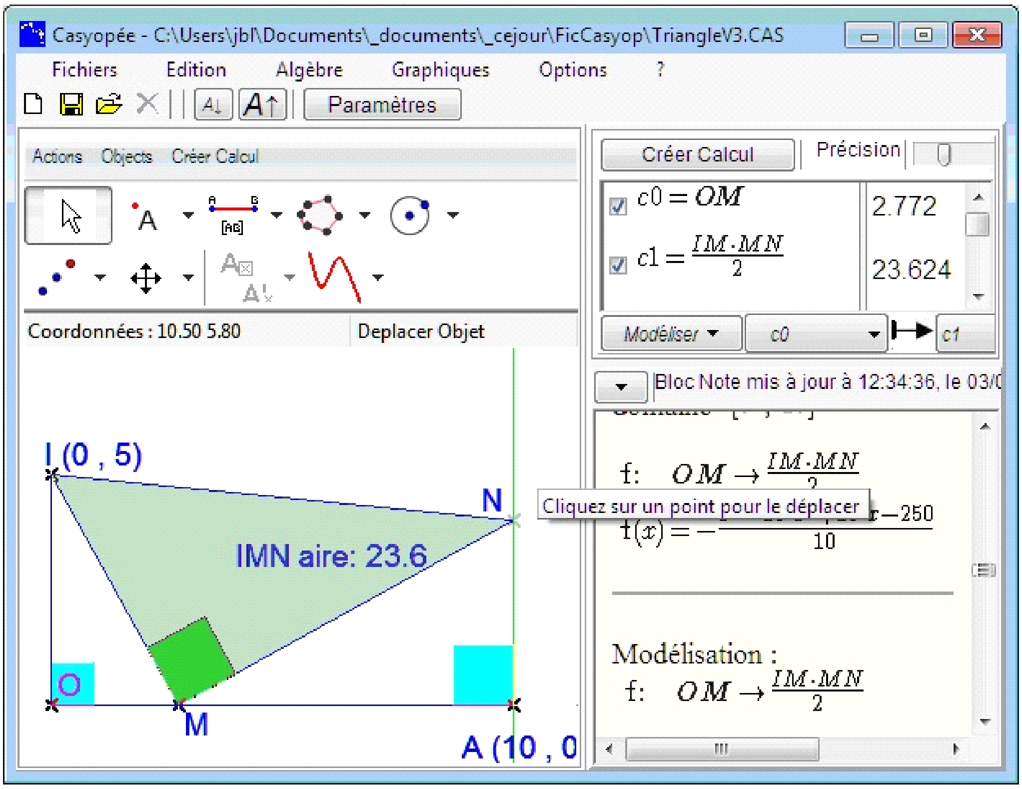


Figure 1: Coordination of genesis in an MWS$_{geometry}$ at the Casyopée software interface

The second example deals with modelling in an MWS$_{analysis}$. In contrast to the previous situation, Fig. 2 displays algebra and graphs tabs. In a scenario where one is questioning dependency between magnitudes, the modelling approach implies the mathematisation of a model situation found here at the interface. The discursive genesis can occur while objects like the function and its derivative, presented in the analytical, graphic and tabular forms, are identified. Within this mathematical model, the discursive genesis can occur again in the process of sign-tool coordination. Even if the computer tool manages part of the knowledge at stake together with its representation mode, the user is the one who interacts with the software and is responsible for interpreting the results generated. While the discursive genesis is already involved as in the previous example (extramathematical modelling), it also intervenes in the second example during the efforts of mathematisation and interpretation (intramathematical modelling).

Adopting a broader perspective, in which the basic problem arising from reality is not clearly defined, but becomes more precise when going back and forth between the model situation and the mathematisation-interpretation interplay (the modelling cycle), the discursive genesis naturally combines with the coordination of the other geneses in order to reach a stable problematics. In other words, according to the model of Borromeo Ferri (2006) and Blum & Leiβ (2007), the construction of the model situation, as a mental representation of the reality to be modelled, already requires modelling competences. The model situation is refined or becomes clearer while going back and forth to the mathematical models in an iterative process, either converging until a stable situation arises or temporarily diverging, depending on whether one wishes to enrich or tighten the model situation through including constraints or setting them aside.

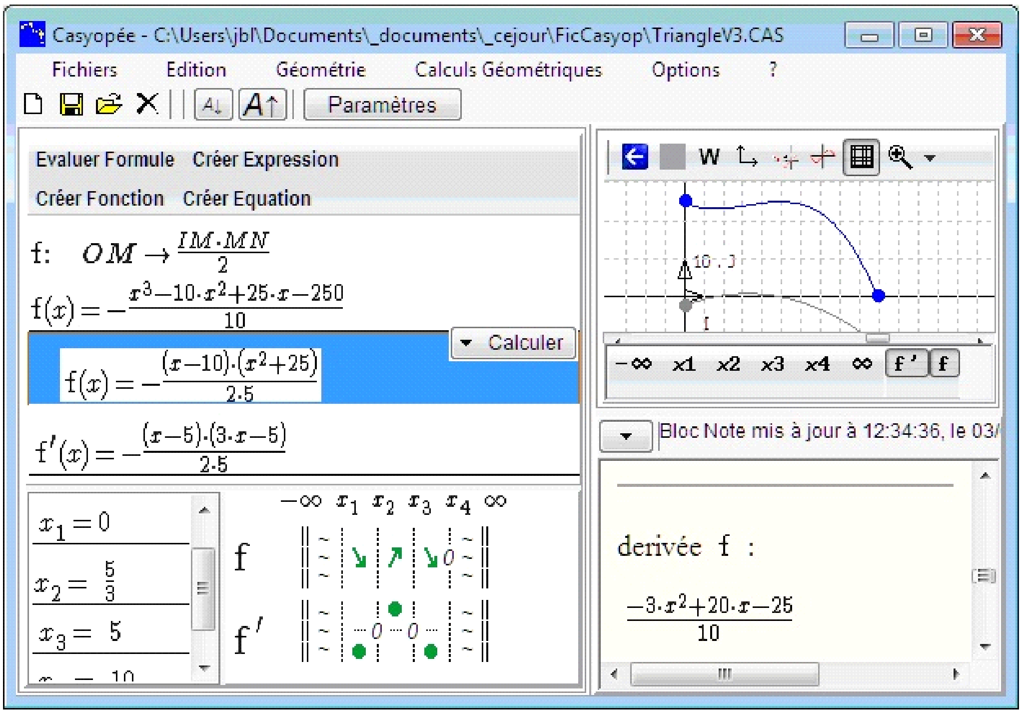


Figure 2: Modelling in an MWS$_{analysis}$ at the Casyopée interface

The third example of issues at stake deals with the notion of internal fibrations. This notion emerged from the work of theme 2 in the ETM4 symposium, where we attempted to better understand the relationship between signs and tools through the discursive genesis. At that time, it was held that the discursive genesis is often activated in order to control the semiotic and instrumental geneses, and then for most if not almost all the time, the three geneses are activated simultaneously. But depending on the period of time, the coordination of a couple of geneses dominates. In Fig. 3, we show that it is the roles of the tool (operational means), of representation and control that have been retained within the model of the MWS. Thus, in the interaction between the cognitive plane and the epistemological plane, it is possible to associate fibrations with the process of conceptualisation, both for the formation of a mathematical conception and for its implementation. If one considers this association with the model of Balacheff and Margolinas (2005) to reflect on learners' conceptions, each component of the conception would manifest itself in a fibration coming from one of the poles of the epistemological plane towards the three geneses. As for the specific role of problems or tasks, to pose them would first take place in the epistemological plane and to solve them, in the cognitive plane. If MWS are already useful for modelling mathematical work, the internal dynamics of the interactions that this model involve convey itself an integration of conceptions.

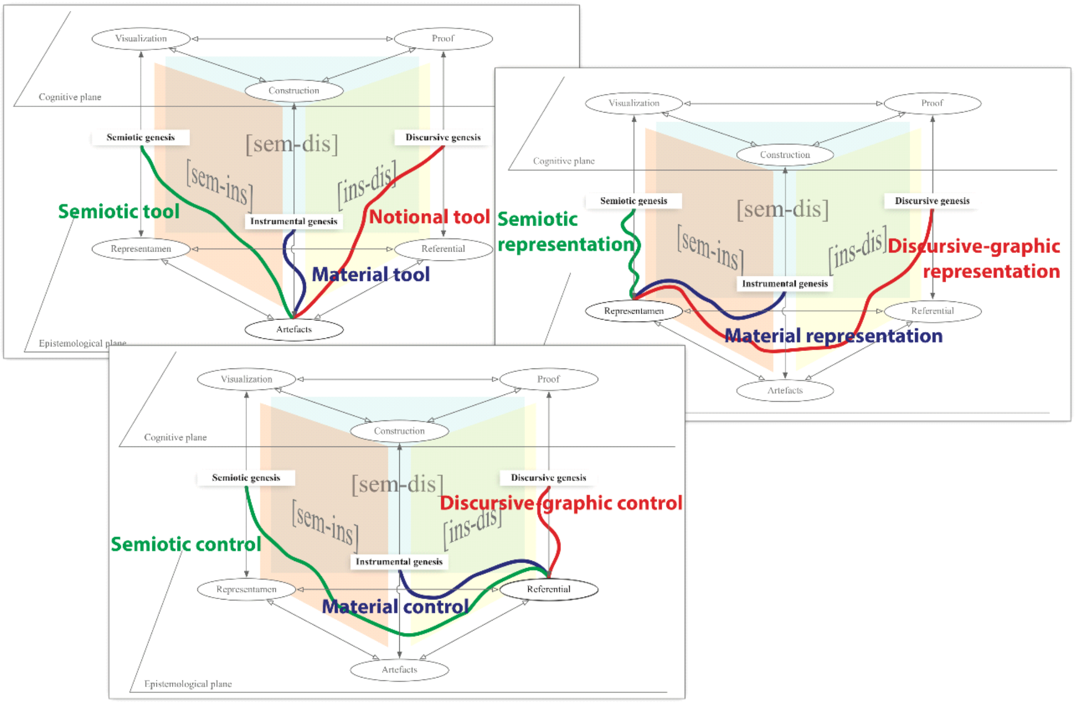


Figure 3: Internal fibrations in an MWS

As a synthesis, we summarise the above issues by showing how the mathematical work of a student when he or she solves a problem of proof using an intelligent tutorial system. In Fig. 4, we can see: in the foreground, three QED-Tutrix interface snapshots (QEDX), a tutorial system designed to support the student during the resolution process; in the background, the model of MWS when vertical planes represent different phases of mathematical work, the actual realisation of these phases defining certain cognitive mathematical skills based on the coordination of the geneses. What characterises each snapshot is the part to the left, whether for the construction or manipulation of dynamic figures (discovery and exploration, window 1), the writing of discursive propositions (presentation and communication, window 2) and the review of a demonstration (justification and reasoning, window 3). What unites them is the right-hand part, a common form field that automatically generates a conversation between the student and a virtual educational agent following the interaction of the student at the system interface. This conversation is characteristic of the multimodal role of discursive genesis in the coordination of geneses, the exercise of modelling and the role of internal fibrations in the effort of conceptualisation. In contrast to the traditional didactic relationship, in which the teacher is a separate entity to the milieu, what changes here is the integration of the discourse of the pedagogical agent into the milieu, allowing him to remain the partner of the student in the construction of knowledge. The evolution of the mathematical work of the student can then be based on a dynamic milieu, or a reactive milieu, that allows the student to initiate questioning. Whilst a well-composed MWS does not exclude the collaboration of the milieu, it is more specifically organised in order that students may evolve by their own activity.

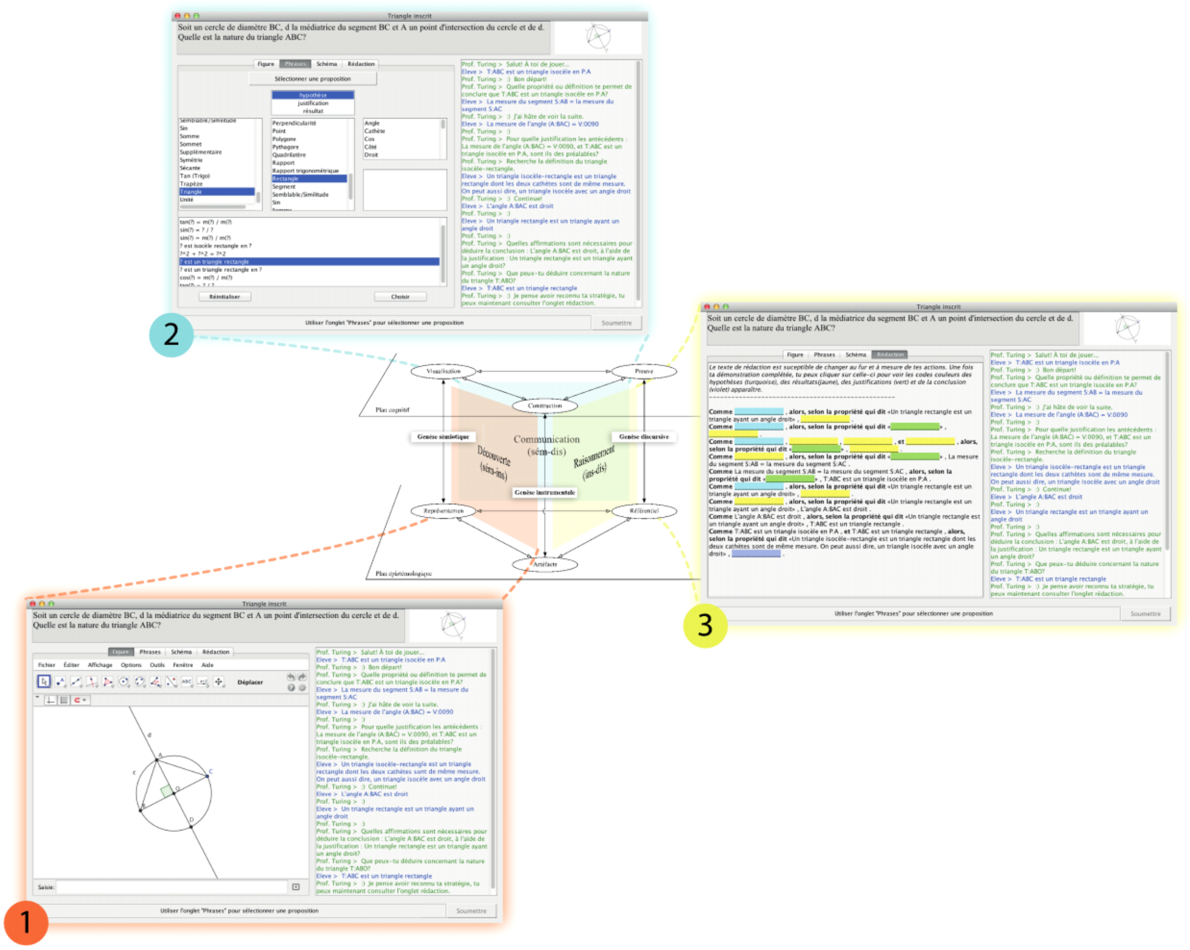


Figure 4: Mathematical work of a student solving a problem of proof at the interface of QEDX regarding the vertical plans of an MWS

3.2. Steps forward and remaining problems

In a context where the notion of mathematical work is already unifying a community of researchers, the plasticity of the MWS model facilitated interactions along the discussions. From the legacy of the previous symposia, a first question arose: should we continue to refine the basic model on a long-term basis? For example, we could: integrate cognitive mathematical skills based on the coordination of geneses; introduce the foliation of horizontal plans, such as epistemological plans for extra-mathematical modelling or cognitive plans, to account for collaborative learning; systematically adopt internal fibrations to express external conceptions or fibrations, to embed the mathematical activity that comes together in more than one area. Or, on the contrary, it is better to retain the basic model and to enrich it locally for specific research studies? Faced with these two extremes, the group agreed that extending the model may be useful in order to reconcile similar research studies, but also that, to compare more dissimilar research, both with regard to the method employed and to curricular, epistemological or didactic specificities, the basic model remains advantageous.

The first two contribution bear witness to the preceding diversity (Table 1). While Lagrange's research study uses several varieties of foliations and external fibrations between four types of working spaces, called static and material (with forces in equilibrium), algorithmic, geometric and analytical (functional analysis), the study by Camacho-Espinoza and Oktaç takes advantage of the basic model to enrich their study with the APOS theory. In each case, the working spaces model integrates inside the theoretical framework and contributes to the analysis and interpretation of the results. This allows in the first case to show how modelling can be used to justify the introduction of algebraic methods to facilitate, on the one hand, the understanding of concepts in the conceptual interaction between different spaces, and on the other hand, through links with the real world or the other sciences. In the second case, the APOS-MWS articulation begins by hierarchising three types of working space, each shared between geometric elements and algebraic elements (global MWS of linear algebra, local MWS of linear transformations and local MWS of rotations) to be able to consider four types of mental structures and five mental mechanisms that make it possible to move from one structure to another. Contrary to the discussions at the previous symposium, where the notion of mathematical work was at the forefront and was supplemented by activity theory, the very idea of work was more in the background at this symposium, although it was sometimes mentioned. The working spaces model clearly occupied the main role, with its poles, edges and planes, and we were interested in the valences of mathematical work in the interaction between different spaces to better understand learning opportunities.

Given this important place of the working spaces model in the discussions, we will return to more specific considerations relating to MWS after dealing with the idea of mathematical paradigms.

Discussions about paradigms have become wider and more challenging. The concept of geometrical paradigm emerged before the notion of MWS, since, as soon as the teaching of geometry from primary school to university level is discussed, people do not talk about the same objects or do not trust the same modes of validation. Nor do people start from the same set of references, -for instance the community of mathematicians in contrast to the mathematics educator institution, nor do people have the same usage, for instance people dealing with paradigms belonging to the same theory but using them differently (study by Martínez-Ortega, Mejía-Velasco and Martínez-Ortega). We let aside the question whether applied mathematics and pure mathematics are at the basis of two paradigms of the same theory because it is more rhetorical than practical. In addition, when one tries to define paradigms corresponding to wide historical periods of time, the result can be consistent from an epistemological point of view but not necessarily from an educational point of view. It is because there is not necessarily a correspondence between epistemology in mathematics and epistemology in a school setting, the latter epistemology being oriented by a hierarchy of uses. Moreover, if we recognise that in geometry or in algorithmics it is relatively easy to distinguish three paradigms (see Laval's contribution), this exercise of characterisation seems more complicated in other branches of mathematics, and depend on the specificity of the area. This is particularly evident in analysis, especially with the use of sensors for data collection, processing and analysis (see Martínez-Ortega, Mejía-Velasco and Martínez-Ortega; Salinas-Hernández, Guzmán-Hernández and Miranda-Viramontes).

Going on with the ternary logic of Houdement and Kuzniak (2006), we have reflected on the paradigms P_1, P_2 and P_3 beginning with the extremes. P_1 would be "near" or anchored in sensory experience, while P_3 would be based on the idea of a formalism that seeks axiomatic coherence or effective calculability, perfectly separable from sensory experience. Because P_2 is clearly between the other two paradigms, working with P_2 would allow going back and forth between reality and formalism, and expressing through embodied thinking and accepting pockets both of formalism and of sensory experience. Then we question the notion of a strict hierarchy P_1 P_2 P_3, replicating school levels, because, depending on tasks and activities, transitions between paradigms are feasible. Moreover, there is a tension between giving specific definitions of each paradigm and sharing only a general notion, common to all. This feeling of a tension meets our previous considerations of a similar tension between retaining a basic MWS framework and possible refinements for specific research studies.

The issue of internal and external consistency of the MWS model was often commented. At the preceding symposium, it was agreed that the basic model was a skeleton to which different frameworks or theories 'add flesh', depending on the questions, problems or difficulties involved in a research study. This is precisely the attitude adopted in the contributions of Orozco-Vaca, Tsiapou and Nikolantonakis, and Estrella, Vidal-Szabó and Olfos. The links with other theories, such as APOS, MTSK, the theory of didactic situations or the media-milieu dialectic has attracted attention at numerous levels, and the *in situ* contribution of computer environment designers has helped us to better understand how the constraints affecting how one can *think of a milieu* influence the very nature of mathematical work (see Gaona; Leduc, Tessier-Baillargeon, Corbeil et al.).

At a methodological level, the group work provided a crucial clarification. While several studies have already shown how the mathematical work dynamics can be explained by the activation of its components (simple, complex or simultaneous), the MWS model had not the ambition of being a phenomenological model, in the manner of a data flow diagram expressing the functioning of an activity. In this sense, the basic model would be closer to a context diagram. If, under certain conditions, the notion of the circulation of a finalised activity within a personal MWS as means to explain functioning and thus, to identify functions that could be improved, the complexity of the situations presented in research studies would gain a more holistic approach. A promising perspective considers a sequence of MWS diagrams where each represents the components that are activated at significant moments. For instance, in case of wordless proofs supported only by graphic expansion, one can account for the resolution of complex situations by a sequence of significant episodes. It has even been proposed for instance by Derouet (2016) and the contributions of theme 1, to use colour on the same diagram to differentiate between the teacher's activity, the activity assigned to the student (intention) and the activity he or she exercises (execution).

3.3. New avenues and their scope

From the whole set of group work discussions, it follows that the MWS model helps accounting for teaching or learning phenomena. It is because research studies can take great advantage of the model as soon as the methodology design phase, for the choice of resources, as well as for the definition of tasks or for the control of situations. Moreover, the model of MWS makes possible to improve the definition of emblematic tasks designed by the teacher or the researcher, in line with the convergence of back and forth movement to establish a representative model situation, or even to build an idoneous MWS. While the MWS model can be described as intelligent in the sense that it allows for adaptations to new situations, the benefits of flexibility need to be given greater attention by defining the components involved, connection with other working spaces or with other theories. Thus, for some activities, before we can think of the coordination between MWS_D, for $D \in$ {geometry, analysis, probabilities, algorithmic, …}, we must first be able to specify them. But this is not self-evident, since depending on the aim, one must wonder whether it is better to consider several MWS or whether it is better to define a *domain* and then to reflect about a MWS_{domain}. In other words, envisioning a MWS depends on how one understands the underlying mathematical domain or subdomain, the curricular obligations or the interdisciplinary nature of the issues involved. More specifically, the working space is identified as soon as the mathematical model exists, but it is the modelling activity that makes it possible to define more clearly the working space. This means that the devolution of the problem, meaning here the quest for a stable problem, progresses in conjunction with the development of geneses.

These issues at stake impact clearly the way signs and tools are handled. While distinguishing between the object dimension and the artefact dimension of a sign is often difficult, we accept from a methodological point of view that the semiotic and instrumental geneses feed each other. This is because it is common to make signs appear by using artefacts, or to manipulate a sign when the tool controls the dynamism of the properties represented. The question of the change of contract has been mentioned several times, particularly when activities take place together with paper-pencil and within a computer environment, and this change is in large part the result of the semiotic-instrumental dynamics combined with converging geneses. Moreover, some situations bring the student nowhere, not because he or she would not act in good will, but because pure ergonomic aspects, such as a use of signs or tools leaving at bay the mathematical knowledge that they should convey, would be an obstacle for emerging geneses. This means that together with the idoneity of the working space, we must also consider the idoneity of the task or activity within the didactic contract, thus exercising a kind of didactic care. Moreover, in its relation to other geneses, the idea of semiotic genesis has enriched the understanding of mathematical reasoning as it unfolds in action. We then recognised kinesthetic signs, such as the trajectory of the displacement of an individual modulated by the feedback from an interactive graphical representation (gesture-instrument coordination), which were added to the already known signs associated with embodied thinking (coordination gestures-discourse) or to those who proceed by discourse-graphic expansion at the interface of a technological device (instrument-speech coordination).

At the beginning of this text, we mentioned that the MWS model claims for didactic scientificity in a varied panorama of questions and approaches. It also appears that curricula change frequently and also that the meaning of words or ides of reference differs from one region to another, which is a problem from a research point of view. Moreover, it is often difficult to compare results obtained by qualitative and quantitative research methods. So, by taking advantage of a common model, the contributions and discussions of the working group also helped to better understand how: a) from a curricular perspective that extends from compulsory education to university, vertical planes can be associated with the development of mathematical proficiencies, as if they were learning trajectories; (b) with regard to didactical situations, the MWS model can be viewed as a system of interactions between an epistemic subject and an epistemological milieu, with or without technology, which facilitates the distinction between different types of necessity for learning or putting into application mathematical properties; c) by interpreting the model as a system of activities finalised or not finalised in the resolution of a task, it was possible to account for didactic or adidactic interactions, thus supporting the comparison of analyses within the framework of didactic engineering; d) the problem of coordination of geneses has been associated with conceptualisation in mathematics, so that each fibration in the MWS manifests itself through a component of conception, the discursive genesis playing a role of control in relation to the other geneses and to itself.

4. Bibliography

Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example “Filling up”. In Haines et al. (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theorical and empirical differenciation of phases in the modeling process. *ZDM* 38 (2), 86-95.

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). Ck¢, modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier, & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-195.

Derouet, C. (2016). La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse. Étude de la conception et de la mise en oeuvre de tâches d’introduction articulant lois à densité et calcul intégral, Thèse de doctorat de l’université Paris Diderot, France.

Richard, P.R., Oller, A.M. & Meavilla, V. (2016). The Concept of Proof in the Light of Mathematical Work. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 48*(6), 843–859 (DOI: 10.1007/s11858-016-0805-9).

ESPECIFICIDAD DE LAS HERRAMIENTAS Y LOS SIGNOS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO

1. Descripción del tema y continuidad temática

Al interesarnos específicamente por las herramientas del trabajo matemático y los signos, considerados a la vez como vehículos de conocimiento y herramientas de trabajo matemático, este tema apuesta por una clara continuidad con los simposios precedentes. Así, en su desarrollo nos hemos preguntado sobre los efectos de signos y herramientas, adoptando un enfoque dual. En primer lugar, nos ha parecido conveniente analizar el potencial que ofrecen conjuntamente los entornos tecnológicos y los sistemas de signos de cara a la evolución del trabajo matemático del alumno, ya sea enfatizando el punto de vista del *medio* (semiótico o tecnológico), del *sujeto* (alumno o profesor) o de la *actividad* (interacciones entre el alumno, el profesor y el medio). La perspectiva de la interacción —esencial en el ETM (Espacio de Trabajo Matemático)— entre signos y herramientas se ha visto enriquecida por el análisis de su relación con el *discurso* y, más concretamente, con la *génesis discursiva*. El segundo interrogante que abordamos tiene su origen en el plano epistemológico en el que se basan los ETM. Aquí estudiamos de qué modo las herramientas, los sistemas de signos y el discurso conciernen a la construcción y a la puesta en práctica de los conocimientos del alumno, guiando así su trabajo matemático. Por ejemplo, nos planteamos estudiar cómo afectan a la naturaleza de los objetos matemáticos construidos, a sus ámbitos de validez, a la idea de demostración matemáticamente aceptable o al papel de los procesos de indagación o de las tareas de modelización, teniendo en cuenta la problemática asociada al trabajo sobre la situación modelo en un ciclo de modelización.

2. Temática de las contribuciones

Las sesiones del tema 2 han incluido la presentación de once contribuciones, permitiendo así un amplio debate en el que se han incluido las réplicas de trece participantes, preparadas antes de la celebración del simposio (dado que se asignó, de entrada, a distintos participantes, la preparación de réplicas, totalizando dos por cada contribución). La activa colaboración de los participantes en los talleres, en los debates en las sesiones temáticas o en las sesiones plenarias, ha conducido a la revisión, para las actas, de diez de dichas contribuciones. Aunque el idioma dominante en los escritos ha sido el castellano, con seis textos, el francés (dos textos) y el inglés (dos textos) también han estado bien representados en las presentaciones orales. Los niveles escolares, a los que las mismas han hecho referencia, abarcan desde los primeros pasos en la escuela primaria (6-7 años) hasta los últimos años de la educación secundaria (17-18 años), con algunas incursiones en el ámbito de la formación inicial del profesorado y en la enseñanza de matemáticas en la universidad. En cuanto a los contenidos, los procesos o las actitudes matemáticas, las contribuciones:

- versan sobre el análisis de funciones o el cálculo, las funciones trigonométricas, el álgebra lineal, el álgebra vectorial, la geometría, la estadística descriptiva, la algoritmia y la informática, con las correspondientes matizaciones debidas a las especificidades curriculares, a los niveles y a las regiones consideradas (véase la lista de contribuciones del Tema 2 en la Tabla 1);
- tratan de la modelización intra y extra-matemática, de la capacidad de razonar, demostrar, comunicar o efectuar tareas matemáticas con herramientas tecnológicas, desde el diseño de las mismas según determinados principios didácticos hasta su uso en la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas.

Más específicamente, en relación con el trabajo matemático, se puede añadir que las contribuciones hacen referencia a la incorporación de la teoría APOS (Acción, Proceso, Objeto, eSquema) al modelo de los ETM, a la modelización interactiva en un proceso convergente que evoque el diseño de un espacio de trabajo matemático idóneo, a la idea de trabajo didáctico, al uso de recursos documentales históricos, a la resolución de problemas, la matematización, a la evaluación on-line, a la dicotomía, a la modelización instrumental, la mediación semiótica, la coordinación de las génesis, a la representación de datos, al tratamiento de datos instrumentales y al sentido transmitido por los signos o por las herramientas. En cuanto a los métodos de investigación utilizados en las contribuciones, podemos decir que los hay cualitativos y cuantitativos, con una clara predominancia de enfoques cualitativos como el ensayo, el estudio de casos, los métodos propios de la teoría anclada, los procesos etnográficos o la ingeniería didáctica. Ante un panorama tan variado, el modelo de los ETM ha permitido cuestionar la formación, la enseñanza y el aprendizaje de forma didáctica y científica, es decir, alejándose de las tendencias simplemente ideológicas, apoyándose a la vez sobre las ciencias de la educación y la didáctica de las matemáticas. En efecto, todos los autores se han referido al modelo ETM en sus diferentes contribuciones, motivo por el cual este aparece ampliamente reflejado en nuestro texto, aunque la especificidad de las herramientas y los signos en el trabajo matemático hayan servido de eje central en los debates.

Tabla 1: Lista de las contribuciones al tema 2

Título	Autores	Contenidos y enfoques	País
Connected working spaces for secondary students' understanding of calculus: modelling a suspension bridge through "jigsaw" group work	Jean-baptiste Lagrange	Situaciones de modelización Fibraciones y foliaciones entre ETM Interacción conceptual: álgebra, análisis, geometría y física Enfoque de aprendizaje cooperativo (método puzle) *Software* Casyopée	Francia
Exploración de una transformación lineal de R^2 en R^2. El uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales	Gisela Camacho Espinoza Asuman Oktaç	Álgebra lineal: transformación lineal entre subespacios vectoriales Teoría APOS Articulación APOS-ETM Estructuras mentales y mecanismos de paso de una estructura a otra *Software* Géogébra	México
ETM en el dominio de la estadística temprana: dos casos de alumnos de grado 2 y sus representaciones de datos	Soledad Estrella Pedro Vidal-Szabó Raimundo Olfos	Estadística descriptiva Estudio de las génesis Elaboración de una tabla (icónica) de los efectivos y de un diagrama de barras (icónico) Análisis de ETM personales Entorno de trabajo con lápiz y papel	Chile
Análisis de la concepción de un banco de problemas en línea aleatorios para la evaluación en matemáticas	Jorge Gaona	Análisis funcional Creación de un banco de problemas Evaluación en línea Comparación de ETM idóneos de profesores: evaluación con lápiz y papel y on-line Plataforma Moodle y *software* Wiris	Francia

L'algorithme de dichotomie « discret » : une stratégie « *rapide* » et « *gagnante* »	Dominique Laval	Situaciones algorítmicas Activación de las génesis y de los planos en un ETM Estudio de los ETM personales Ingeniería didáctica Entorno lápiz y papel	Francia
Mathematical working spaces support the teaching of proof with historical texts	Vasiliki Tsiapou Kostas Nikolantonakis	Geometría Planificación didáctica con ayuda de los ETM Textos chinos y griegos antiguos Capacidad de razonamiento y de demostración *Software* Géogébra y lápiz y papel	Grecia
Étude prospective d'un système tutoriel à l'aide du modèle des espaces de travail mathématique	Nicolas Leduc Michèle Tessier-Baillargeon Jean-Philippe Corbeil Philippe R. Richard Michel Gagnon	Geometría e inteligencia artificial Resolución de problemas de demostración Trabajo didáctico y trabajo matemático Interacciones del profesor e interacciones del alumno en un ETM Sistema tutorial QEDX	Canadá
Significados asociados a las funciones sinusoidales	Minerva Martínez Ortega Hugo R. Mejía Velasco Mª de los Ángeles Martínez Ortega	Funciones sinusoidales Modelización de fenómenos armónicos Análisis de las génesis ETM y paradigmas en el análisis de funciones Sensores de movimiento y generación de gráficos	México
El uso de la escritura como herramienta metacognitiva en los problemas de geometría	Luz Graciela Orozco Vaca	Resolución de problemas en geometría Comunicación y tratamiento por escrito Activación de los componentes de un ETM Coordinación de la representación figurativa y discurso Entorno lápiz y papel	México
El uso de artefactos y signos en el paradigma del trabajo con gráficas cartesianas	Ulises Salinas-Hernández José Guzmán-Hernández Isaias Miranda-Viramontes	Análisis de las gráficas cartesianas Coordinación de las génesis en un ETM Desplazamiento, gestualidad y expresión verbal del pensamiento Distinción entre movimiento real y representación gráfica Sensores de movimiento y *softwares* de recogida de datos	México

3. Temática de los debates: de la introducción a la síntesis, pasando por líneas de investigación abiertas

Tras cada presentación (cerca de 20 minutos) pasamos, en primer lugar, a escuchar las reacciones de los dos revisores designados (unos 10 minutos cada uno) y, posteriormente, al debate general (en torno a 10 minutos). El orden que aparece en la Tabla 1 se corresponde al de presentación de las contribuciones. Aunque la mayoría de las presentaciones se produjeron durante las sesiones paralelas, las dos primeras se realizaron en sesión plenaria, tras la introducción del tema por parte de los responsables de grupo. Se ha tratado, así, de promover una primera apropiación del tema por parte de todos los asistentes y de definir *de facto* un cierto nivel de calidad para las sesiones del grupo. Además, al elegir a investigadores experimentados para presentar y debatir sobre las primeras contribuciones, buscábamos el iniciar a los nuevos investigadores en la tradición del simposio, en el que es determinante el debate sobre los temas presentados para lograr avances en torno a las ideas clave. Al finalizar el trabajo en las sesiones paralelas, los responsables presentaron, en sesión plenaria, una síntesis del trabajo desarrollado. A continuación resumimos los momentos clave de este esquema de trabajo.

3.1. Aspectos específicos del Tema 2

Tras profundizar en las relaciones entre los signos y las herramientas y, por otra parte, la génesis discursiva, los debates han permitido comprender mejor cómo los sujetos, alumnos o docentes, que interactúan con diferentes medios, muestran o desarrollan coordinaciones variadas entre las génesis. Esto se suma a la noción de *valencia del trabajo matemático* (Richard et al., 2016) que se presenta como una herramienta para estudiar el dominio de funcionamiento de las interacciones reales o potenciales en un ETM. Durante la introducción del tema se han presentado tres ejemplos de problemáticas que siguen esta línea. El primero de ellos versa sobre la coordinación de las génesis en un $\text{ETM}_{geometría}$. En la Fig. 1, observamos una situación geométrica y de cálculos geométricos en la que el usuario está implicado, desde el principio, en la coordinación de las génesis semiótica e instrumental. Y ello hasta tal punto que, tanto si actúa sobre la figura dinámica como si desarrolla un cálculo a partir de ciertas medidas, su interacción con la interfaz del *software* involucra, a la vez, al signo y la herramienta. Cuando finaliza la interacción, ya sea para descubrir, modelizar o validar una propiedad matemática, la génesis discursiva interviene conjuntamente para controlar el proceso, para permitir la descripción del proceso de coordinación signo-herramienta y, por supuesto, para hacer posible la expresión del razonamiento o de los cálculos a través de la ampliación discursivo-gráfica.

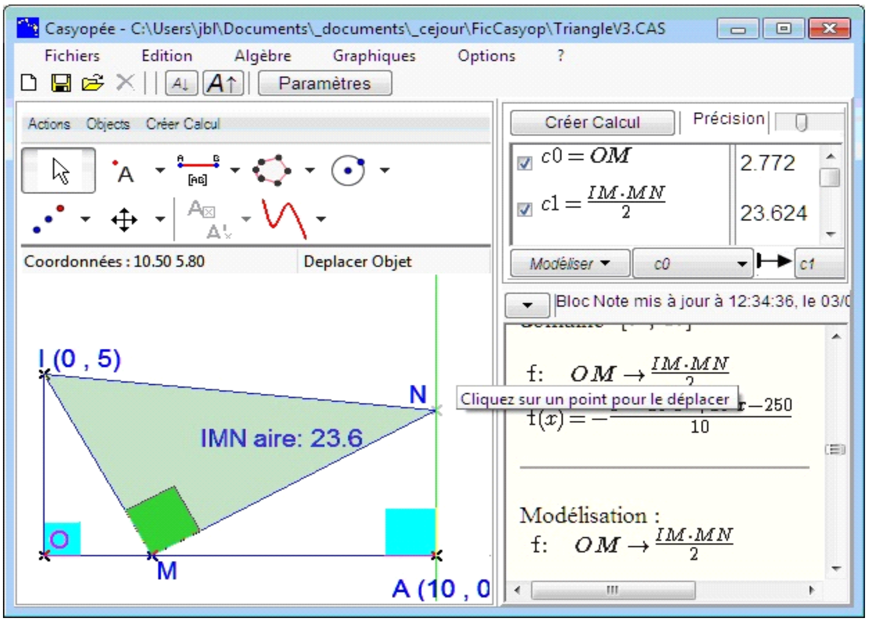


Figura 1: Coordinación de las génesis en un ETM$_{geometría}$ en la interfaz del *software* Casyopée

El segundo ejemplo trata sobre la modelización en un ETM$_{análisis}$. Al contrario que en la situación anterior, la Fig. 2 muestra, en primer lugar, elementos algébricos y gráficos. En una situación en la que nos preguntamos por la variación entre medidas, el proceso de modelización implica la matematización de una situación modelo que, en este caso, se encuentra en la interfaz. La génesis discursiva puede desarrollarse para esta puesta en escena de objetos tales como la función y su derivada, presentados de forma analítica, gráfica y tabular. Desde las primeras consideraciones en el marco del modelo matemático, la génesis discursiva puede intervenir de nuevo, frente al proceso de coordinación signo-herramienta. Aunque la herramienta informática gestiona, de forma paralela, parte de los conocimientos que están en juego y su modo de representación, el usuario es el que interroga al *software* y el que es responsable de interpretar los resultados obtenidos. Si la génesis discursiva intervenía ya en el ejemplo anterior (modelización extra-matemática), también interviene en el segundo ejemplo a través de los esfuerzos de matematización y de interpretación (modelización intra-matemática).

Desde una perspectiva más amplia, en la que el problema básico, extraído de la realidad, no está claramente definido, sino que se va configurando a lo largo de idas y venidas entre la situación modelo y el juego de matematización-interpretación (ciclo de modelización), la génesis discursiva se asocia naturalmente a la coordinación de otras génesis para la obtención de una problemática estable. En otras palabras, siguiendo el modelo de Borromeo Ferri (2006) y Blum y Leiβ (2007), la construcción de la situación modelo, en tanto que representación mental de la realidad que se tiene que modelizar, requiere ya de competencias de modelización. La situación modelo se afina o se define con mayor precisión en un proceso iterativo que, a lo largo de las idas y venidas con los modelos matemáticos, o bien converge hasta la obtención de una situación estable, o bien diverge provisionalmente, según deseemos enriquecer o contraer la situación modelo, mediante la inclusión o el descarte de condicionantes.

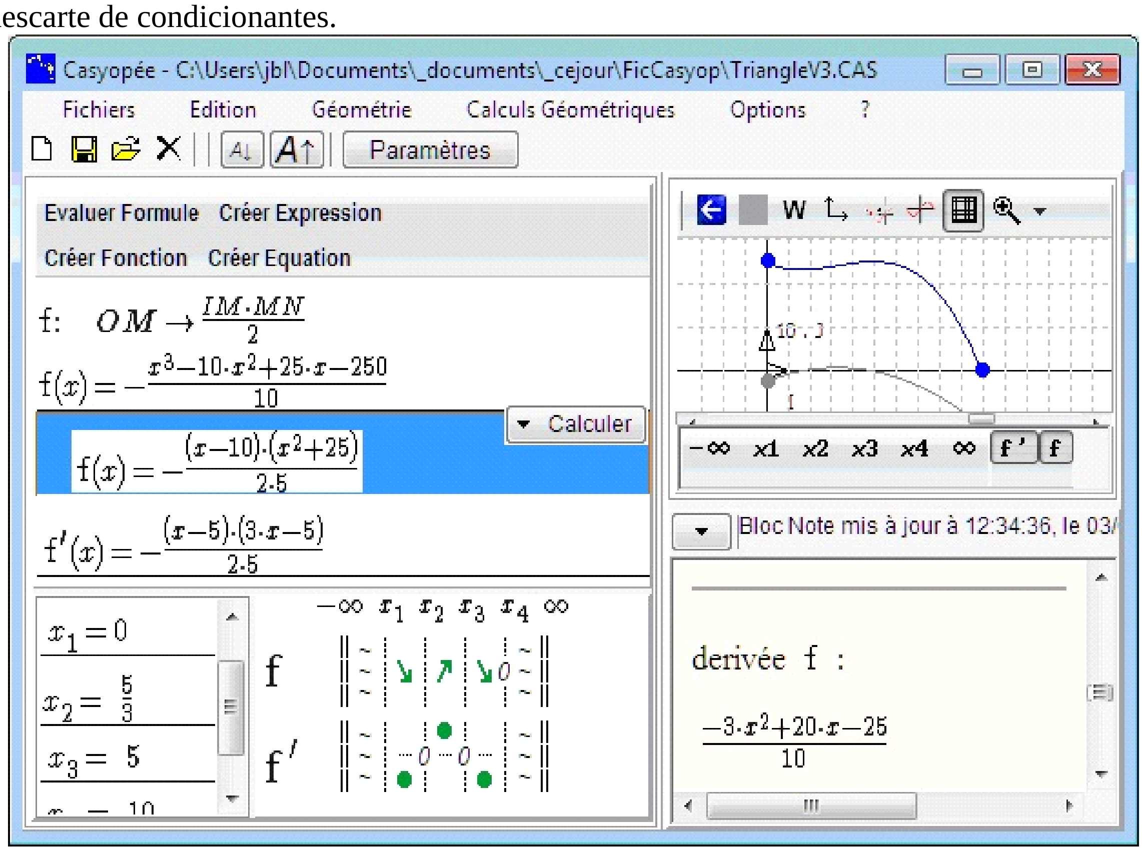


Figura 2: Modelización en un ETM$_{análisis}$ en el interfaz de Casyopée

El tercer ejemplo de problemáticas concierne a la noción de fibraciones internas. Esta noción procede del trabajo que se realizó en el Tema 2 durante el simposio ETM4, cuando se trataba, precisamente, de comprender mejor las relaciones de los signos y herramientas con la génesis discursiva. En aquel momento se consideraba que la génesis discursiva se activa, frecuentemente, para el control de las génesis semióticas e instrumentales; y que la mayor parte del tiempo, por no decir casi siempre, las tres génesis se activan al mismo tiempo, aunque, según los momentos considerados, domina la coordinación de una pareja de génesis. En la Fig. 3 se muestran cuáles son los roles de herramienta (medios de tipo operativo), de representación y de control que se han conservado en el modelo ETM. De este modo, en la interacción entre los planos cognitivo y epistemológico, es posible asociar las fibraciones al proceso de conceptualización, tanto en la formación de un concepto matemático como en su aplicación. Si contemplamos esta asociación desde la perspectiva del modelo de Balacheff y Margolinas (2005) para reflexionar sobre las concepciones de los alumnos cada componente de tales concepciones se manifestarían mediante una fibración que surge de uno de los polos del plano epistemológico y se orienta hacia las tres génesis. En cuanto al papel específico de los problemas o tareas, plantearlos se situaría, en primera instancia, en el plano epistemológico y, resolverlos, en el plano cognitivo. Si bien los ETM ya resultan muy útiles para modelizar el trabajo matemático, el dinamismo interno de las interacciones que este modelo facilita, conlleva una integración de las concepciones.

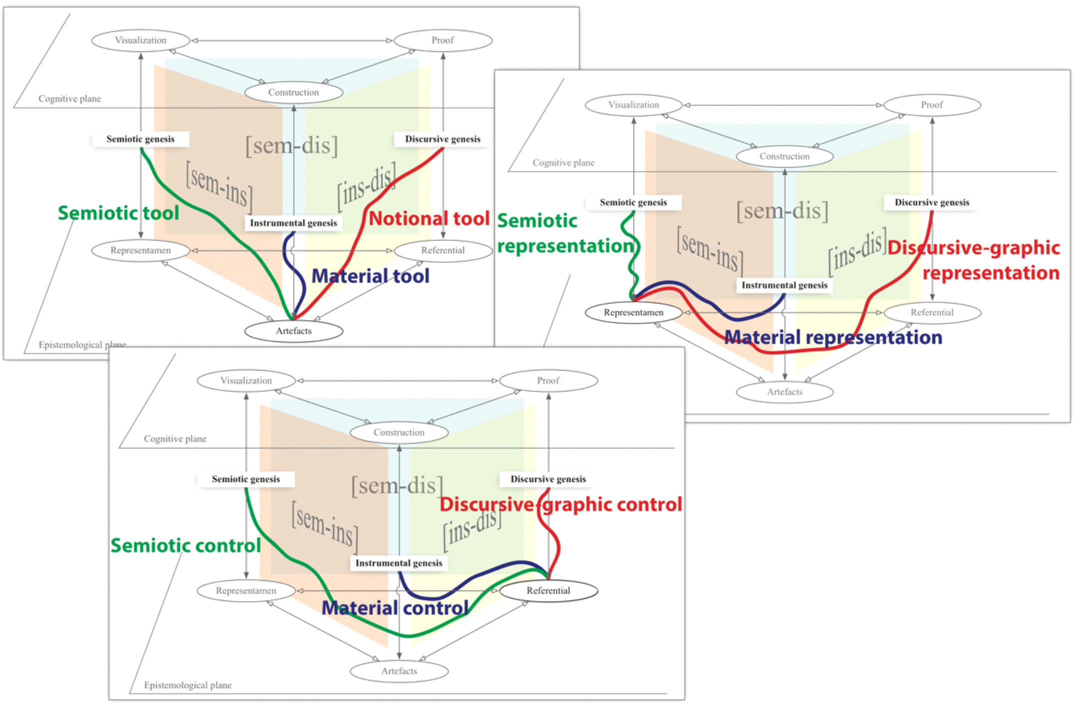


Figura 3: Fibraciones internas en un ETM

A modo de síntesis, hemos resumido las problemáticas precedentes mostrando cómo evoluciona el trabajo matemático de un alumno que resuelve un problema de demostración con ayuda de un sistema tutorial inteligente. En la Fig. 4, observamos: en primer plano, tres instantáneas de la interfaz de QED-Tutrix (QEDX), un sistema tutorial destinado a apoyar al alumno durante el proceso de resolución; en segundo plano, el modelo de los ETM en el que los planos verticales representan diferentes fases del trabajo matemático, mientras que la realización efectiva de dichas fases define ciertas competencias cognitivas basadas en la coordinación de las génesis. Lo que caracteriza cada instantánea aparece en la parte izquierda de la figura, ya sea para la construcción o la manipulación de figuras dinámicas (descubrimiento y exploración, ventana 1), la escritura de propuestas discursivas (presentación y comunicación, ventana 2) o la redacción de una demostración (justificación y razonamiento, ventana 3). Lo que las une es la parte de la derecha, un campo común que genera automáticamente una conversación entre el alumno y un agente pedagógico virtual que desarrolla la interacción del alumno con la interfaz del sistema. Ahora bien, esta conversación es más característica del papel multimodal de la génesis discursiva en lo que respecta a coordinación de las génesis, del ejercicio de modelización y del papel de las fibraciones internas en el esfuerzo de conceptualización. Con respecto a la relación didáctica tradicional, en la que el profesor es una entidad diferente del medio, lo que cambia en este caso es la integración del discurso del agente pedagógico en el medio, siendo este último un aliado del alumno en la construcción de conocimientos. Así, la evolución del trabajo matemático del alumno puede contar con un medio dinámico o, más bien, con un medio reactivo, que deja que el alumno tome la iniciativa a la hora de plantear interrogantes. Aunque un ETM bien constituido no excluye la colaboración del medio, es sobre todo el medio el que, en última instancia, se organiza para permitir que el alumno evolucione gracias a su propia iniciativa.

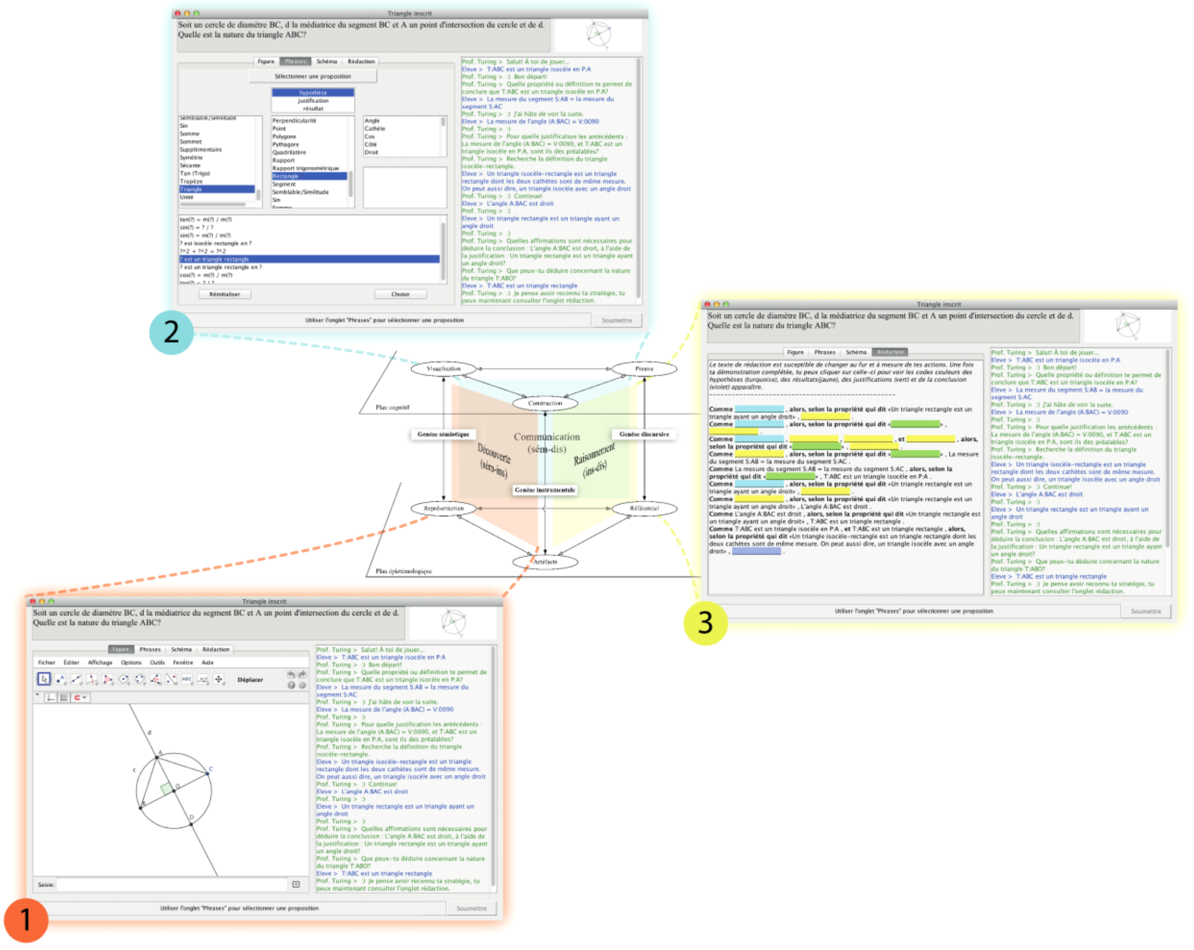


Figura 4: Trabajo matemático de un alumno que resuelve un problema de demostración con la interfaz de QEDX desde el punto de vista de los planos verticales de un ETM

3.2. Aportaciones y problemas

En un contexto en el que la noción de trabajo matemático ya es de por sí muy unificadora, ha sido más bien la plasticidad del modelo de los ETM la que ha facilitado los intercambios a lo largo de los debates. Como herencia de los simposios anteriores, se planteó una primera pregunta: ¿hay que tratar de afinar de forma duradera el modelo de base? Por ejemplo, se podría: integrar en el mismo las competencias matemáticas cognitivas fundadas en la coordinación de las génesis; introducir la foliación de planos horizontales, como los planos epistemológicos para la modelización extra-matemática o los planos cognitivos, para reflejar el aprendizaje colaborativo; o, incluso, adoptar sistemáticamente las fibraciones internas para expresar las concepciones o las fibraciones externas para incorporar la actividad matemática que se desarrolle conjuntamente en más de un campo. A menos que, por el contrario, se considere preferible conservar el modelo de base y enriquecerlo provisionalmente en función de las investigaciones o de las necesidades. Ante estos dos extremos el grupo de debate ha determinado que, para cotejar investigaciones cercanas, la ampliación del modelo puede resultar útil; pero para realizar intercambios sobre investigaciones más alejadas, ya sea por el método empleado o por la particularidad de los aspectos curriculares, históricos, epistemológicos o didácticos sobre los que traten, el modelo de base parece ser el más apropiado.

Las dos primeras contribuciones son un buen reflejo de dicha diversidad de posiciones (Tabla 1). Mientras que la investigación de Lagrange utiliza una gran variedad de foliaciones y fibraciones externas entre cuatro tipos de espacios de trabajo, denominados estático y material (con fuerzas en equilibrio), algorítmico, geométrico y analítico (análisis de funciones), el estudio de Camacho-Espinoza y Oktaç recurre al modelo de base para enriquecer su estudio con la teoría APOS. En ambos casos el modelo de los espacios de trabajo se integra en el marco teórico y se utiliza en el análisis y la interpretación de los resultados. Esto permite, en el primer caso, mostrar cómo se puede utilizar la modelización para justificar la introducción de métodos algébricos para facilitar, por un lado, la comprensión de los conceptos en la interacción conceptual entre diferentes espacios y, por otro, el reforzamiento de los vínculos con el mundo real y otras ciencias. En el segundo caso, la articulación APOS-ETM comienza por jerarquizar tres tipos de espacios de trabajo, cada uno de ellos dividido en elementos geométricos y elementos algébricos (ETM global de álgebra lineal, ETM local de transformaciones lineales seguido de un ETM local de rotaciones), con el fin de poder considerar cuatro tipos de estructuras mentales y cinco mecanismos mentales que hacen posible pasar de una estructura a otra. Contrariamente a los debates del simposio anterior, donde la noción de trabajo matemático aparecía en primer plano y se enriquecía con la teoría de la actividad, la idea misma de trabajo aparece ahora como telón de fondo, aunque se menciona expresamente dicha noción en ocasiones. El modelo de los espacios de trabajo desempeña claramente el papel principal, con sus polos, sus aristas y sus planos, y nos interesamos por las valencias del trabajo matemático en la interacción entre diferentes espacios con el fin de comprender mejor las posibilidades de aprendizaje de los conceptos matemáticos.

Dada la importancia del modelo en los debates, retomaremos algunas consideraciones más específicas a los ETM, no sin antes realizar, a continuación, una pequeña incursión que versa sobre los paradigmas matemáticos.

El tratamiento reservado a los paradigmas ha adquirido una magnitud muy estimulante. El concepto de paradigma geométrico surgió antes que la noción de ETM, dado que, cuando se debate sobre la enseñanza de la geometría, desde primaria hasta la universidad, no todos hablan ni de los mismos objetos, ni de los mismos modos de validación. Es más, ni siquiera parten del mismo conjunto de referencia, como la comunidad de matemáticos frente a la institución matemática, ni del mismo uso, como aquel asociado a paradigmas que proceden de la misma teoría, pero cuyos usos son diferentes (estudio de Martínez-Ortega, Mejía-Velasco y Martínez-Ortega). ¿Las matemáticas aplicadas y las matemáticas especulativas serían acaso, de entrada, dos paradigmas de una misma teoría? Dejando esta cuestión en el plano de la oratoria, cuando tratamos de definir los paradigmas correspondientes a los grandes periodos históricos, el resultado obtenido resulta coherente desde un punto de vista epistemológico, pero ello implicaría una correspondencia entre la epistemología en matemáticas y la epistemología en el ámbito escolar, mientras que éste último está más orientado a una jerarquía de los usos. Además, aunque asumimos que en geometría o en algoritmia es relativamente sencillo distinguir tres paradigmas (véase la contribución de Laval), el ejercicio de caracterización parece más complicado en otras ramas de las matemáticas, dependiendo de la especificidad del campo en cuestión. Esto es algo que se aprecia especialmente en el análisis, sobre todo con el uso de sensores para la recogida, el tratamiento y el análisis de datos instrumentales (véase las contribuciones de Martínez-Ortega, Mejía-Velasco y Martínez-Ortega; Salinas-Hernández, Guzmán-Hernández y Miranda-Viramontes).

Siguiendo la lógica ternaria de Houdement y Kuzniak (2006), hemos reflexionado sobre los paradigmas P_1, P_2 y P_3 empezando por los extremos. De modo que P_1 estaría «cerca de» o se insertaría en la experiencia sensible, mientras que P_3 estaría basado en la idea de un formalismo que busca la coherencia axiomática o que es efectivamente calculable, pudiendo ser perfectamente desvinculado de la experiencia sensible. Mientras que P_2 se define claramente entre los otros dos paradigmas, trabajar en el mismo permitiría idas y venidas entre la realidad y el formalismo, expresándose mediante un pensamiento representado y aceptando islotes de formalismo o de experiencia sensible. Se cuestiona, así, la idea de una jerarquía estricta de tipo P_1 P_2 P_3, a imagen de los niveles de enseñanza, puesto que, según las tareas o las actividades, es posible que se produzcan saltos de un paradigma a otro. De hecho, observamos que existe un debate entre dar una definición precisa de cada paradigma o dotarlos únicamente de un color general, común a todos. Esta impresión sobre la diversidad de posturas se suma a nuestras consideraciones precedentes relativas al ETM de base con posibles perfeccionamientos.

Se ha hablado con frecuencia sobre la coherencia interna y la coherencia externa del modelo de los ETM. Durante el último simposio se acordó que el modelo de base era un esqueleto al que los diferentes marcos o teorías aplicadas en los estudios dotan de sustancia según las cuestiones, los problemas o las dificultades que estén en juego. Esta es precisamente la actitud adoptada en las contribuciones de Orozco-Vaca, de Tsiapou y Nikolantonakis, y de Estrella, Vidal-Szabó y Olfos. Su articulación con otras teorías como APOS, MTSK, la teoría de las situaciones didácticas o la dialéctica media-medio, ha llamado la atención a varios niveles, pero la contribución *in situ* de diseñadores de sistemas informáticos ha permitido comprender mejor el modo en que los elementos que priman al aplicar un enfoque de *medio* influyen en la naturaleza misma del trabajo matemático (véase Gaona; Leduc, Tessier-Baillargeon, Corbeil et al.).

En el ámbito metodológico, el grupo de trabajo ha aportado una aclaración fundamental. Si bien varias investigaciones han demostrado hasta qué punto la dinámica del trabajo matemático puede beneficiarse de la activación de sus componentes (simples, complejos o simultáneos), el modelo de los ETM no pretende ser un modelo fenomenológico, a imagen de un diagrama de flujos de datos que representa el funcionamiento de una actividad. En este sentido, el modelo de base se asemeja más a un diagrama de contexto. Aunque se recurra en ocasiones, en determinadas condiciones, a la idea de circulación de una actividad finalizada en el seno de un ETM personal, con el fin de explicar un funcionamiento y localizar así funciones mejorables, la complejidad de las situaciones presentadas en las investigaciones se beneficiaría de un enfoque más holístico. Una perspectiva prometedora considera una serie de diagramas ETM en el que cada uno representa los componentes que se activan durante momentos significativos. De este modo, a imagen de las pruebas sin palabras que se demuestran mediante desarrollo gráfico, se puede reflejar la resolución de situaciones complejas con una serie de momentos significativos. También se ha llegado a proponer el uso de los colores en un mismo diagrama, siguiendo el ejemplo de Derouet (2016) y las contribuciones del tema 1, para diferenciar la actividad a cargo del profesor de la actividad que procede del alumno (intención) o ejercida por el mismo (ejecución).

3.3. Las nuevas vías y su alcance

Del conjunto de los debates se deduce que el modelo de los ETM facilita la expresión a la hora de describir fenómenos de enseñanza o de aprendizaje, de modo que las investigaciones puedan sacar un mayor beneficio desde el diseño mismo de su dispositivo metodológico, ya sea en cuanto a la elección de los recursos, la definición de las tareas o el control de las situaciones. Además, el modelo de los ETM permite mejorar la definición de tareas emblemáticas, concebidas por el profesor o por el investigador, con vistas a una convergencia de idas y venidas para establecer una situación modelo representativa, o incluso para la creación de un ETM idóneo. Si bien el modelo de los ETM puede ser calificado como inteligente, en el sentido de que permite adaptaciones a situaciones nuevas, las ventajas de la flexibilidad requieren, como contrapartida, una mayor atención a la hora de definir los componentes en juego, sobre todo en aras de la articulación con otros espacios de trabajo u otras teorías. De este modo, para determinadas actividades, antes de plantear la coordinación entre ETM_D, donde $D \in$ {geometría, análisis, probabilidades, algoritmia, …}, hay que ser capaces de definirlos. Algo que no siempre resulta tan evidente, puesto que, según el objetivo buscado, debemos preguntarnos si conviene considerar varios ETM o bien si es preferible definir un campo y reflexionar en dicho ETM_{campo}. En otras palabras, el ETM planteado depende de la idea que nos hagamos del campo o de un área específica del campo matemático en cuestión, de las obligaciones curriculares o de la interdisciplinariedad de las problemáticas. Más específicamente, respecto de las relaciones entre los ETM y la modelización matemática, el espacio de trabajo se determina a partir del momento en que existe el modelo matemático, pero el ejercicio de modelización es el que permite definir más claramente el espacio de trabajo en el que evolucionamos. Esto quiere decir que la devolución del problema, entendida en un sentido asociado a la búsqueda de una problemática estable, se organiza conjuntamente con el desarrollo de las génesis.

Las consecuencias de estas consideraciones repercuten plenamente en el modo en que se tratan los signos y herramientas. Si bien la distinción entre la dimensión objeto o la dimensión artefacto de un signo suele ser difícil de realizar, consideramos, desde un punto de vista metodológico, que las génesis semióticas e instrumentales se alimentan mutuamente. Esto se debe a que resulta frecuente que aparezcan signos por el uso de los artefactos, o que se manipule un signo a pesar de que sea la herramienta la que controle el dinamismo de las propiedades representadas. La cuestión del cambio de contrato ha sido evocada en varias ocasiones, entre una actividad de lápiz y papel y una actividad que se desarrolla en un entorno informático, debido, en gran medida, al dinamismo semiótico-instrumental conjugado con el acercamiento de las génesis. De hecho, determinadas situaciones no llevan al alumno a ninguna parte, no porque este no actúe de buena fe, sino porque el inicio de las génesis se ve confrontado con un aspecto estrictamente ergonómico, como el uso marginal de los conocimientos matemáticos vehiculados por los signos y las herramientas. Esto quiere decir que, junto con la idoneidad del espacio de trabajo, también hay que reflexionar sobre la idoneidad de la tarea o de la actividad en el seno del contrato didáctico, como una especie de vigilancia didáctica. Además, en su relación con otras génesis, la génesis semiótica ha permitido enriquecer la comprensión del razonamiento matemático que se desarrolla en la acción. Hemos reconocido, así, signos kinestésicos, como la trayectoria del desplazamiento de un individuo modulado por las retroacciones de una representación gráfica interactiva (coordinación gestos-instrumento), que se han sumado a los signos ya conocidos asociados al pensamiento representado (coordinación gestos-discurso) o a aquellos que proceden del desarrollo discursivo-gráfico en la interfaz de un dispositivo tecnológico (coordinación instrumento-discurso).

Al principio de este texto hemos mencionado que el modelo de los ETM sostiene una pretensión de cientificidad didáctica en un panorama en el que las cuestiones y los enfoques son muy diversos. Cabe destacar, también, que los programas curriculares cambian con frecuencia y que el significado de las palabras o de los conceptos de referencia difiere de una región a otra, lo que supone un problema desde el punto de vista de la investigación. Por ello, a menudo resulta difícil llevar a cabo una comparación de resultados procedentes de diversas investigaciones cualitativas y cuantitativas. Gracias a la existencia de un modelo común, las contribuciones y debates del grupo de trabajo también han permitido comprender mejor como: a) en una perspectiva curricular, que cubre desde la enseñanza obligatoria hasta la universidad, los planos verticales pueden asociarse a competencias matemáticas, como si se tratara de vectores de formación; b) en lo que afecta a situaciones didácticas, el modelo de los ETM puede considerarse como un sistema de interacciones entre un sujeto epistémico y un medio epistemológico, con o sin tecnología, lo que facilita la distinción entre diferentes tipos de necesidades (desde lo puramente cognitivo hasta lo estrictamente instrumental) para la adquisición o la aplicación de propiedades matemáticas; c) al interpretar el modelo como un sistema de actividades, finalizadas o no, en la resolución de una tarea, hemos podido dar cuenta de interacciones didácticas o adidácticas, favoreciendo, así, la comparación de diversos análisis en el marco de las ingenierías didácticas; d) la problemática de la coordinación de las génesis se ha asociado a la conceptualización en matemáticas, de modo que cada fibración en el ETM se manifiesta mediante un componente de la concepción, mientras que la génesis discursiva juega un papel de control con respecto a otras génesis y a sí misma.

4. Bibliografía

Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example "Filling up". In Haines et al. (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theorical and empirical differenciation of phases in the modeling process. *ZDM* 38 (2), 86-95.

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). Ck¢, modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier, & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-195.

Derouet, C. (2016). La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse. Étude de la conception et de la mise en oeuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral, Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, France.

Richard, P.R., Oller, A.M. & Meavilla, V. (2016). The Concept of Proof in the Light of Mathematical Work. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 48*(6), 843–859 (DOI: 10.1007/s11858-016-0805-9).

SPÉCIFICITÉ DES OUTILS ET DES SIGNES DANS LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

1. Description du thème et continuité thématique

En s'intéressant spécifiquement aux outils du travail mathématique et aux signes considérés à la fois comme véhicules des connaissances et comme outils du travail mathématique, ce thème incarne une continuité avec les symposiums précédents. Nous nous interrogions alors doublement sur leurs effets. Il convenait d'abord d'explorer le potentiel offert conjointement par les environnements technologiques et les systèmes de signes pour faire évoluer le travail mathématique de l'élève, que ce soit en pensant *milieu* (sémiotique ou technologique), *sujet* (élève ou enseignant) ou *activité* (interactions entre l'élève, l'enseignant et le milieu). En tant qu'interactions essentielles dans l'ETM, la perspective de l'interaction entre les signes et les outils a été enrichie par la considération de leurs rapports avec le discours, et plus particulièrement, avec la genèse discursive. La seconde interrogation découlait de la considération du plan épistémologique à la base des ETM. Elle consistait à étudier en quoi les outils, les systèmes de signes et le discours affectent la construction et la mise en œuvre des connaissances de l'élève, guidant son travail mathématique. À titre d'exemple, cela pouvait concerner aussi bien la nature des objets mathématiques construits que leurs domaines de validité, en passant par les preuves mathématiquement acceptables, le rôle des démarches d'investigation ou des tâches de modélisation, avec les enjeux liés au travail sur la situation modèle dans un cycle de modélisation.

2. Sujets des contributions

Les séances du thème 2 ont permis la présentation de onze contributions, laissant une large place à la discussion, ce qui inclut les réactions de treize participants qui avaient été préparées avant la tenue du symposium (deux réactions assignées d'emblée par contribution). Profitant d'une participation aux ateliers, aux discussions dans les thèmes ou aux plénières, dix contributions ont été retravaillées pour les actes. Si la langue dominante à l'écrit est l'espagnol avec six textes, le français (deux textes) et l'anglais (deux textes) ont aussi été bien représentés à l'oral, au cours du visionnement des diaporamas électroniques. Les niveaux scolaires sous-jacents vont des premiers pas à l'école élémentaire (6-7 ans) jusqu'aux derniers à l'école secondaire (17-18 ans), avec des incursions en formation des enseignants et dans la formation mathématique à l'université. En matière de contenus, de processus ou d'attitudes mathématiques, les contributions :

- portent sur l'analyse fonctionnelle ou le calcul, les fonctions trigonométriques, l'algèbre linéaire, l'algèbre vectorielle, la géométrie, les statistiques descriptives, l'algorithmique et l'informatique, modulo les spécificités des curriculums, des niveaux et des régions concernées (voir la liste des contributions du thème 2 en Table 1);
- traitent de modélisation intra et extramathématique, d'habiletés à raisonner, à prouver, à communiquer ou à effectuer des tâches mathématiques avec des outils technologiques, de la conception de ceux-ci selon des principes didactiques jusqu'à leurs usages dans l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques.

De façon plus particulière au travail mathématique, on peut ajouter l'intégration de la théorie APOS (Action, Processus, Objets et Schèmes) au modèle des ETM, la modélisation interactive dans un processus convergent qui évoque la conception d'un espace de travail mathématique idoine, l'idée d'un travail didactique, l'usage de ressources documentaires historiques, la résolution de problèmes, la mathématisation, l'évaluation en ligne, la dichotomie, la modélisation instrumentée, la médiation sémiotique, la coordination des genèses, la représentation de données, le traitement de données instrumentées et le sens médié par les signes ou par les outils. Quant aux méthodes de recherches, elles sont à la fois qualitatives et quantitatives, avec une nette prédominance pour les approches qualitatives comme l'essai, l'étude de cas, les méthodes par théorisation ancrée, les démarches ethnographiques ou l'ingénierie didactique. Devant un panorama aussi varié, le modèle des ETM a permis de questionner la formation, l'enseignement et l'apprentissage de manière didactique et scientifique, c'est-à-dire en s'éloignant des tendances proprement idéologiques, en s'appuyant à la fois sur les sciences de l'éducation et la didactique des mathématiques. De fait, les auteurs se sont tous référés au modèle des ETM dans leurs contributions, c'est pourquoi il apparaît largement dans notre texte, même si la spécificité des outils et des signes dans le travail mathématique servant de pivot essentiel aux discussions.

Table 1: Liste des contributions au thème 2

Titre	Auteurs	Contenus et approches	Pays
Connected working spaces for secondary students' understanding of calculus: modelling a suspension bridge through "jigsaw" group work	<u>Jean-baptiste Lagrange</u>	Situations de modélisation Fibrations et feuillages entre ETM Interaction conceptuelle : algèbre, analyse, géométrie et physique Casse-tête d'expertise Logiciel Casyopée	France
Exploración de una transformación lineal de R^2 en R^2. El uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales	<u>Gisela Camacho Espinoza</u> Asuman Oktaç	Algèbre linéaire : transformation linéaire entre sous-espaces vectoriels Théorie APOS Articulation APOS-ETM Structures mentales et mécanismes de passage d'une structure à l'autre Logiciel Géogébra	Mexique
ETM en el dominio de la estadística temprana: dos casos de alumnos de grado 2 y sus representaciones de datos	<u>Soledad Estrella</u> Pedro Vidal-Szabó Raimundo Olfos	Statistique descriptive Étude des genèses Construction d'une table (iconique) des effectifs et d'un diagramme en bâtons (iconique) Analyse d'ETM personnels Environnement papier-crayon	Chili
Análisis de la concepción de un banco de problemas en línea aleatorios para la evaluación en matemáticas	<u>Jorge Gaona</u>	Analyse fonctionnelle Constitution d'une banque de problèmes Évaluation en ligne Comparaison d'ETM idoines d'enseignants : évaluation papier-crayon et en ligne Plateforme Moodle et logiciel Wiris	France
L'algorithme de dichotomie « discret » : une stratégie « *rapide* » et « *gagnante* »	<u>Dominique Laval</u>	Situations d'algorithmique Activation des genèses et des plans dans un ETM Étude des ETM personnels Ingénierie didactique Environnement papier-crayon	France

Mathematical working spaces support the teaching of proof with historical texts	Vasiliki Tsiapou Kostas Nikolantonakis	Géométrie Planification du didactique à l'aide des ETM Textes historiques chinois et grecs Habiletés de raisonnement et de preuve Logiciel Géogébra et papier-crayon	Grèce
Étude prospective d'un système tutoriel à l'aide du modèle des espaces de travail mathématique	Nicolas Leduc Michèle Tessier-Baillargeon Jean-Philippe Corbeil Philippe R. Richard Michel Gagnon	Géométrie et intelligence artificielle Résolution de problèmes de preuve Travail didactique et travail mathématique Interactions de l'enseignant et interactions de l'élève dans un ETM Système tutoriel QEDX	Canada
Significados asociados a las funciones sinusoidales	Minerva Martínez Ortega Hugo R. Mejía Velasco Mª de los Ángeles Martínez Ortega	Fonctions sinusoïdales Modélisation de phénomènes harmoniques Analyse des genèses ETM et paradigmes en analyse fonctionnelle Capteurs de mouvement et génération de graphiques	Mexique
El uso de la escritura como herramienta metacognitiva en los problemas de geometría	Luz Graciela Orozco Vaca	Résolution de problèmes en géométrie Communication et traitement à l'écrit Activation des composantes d'un ETM Coordination représentation figurale et discours Environnement papier-crayon	Mexique
El uso de artefactos y signos en el paradigma del trabajo con gráficas cartesianas	Ulises Salinas-Hernández José Guzmán-Hernández Isaias Miranda-Viramontes	Analyse de graphes cartésiens Coordination des genèses dans un ETM Déplacement, gestuelle et expression verbale de la pensée Distinction entre mouvement réel et représentation graphique Capteurs de mouvement et logiciels de collecte de données	Mexique

3. Sujets des discussions : de l'introduction jusqu'à la synthèse, en passant par les questions de recherche ouvertes

Chaque présentation (environ 20 min) a été suivie par les réactions de deux relecteurs désignés (environ 10 min chacun) puis par une discussion générale (environ 10 min). L'ordre qui se trouve en Table 1 est aussi l'ordre de présentation des contributions. Alors que la plupart des présentations ont eu lieu au cours de séances parallèles, les deux premières présentations se sont tenues en plénière, à la suite de l'introduction du thème par les responsables. Il s'agissait de favoriser une première appropriation du thème par tous, tout en définissant de facto un certain standard de qualité pour la marche à suivre dans les séances du groupe. De plus, en choisissant des chercheurs expérimentés pour présenter et discuter sur les premières contributions, nous voulions initier les nouveaux chercheurs à la formule symposium, où débattre du thème est déterminant pour faire avancer les idées porteuses. À la fin du travail en séances parallèles, une synthèse du travail a été présentée en plénière par les responsables. Dans ce qui suit, nous résumons les moments clefs du cadre de travail.

3.1. Spécificité du thème 2

En ayant approfondi la question des rapports entre d'une part signes et outils, et d'autre part, la genèse discursive, les discussions ont permis de mieux comprendre comment des sujets, élèves ou enseignants, qui interagissent avec différents milieux, montrent ou développent des coordinations variées entre les genèses. Cela rejoint la notion de *valence du travail mathématique* (Richard et coll., 2016), qui se présente comme un outil pour étudier le domaine de fonctionnement des interactions réelles ou potentielles dans un ETM. Au cours de l'introduction du thème, trois exemples d'enjeux ont été présentés dans cette perspective. Le premier concernait la coordination des genèses dans un ETM$_{\textit{géométrie}}$. À la Fig. 1, on peut voir une situation de géométrie et de calculs géométriques dans laquelle l'utilisateur est engagé d'emblée dans la coordination des genèses sémiotique et instrumentale. Au point que s'il agit sur la figure dynamique ou s'il crée un calcul à partir de mesures, son interaction à l'interface du logiciel porte à la fois sur le signe et sur l'outil. Lorsque l'interaction est finalisée, que ce soit pour découvrir, modéliser ou valider une propriété mathématique, la genèse discursive intervient conjointement pour contrôler la démarche, pour permettre la description du processus de coordination signe-outil et, bien entendu, pour rendre possible l'expression du raisonnement ou des calculs par expansion discursivo-graphique.

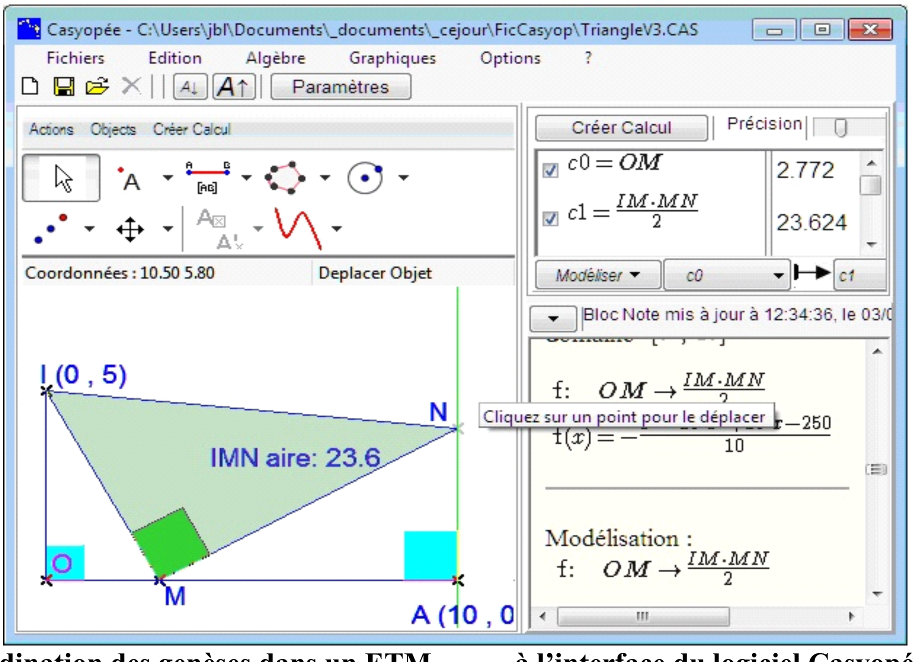


Figure 1: Coordination des genèses dans un ETM$_{\textit{géométrie}}$ à l'interface du logiciel Casyopée

Le second exemple portait sur la modélisation dans un ETM$_{analyse}$. Contrairement à la situation précédente, la Fig. 2 montre d'abord des volets d'algèbre et de graphiques. Dans une situation où l'on s'interroge sur la variation entre grandeurs, la démarche de modélisation implique la mathématisation d'une situation modèle que l'on retrouve ici à l'interface. La genèse discursive peut se développer pour cette mise en scène d'objets comme la fonction et sa dérivée, présentés sous les formes analytique, graphique et tabulaire. Dès les premières considérations au sein du modèle mathématique, la genèse discursive peut intervenir de nouveau face au processus de coordination signe-outil. Même si l'outil informatique gère une partie des connaissances en jeu en même temps que son mode de représentation, l'utilisateur est celui qui interroge le logiciel et qui est responsable de l'interprétation des résultats dégagés. Si la genèse discursive intervient déjà dans l'exemple précédent (modélisation extramathématique), elle intervient aussi dans le second exemple au cours des efforts de mathématisation et d'interprétation (modélisation intramathématique).

Dans une perspective plus vaste où le problème de base issu de la réalité n'est pas clairement défini, mais qu'il se précise au cours d'allers et retours entre la situation modèle et le jeu de mathématisation-interprétation (cycle de modélisation), la genèse discursive s'associe naturellement à la coordination des autres genèses en vue de l'obtention d'une problématique stable. Autrement dit, suivant le modèle de Borromeo Ferri (2006) et Blum & Leiβ (2007), la construction de la situation modèle, en tant que représentation mentale de la réalité à modéliser, requière déjà des compétences de modélisation. La situation modèle se raffine ou se précise au cours d'allers et retours avec les modèles mathématiques dans un processus itératif, soit qui converge jusqu'à l'obtention d'une situation stable, soit qui diverge provisoirement, selon que l'on veut enrichir ou resserrer la situation modèle, par l'inclusion ou par la mise de côté de contraintes.

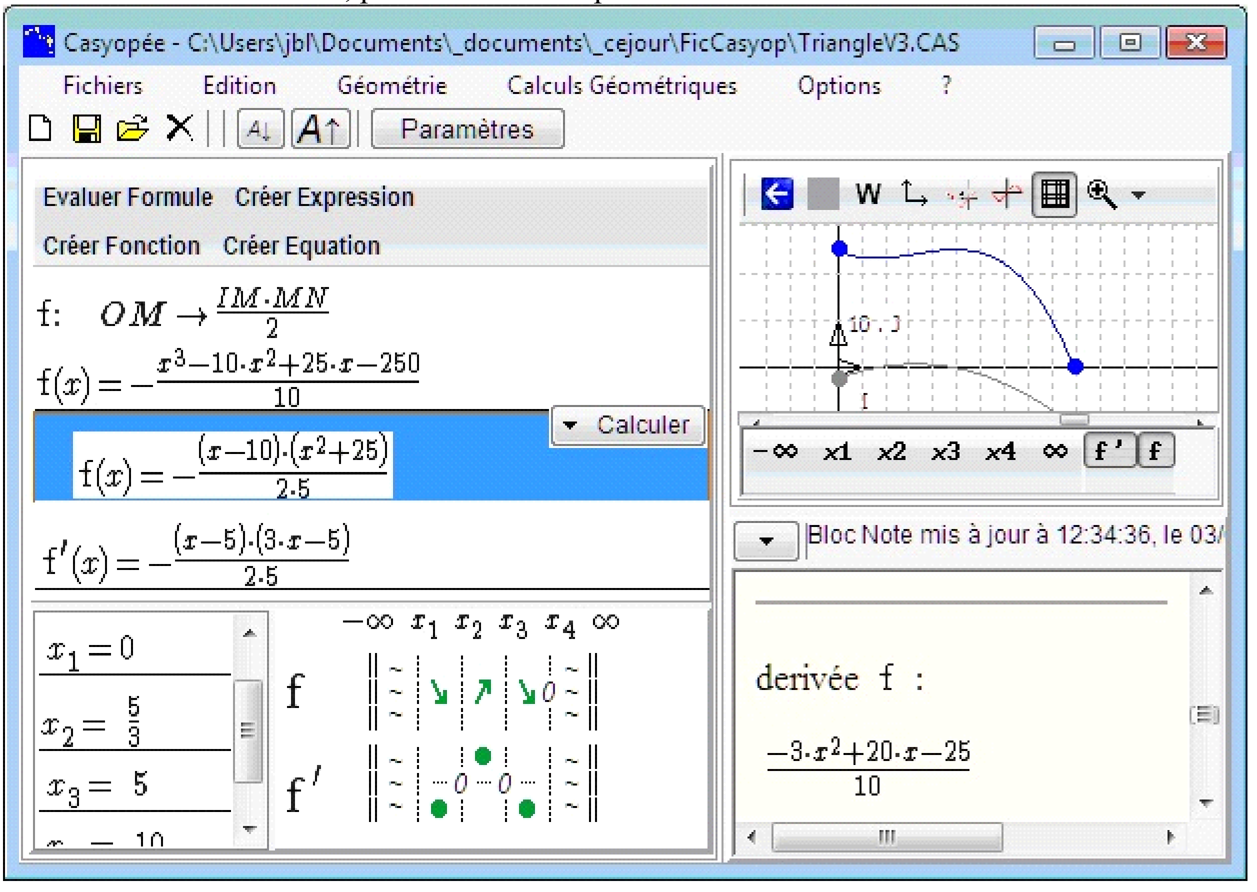


Figure 2: Modélisation dans un ETM$_{analyse}$ à l'interface de Casyopée

Le troisième exemple d'enjeux concerne la notion de fibrations internes. Cette notion a émergé du travail du thème 2 au moment du symposium ETM4, alors qu'on cherchait justement à mieux comprendre les rapports des signes et des outils avec la genèse discursive. À cette époque, on avait retenu que la genèse discursive est souvent activée pour le contrôle des genèses sémiotiques et instrumentales, et que la plupart du temps, pour ne pas dire presque tout le temps, les trois genèses sont activées en même temps. Mais selon les moments considérés, la coordination d'un couple de genèses est dominante. À la Fig. 3, on montre que ce sont les rôles d'outil (moyens de type opératoire), de représentation et de contrôle qui ont été retenus au sein du modèle des ETM. Ainsi, dans l'interaction entre le plan cognitif et le plan épistémologique, il est possible d'associer les fibrations au processus de conceptualisation, aussi bien pour la formation d'une conception mathématique que pour sa mise en œuvre. Si l'on envisage cette association avec le modèle de Balacheff et Margolinas (2005) pour réfléchir sur les conceptions des apprenants, chaque composante de la conception se manifesterait par une fibration issue d'un des pôles du plan épistémologique vers les trois genèses. Quant au rôle spécifique des problèmes ou des tâches, les poser interviendrait d'abord dans le plan épistémologique, puis les résoudre, dans le plan cognitif. Si les ETM sont déjà utiles pour modéliser le travail mathématique, le dynamisme interne des interactions que ce modèle véhicule porte avec lui une intégration des conceptions.

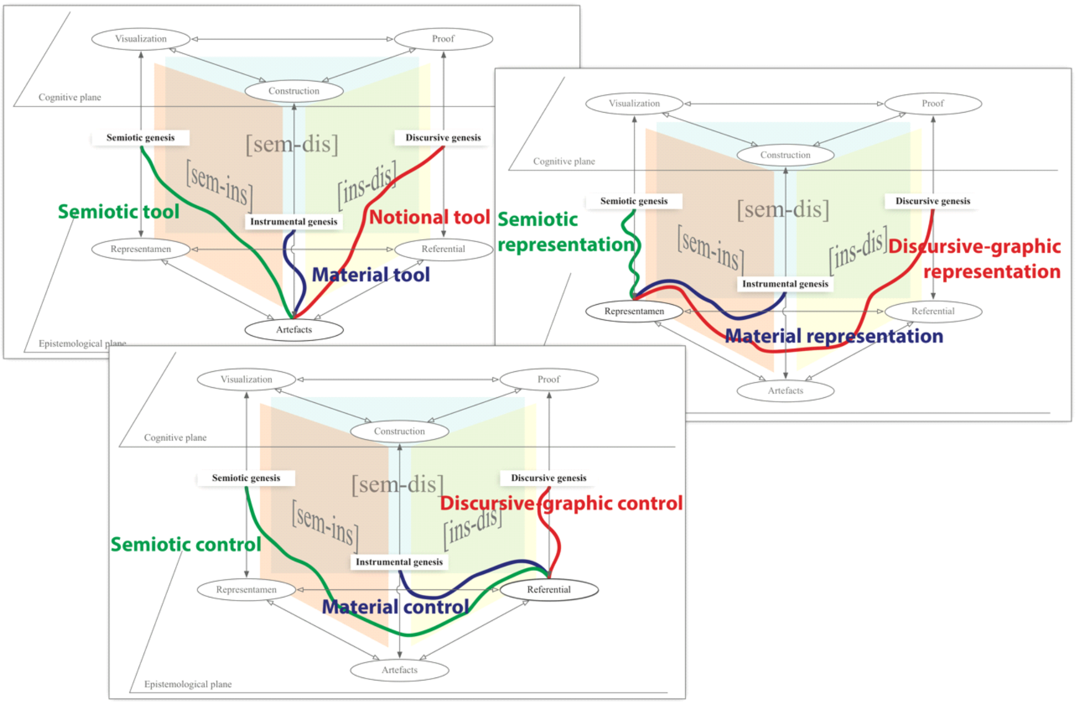


Figure 3: Fibrations internes dans un ETM

En guise de synthèse, nous avons résumé les enjeux précédents en montrant comment évolue le travail mathématique d'un élève qui résout un problème de preuve à l'aide d'un système tutoriel intelligent. À la Fig. 4, on peut voir : au premier plan, trois instantanés de l'interface de QED-Tutrix (QEDX), un système tutoriel qui se destine à soutenir l'élève au cours du processus de résolution ; à l'arrière-plan, le modèle des ETM lorsque les plans verticaux représentent différentes phases du travail mathématique, la réalisation effective de ces phases définissant certaines compétences mathématiques cognitives basées sur la coordination des genèses. Ce qui particularise chaque instantané est la partie de gauche, que ce soit pour la construction ou la manipulation de figures dynamiques (découverte et exploration, fenêtre 1), l'écriture de propositions discursives (présentation et communication, fenêtre 2) et la rédaction d'une démonstration (justification et raisonnement, fenêtre 3). Ce qui les unit est la partie de droite, un champ de formulaire commun qui génère automatiquement une conversation entre l'élève et un agent pédagogique virtuel suivant l'interaction de l'élève à l'interface du système. Or, cette conversation est caractéristique du rôle multimodal de la genèse discursive en matière de coordination des genèses, d'exercice de modélisation et du rôle des fibrations internes dans l'effort de conceptualisation. Par rapport à la relation didactique traditionnelle, dans laquelle l'enseignant est une entité différente du milieu, ce qui change ici est l'intégration du discours de l'agent pédagogique au milieu, celui-ci pouvant demeurer le partenaire de l'élève dans la construction des connaissances. L'évolution du travail mathématique de l'élève peut alors reposer sur un milieu dynamique, ou plutôt un milieu réagissant qui laisse à l'élève l'initiative du questionnement. Si un ETM bien constitué n'exclut pas la collaboration du milieu, il est surtout celui qui, en bout de piste, est organisé pour que l'élève puisse évoluer de son propre mouvement.

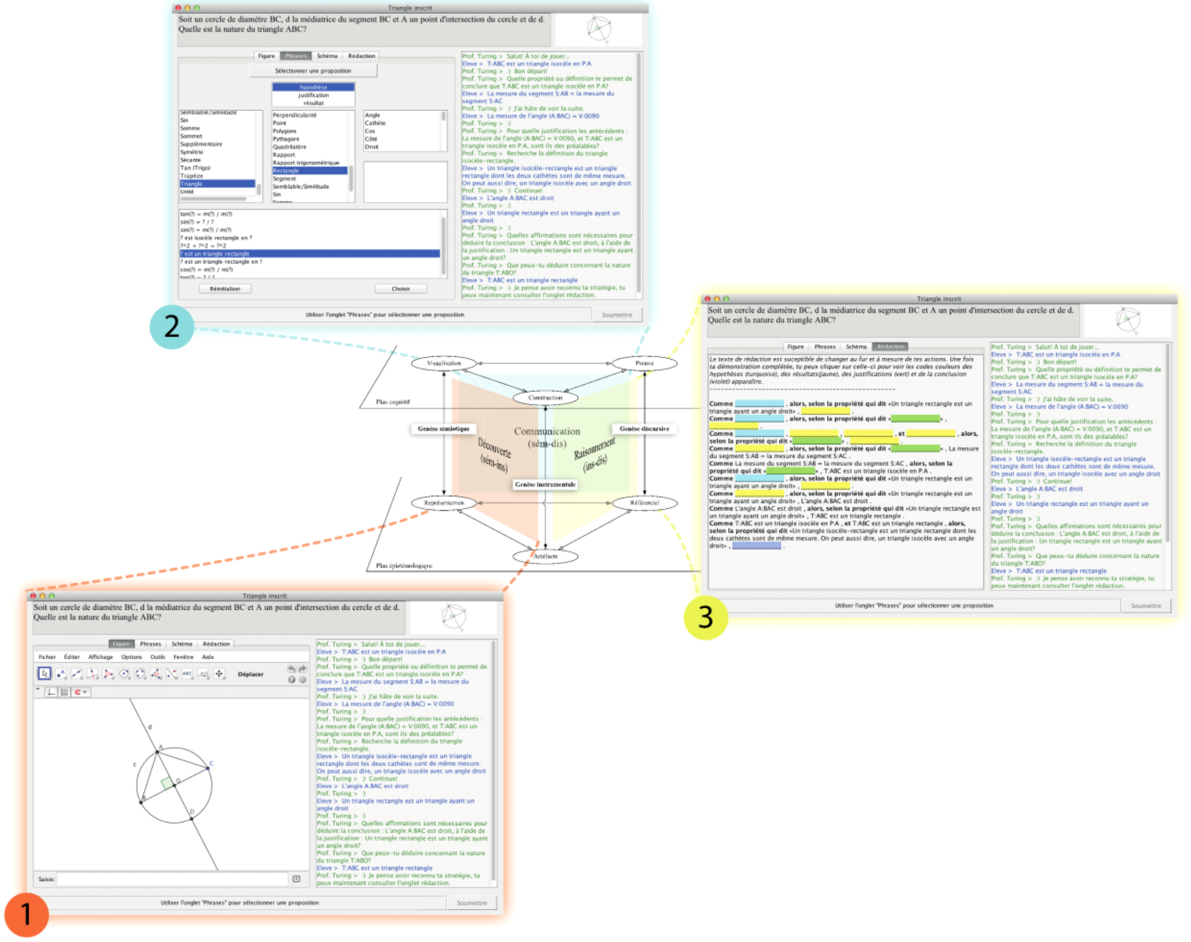


Figure 4: Travail mathématique d'un élève qui résout un problème de preuve à l'interface de QEDX au regard des plans verticaux d'un ETM

3.2. Les apports et les problèmes

Dans un contexte où la notion de travail mathématique est déjà fédératrice, c'est plutôt la plasticité du modèle des ETM qui a facilité les échanges au cours des discussions. De l'héritage des symposiums précédents, une première question se posait : faut-il chercher à raffiner durablement le modèle de base ? Par exemple, on pourrait : y intégrer des compétences mathématiques cognitives fondées sur la coordination des genèses ; introduire le feuilletage de plans horizontaux, comme des plans épistémologiques pour la modélisation extra mathématique ou des plans cognitifs, pour rendre compte de l'apprentissage collaboratif ; même, adopter systématiquement les fibrations internes pour exprimer les conceptions ou les fibrations externes, pour enchâsser l'activité mathématique qui s'anime conjointement dans plus d'un domaine. À moins qu'au contraire, il soit préférable de conserver le modèle de base et de l'enrichir provisoirement au gré des recherches ou des besoins. Face à ces deux extrêmes, le groupe a convenu que pour contraster des recherches proches, le prolongement du modèle peut être utile, mais que pour échanger sur des recherches plus éloignées, tant par la méthode employée que par la particularité des aspects curriculaires, historiques, épistémologiques ou didactiques qui retiennent l'attention, le modèle de base reste avantageux.

Les deux premières contributions témoignent de la diversité précédente (Table 1). Tandis que la recherche de Lagrange utilise plusieurs variétés de feuilletages et de fibrations externes entre quatre types d'espaces de travail, nommés statique et matériel (avec des forces en équilibre), algorithmique, géométrique et analytique (analyse fonctionnelle), l'étude de Camacho-Espinoza et Oktaç profite du modèle de base pour enrichir leur étude avec la théorie APOS. Dans chaque cas, le modèle des espaces de travail s'intègre au cadre théorique et revient pour l'analyse et l'interprétation des résultats. Cela permet, dans le premier cas, de montrer comment on peut employer la modélisation pour justifier l'introduction de méthodes algébriques en vue de faciliter, d'une part, la compréhension des concepts dans l'interaction conceptuelle entre différents espaces, et d'autre part, à travers des liens avec le monde réel ou les autres sciences. Dans le second cas, l'articulation APOS-ETM commence par hiérarchiser trois types d'espace de travail, chacun étant partagé entre des éléments géométriques et des éléments algébriques (ETM global d'algèbre linéaire, ETM local de transformations linéaires puis ETM local de rotations), dans le but de pouvoir considérer quatre types de structures mentales et cinq mécanismes mentaux qui rendent possible le passage d'une structure à une autre. Contrairement aux discussions du symposium précédent, où la notion de travail mathématique apparaissait à l'avant-scène et qu'elle s'était enrichie avec la théorie de l'activité, l'idée même de travail apparaît ici en toile de fond, quoique la notion est parfois mentionnée. Le modèle des espaces de travail occupe manifestement le rôle principal, avec ses pôles, ses arêtes et ses plans, et on s'intéresse aux valences du travail mathématique dans l'interaction entre différents espaces afin de mieux comprendre les possibilités d'apprentissage de concepts mathématiques.

Étant donné l'importance du modèle dans les discussions, nous revenons sur des considérations plus spécifiques aux ETM après une incursion, ci-après, qui concerne les paradigmes mathématiques.

Le traitement réservé aux paradigmes a pris une ampleur stimulante. Le concept de paradigme géométrique est apparu avant la notion d'ETM, puisque dès que l'on discute de l'enseignement de la géométrie du primaire à l'université, les gens ne parlent ni des mêmes objets ni des mêmes modes de validation. Pas plus qu'ils partent du même ensemble de référence, comme la communauté des mathématiciens par contraste à l'institution mathématique, ni du même usage, comme celui associé à des paradigmes qui relèvent de la même théorie, mais dont les usages sont différents (étude de Martínez-Ortega, Mejía-Velasco et Martínez-Ortega). Les mathématiques appliquées et les mathématiques spéculatives fonderaient-elles d'emblée deux paradigmes d'une même théorie ? Laissant cette question sur le plan des élans oratoires, lorsqu'on tente de définir des paradigmes correspondants aux grandes époques de l'histoire, le résultat obtenu est alors cohérent du point de vue épistémologique, mais il supposerait une correspondance entre l'épistémologie en mathématiques et l'épistémologie dans un cadre scolaire, alors que ce dernier est plus orienté dans une hiérarchie des usages. De plus, si l'on reconnait qu'en géométrie ou en algorithmique, il est relativement facile de distinguer trois paradigmes (cf. contribution de Laval), l'exercice de caractérisation semble plus compliqué dans les autres branches des mathématiques et selon la spécificité du domaine concerné. Cela est particulièrement visible en analyse, surtout avec l'usage de capteurs pour la collecte, le traitement et l'analyse de données instrumentées (cf. contributions de Martínez-Ortega, Mejía-Velasco et Martínez-Ortega ; Salinas-Hernández, Guzmán-Hernández et Miranda-Viramontes).

Poursuivant la logique ternaire de Houdement et Kuzniak (2006), on a réfléchi sur les paradigmes P_1, P_2 et P_3 en commençant par les extrêmes. De sorte que P_1 serait «près de» ou s'ancrerait dans l'expérience sensible, tandis que P_3 reposerait sur l'idée d'un formalisme qui cherche la cohérence axiomatique ou qui est effectivement calculable, pouvant parfaitement être détaché de l'expérience sensible. Alors que P_2 se définit à l'évidence entre les deux autres paradigmes, y travailler permettrait des allers et retours dans la réalité ou dans le formalisme, tout en s'exprimant par une pensée incarnée et en acceptant des îlots de formalisme ou d'expérience sensible. On remet en cause l'idée d'une hiérarchie stricte de type P_1 P_2 P_3, à l'instar des ordres d'enseignement, puisque selon les tâches ou les activités, des passages entre les paradigmes sont possibles et même souhaitables pour le travail mathématique. D'ailleurs, on remarque une sorte de tension entre donner une définition précise de chaque paradigme ou n'en donner qu'une couleur générale, commune pour l'ensemble. Cette impression d'une tension de questionnement rejoint nos considérations précédentes sur l'ETM de base avec ses raffinements possibles.

Des propos ont souvent été tenus sur la cohérence interne et la cohérence externe du modèle des ETM. Lors du dernier symposium, on avait convenu que le modèle de base était un squelette auquel les différents cadres ou théories appliquées dans les études donnent de la chair suivant les questions, les problèmes ou les difficultés en jeu. C'est précisément l'attitude adoptée dans les contributions d'Orozco-Vaca, de Tsiapou et Nikolantonakis, et d'Estrella, Vidal-Szabó et Olfos. L'articulation avec d'autres théories, comme APOS, MTSK, la théorie des situations didactiques ou la dialectique média-milieu, a retenu l'attention à plusieurs niveaux, mais la contribution *in situ* de concepteurs de systèmes informatiques a permis de mieux comprendre comment les contraintes qui pèsent en *pensant milieu* influencent la nature même du travail mathématique (cf. Gaona; Leduc, Tessier-Baillargeon, Corbeil et coll.).

Sur le plan méthodologique, une clarification essentielle a été apportée par le travail de groupe. Alors que plusieurs recherches avaient déjà montré combien la dynamique du travail mathématique peut se mettre en valeur avec l'activation de ses composantes (simples, complexes ou simultanées), le modèle des ETM n'affichait pas l'ambition d'être un modèle phénoménologique, à la manière d'un diagramme de flux de données représentant le fonctionnement d'une activité. En ce sens, le modèle de base serait plus proche d'un diagramme de contexte. Si l'on retient parfois, sous certaines conditions, l'idée de circulation d'une activité finalisée au sein d'un ETM personnel dans le but d'expliquer un fonctionnement et ainsi, repérer des fonctions améliorables, la complexité des situations présentées dans les recherches gagne à profiter d'une approche plus holiste. Une perspective prometteuse considère une suite de diagrammes ETM où chacun représente les composantes qui sont activées lors de moments signifiants. Ainsi, dans le sens des preuves sans mots qui s'étayent par expansion graphique, on peut rendre compte de la résolution de situations complexes avec une suite de moments signifiants. On a même proposé d'employer la couleur sur un même diagramme, à l'exemple de Derouet (2016) et des contributions du thème 1, pour différencier l'activité à la charge de l'enseignant de l'activité relevant de l'élève (intention) ou exercée par lui (exécution).

3.3. Les nouvelles avenues et leur portée

De l'ensemble des discussions, il découle que le modèle des ETM facilite l'expression pour rendre compte de phénomènes d'enseignement ou d'apprentissage, les recherches pouvant en tirer un plus grand bénéfice dès la conception de leur dispositif méthodologique, que ce soit pour le choix des ressources, la définition des tâches ou le contrôle des situations. En outre, le modèle des ETM permet d'améliorer la définition de tâches emblématiques, conçues par l'enseignant ou par le chercheur, dans l'esprit de convergence d'allers et retours pour établir une situation modèle représentative, voire pour la constitution d'un ETM idoine. Si l'on peut qualifier le modèle des ETM d'intelligent, en ce sens qu'il permet des adaptations aux situations nouvelles, les avantages de la flexibilité doivent appeler à une attention accrue dans la définition des composantes en jeu, surtout pour l'articulation avec d'autres espaces de travail ou avec d'autres théories. Ainsi, pour certaines activités, avant de pouvoir penser à la coordination entre ETM$_D$, pour $D \in$ {géométrie, analyse, probabilités, algorithmique, …}, il faut d'abord être en mesure de les spécifier. Mais cela ne va pas de soi, puisque selon la finalité poursuivie, on doit se demander s'il est préférable de considérer plusieurs ETM ou s'il vaut mieux définir un *domaine* puis réfléchir dans cet ETM$_{domaine}$. Autrement dit, l'ETM envisagé dépend de l'idée que l'on se fait du domaine ou du sous-domaine mathématique concerné, des obligations curriculaires ou de l'interdisciplinarité des enjeux. Et de façon plus spécifique aux rapports des ETM à la modélisation mathématique, l'espace de travail est défini du moment où le modèle mathématique existe, mais c'est l'exercice de modélisation qui permet de définir plus clairement l'espace de travail dans lequel on évolue qui, lui-même, influence largement le modèle qui sera retenu : l'élaboration de l'ETM et du modèle se réalise conjointement. Ce qui veut dire que la dévolution du problème, pris ici dans un sens associé à la quête d'une problématique stable, s'organise conjointement au développement des genèses.

Les conséquences de ces enjeux retombent pleinement sur la manière avec laquelle se traitent les signes et les outils. Si la distinction entre la dimension objet ou la dimension artefact d'un signe est souvent difficile à effectuer, on retient d'un point de vue méthodologique que les genèses sémiotiques et instrumentales se nourrissent mutuellement. Car il est fréquent de faire apparaître des signes par l'usage des artéfacts, ou de manipuler un signe alors que c'est l'outil qui contrôle le dynamisme des propriétés représentées. La question du changement de contrat a plusieurs fois été évoquée, entre une activité papier-crayon et une activité qui se déroule dans un environnement informatique, qui est due en grande partie au dynamisme sémiotico-instrumental conjugué au rapprochement des genèses. D'ailleurs, certaines situations ne mènent l'élève nulle part, non pas parce que ce dernier n'agirait pas en toute bonne foi, mais parce que l'amorce des genèses se buterait à un aspect proprement ergonomique, comme un usage en marge des connaissances mathématiques véhiculées par les signes ou les outils. Ce qui veut dire que de concert à l'idonéité de l'espace de travail, il faut aussi réfléchir à l'idonéité de la tâche ou de l'activité au sein du contrat didactique, telle une sorte de vigilance didactique. De plus, dans ses rapports aux autres genèses, la genèse sémiotique a permis d'enrichir la compréhension du raisonnement mathématique qui se déploie dans l'action. Nous avons alors reconnu des signes kinesthésiques, comme la trajectoire du déplacement d'un individu modulé par les rétroactions d'une représentation graphique interactive (coordination gestes-instrument), lesquels se sont ajouté aux signes déjà connus associés à la pensée incarnée (coordination gestes-discours) ou à ceux qui procèdent par expansion discursivo-graphique à l'interface d'un dispositif technologique (coordination instrument-discours).

En début de texte, nous avons mentionné que le modèle des ETM soutient une prétention à la scientificité didactique dans un panorama où les questions et les approches sont variées. Il appert aussi que les curriculums changent fréquemment et que la signification des mots ou des concepts de référence diffère d'une région à l'autre, ce qui est un problème du point de vue de la recherche. Incidemment, il est souvent difficile de soutenir la comparaison de résultats issus des méthodes de recherche qualitatives et quantitatives. De sorte qu'en profitant d'un modèle commun, les contributions et les discussions du groupe de travail ont aussi aidé à mieux saisir comment : a) dans une perspective curriculaire qui s'étend de l'enseignement obligatoire à l'université, les plans verticaux peuvent s'associer à des compétences mathématiques, comme s'il s'agissait de vecteurs de formation; b) au regard des situations didactiques, le modèle des ETM peut se considérer comme un système d'interactions entre un sujet épistémique et un milieu épistémologique, avec ou sans technologie, ce qui facilite la distinction entre différents types de nécessité pour l'acquisition ou l'application de propriétés mathématiques; c) en interprétant le modèle comme un système d'activités finalisées ou non dans la résolution d'une tâche, on a pu rendre compte d'interactions didactiques ou adidactiques, soutenant de ce fait la comparaison d'analyses dans le cadre d'ingénieries didactiques; d) la problématique de la coordination des genèses a été associée à la conceptualisation en mathématique, de sorte que chaque fibrations dans l'ETM se manifeste à travers une composante de la conception, la genèse discursive jouant un rôle de contrôle par rapport aux autres genèses et à elle-même.

4. Bibliographie

Blum, W. & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example "Filling up". In Haines et al. (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theorical and empirical differenciation of phases in the modeling process. *ZDM* 38 (2), 86-95.

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). Ck¢, modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier, & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11,* 175-195.

Derouet, C. (2016). La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse. Étude de la conception et de la mise en oeuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral, Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, France.

Richard, P.R., Oller, A.M. & Meavilla, V. (2016). The Concept of Proof in the Light of Mathematical Work. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 48*(6), 843–859 (DOI: 10.1007/s11858-016-0805-9).

CONNECTED WORKING SPACES FOR SECONDARY STUDENTS' UNDERSTANDING OF CALCULUS: MODELLING A SUSPENSION BRIDGE THROUGH "JIGSAW" GROUP WORK

Jean-Baptiste Lagrange
LDAR, Université Paris Diderot, France

jean-baptiste.lagrange@univ-reims.fr

This paper is about the design of classroom situations of modelling real world situations at upper secondary level to confront student to questions and ideas in calculus. At this level, curricula avoid formal approaches of calculus notions, but in current strategies, modelling is used as a motivation for algebraic methods, rather than as a basis for scientific work. The paper proposes the framework of connected working spaces for designing and implementing sustainable situations of modelling helping a wider approach of the curriculum in these classes, and giving sense to the concepts taught by making students understand interactions between these concepts and the interactions between these concepts and other sciences or real world situations. The example of a situation of modelling a suspension bridge is presented on the basis of four working spaces (statics, geometrical, algorithmic, and mathematical functions). The implementation is carried out through "jigsaw group work" that helps students work in these spaces and make connections between them.

Keywords*: modelling, suspension bridge connected working spaces, calculus, Casyopée, jigsaw group work*

INTRODUCTION

As a researcher, I am working with teachers in the Casyopée group in the context of the French national curriculum at upper secondary level. Like in other regions of the world, a large part of this curriculum deals with functions. Formal aspects, like the structure of the number line or a definition of limits are not considered and then tasks for students are supposed to favor intuitive approaches of notions. However, while emphasizing problem solving in various domains, the curriculum actually privileges application of classical “algebraic” methods. Real world situations are considered in a narrow approach of modeling: “translating into the mathematical language”. Classroom practices reflect this narrow approach: the teacher invites students to express “informal conjectures”, and then, abruptly requests them to express and prove these conjectures by pure mathematical means (Minh and Lagrange, 2016). The consequence is an over emphasis on algebraic forms and manipulation, not helping students to make sense of notions in calculus.

In reaction to this narrow treatment of functions and calculus, our[1] objective is to promote secondary calculus as an effective tool to understand the world, rather than a meaningless manipulation of symbols. There is a big emphasis on real world situations and on modelling in mathematics education. Conspicuous examples are the 14th ICMI Study, Applications and modelling in mathematics education (Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2002 and 2007) and the two 2006 special issues of ZDM - The International Journal on Mathematics Education (volumes 38(2) and 38(3)). Modelling is however a very open domain, with a lot of different options. One option is to consider students' modelling activity as a way to develop modelling competencies independently of the learning of specific mathematical knowledge (Mass, 2006). Another option is to create modelling situations focused on a given knowledge or concept, through "guided reinvention" (Gravemeijer & Doorman, 1999). In addition, besides all the progress made in mathematics education research, authors like Burkhardt (2008) pointed out the difficult existence of mathematical modelling practices in ordinary classrooms.

Our approach is specific in the sense that we are looking for situations (1) that are neither purely oriented towards modelling competencies, nor towards the "reinvention" of an isolated mathematical concept, (2) that are sustainable in ordinary upper secondary classes and (3) that help a wider approach of the curriculum in these classes, giving sense to the concepts taught by making students understand interactions between these concepts and the interactions between these concepts and other sciences or real world situations. More precisely, the goal of the Casyopée group is to create and experiment secondary classroom situations where students understand functions and calculus, through convergent approaches of a question about a phenomenon. In parallel, the group develops a geometric and algebraic software environment (Casyopée) as a tool to study these phenomena. Examples of phenomena considered as a basis for classroom situations are:

- Games of "chase and prey" (will Coyote hit BipBip?); it is based on the common experience that mobiles moving on convergent trajectories may or may not collide, depending on their respective speeds. In a situation inspired by Cazes and Vandebrouck (2014) Coyote and BipBip have given speeds, and students have to adjust the angle of Coyote's trajectory in order that collision occurs. It brings to the forth a fundamental not obvious idea: in any model, both movements have to be parametrized by the same quantity, the time.
- Closeness on a curve (what is the position on a curve closest to a given point outside this curve?). The question is how to express closeness and how to parametrize the movement of the mobile in order to get an accurate model.
- Vertical movement in an amusement park ride (how to give account of different behaviors at low and high points). In a situation, a person is in a car subject to a periodic vertical movement. She experiences a "smooth" transition at high points and an "abrupt" transition at low points. This can be related to students' bodily experience, and explained by way of models of the mechanical device animating the car, including a mathematical function whose derivative is discontinuous for values corresponding to low points.
- Tension in the cable of a suspension bridge (how does the tension evolve along the bridge, and how does this explain the shape of the cable?). Students study a suspension bridge, and have to explain why the main cables are not horizontal straight lines. By concrete experiments, they have to realize how a weight suspended on the cable affects its shape, and understand the idea of tension as a vector quantity evolving along the cable, because of the weight of the deck considered as a collection of infinitesimal units.

Thus the question for the Casyopée group is how to implement classroom situations taking advantage of real world, while confronting students to questions and ideas in calculus. In the next section, this question will be refined by way of a theoretical framework, and then we will develop the last example.

THEORETICAL FRAMEWORK

I am currently building a framework inspired by Kuzniak (2011) and Kuzniak & Richard (2014). Lagrange (2015) introduced the idea of connected functional working spaces as an alternative to multi-representation for the domain of functions. This helps to depart from a Platonist conception of functions as a single ideal object. It helps also to recognize representations not as entities existing for themselves, but rather as artefacts co-existing with others artefacts helping to work on specific objects and controlled by specific frameworks of reference. The example of the amusement park ride helped to present four different working spaces offering specific means for modelling a dependency between measures. One is related to the physical device, the second to a dynamic figure modeling this device, the third is about magnitudes in dependency and the fourth is characterized by the classical mathematical symbolism and notions in calculus. The situation was based on the "embodied cognition" hypothesis and on the use of Casyopée's functionalities. The "embodied cognition" hypothesis is that students' reference to bodily activity in physical settings and to emotions experienced in this activity, can be a basis for deeper understanding of notions in calculus, as compared to a pure formal approach of these notions (Rasmussen et al, 2004). Casyopée especially helped to build a link between the geometrical dependency and a function modelling this dependency.

The idea of connected functional working spaces was further developed by Minh & Lagrange (2016). We were influenced by Kuzniak (2013) that presents geometrical working spaces as a way to avoid misunderstandings in geometrical education, for instance with regard to how students should reason, developing their spatial intuition and ability with instruments, or rejecting these in favor of formal deduction. Like geometrical working spaces, considering functional working spaces allows teachers and students to work on functions in various spaces, including spaces where functions are experienced without algebraic formalization, avoiding the predominance of a working space restricted to algebraic representations and manipulations. Like with geometrical working spaces, working in a specific functional space should allow working on functions with specific instruments and under control of specific rules. We specified a dynamic geometry space, a measure space, and an algebra space, and indicated specific functionalities of Casyopée, bringing artefacts in each space and means for connecting the spaces. We examined then the functionality of this framework for implementing and analyzing classroom situations and for analyzing students' and teachers' evolution relatively to functions, in terms of geneses related to each space. We took the above example of "closeness on a curve" to consider students' activity in each space and connections between spaces, in order to develop principles of design for a classroom situation, to assess their efficiency and to highlight differences with current classroom situations based on geometrical optimization where the teacher sees exploration as a "motivation" and not a specific work bringing specific conceptualizations.

This paper develops further this idea of connected working spaces as a framework to design and evaluate situations of modelling, allowing students to understand functions and calculus, through convergent approaches of a question about a phenomenon. The idea is that the study of a question involves several working spaces around objects, each object in a space being a model[2] of the corresponding object in another. Each space is characterized by the artifacts that allow work on the question and a reference framework or theoretical framework. This implies that the question makes sense to work in different spaces and gives meaning to objects, without favoring a space.

QUESTION AND METHOD

Kuzniak & Richard (2014) stress that working spaces are not given, but are constructed in the teaching learning process. Thus, working spaces of reference may exist around socially accepted standard for formulating questions and answers organized by favoring certain artifacts and modes of thought. But they have to be converted and organized to become "suitable" working spaces in a given educational institution with a defined function. As Kuzniak (2011), said "les experts concepteurs de la réorganisation didactique des diverses composantes de l'espace de travail (…) aménagent un ETM qui peut être idoine parce qu'il respecte les intentions et le cahier des charges de l'institution demandeuse". We wish to play, even modestly, the role of experts as understood by Kuzniak (2011), and therefore our current questioning is:

> How to organize suitable working spaces that make students understand interactions between concepts taught at upper secondary level, and the interactions between these concepts and other sciences or real world situations? What conceptualizations can be expected in these working spaces, and how these conceptualizations interact with more standard mathematics?

In addition, we wish to try the "embodied cognition" hypothesis mentioned above. Núñez, Edwards and Matos (1999) stress that learning and cognition cannot be *fully understood* (my emphasis) without considering the shared biology and fundamental bodily experiences of human beings. They provide a number of examples of ideas in calculus, like variation, that cannot be separated from our experience of movement and other physical phenomena. While some researchers privilege cultural or social dimensions in mathematics teaching/learning, it is our choice to devote some attention to how students' bodily experience contributes in teaching/learning. This does not mean that cognition will directly derive from bodily activity, but rather that students should be helped to relate mathematical ideas to their perception of the physical world gained in this activity.

Looking for a situation to implement the above idea of interaction between concepts in calculus and involving real world and other science, we thought that studying a suspension bridge would be a suitable basis, for the reasons explained below.

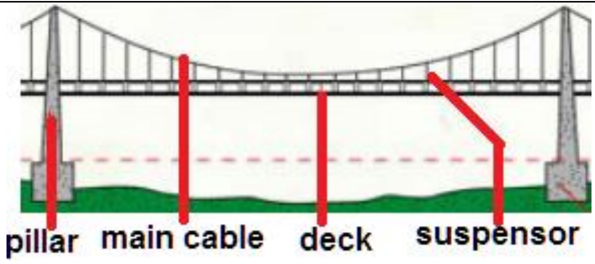
Suspension bridges

A suspension bridge is a type of bridge in which the deck (generally a roadway) is hung below suspension (or main) cables by vertical suspensors equally spaced. There is no compression in the deck and this allows a light construction and a long span (figure 1a). The weight of the deck applied via the suspensors results in a tension in the main cables. The main cables are anchored on top of pillars and the pillars support the compression resulting of the tension. As stated above, the central question is to find models of a main cable, allowing to solve technical questions like the value of the tension and therefore of the compression in the pillars for given data characterizing the bridge.

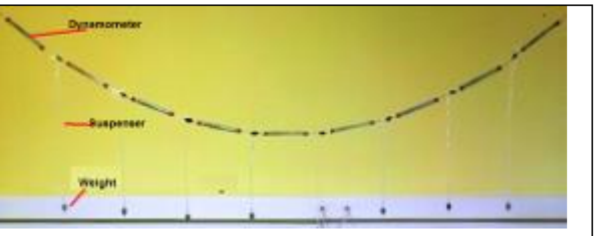
A discrete model derives from the finite number of suspensors: a main cable is represented as a collection of segments (a "broken line"), beginning and ending at the anchoring points, and separated by the suspension points linking the main cable and the suspensors. Modelling the tension in one of the main cable can be made by considering the sequence of tensions $\overrightarrow{T_i}$ along every segment, and for each, the values of the horizontal component and of the vertical component $\left(\mathrm{H_i};\mathrm{V_i}\right)$. The static equilibrium law, applied at every suspension point, implies that the horizontal component is the same in all segments. It also implies that the sequence of values of the vertical component is in arithmetic progression. With a choice of the direction of the tension, the vertical component is negative at one anchoring point, with an absolute value equal to the half of the weight of the deck supported by the cable (a quarter of the whole weight in case of two cables) and positive at the other one with the same absolute value, and the common difference is the value ΔP of the weight of a portion of the deck supported by a suspensor (figure 1c).

In the same discrete model, the slope of a segment is the ratio of the vertical by the horizontal components of the tension in this segment, and therefore is also in arithmetical progression. Knowing the position of one anchoring point (top of a pillar) it is possible to compute the sequence of the coordinates of the points of the collection of segments modelling the main cable, and to adjust the value of the constant horizontal component in order to get the desired elevation of the center of the cable above the deck (figure 1e).

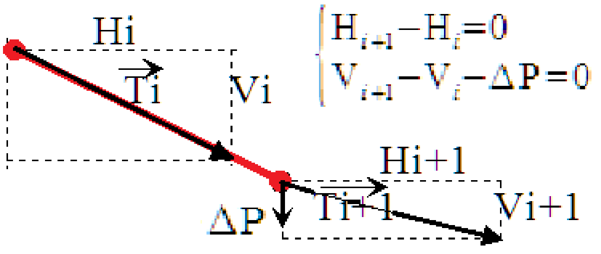
Given the big number of suspensors, one can look for a curve, limit of the collection of segments modeling the cable when this number tends to infinity, and the distance between suspensors tends to zero. Since the limit of the slope of a segment whose extremities tends to a point, is the gradient of the curve at this point, the arithmetical nature of the sequence of the slopes of the segments implies that the gradient depends linearly on the position on the curve, and, by integration, the curve is of quadratic nature (i.e. an arc of a parabola). This is the continuous model (figure 1f).



a) A suspension bridge



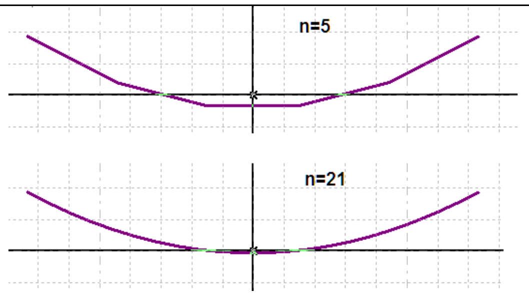
b) A physical model of a suspension bridge



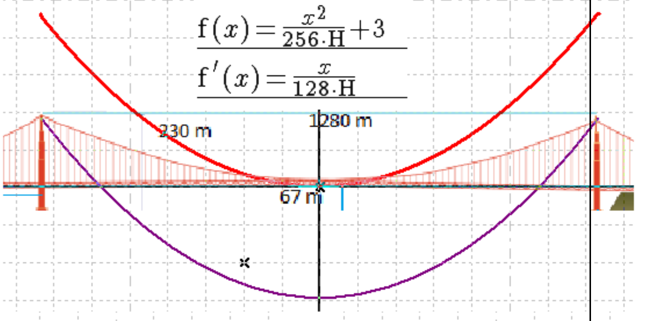
c) Tensions on a segment (red) of the discrete model.

```
//coordinates of the anchoring point
x ← −640
y ← 163
//Tension on the anchoring point
V ← −5
Pour i allant de 1 à n
    x ← x + 1280/n
    y ← y + (1280/n)·(V/H)
    V ← V + 10/(n−1)
Fin Pour
```

d) An algorithmic discrete model of the suspension points; n is the number of segments, and H (resp. V) the horizontal (resp. vertical) component of the tension.



e) The discrete model for two values of the number of segments.



f) Equation and curve (red) of the continuous model, compared to a picture of the bridge and to the discrete model (magenta). The horizontal component H has to be adjusted in order that the three models fit.

Figure 1: models of a suspension bridge

AFFORDANCES, CONSTRAINTS AND GENERAL DESIGN

The brief presentation above shows that studying a suspension bridge implies considering data in the real world as well as a number of interrelated concepts in physics and calculus: tension, static equilibrium of forces, projection of vectors, slope of segments and gradient of curves, arithmetic progression and linear function, integration, discrete and continuous models, limits and integration… All these contents are taught in secondary curricula, thus the goal for students is not to "reinvent" each of them in isolation, but rather to recognize how a question in a real world situation involves understanding these concepts operationally and in interaction. In the French curriculum, the study of a suspension bridge can be carried out in the last year of the secondary scientific stream (12th grade, Terminale). In the previous year, students studied arithmetic progressions and derivative of functions (in connection with the slope of tangent lines), and learnt to program the values of sequences, as well as to program approximate curves of functions whose derivative is known (the Euler method). In this last year, the students learnt about tensions in physics and about integration in mathematics.

A constraint results of a character of these classes: students pass an important exam at the end of the year, evaluating standard proficiencies rather that deep understanding. Thus there is limited time for situations going beyond isolated proficiencies in typical tasks, and a teacher has to highlight the contribution of less standard tasks in these situations. Moreover, while the contents in physics and mathematics at stake are in the curriculum, mastering in depth all aspects of this complex modelling process would certainly require a level of proficiency beyond what is generally required at upper secondary level. Our objective is less ambitious: we wish that students work on the four models, understanding the basic principles on which they are built, and the connections between these models. The Casyopée group used the framework of connected working spaces to design a classroom situation exploiting the potential of the study of a suspension bridge. We consider four working spaces.

In the first one, the object at stake is the sequence of tensions at the connection points of the suspensors, and the rules are the static equilibrium law and the properties of arithmetic progressions. Artefacts are concrete measurement devices used in physics and mathematics, dynamometers, angle protractor, and also more "abstract" tools like the decomposition of tensions in vertical and horizontal components. We name this working space, the static systems working space, or shortly, the statics working space.

The second working space deals with the discrete model of a main cable and then with geometrical objects. The main rule is the analytical definition of a segment: students have to compute the coordinates of the end point, knowing the coordinates of the other point, the slope and the difference between abscissas. We name this working space, the geometrical space.

In the third working space, an important artefact is Casyopée's programming environment, that allows computing a series of points by way of a simple iterative treatment (figure 1d); the points allow defining a continuous piecewise functions, whose graph, in the case of the bridge, represents the discrete model of the main cable (figure 1e). We name this working space, the algorithmic space[3].

Finally, the objects in the fourth space are functions governed by classical rules in calculus. This is the mathematical functions working space. Integrating a linear function should not be difficult for students. However, the formula of the linear function involves a parameter (the horizontal component H of the tension), and then students might be uncomfortable and benefit of Casyopée's symbolic capabilities. They can also use Casyopée to get a curve of this continuous model and compare to a picture of the bridge and to the discrete model, and adjust the horizontal component H in order that the three models fit. Thus Casyopée brings artefacts, useful in the geometrical algorithmic space and in the mathematical functions space, and also helping to connect these.

IMPLEMENTATION

As said before, there are constraints at this pre-exam level and the implementation is limited to three and a half hours and organized in four phases. The first phase is one hour long and has been prepared with the physics teacher. It aims first to introduce students to questions related to bridges, particularly suspension bridges. They are invited to consult a dedicated website (http://structurae.info/ouvrages/ponts-et-viaducs), to select and sketch four bridges of different types, to look at a video illustrating the idea of tension along a horizontal rope and the fact that, whatever the tension, the rope is no more a straight line, as soon as force is applied vertically on a point. They have to answer three questions: (1) why in a suspension bridge the main cables are not horizontal? (2) what type of functions do you propose to model the main cable? (3) is the shape of a main cable determined by the length of the suspensors? Also in this first phase, the students have to build two apparatuses like in figure 2, read the tensions in the dynamometers and the angles, compute the horizontal and the vertical components of the tensions and verify the static equilibrium of forces.

Figure 2: apparatuses in the first phase

The second phase is 50 min long. At the beginning, the data related to the Golden Gate Bridge is presented to the whole class. Students also look at a physical model (figure 1b), and one student reads the tensions in the dynamometers to the whole class. Then students are split into groups of four. Each group has one task, A or B, C or D.

Task A is related to the statics working space: inspired by the work in the first phase, students have to consider the sequence of horizontal and the vertical components of tensions at the connection points, recognize that the horizontal component is constant and compute a formula for the series of vertical components.

Task B is related to the geometrical algorithmic working space. A formula for the value of the slope of each segment in a discrete model of the main cable is given to the students, depending on a parameter H, and on the number *n* of segments. Students have to compute formulas for generating the series of *x* and *y*-coordinates of the suspension points.

Task C is related to the algorithmic working space. An algorithm like in figure 1d is given to them; they have to enter and execute the algorithm in Casyopée, interpret the parameter *n*, and adjust the parameter H in order that the model given by the algorithm conforms to the shape of the cable (figure 1e).

Task D is related to the mathematical functions working space. Students have to search for a function *f* whose curve models a main cable (continuous model). They are informed that the horizontal component of the tension in the cable is a constant H and that, in chosen axis, the formula for the vertical component of the tension at a point of *x*-coordinate *x* is given by the formula $\mathrm{V}(x)=\frac{\mathrm{P}\times x}{2\mathrm{L}}$, where P is the weight of the deck and L its length. They have to find a formula for the derivative of *f*, taking into account that the tension is in the direction of the tangent to the curve. Then, using Casyopée, they have to find a formula for *f* and adjust the parameter H in order that the curve of the function *f* conforms to the shape of the cable (figure 1f).

The third phase is also 50 min long. The students form new groups, also of four. Each of these new groups is made in order to bring together one or two students of each of the previous groups respectively doing task A, B and C. The groups are invited to share their findings and to write a report emphasizing the important points of the study. In this work a student coming for instance from a group that did task A is an expert in the statics working space, informing the students that did other tasks, of the methods and results in this working space. This organization in two series of groups is inspired by the « Jigsaw Classroom », which is designed as

> a cooperative learning technique that reduces racial conflict among school children, promotes better learning, improves student motivation, and increases enjoyment of the

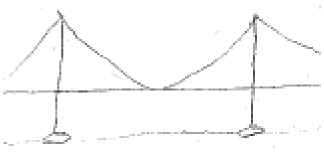
learning experience… Just as in a jigsaw puzzle, each piece — each student's part — is essential for the completion and full understanding of the final product[4].

The advantage of this organization is that students, in a period of time compatible with the constraints at this level, get a global understanding of the study of a problem, performing by themselves some of the key tasks related to this problem, even when they do not 'solve' the problem in all aspects. As illustrated above, the idea of several working spaces for the study of a problem is a guide for organizing the tasks.

The fourth phase (30 min long) is a collective synthesis led by Professor.

OBSERVATION AND EVALUATION

This implementation was observed in a class of 35 students by the end of March. This class was familiar with the "jigsaw classroom" organization that had already been put into operation for collaborative work on a lesson. The students were mostly average achievers. The contents at stake in physics and mathematics had been taught to students in previous lessons. The phases have been video recorded, and interviews were conducted with 3 students after phase 3. Due to the limited size of this contribution we restrict our analysis to some hints about how students behaved and progressively understood the structure of the bridge.



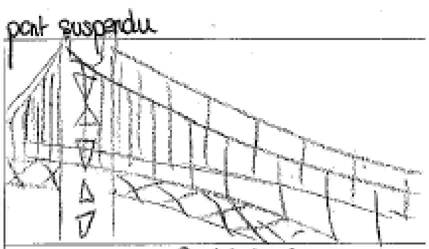
a) Pont du détroit d'Akashi

a) Pourquoi dans un pont suspendu les câbles porteurs ne sont -ils pas horizontaux ?

Le tablier appuit, et pousse le câble vers le bas (en tension)

c) Pour un pont suspendu, est-ce que la forme des câbles porteurs est due à la taille des suspentes ?

oui



b) pont du détroit d'Akashi.

a) Pourquoi dans un pont suspendu les câbles porteurs ne sont -ils pas horizontaux ?

Le tablier va pousser le cable vers le bas.

c) Pour un pont suspendu, est-ce que la forme des câbles porteurs est due à la taille des suspentes ?

Non, la forme est due aux forces exercées sur le cable.

Figure 3: answers in the first phase

In the first phase, most students sketched a suspension bridge without suspensors (figure 3a). They generally explained the non-horizontality of the main cable by the weight of the deck, but agreed with the false explanation of the shape by the length of the suspensors. They understood from the video that the weight of the deck "bends" the cable, but they did not link the shape of the cable with the uniform repartition of the weight, thanks to the suspensors. Isolated students showed a better understanding, writing that the shape is the consequence of the forces (or tensions) on the cable (figure 3b). In the rest of the first phase, after overcoming instrumental difficulties with the apparatuses (figure 2), the students correctly recorded the angles and the intensity of forces. They recognized the static equilibrium law, but they generally did not compute the components.

Especially the fact that the horizontal component is the same on all the three dynamometers in the apparatus with two weights (figure 2) did not appear. In the classroom discussion, before dividing the class in groups for phase 2, the teacher insisted on the decomposition of a vector in components and on the variations of the components of the tension in the cable at stake in the next phases. He also repeated that the goal is to study mathematically the shape of the cable.

For the group work in phases 2 and 3, I report only on a series of four groups observed doing each task in phase 2, and on one group in phase 3 bringing together students observed in phase 2, leaving for further work a comparison to other students in the whole class. In phase 2, students observed doing task A mainly succeeded, while difficulties were observed for students doing other tasks. Students doing task B started by sketching a bridge with a lot of suspensors, not allowing to consider segments. They were prompted by the observer to limit to 4 suspensors. They took time to find the coordinates of the anchoring point, and had difficulties to use the formula given for the slope of the segments and the distance between suspensors in order to calculate the coordinates of the next point. Actually, this calculation involves several parameters related to data of the bridge, a common situation in physical sciences but not in mathematics. Students doing task C took time to enter the algorithm in Casyopée. Nothing or a wrong display appeared on the screen, because of small mistakes. They could correct only when the observer helped them to analyze the algorithm. They identified the parameter n as related to the number of suspensors and proposed the value 83 (the number of suspensors in the Golden Gate Bridge). They considered that this value is "close to infinity" and that is why the curve did not appear as a collection of segments, in contrast to small values of n. When the observer explained that H is a tension, they get aware that increasing the value of this parameter "straightens" the cable, and found a suitable value. Students doing task D found a formula for the vertical tension, but had difficulty to interpret the fact that the tension is in the direction of the tangent to the curve.

In the group of phase 3, each student explained her task and her work in the preceding phase. The video recording shows that other students listened attentively and asked for further explanation. The parameter H was identified by students as playing a role in each task; for instance when a student who did task C did not remember the effect of increasing H, confusing with the "height of the cable", the student who did task A corrected him, saying that it is a tension and then increasing should "straighten" rather than "slacken" the cable. The same student helped to overcome the difficulty met by the student who did task D to find the direction of the tangent to the curve and then the derivative of the function, saying "you just integrate the quotient of V and H". Going further in task D, the students were confused by the parameter H in the denominator, some proposing a Ln(H) in the antiderivative. They could achieve task D, using Casyopée. In contrast, the unfinished task B, and the connection with the algorithm in task C were not discussed.

Three students were interviewed after phase 3, as a method to further evaluate what connections students made between working spaces during the group work. They stressed that the situation was more complex than usually ("we had to connect a lot of different things") and that they were "not used to mix physic and mathematics". Commenting the first phase, they showed how their awareness of the structure of a bridge progressed: they mentioned the role of the suspensors and made the link between a suspension bridge and an arched bridge with regard on how the deck is supported. They made also the link between the apparatus with two weights and a suspension bridge "with two suspensors". They still had difficulties in considering the slopes of the segments in task B in order to find the coordinates of the suspension points. However, they correctly interpreted the algorithm of task C, and were able to connect the evolution of H, and x and y respectively to task A and B. They did not show clear awareness that the function of task D was a limit of the continuous piecewise function of Task C. From graphical evidence they thought that it was more or less the same function for big values of n. Visualization is then the way students connected the algorithmic and the mathematical function working spaces. The observer asked to explain why the gradient in a point of the curve is the quotient of V and H. The expected answer was that the tension has the direction of the tangent, but the students simply wrote $f\,'(x) = \Delta y/\Delta x = V(x)/H$ without more explanation. It seems that the first equality is common in the physics course, and that the second derives from the definition of the components in task A. Thus, students made a connection between the statics space and the mathematical function space without explicit consideration of a limit.

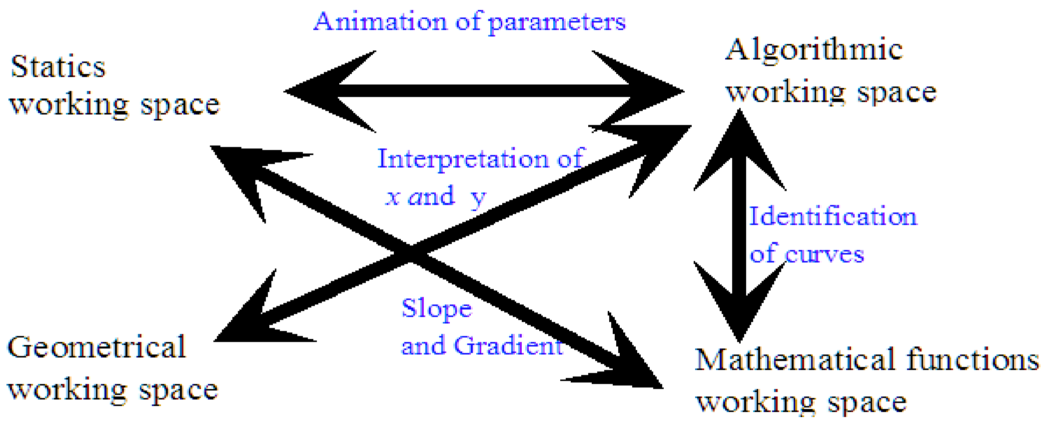


Figure 4: the connections made by students between working spaces

CONCLUSION

In Minh and Lagrange (2016), we demonstrated the need for considering three connected working spaces when implementing a suitable situation about geometrical optimization, taking the example of closeness on a curve, as evocated in the introduction. The knowledge at stake was the awareness of functions as models of dependencies, and the necessity of quantifying for a mathematical study of a phenomenon. Like in the situations of “chase and prey” and of "vertical movement in an amusement park ride", students' understanding of geometrical optimization benefited of their everyday bodily experience in the sense of Núñez, Edwards and Matos (1999). In “chase and prey”, human experience of concrete situations helps to anticipate a trajectory taking into account the distance made by the prey during the pursuer's course. In "closeness on a curve", it is a common experience that a mobile on a trajectory comes closer and closer a given point outside this trajectory, up to a certain position, and then goes farther and farther. In the amusement park the "smooth" and "abrupt" transitions can be related to students' bodily experience. This is less clear with the phenomenon of tension in the cable of the suspension bridge, since tensions and especially variations of tension are generally not in the everyday experience. That is why experimenting with dynamometers in the first phase, and the emphasis on tensions in the other phases[5], was important. In some sense, when modelling real word phenomena, students' bodily experience can never be directly taken for granted. It has to be developed explicitly via physical experiences and discourse throughout the modelling process. The progression of students' awareness of the structure of a bridge is evidence of this development.

In this example of the suspension bridge, we used the connected working spaces framework to implement an innovative "jigsaw" organization of the group work. The observation shows that student did not progress as much as expected in the second phase especially with tasks B, C and D. Techniques, especially in analytical geometry, although known for a couple of years, could not be activated in this complex situation, and correcting an algorithm was difficult. However, in the third phase students could consider the whole modelling process, make connections between working spaces, and "fill some gaps" of the second phase. Figure 4 summarizes the connections made by students. I interpret those in terms of genesis in the sense of cognitive processes involved in students' activity (Kuzniak, 2013). The connections between the algorithmic and the mathematical function spaces, and between the statics and the algorithmic spaces deal with visualization, while the connections between the algorithmic and the geometrical spaces, and between the statics and the mathematical function spaces deal with the use of symbols as artefacts. Figure 4 shows also missing connections to the geometrical working space: the students did not prove the formula for the slope of a segment from the physical consideration of the tension, and did not consider the gradient of the mathematical function as a limit of this slope. These missing connections deal with the discursive process of argumentation and proofs.

I mentioned the difficulties encountered in the various tasks by these mostly mid-achievers students, and the feeling they expressed of a situation more complex than usually. Also, the students did not compute the derivative in the continuous model as a formal limit, but rather through analogy with the slope of a segment in the discrete model. This does not invalidate the implementation of the situation since, as explained above, the objective is the understanding of basic principles on which the models are built, and of the connections between these models. The connections in figure 4 show that this objective is at least partially achieved. After accessing university, these students will choose a major, mathematics or physics or engineering for instance and probably tackle again more in depth some aspects of these models.

Finally, the four working spaces and the "jigsaw" organization in a modeling activity, produce an answer to the question page 5 of how to make students understand interactions between concepts taught at upper secondary level, and the interactions between these concepts and other sciences or real world situations: at least at the informal level students get awareness of physical entities and of mathematical tools to work on these entities. It is the role of the collective synthesis in phase 4, not analyzed here, to bring this to a more formal level[6]. About the conceptualizations in this activity, I noted cognitive processes in visualization and use of symbols, and deficiency in the discursive process of argumentation and proofs. This finding is consistent with the limited possibilities for students to carry out proofs in actual secondary calculus[7]. It shows also that, in spite of this limitation, the work of modelling involves very rich cognitive processes in visualization and use of symbols, provided that suitable working spaces are organized. Another important observation is the central role of the algorithmic working space through connections to the three other spaces.

NOTES

1. "We" and "our" refer to the Casyopée group. I am grateful to R Halbert, C. Le Bihan, B. Le Feuvre and M. C. Manens who introduced me to "jigsaw group work", and carried out the design and implementation of classroom situations after my proposition about modelling bridges.

2. In contrast to the narrow view of a model as “a real world situation translated into the mathematical language”, we think of models as more or less tangible systems in relation of similarity or representativeness, and helping to understand a complex phenomenon, without hierarchical organization.

3. About algorithmic working spaces, see Laval (2015).

4. https://www.jigsaw.org/

5. A study of the teacher's and the observer's intervention during the group work could give evidence of this. An experience like in the picture at http://goldengate.org/exhibits/images/GGB-exhibit3-2_1.jpg could also be useful.

6. Two other situations involving the study of suspension bridges have been presented and analysed by Lagrange and al. (2015). This article especially analyses the phase of synthesis after a "jigsaw" group work.

7. "Les différentes genèses (de l'analyse dans le secondaire) apparaissent comme étant déconnectées avec la difficulté de donner un sens à certaines reconstructions instrumentales et, surtout, à initier des preuves non iconique et discursive s'appuyant sur des propriétés clairement identifiées." (Kuzniak, Montoya, Vandebrouck et Vivier, 2016).

REFERENCES

Blum W., Galbraith P. L., Henn H-W, Niss M. (Eds.) (2007). Modelling and applications in mathematics education: *The 14th ICMI Study*. New York: Springer.

Burkhardt H. (2008). Making mathematical literacy a reality in classrooms. In Pitta-Pantazi D., Pilippou G. (ed.) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2090-2100) Larnaca: University of Cyprus.

Cazes, C. & Vandebrouck, F. (2014). Vil Coyote à la poursuite de Bip-Bip: Modélisation, simulation et apprentissage des fonctions, *Repère IREM*, 95, 5-22.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.

Kuzniak, A. & Richard, P.R. (2014). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 17.4, Volume I.*

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A. (2013). Teaching and learning geometry and beyond. Ubuz, Behiye (ed.) et al. *Proceedings of CERME 8*, Antalya, Turkey.

Kuzniak, A., Montoya, M., Vandebrouck, F., Vivier, L. (2016). Le travail mathématique en Analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction. *Actes de la XVIIIème école d'été de didactique des Mathématiques*.

Lagrange, J. B., Halbert, R., Le Bihan, C., Le Feuvre, B., Manens, M. C., Meyrier, X. & Minh, T. K. (2015). Investigation, communication et synthèse dans un travail mathématique: un dispositif en lycée. *Actes de la conférence EMF*, Alger. http://emf.unige.ch/index.php/emf-2015/groupe-de-travail-91/

Lagrange, J.-B. (2015). Functions in technological environments: from multi-representations to connected functional workspaces. In Gómez-Chacón, Escribano, Kuzniak & Richard (Eds.), pp. 317-334. *Mathematical Working Space, Proceedings Fourth ETM Symposium*. Madrid: Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid.

Laval, D. (2015). L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar. In Gómez-Chacón, Escribano, Kuzniak & Richard (Eds.), *Mathematical Working Space, Proceedings Fourth ETM Symposium*, pp. 103-116. Madrid: Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2).

Minh, T. K., Lagrange, J.B. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM Mathematics Education* on line first.

Núñez R., Edwards L-D, Matos J-F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics* 39, 45–65.

Rasmussen, C., Nemirovsky, R., Olszewski, J., Dost, K., and Johnson, J. (2004). On Forms of Knowing: The Role of Bodily Activity and Tools in Mathematical Learning. *Educational Studies in Mathematics* 54 (3).

EXPLORACIÓN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL DE R^2 EN R^2. EL USO DE GEOMETRÍA DINÁMICA PARA AMPLIAR O ADECUAR CONSTRUCCIONES MENTALES

Gisela Camacho Espinoza, Asuman Oktaç

Cinvestav – IPN

gcamacho@cinvestav.mx, oktac@cinvestav.mx

Como parte de una investigación relacionada con cómo se aprenden los conceptos vector propio, valor propio y espacio propio un profesor de Álgebra Lineal resolvió una actividad que consiste en describir cómo una transformación lineal específica deforma el plano cartesiano que representa al espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. De manera inesperada, y ante una situación problemática novedosa para él, el profesor reveló concepciones no apropiadas del concepto transformación lineal. En este artículo analizamos el porqué de estas concepciones y cómo el uso del software GeoGebra le permitió al profesor ampliarlas o adecuarlas. Proponemos una vinculación de las perspectivas teóricas APOE y ETM como herramienta de análisis.

Palabras Claves*: transformación lineal, APOE, ETM de Álgebra Lineal, GeoGebra, Plano semiótico-instrumental*

INTRODUCCIÓN

En este artículo presentamos algunos avances de una investigación doctoral en desarrollo. Uno de los objetivos de dicha investigación es la caracterización de las estructuras mentales que le permiten a un profesor abordar problemas relacionados con los conceptos vector propio, valor propio y espacio propio en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Suponiendo que un profesor con amplia experiencia en Álgebra Lineal tendría un Esquema robusto del concepto transformación lineal para enfrentar situaciones problemáticas que involucraran dicho concepto, buscamos caracterizar cómo puede integrar la tecnología a su trabajo matemático cuando utiliza su Esquema existente de transformación lineal, y cómo dicho Esquema se extiende al interactuar con el problema y el software GeoGebra.

Expondremos el análisis de dos episodios de una entrevista con un profesor universitario, donde la finalidad era identificar los vectores propios asociados a una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ por medio de la exploración geométrica de subespacios invariantes.

En los episodios detectamos, de manera inesperada, algunas concepciones inadecuadas en el Esquema de transformación lineal del profesor. Estas concepciones obstaculizaron momentáneamente su avance en el desarrollo de la actividad, sin embargo, su reflexión en torno a sus conocimientos de Álgebra Lineal, así como el uso del software GeoGebra le permitieron avanzar de manera importante. Aunque nuestro objetivo era detectar construcciones mentales que intervienen en la comprensión de los conceptos vector propio, valor propio y espacio propio, los episodios seleccionados de la entrevista muestran la trascendencia de las concepciones previas en el aprendizaje de estos conceptos. Para el análisis nos apoyamos en el punto de vista de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), estableciendo relaciones con el modelo de los ETM (Espacios de Trabajo Matemático), en el contexto de las génesis favorecidas en distintos momentos.

En la primera sección presentamos algunos antecedentes sobre el estudio del aprendizaje de los conceptos vector propio, valor propio y espacio propio desde un enfoque cognitivo y sobre cómo se involucra la tecnología en las investigaciones existentes; hacemos mención de ellos porque los resultados reportados en este artículo son producto de una actividad elaborada en el contexto del aprendizaje de estos conceptos. También planteamos la búsqueda de subespacios invariantes bajo una transformación lineal como vía de identificación de los vectores, valores y espacios propios en $\mathbb{R}^2$. En la segunda sección, describimos brevemente la teoría APOE, marco teórico principal de la investigación y mencionamos elementos del modelo ETM que pueden apoyarla; además se incluyen los aspectos metodológicos. En la tercera sección presentamos resultados preliminares de una entrevista realizada a un profesor universitario sobre la interpretación gráfica de una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ utilizando el plano cartesiano como una representación de este espacio vectorial; planteamos un análisis cognitivo de los aspectos geométricos y algebraicos manejados por el entrevistado. Finalmente presentamos algunas reflexiones sobre la importancia de los elementos analizados para la investigación doctoral.

JUSTIFICACIÓN Y ANTECEDENTES

De acuerdo con los planes y programas de estudio, los vectores propios, valores propios y espacios propios forman parte del conjunto de conocimientos del álgebra lineal abordados en distintas carreras científicas y tecnológicas en México y en otros países. Revisamos la forma en que se presentan estos conceptos en algunos libros de texto como *Linear Algebra* (Friedberg, Insel y Spence, 2003), *Álgebra Lineal* (Hoffman y Kunze, 1999) y *Linear Algebra* (Lang, 2004), y nos percatamos de que el tratamiento que se da a estos conceptos parece implicar que una presentación general de ellos y sus propiedades permite su comprensión en cualquier tipo de espacio vectorial. Además, se emplean pocas representaciones geométricas en los espacios vectoriales en los que esto puede hacerse.

Encontramos pocas investigaciones en las que son estudiados los aspectos cognitivos de los vectores, valores y espacios propios. Destacamos, por ejemplo, que Larson, Zandieh y Rasmussen (2008), desde la teoría de Modelos y Modelación de Lesh y Doerr (2003) y con la teoría de Educación Matemática Realista, discuten las ideas que relacionan el determinante de una matriz, la dependencia de sus vectores columna y los valores y vectores propios, así como el cálculo del área de un cuadrado unitario.

En Salgado y Trigueros (2015) se combinaron los marcos de las teorías APOE y Modelos y Modelación. En su investigación se reportan actividades diseñadas a la luz de una descomposición genética, modelo cognitivo para describir cómo pueden ser aprendidos los conceptos matemáticos (Arnon et al., 2014), propuesta por las autoras. Las actividades fueron planteadas en espacios vectoriales como $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Las investigadoras mencionaron que solo 3 de los 30 estudiantes participantes mostraron concepción Objeto de los conceptos.

Hay estudios exploratorios que vinculan el aprendizaje de los vectores y valores propios y el uso de software de geometría dinámica en $\mathbb{R}^2$. Entre ellos está el trabajo de Klasa (2010), quien propuso exploraciones por medio de los programas Maple y Cabri, para localizar vectores colineales con sus imágenes bajo transformaciones lineales. Por otra parte, Gol Tabaghi (2012) utilizó en su investigación el software The Geometer's Sketchpad, concluyendo que las representaciones geométricas ayudaron a los estudiantes a refinar su consciencia explícita de los conceptos de vector propio y valor propio, para asimilar mejor los conceptos.

En Soto y García (2002) se empleó el programa Cabri Geometry II para la exploración de vectores y valores propios en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Los investigadores destacaron que las técnicas de arrastre en $\mathbb{R}^3$ son más complicadas que en $\mathbb{R}^2$, considerando que se requiere colocar un vector en el plano adecuado en el espacio tridimensional para después arrastrarlo de manera similar a como se hace en $\mathbb{R}^2$; también identificaron limitaciones propias del software.

Las investigaciones que involucran el uso de software de geometría dinámica hacen referencia implícita, mostrando ser un acercamiento útil, a los subespacios invariantes de dimensión 1. En nuestra investigación doctoral, recurrimos de manera explícita, a los subespacios invariantes. para caracterizar las estructuras mentales que permiten abordar problemas relacionados con los conceptos vector propio, valor propio y espacio propio en el espacio vectorial $\boldsymbol{R}^2$.

La definición de subespacio invariante plantea que si $T: V \to V$ es una transformación lineal, un subespacio *W* de *V* es *T* invariante si $T(x) \in W \ \forall x \in W$ es decir, $T(W) \subseteq W$ (Friedberg et al. 2003, p. 77). En $\mathbb{R}^2$, los posibles subespacios invariantes no triviales son de dimensión 1. De este modo, rastrear estos subespacios invariantes de $\mathbb{R}^2$ es buscar los subconjuntos invariantes de la forma $W = \{\lambda w | w \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

La noción de vector propio surge de manera natural en los subespacios invariantes de dimensión 1. Podemos decir que si una transformación *T* tiene un subespacio invariante de dimensión 1 entonces tiene un valor propio λ y un conjunto de vectores propios asociados a él. Así, *T* tiene un espacio propio de dimensión 1 o $\mathbb{R}^2$ es un espacio propio que puede ser visto como un conjunto de subespacios invariantes de dimensión 1, como en el caso de las homotecias. Considerando esas relaciones nos parece adecuado plantear la construcción de los conceptos valor propio, vector propio, espacio propio y subespacio invariante de manera conjunta.

Aprovechamos que $\mathbb{R}^2$ puede representarse geométricamente con el plano cartesiano para plantear el estudio de los conceptos utilizando el software de matemáticas dinámicas GeoGebra. Teniendo en cuenta los recursos visuales que ofrece el software y considerando que los posibles subespacios no triviales de $\mathbb{R}^2$ pueden ser representados por rectas que pasan por el origen, propusimos la exploración y el análisis de los efectos que produce una transformación lineal en el plano cartesiano para detectar subespacios invariantes y en consecuencia sus vectores y valores propios.

Elegimos una transformación lineal que tiene asociada una matriz simétrica, ya que éstas tienen dos subespacios invariantes no triviales. Además, a partir de ellos es posible determinar una base que permite describir de manera sencilla cómo actúa la transformación sobre el espacio vectorial.

MARCO DE INVESTIGACIÓN

La teoría APOE es uno de los marcos que guía nuestra investigación doctoral ya que proporciona un modelo cognitivo estructural para describir cómo pueden ser aprendidos los conceptos matemáticos. La teoría APOE puede considerarse, en un principio, como una reinterpretación iniciada por Dubinsky de la abstracción reflexiva de Piaget aplicada al pensamiento matemático avanzado (Arnon et al., 2014). La abstracción reflexiva es el principal mecanismo para construir las estructuras lógico matemáticas durante el desarrollo del pensamiento. Se consideran 4 tipos de estructuras mentales: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas; y 5 mecanismos mentales que permiten pasar de una estructura a otra: interiorización, encapsulación, coordinación, reversión y tematización. Además, se distingue entre conceptos y concepciones, refiriéndose los primeros al conocimiento colectivo de algún tema compartido por una comunidad de matemáticos; y las segundas al resultado de la actividad reflexiva de un sujeto (Arnon et al., 2014, p. 18).

Una Acción es una transformación que realiza un individuo sobre un objeto cognitivo existente para él. Cada paso de la transformación tiene que ejecutarse en un orden establecido y está guiado por instrucciones externas (Arnon et al., 2014, p.19). Cuando una Acción se repite y se reflexiona sobre la repetición de modo que ya no se depende de estímulos externos para ejecutarla, la Acción se convierte en un Proceso y los pasos de la Acción se pueden imaginar sin necesidad de realizarse explícitamente. Una manera de construir una concepción Proceso es por medio del mecanismo de interiorización. “La interiorización permite ser consciente de una acción, reflexionar sobre ella y combinarla con otras acciones” (Dubinsky, 1991, p. 107).

Cuando un individuo logra aplicar una Acción a un Proceso, el Proceso se vuelve un Objeto por medio del mecanismo de encapsulación. Así, el individuo se vuelve consciente del proceso como una totalidad y de que puede realizar Acciones sobre ella (Dubinsky et al., 2005). Si es necesario, un Objeto puede ser desencapsulado para regresar al Proceso que le dio origen. Otras maneras de construir procesos mentales son: la coordinación de dos Procesos existentes o la reversión de un Proceso existente; esto genera un nuevo Proceso que se puede encapsular para construir un Objeto.

Un Esquema de un concepto matemático es una concepción distinta a las anteriores; está formado por una colección de Acciones, Procesos, Objetos u otros Esquemas relacionados entre sí. No es una estructura terminada, se reconstruye constantemente según la actividad matemática del individuo. Un Esquema es coherente cuando el individuo es capaz de determinar si puede usarlo o no para resolver determinadas situaciones problemáticas. El Esquema puede volverse un Objeto mental por medio del mecanismo de tematización, esto permite aplicarle Acciones (Arnon et al., 2014, p. 25).

Considerando las estructuras y los mecanismos mentales, desde APOE se elaboran modelos teóricos conocidos como descomposiciones genéticas para describir cómo un individuo podría aprender un concepto matemático particular. Antes de validar el modelo utilizando datos empíricos éste se considera como una descomposición genética preliminar. Una descomposición genética no es necesariamente única, ya que pueden existir diferentes maneras de aprender el mismo concepto.

Según la teoría APOE los objetos pueden construirse de dos maneras: mediante encapsulación de procesos y mediante tematización de esquemas. En este artículo nos referimos a la primera, enfocándonos en los conceptos de transformación lineal y rotación, abordando la problemática en los dominios algebraico y geométrico. Nos interesa apoyarnos en el marco de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) ya que puede contribuir a explicar el fenómeno que reportamos aquí desde los planos semiótico-instrumental [Sem-Ins] aclarando el papel de los signos y herramientas utilizadas en el aprendizaje (Kuzniak & Richard, 2014), y semiótico-discursivo [Sem-Dis] explicando el vínculo entre los signos y la activación de las propiedades y resultados teóricos involucrados en los procesos de validación.

Para describir la intervención de una herramienta tecnológica en la construcción de las estructuras mentales, prevemos que los planteamientos de los ETM sobre una génesis instrumental que “hace funcionales los artefactos en el proceso constructivo que contribuye al trabajo matemático” (Kuzniak & Richard, 2014; p. 11) y una génesis semiótica “basada particularmente en los registros de representación semiótica, que proporciona un sentido a los objetos del ETM y les confiere su estatus de objetos matemáticos operatorios” (Kuzniak & Richard, 2014; p. 11) pueden ser de utilidad en nuestra investigación.

La actividad exploratoria que diseñamos se aplicó a un profesor que fue entrevistado y videograbado mientras la resolvía; se aplicará a por lo menos otro profesor con experiencia. Con los elementos teóricos y experimentales aportados por los profesores como usuarios avanzados de las matemáticas al resolver un problema, se elaborará una descomposición genética preliminar en la que se pretende incluir el uso de tecnología como detonante en la construcción de estructuras mentales.

Como primer acercamiento, trabajamos con matrices simétricas, ya que siempre pueden diagonalizarse. Esta propiedad facilita comprender cómo la transformación lineal actúa sobre el espacio vectorial en cuestión. La matriz diagonal tiene como elementos distintos de cero a los valores propios y la base ordenada que le da origen está integrada por vectores propios; por lo que se puede explicar el efecto gráfico de la transformación con respecto a la base de vectores propios.

ANÁLISIS DE UNA ENTREVISTA PILOTO

Como una primera aproximación empírica de la investigación se diseñó una actividad que consiste en describir cómo una transformación lineal específica deforma el plano $\mathbb{R}^2$, para encontrar los subespacios invariantes y los vectores propios. La finalidad de la actividad fue identificar las construcciones mentales que intervienen en la comprensión de los conceptos de vector propio y valor propio, así como determinar posibles dificultades en la comprensión de estos conceptos a partir del reconocimiento de subespacios invariantes bajo una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$; en ambos casos teniendo en cuenta la interacción con ambientes dinámicos digitales.

Decidimos trabajar con un profesor de licenciatura que imparte regularmente las materias de Geometría Analítica I, Geometría Analítica II, Álgebra Lineal I y Álgebra Lineal II en una universidad pública en México. Para identificar con mayor claridad las construcciones mentales que pueden intervenir en la solución entrevistamos al profesor mientras resolvía la actividad.

De manera no prevista, el profesor mostró no tener concepciones apropiadas sobre algunas transformaciones lineales. Reportamos aquí una de estas limitaciones conceptuales pues, aunque nuestro objetivo era detectar dificultades propias de los conceptos vector propio, valor propio y espacio propio, los episodios seleccionados de la entrevista muestran la trascendencia de las concepciones previas en el aprendizaje de nuevos conceptos, en particular los de nuestro interés. Evaluamos el trabajo expuesto por el profesor como significativo para la investigación doctoral, ya que a pesar de los problemas conceptuales pudo avanzar de modo importante en la solución del problema.

A continuación, presentamos algunos extractos de la entrevista en los que determinamos algunas características de los elementos cognitivos que intervienen en la solución del problema, y que intentamos relacionar con el trabajo matemático del profesor. Con la letra P se señalan las declaraciones del profesor y con la letra E las de la entrevistadora.

El primer episodio muestra las consecuencias de una concepción errónea, en el sentido de que incluye una propiedad falsa sobre matrices de rotación, al intentar relacionar elementos geométricos con elementos algebraicos del problema. En el segundo episodio se observa la coordinación de varios procesos para avanzar en la solución del problema, sin llegar a establecer todas las relaciones entre espacios invariantes y vectores propios.

Episodio 1.

La pregunta que motivó la discusión es la siguiente:

1.- Considera la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que tiene como matriz asociada, respecto a la base canónica, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Describe geométricamente cómo transforma *T* al plano cartesiano.

Nos referimos con descripción geométrica a una explicación detallada de las características de la transformación sobre el plano cartesiano. El profesor comenzó considerando objetos matemáticos que él llamó “objetos fijos”. En el pizarrón dibujó dos rectas perpendiculares para representar los ejes cartesianos *X* y *Y*; trazó algunas rectas paralelas al eje *Y* indicando que cada recta estaba formada por una familia de puntos de la forma (a, y) donde a es una constante. Respecto a los puntos y rectas afirmó lo siguiente: “[cada recta] más bien, es una colección de puntos que vamos a verlo como si fuera una familia de vectores…” (ver Figura 1). Notemos que, aunque el profesor dibujó rectas que no pasan por el origen, las concibe como conjuntos de puntos que representan los *extremos finales* de vectores anclados al origen.

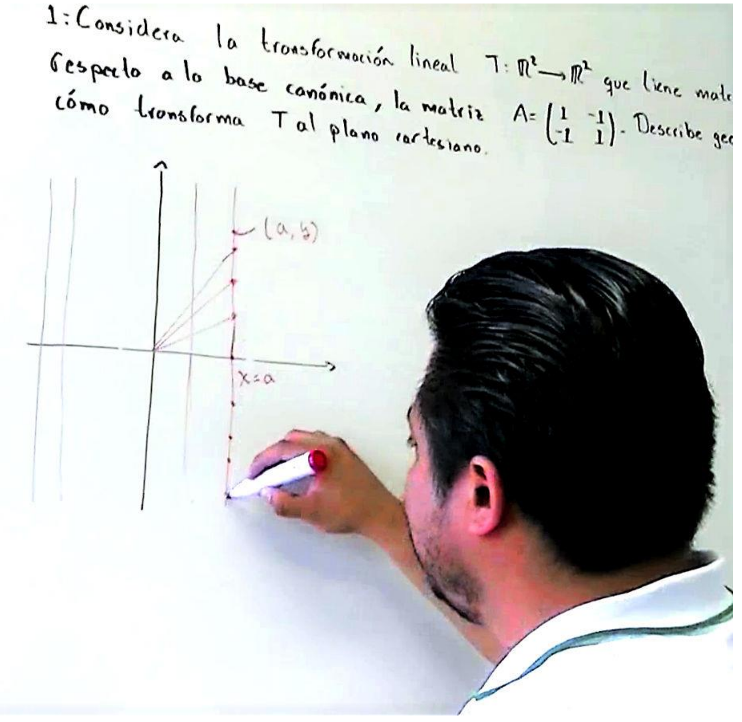


Figura 1: Rectas trazadas por el profesor vistas como conjuntos de puntos

El profesor resaltó que la transformación lineal asociada a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ es $L_T\,(x,y) = (x - y, -x + y)$. Considerando que $L_T\,(x,y) = (x', y')$ y con el desarrollo algebraico que se puede observar en la Figura 2, el profesor concluyó que la imagen de un conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix}$ es la recta "menos identidad".

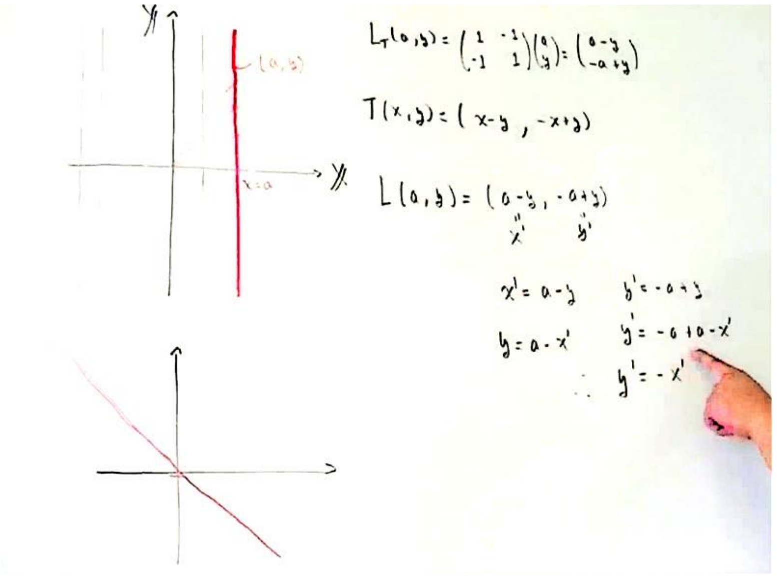


Figura 2: Desarrollo algebraico del profesor para obtener la imagen de rectas verticales

P: Esta recta que está en el plano *XY*, se llegó a transformar, ay… el pulso ¿verdad? [dibuja un segundo plano *XY*] en… en la menos identidad.

E: ¿Cuál fue la que se transformó en la menos identidad entonces?

P: Esta recta [señala una de las rectas verticales que trazó previamente], si quieres la engrosamos [la remarca con el plumón]. Esta recta, ésta en particular, se transformó en menos la identidad. Y sí vimos por qué, ¿no?

E: Ok.

Podemos destacar que el profesor comenzó definiendo una recta genérica; esto evidencia una concepción Objeto de recta inicialmente dentro del dominio de la geometría analítica. Decimos que es un objeto inicialmente geométrico porque señaló que la recta estaba compuesta por puntos. Después parece que percibe la recta como subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, esto como resultado de coordinar el Proceso de punto en el plano con el Proceso de vector, lo que se hizo explícito cuando mencionó que la colección de puntos se puede ver como familia de vectores. Después utilizó su concepción Acción de transformación lineal cuando aplicó la transformación al Objeto recta. Para obtener la imagen de la recta tuvo que desencapsularla en el Proceso de las coordenadas de un punto genérico de ella $\binom{a}{y}$, y aplicarle la transformación a este punto multiplicando la matriz por el vector de coordenadas. En ese momento obtuvo sólo la imagen de una recta arbitraria fija.

P: Pero, ¿qué te crees? Que no nada más esa recta, porque si te das cuenta el parámetro, el parámetro era a…

E: Ajá.

P: Aquí nos deshicimos del parámetro… y entonces, todas las rectas con estas coordenadas, o sea, todas las rectas [hace un barrido con su mano indicando rectas verticales] se van a transformar en una sola [con la mano recorre la recta $y = -x$].

E: Ok.

P: Está muy interesante cómo todo esto va a ser una.

E: ¿Todas las rectas paralelas al eje Y?

P: Ajá. [Abre sus manos y las junta como comprimiendo]

En esta parte se evidenció una concepción Proceso de transformación lineal; la transformación se aplicó al plano por medio de la familia de rectas verticales. Las concepciones Acción y Proceso de transformación lineal mencionadas se aplicaron al Objeto recta y no al objeto vector.

Desde el punto de vista de los ETM, interpretamos este episodio a partir del plano semiótico-discursivo [Sem-Dis] dando prioridad a la génesis semiótica. El profesor intenta convencernos de cuáles son las imágenes de las rectas verticales. Primero interpreta las rectas como objetos geométricos y después las utiliza para representar conjuntos de vectores sobre los que se aplica la transformación lineal. Observamos que el mismo representamen se refiere a dos objetos matemáticos distintos que parecen tener propiedades comunes, lo que permite su intercambio.

El profesor trabajó de manera similar con rectas horizontales y afirmó: “Obvio… así estás barriendo a todo el plano. Pero, entonces **¿a poco todo el plano se va a colapsar en la menos identidad?**”. Con esta pregunta pone de manifiesto su duda respecto al resultado anterior. Posteriormente mostró que desde que comenzó a resolver la actividad sospechó que la transformación era una rotación.

El profesor trató de buscar argumentos para justificar su sospecha. Se cuestionó sobre la imagen de un rectángulo de lados paralelos a los ejes y que no contiene al origen. Planteó que puede barrer la superficie del rectángulo con segmentos verticales y según su resultado anterior, la imagen de cada segmento sería un segmento de la recta menos identidad que no contiene al origen. Después de esta reflexión dijo: “me estaría dando no sé, un segmentito de recta. Estoy aplastándolo, pero algo me dice que no es cierto”.

A partir de aquí, el profesor buscó argumentos que le permitieran refutar el resultado obtenido con su primer acercamiento. Intentó determinar las imágenes de circunferencias con centro en el origen para utilizar como criterio que si las imágenes de éstas son circunferencias entonces la transformación es una rotación. Esto lo llevó a pensar en el determinante de la matriz. Si el determinante fuera uno entonces la transformación sería una rotación; estimó que el determinante era 2, pero esto no lo convenció de que no es una rotación. En la entrevista afirmó: “esta [matriz] no es de rotación porque su determinante no es uno, pero transforma los vectores como si fuese una rotación”.

Propuso una matriz equivalente, $R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ suponiendo que tendría determinante uno para asegurar que es una matriz de rotación y en consecuencia *A*, la matriz original, también lo sería. Al resaltar la conveniencia de las entradas de la matriz para el cálculo de su determinante concluyó “[*R*] es una bonita matriz de rotación”, pero al hacer el cálculo obtuvo que el determinante era $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Con esto descubrió que la matriz *R* no es de rotación “porque su determinante te da cero”. Entonces dejó de trabajar con *R*, pero no abandonó la idea de que *A* podría ser de rotación.

Como recurso final escalonó la matriz *A*, lo que evidencia que la matriz tiene rango 1. Esta propiedad, relacionada con la dimensión de la imagen de la transformación, lo convenció de que la matriz *A* no es de rotación. Así, concluyó que él al inicio “tenía razón, todo se va a colapsar a una recta”.

En esta parte del episodio resaltamos que al profesor le cuesta trabajo aceptar que la transformación lineal propuesta no es una rotación. Distinguimos que el profesor trabaja en un ETM global, ya que utiliza componentes cognitivos y epistemológicos en distintos dominios de manera suficientemente bien integrada y coherente (Montoya y Vivier, 2014; p. 78); particularmente nos referimos al dominio del álgebra, en su subdominio del álgebra lineal; y al dominio de la geometría, en su subdominio de la geometría analítica vectorial.

El modelo ETM considera que al tratar con un nuevo campo matemático pueden intervenir algunos objetos matemáticos familiares para el individuo que pueden o no ubicarse parcialmente dentro de algún otro ETM (Kuzniak et al. 2016, p. 731). Así, se puede hablar del ETM de la noción de rotación ya que este concepto puede ser entendido en su aspecto geométrico como movimiento alrededor de un punto, como una multiplicación de un vector por una matriz particular o como un tipo de transformación lineal, y para cada caso se tendrían distintos elementos en las génesis de su ETM.

Por otra parte, consideramos que el ETM de Álgebra Lineal del profesor es global e incluye al ETM local relativo a las Transformaciones Lineales, concepto necesario para resolver la actividad propuesta, que a su vez contiene al ETM de las rotaciones vistas como transformaciones lineales. Consideramos que las dificultades del profesor para visualizar la transformación lineal propuesta radican en su ETM local de rotación; atendimos a la descripción de los tres ETM’s como distintos y anidados, porque así surgieron durante el trabajo del profesor. Inicialmente utilizó rotaciones gráficamente sin asociarlas con elementos del álgebra lineal y después las subordinó a las propiedades de las transformaciones lineales. Un diagrama del ETM global se muestra en la Figura 3.

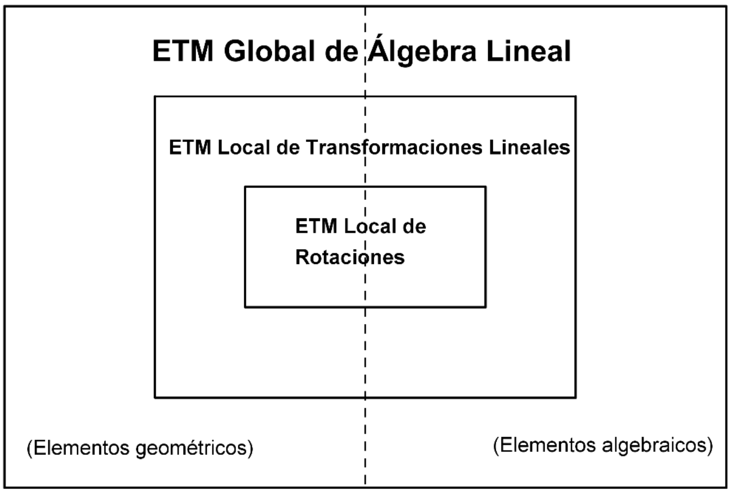


Figura 3: ETM global de Álgebra Lineal del profesor

Para analizar las dificultades presentes en el ETM local de rotación utilizaremos la teoría APOE. Entre las estructuras mentales del profesor se encuentra la concepción Objeto de rotación, evidencia de esto es que puede hablar de sus propiedades, por ejemplo, de su matriz asociada y de su inversa. De acuerdo con lo que el profesor muestra durante la entrevista, este Objeto es resultado de la encapsulación de un proceso, generado a su vez por otros tres procesos diferentes: el Proceso matriz de rotación, el Proceso movimiento de rotación y el Proceso rotación como transformación lineal (véase el diagrama de la Figura 4). De este modo, cuando utiliza el Objeto rotación puede desencapsularlo en cualquiera de sus tres Procesos.

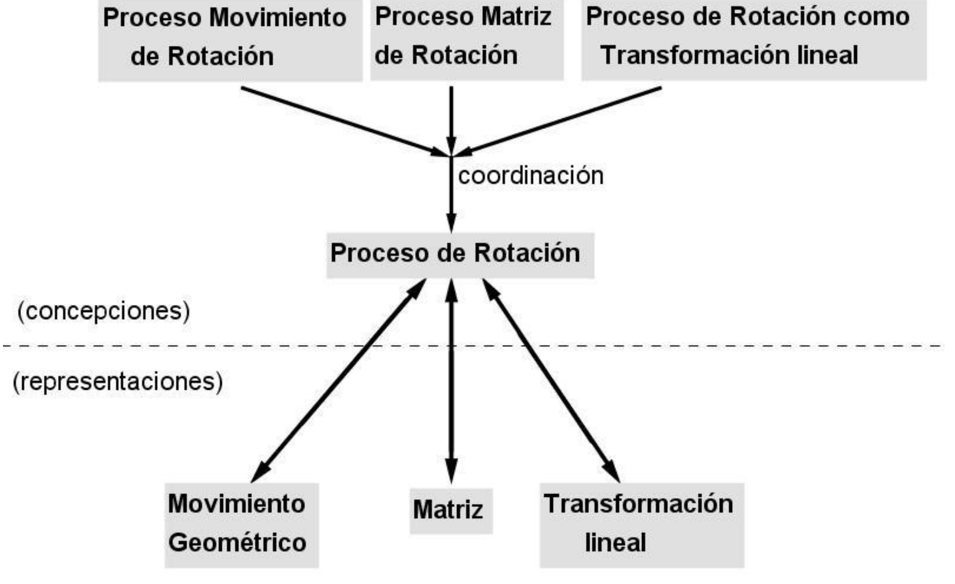


Figura 4: Coordinación de procesos que producen el proceso rotación

En el extracto de entrevista puede observarse que el profesor desencapsula el Objeto rotación en su Proceso matricial. Esto se evidencia cuando a partir de la visualización de la matriz rechaza que la imagen del plano sea una recta. Es en este momento donde se puede observar que el Proceso matriz de rotación no es apropiado. Este Proceso tiene que incluir, para el caso de $\mathbb{R}^2$ la forma matricial $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, en consecuencia, se tendría que el determinante de la matriz es igual a 1 y que la norma de los vectores columna de la matriz es 1. En la concepción Proceso del profesor se tiene que la matriz de rotación es simétrica como lo expresa durante la entrevista, pero esta propiedad es falsa.

Desde el enfoque de los ETM, parece que el profesor intenta trabajar en un ETM local de rotaciones, particularmente desde su concepción no apropiada de matriz de rotación. Al no obtener el resultado esperado decide utilizar elementos del ETM del subdominio álgebra lineal, pues considera resultados matemáticos que involucran cuestiones más generales al referirse a la dimensión de la imagen de la transformación. Confirmamos así que los componentes cognitivos y epistemológicos de los distintos dominios que utiliza están integrados de manera suficiente y coherente ya que puede descartar el argumento equivocado relacionado con la matriz de rotación.

Episodio 2.

En este episodio de la entrevista se observa cómo el profesor obtiene información adicional sobre la transformación lineal al manipular el applet de GeoGebra. En el applet se presentó un vector móvil y casillas que, al activarse, permitían ver la imagen del vector bajo la transformación lineal, la imagen de los vectores anclados al origen que integran una recta cualquiera del plano y la imagen de la recta; así como la imagen de cualquier recta que pasa por un vector dado (Ver Figura 5).

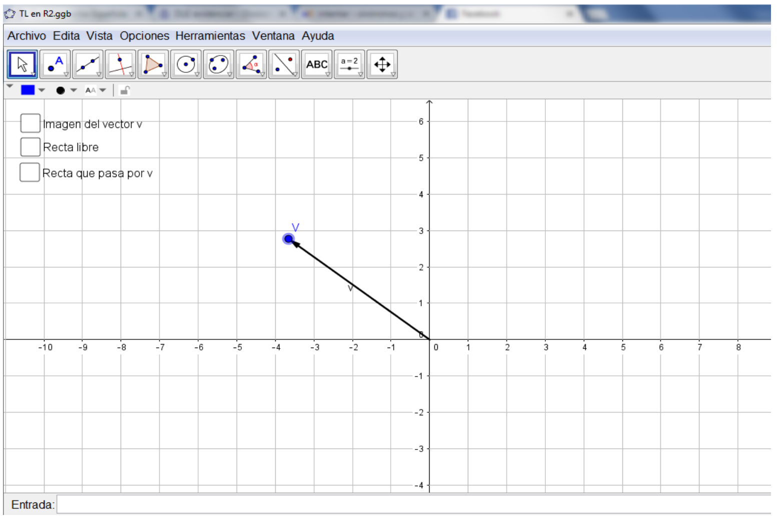


Figura 5: Pantalla inicial del applet de GeoGebra presentado al profesor

Como resultado de su análisis geométrico en el pizarrón, concluyó que la imagen de $\mathbb{R}^2$ bajo la transformación es la recta $y = -x$; pero no se refirió a la manera en que las imágenes "se acomodan" en la recta. Con ayuda del applet logró determinar, arrastrando un vector móvil anclado al origen, qué vectores tienen imágenes en la parte de la recta $y = -x$ comprendida en el segundo cuadrante del plano y cuáles tienen imágenes en la parte comprendida en el cuarto cuadrante (Ver Figura 6). En este extracto el profesor está pensando a la recta $y = x$ como nuevo eje de referencia.

P: Incluso lo analizo por segmentos ¿no? Porque, mira este segmento exactamente a 45° (señala un segmento en el tercer cuadrante del plano cartesiano, formando un ángulo de 225° respecto a la parte positiva del eje X), es la parte superior.

E: Ajá.

P: Y a 45° lo giro para arriba, sigue siendo la parte superior.

E: Ajá.

P: Hasta… (continúa arrastrando) los 180°. (Señala el vector ubicado a 45° respecto a la parte positiva del eje X). De aquí para acá es la parte que apunta para arriba (señala la parte del plano comprendida entre 45° y 225°, en sentido contrario a las manecillas del reloj) y de aquí para acá es la parte que apunta para abajo (señala la parte del plano comprendida entre 225° y 45° en sentido contrario a las manecillas del reloj).

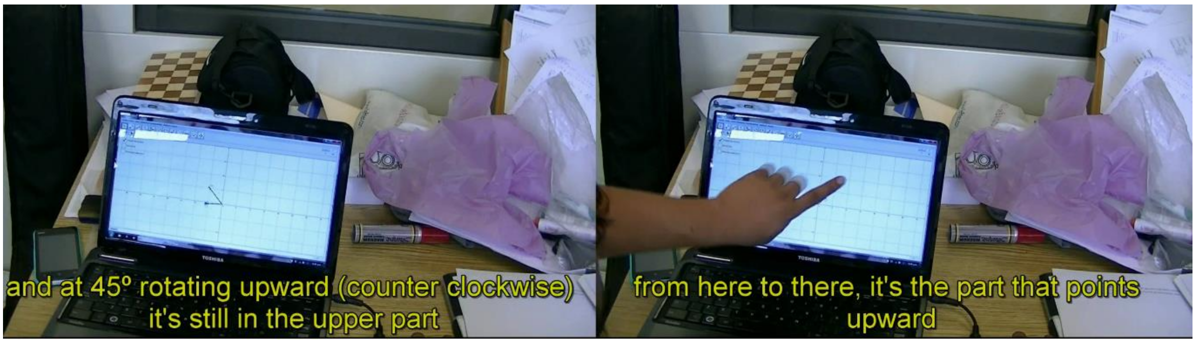


Figura 6: El profesor descubre cómo se acomodan las imágenes de los vectores con ayuda del applet de GeoGebra

Además, el profesor identificó el kernel de la transformación lineal y señaló algunas características de la norma de las imágenes a partir de la exploración con el applet. Esto le permitió explicar cómo la transformación lineal deforma el plano, aunque no consideró nociones precisas sobre la norma de cada vector.

P: Entonces es un punto toda esta recta, no tan solo se colapsa en un segmento, se nos va a colapsar en un punto. Y, y mientras más gires a los 180° (arrastra el vector, en el sentido de las manecillas del reloj, del ángulo de 225° al ángulo de 45°) el vector… mira, te das cuenta va a empezar a girar más. Entonces este lo puedes agrandar, lo puedes achicar. Pero… si te das cuenta, este giro aumenta proporcionalmente al vector.

Al interactuar con el applet el profesor reconoció los objetos con los que trabajó en el pizarrón, pero también construyó nuevos y determinó nuevas propiedades de los ya existentes. El profesor descubrió un nuevo eje de referencia a través de la manipulación de los vectores: la recta $y = x$. Con la exploración del applet, el profesor notó que una recta dividía al plano en 2 conjuntos especiales; aquellos vectores cuya imagen está en el segundo cuadrante y aquellos cuya imagen está en el cuarto cuadrante. La recta no le fue mostrada en el applet explícitamente durante la exploración; como resultado de la génesis instrumental él construyó esta recta particular, como imagen mental, a partir del arrastre del vector móvil.

De acuerdo con Kuzniak et al. 2016 (p. 726-727) la actividad propuesta mediante la interacción con GeoGebra contribuyó a la génesis instrumental en el sentido de instrumentación, pues el profesor ejecutó acciones motivadas por el software dando lugar a esquemas de uso productivos. Este proceso de construcción se vinculó al proceso de la visualización cuando el profesor dio al signo recta, construido por medio del artefacto, la calidad de eje de referencia; es decir, la recta particular induce una reinterpretación de la transformación lineal. De este modo se evidencia la relación entre representamen, artefacto, construcción y visualización de los planos epistemológico y cognitivo del ETM global a través de las génesis instrumental y semiótica. El plano que se favorece es el [Sem-Ins], esto se ilustra en el diagrama de la Figura 7.

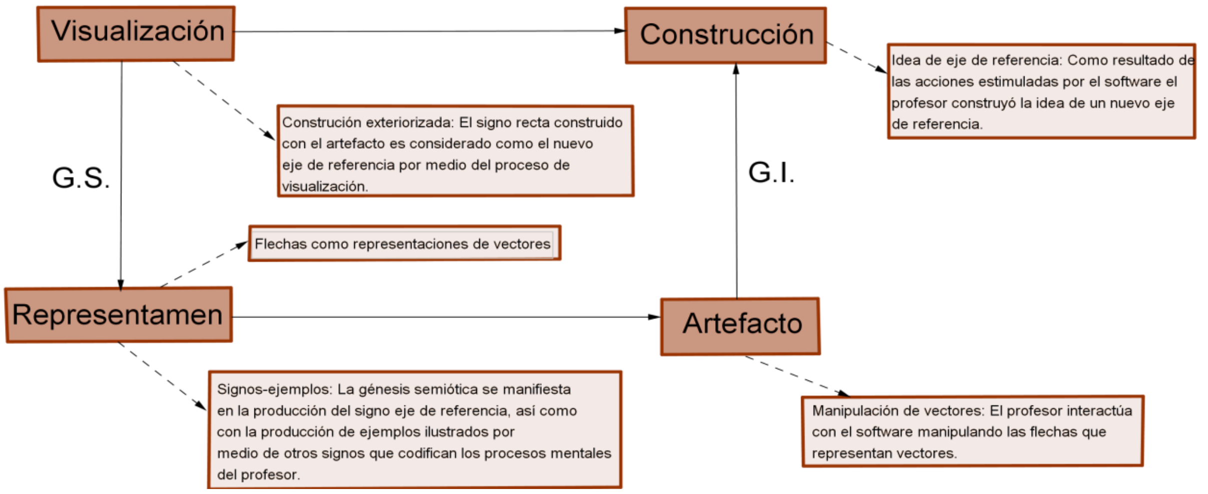


Figura 7: Interacciones en el plano Semiótico-Instrumental

A partir de las nuevas propiedades construidas que ahora visualiza dentro y fuera del applet, como la partición del dominio y el kernel de la transformación, el profesor pudo explicar el efecto de la transformación sobre otros objetos, por ejemplo, pudo describir la imagen de una circunferencia (véase la Figura 8).

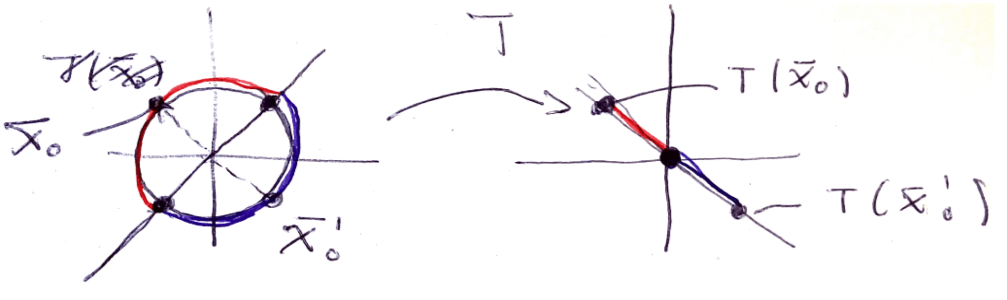


Figura 8: Dibujo del profesor que explica la imagen de una circunferencia bajo la transformación

La reinterpretación de la transformación lineal puede explicarse desde la teoría APOE. El profesor utilizó su concepción Objeto de eje de referencia, ya que lo ubica en una nueva posición para dividir el dominio. Cuando explica que los vectores que se encuentran a la izquierda de la recta $y = x$ tienen como imágenes vectores de la recta $y = -x$ ubicados en el segundo cuadrante, los vectores que están a la derecha de $y = x$ tienen como imágenes vectores de la recta $y = -x$ del cuarto cuadrante y cómo los vectores de $y = x$ tienen como imagen el vector cero, ha realizado una acción sobre el Objeto transformación lineal; acomodó su regla de correspondencia considerando los conjuntos de vectores que definió por medio del nuevo eje de referencia.

Puede observarse que, durante su exploración, cambia la génesis que el profesor favorece al enfrentar la actividad. En un primer momento utilizó la génesis semiótica al visualizar objetos a partir de signos; luego la génesis instrumental, cuando por medio de gráficas que elaboró con plumón y pizarrón construyó la imagen de la transformación. En otro momento favoreció la instrumental en GeoGebra al reconocer signos con los que había trabajado previamente en el pizarrón y realizar nuevas construcciones. Finalmente organizó algunos de sus resultados para dar una respuesta parcial a la pregunta inicial, mostrando indicios de la génesis discursiva.

SUBESPACIOS INVARIANTES Y VECTORES PROPIOS

Existen objetos matemáticos compartidos entre la geometría y el álgebra lineal. Por ejemplo, como el profesor entrevistado mostró, una recta puede ser vista como un objeto individual, como una familia de puntos o como un conjunto de vectores; por otra parte, el profesor mostró que las rotaciones también pueden ser entendidas como transformaciones lineales. El dominio en el que las ideas matemáticas sean desarrolladas depende de las necesidades del individuo que las trabaje para resolver algún problema, pudiendo cambiar de ETM local para resolverlo.

Teniendo en cuenta que el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ puede representarse con el plano cartesiano, y que en este espacio los conceptos de vector propio y valor propio pueden caracterizarse con propiedades geométricas; proponemos un acercamiento a estos conceptos a partir del análisis de las transformaciones lineales aplicadas al plano.

Pensando en los aspectos geométricos de las transformaciones lineales en el plano, un ejemplo natural de invariante son las rectas generadas por vectores propios, que además son subespacios vectoriales. Consideramos que proponer el análisis de cómo una transformación lineal deforma al plano no sólo ilustra, sino que puede permitir la construcción de los conceptos desde una perspectiva diferente a la puramente algebraica. La idea esencial es construir el concepto por medio de un análisis de la transformación que favorezca el cálculo de los vectores propios. Este recurso ha sido poco explorado como generador de los conceptos de nuestro interés, consideramos que es viable trabajarlo de acuerdo a los resultados observados en nuestra primera entrevista, si se prepara una etapa adecuada de instrumentación.

CONCLUSIONES

Planteamos dos tipos de conclusiones preliminares: primero algunas locales que surgen del análisis de la entrevista y después algunas teóricas con respecto al uso de los marcos de APOE y ETM en nuestra investigación.

El primer episodio de la entrevista parece mostrar la confrontación de dos visualizaciones: una incorrecta que obstruye el trabajo semiótico-discursivo; y una segunda visualización que rescata los resultados adecuados a durante la justificación de la primera. Se deduce que la visualización errónea fue provocada por una interiorización incorrecta de las matrices de rotación: el profesor visualizó una rotación a partir de la simetría de la matriz, una propiedad que no tienen las rotaciones. El proceso de rotación que utilizó incluye también una generalización incorrecta: si la imagen de una circunferencia es otra circunferencia entonces la transformación es una rotación. Esta implicación está al revés, puede decirse que si T es rotación entonces la imagen de una circunferencia es una circunferencia. Finalmente, la visualización correcta rectificó a la inicial debido a que el esquema que contiene la propiedad del rango de una matriz es coherente, aunque el esquema de rotación no lo sea. La duda sobre las propiedades de rotación es disipada con la certeza sobre las propiedades del rango.

Del segundo episodio destacamos el papel de la herramienta tecnológica para la construcción de objetos y propiedades. La construcción y visualización del eje de referencia parecen ser logradas gracias a las características dinámicas de GeoGebra y a la visualización, en este ambiente, de los resultados obtenidos en el ambiente estático. Suponemos que de haber favorecido más la instrumentalización con GeoGebra, el profesor podría haber encontrado las relaciones buscadas entre vectores propios y transformaciones lineales.

Mostramos un posible trabajo conjunto y complementado de APOE y ETM. Con APOE proponemos un estudio profundo de las estructuras mentales referentes a la construcción y manipulación de objetos mentales, y con ETM el estudio de la interacción con las herramientas y representaciones necesarias para realizar estas actividades, así como el estudio de ETM's anidados, con respecto a la influencia de los locales hacia los globales y viceversa.

Consideramos que la perspectiva ETM da una posible explicación sobre cómo la influencia de diversos signos e interacciones con artefactos tecnológicos permite a un individuo elaborar las estructuras mentales que lo ayuden a construir un concepto determinado. Además, la teoría APOE incorpora elementos no contemplados en el plano cognitivo de los ETM's, ya que permite analizar las construcciones mentales que intervienen en la resolución de problemas, proponer una manera específica para la construcción de los conceptos involucrados, y explicar las dificultades que un individuo puede enfrentar al construir los conceptos o intentar utilizarlos para resolver problemas.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education.* Nueva York: Springer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Neatherlands: Kluwer.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., y Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 335-359.

Friedberg, S., Insel, A. y Lawrence, S. (2003). *Linear Algebra.* Nueva Jersey: Prentice Hall.

Gol Tabaghi, S. (2012). *Using Dynamic Geometry to Explore Linear Algebra Concepts: the Emergence of Mobile, Visual Thinking* (Tesis de doctorado no publicada). Simon Fraser University, Canadá.

Hoffman, K. y Kunze, R. (1999). *Álgebra Lineal*. México: Pearson.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear Algebra and its Applications,* 432, 2100-2111.

Kuzniak, A., Tanguay, D. y Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48 (6), 721-737.

Kuzniak, A. y Richard, F. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4-I), 5-15.

Lang, S. (2004). *Linear Algebra.* Neva York: Springer-Verlag.

Larson, C., Zandieh, M. y Rasmussen, C. (2008). A trip through eigenland: where most roads lead to the direction associated with the largest eigenvalue. 11th annual conference on RUME.

Lesh, R., y Doerr, H.M. (2003). Foundations of a Models and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. En R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Montoya, E. y Vivier, L. (2014). Les changements de domaine de travail dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19,* 73-101.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *Journal of Mathematical Behavior,* 39, 100-120.

Soto, J. L. y García, M. (2002). A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in R^2 y R^3. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level.* Recuperado de: http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/reportes/pdf/reporte10.pdf.

L'ALGORITHME DE DICHOTOMIE « DISCRET » : UNE STRATÉGIE « *RAPIDE* » ET « *GAGNANTE* »

Dominique Laval

L.D.A.R. – Université Paris 7 (France)

dominique.laval@u-cergy.fr

Poursuivant la spécification d'un cadre « Espaces de Travail Algorithmique » (Laval, 2014), nous souhaitons préciser ce que peuvent être les plans épistémologiques et cognitifs dans ces espaces et à quelles genèses ils donnent lieu. Nous proposons aussi d'étudier quels espaces personnels peuvent se construire chez les élèves aux différents niveaux du lycée. Pour cela, nous présentons une ingénierie didactique expérimentée dans les trois niveaux d'un lycée français : Seconde (Grade 10), Première et Terminale Scientifiques (Grades 11 et 12). Nous nous situons dans une approche « discrète » de l'algorithme de dichotomie. Il s'agit d'amener les élèves à s'approprier un problème d'identification d'un nombre entier « secret » dans un intervalle d'entiers donnés, par des essais successifs, afin d'élaborer une stratégie « gagnante » et « rapide » qui serait programmable dans un environnement informatique. Nous étudions ainsi la construction de structures algorithmiques, où les élèves doivent déterminer et gérer des variables adéquates.

Mots Clés : *Algorithme, dichotomie, discret, continue, stratégie, nombre entier aléatoire, intervalles, moyenne, partie entière, Espace de Travail Algorithmique (ETA), Espace de travail Mathématique (ETM)*

INTRODUCTION

UN TRAVAIL DE THÈSE SUR L'INTRODUCTION DE TRAVAUX EN ALGORITHMIQUE DANS L'*ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE* DES MATHÉMATIQUES

Lors d'un travail de recherche, objet d'une thèse en cours (Laval, soutenance en automne 2017), trois ingénieries didactiques sont construites. Il s'agit de s'inscrire dans une étude didactique de questions posées par l'introduction de travaux en algorithmique dans l'*enseignement-apprentissage* des mathématiques. Ainsi, dans la continuité de Laval (2014), nous mettons en œuvre et développons des ETA pour la conception et l'analyse de ces situations. Elles sont mises en place dans trois champs spécifiques des mathématiques, au niveau des classes de Seconde et du cycle terminal scientifique des lycées français. Ces champs sont : l'**analyse** avec l'« algorithme de Dichotomie », la **théorie élémentaire des nombres** avec la « recette de Kaprekar » et les **probabilités** avec une « politique des naissances ».

UN ENSEIGNEMENT DE L'ALGORITHMIQUE AU LYCÉE

Depuis 2009, une (r)évolution de l'enseignement des mathématiques se concrétise en donnant une place importante dans le socle des connaissances des élèves du lycée, *aux processus algorithmiques et à travers eux à une mathématique plus active, plus vécue* (Engel, 1979). Ainsi, les auteurs des curricula introduisent progressivement un enseignement de l'algorithmique dans les lycées français. Nous observons que l'institution considère que ce nouvel enseignement vise pour l'essentiel les éléments de base de l'algorithmique, en particulier les premières instructions : variables, structures algorithmiques, etc. Cependant, une étude de manuels scolaires et de documents d'accompagnement, semble laisser transparaitre que le terme « algorithme » peut un certain nombre de fois porter à confusion. En effet, l'institution semble favoriser des exercices qui ne consistent qu'à reformuler un énoncé dans un langage plus ou moins formalisé, dans un pseudo-code ou dans un langage programmable dans un environnement informatique particulier. Comme le souligne Guy

(2013) *le but final reste la compréhension et la conception d'algorithmes*. Nous observons que, conformément aux directives institutionnelles, l'algorithmique a une place naturelle dans tous les domaines des mathématiques[1].

De même, les curricula définissent *l'informatique comme un moyen apportant aux élèves une meilleure compréhension des différents langages (naturel, pseudo-code,…) et des algorithmes, outils liés en particulier à la programmation* (Laval, 2015). Un des objectifs d'un enseignement de l'algorithmique est d'amener les lycéens, à utiliser des algorithmes *en relation avec d'autres parties du programme* mathématique.

Par ailleurs, nous constatons qu'une part importante des exercices faisant intervenir des algorithmes et proposés par l'institution sont de type « application numérique », permettant de répondre à des questions particulières suivant le champ mathématique étudié sans pour autant donner du sens à un enseignement de l'algorithmique. En effet, pour donner du sens à un tel enseignement, il nous semble aussi nécessaire de voir l'aspect « analyse numérique » de l'algorithmique qui sort de l'approche institutionnelle. Ce second aspect est pris en compte dans l'ingénierie que nous allons décrire dans cet article.

NOS PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Dans le cadre d'un travail de recherche ayant pour but de donner du sens à un enseignement de l'algorithmique au lycée, notre problématique générale est l'étude de sa contribution aux apprentissages dans différents champs enseignés et de développer des savoirs spécifiques. Nous cherchons en particulier à articuler des techniques « classiques » de résolution d'un problème de détermination d'un nombre entier « secret » et des techniques basées sur la mise en œuvre d'un algorithme. Dans le cadre d'un jeu mathématique, visant la détermination d'un nombre entier « secret », nous souhaitons provoquer chez l'élève une prise de conscience de la nécessité d'élaborer une stratégie implémentable dans un environnement informatique pour la résolution de ce jeu. Nous pensons que les élèves, ne distinguant pas l'opérateur humain d'une machine sur laquelle est implémentée l'algorithme, n'ont pas forcément conscience du type de traitement que cette implémentation va nécessiter. Cette prise de conscience va nous renvoyer à des questionnements liés à la représentation du traitement dans l'environnement informatique (ETA), mais aussi à divers concepts mathématiques dans des ETM de référence (Kuzniak et Richard, 2014) que sont : $\text{ETM}_{\textit{discret}}$ associé aux *mathématiques discrètes* et $\text{ETM}_{\textit{probabilité}}$.

CADRE THÉORIQUE GÉNÉRAL

En accord avec les travaux de Kuzniak (2011) sur le modèle didactique des *Espaces de Travail Géométrique* (Houdement et Kuzniak, 2006) et depuis Laval (2014), nous adaptons ce modèle à des *Espaces de Travail Algorithmique* (ETA) (Laval, 2013, 2014) qui sont aussi structurés en deux plans : le *plan épistémologique* constitué d'objets algorithmiques et le *plan cognitif* qui regroupe des processus cognitifs en vue d'aborder notre problématique.

Nous posons aussi la question des différentes genèses des objets et des processus, du point de vue des ETA personnels de l'élève. En effet, nous présentons la question ontologique de la construction et du fonctionnement interne des ETA personnels des élèves, lors du choix d'une stratégie « rapide » et « gagnante » (SRG), programmable dans un environnement informatique, afin de répondre à la problématique du joueur, noté B, qui doit déterminer un nombre entier « *secret* » choisi par un autre joueur, noté A, entre deux nombres entiers fixés initialement.

De plus, nous initions l'articulation de plusieurs domaines en interaction (Tanguay, 2015) : Comment la modélisation que le cadre des ETM propose, peut-elle rendre compte de la circulation entre les différents plans, épistémologiques et cognitifs, quand une tâche provoque des changements de domaine ou suscite un travail à partir d'objets et de représentations issus de différents domaines, et qui sont à combiner, à coordonner ?

LA DICHOTOMIE

La ***dichotomie,*** du grec « *couper en deux* », est, dans le champ de l'algorithmique, un processus itératif ou récursif de recherche où, à chaque étape, on partage en deux sous-parties sensiblement de même « taille » un espace de recherche qui se restreint alors à l'une des deux sous-parties. Pour cela, on suppose qu'il existe un test relativement simple qui permet à chaque étape de déterminer la sous-partie dans laquelle se trouve une solution au problème posé. Dans une situation issue des « mathématiques discrètes », la dichotomie peut être une stratégie de résolution applicable à un jeu qui consiste à déterminer un nombre entier « secret » compris dans un intervalle à bornes entières. Le nombre maximal de réponses permettant de déterminer cet entier « secret » est le premier entier supérieur ou égal au logarithme de base 2 du nombre total de réponses possibles.

CHOIX D'UNE INGÉNIERIE

Poursuivant la spécification d'un cadre *Espaces de Travail Algorithmique* (Laval, 2014), nous souhaitons préciser les plans épistémologique et cognitif dans ces espaces et à quelles genèses ils donnent lieu. Nous souhaitons étudier quels espaces personnels peuvent se construire chez des élèves aux différents niveaux du lycée et comment ils articulent des connaissances sur les algorithmes dans un domaine mathématique scolaire particulier, ici les « mathématiques discrètes ».

Notre ingénierie didactique sur l'algorithme de dichotomie « discret » (ADD) présentée dans cet article s'inscrit dans une étude complète, faisant l'objet d'un travail de thèse (Laval, à soutenir à l'automne 2017). En effet, l'« algorithme de dichotomie » est très présent dans les programmes et les manuels scolaires des lycées français. Il a des liens avec les notions d'analyse enseignées au lycée. Il permet d'étudier un travail algorithmique sur un même sujet comme contribution à l'apprentissage au cours des trois années du lycée des notions suivantes : *approximations ; équations à une inconnue dans* ***R*** *ou sur des intervalles de* ***R*** *; continuité sur un intervalle de* ***R*** *; Théorème des valeurs intermédiaires, Théorème de la bijection* (Laval, thèse à soutenir à l'automne 2017).

Bien qu'utilisé dans les trois niveaux scolaires des lycées français, l'« algorithme de dichotomie » n'est mentionné que par le programme de Seconde. Il implique un encadrement par des rationnels aussi proches que l'on veut. Nous le désignons par algorithme de dichotomie « continu ». Certains manuels scolaires proposent aussi des « activités » autour d'un ADD, comme la recherche d'un nombre entier « secret » dans un intervalle d'entiers donnés. La structure algorithmique est la même, mais les deux algorithmes n'opèrent pas sur les mêmes données et ne répondent pas au même problème. Un travail sur l'algorithme « discret » suppose préparer l'élève à transposer la structure de l'algorithme dans le cas « continu ». En effet, dans le cas « discret » la condition d'arrêt et l'alternative dans le corps de boucle sont plus simples à construire pour les élèves que dans le cas « continu ». Dans le cas « discret », la structure est proche de celle du cas « continu », ce qui permet de graduer la difficulté dans la construction de l'algorithme. Cependant, la condition d'arrêt, dans le cas « discret », porte sur une valeur numérique, tandis que dans le cas « continu » elle porte sur une amplitude. Elle est construite comme une égalité à un nombre fixé dans le cas « discret », tandis que dans le cas « continu », il s'agit d'une inégalité à un nombre arbitraire.

Nous présentons ici la partie « discrète » de notre ingénierie, mettant en jeu la structure de l'algorithme. En effet, les élèves doivent répondre à la problématique suivante :

Décrire un modèle et une stratégie permettant de simuler le jeu suivant, où on a deux joueurs A et B tels que :

- Le « joueur A » pense « secrètement » et au hasard à un nombre entier « secret » compris entre 1 et 1 000 ;
- Le « joueur B » doit deviner ce nombre entier « secret » en faisant le minimum de propositions.

A chaque proposition du « joueur B », le « joueur A » doit répondre par : « Le nombre entier secret est plus grand », ou « Le nombre entier secret est plus petit », ou « Bravo, tu as gagné », selon la position de la proposition par rapport au nombre entier « secret » à atteindre.

Il s'agit ainsi d'amener les élèves à s'approprier le problème pour identifier un nombre entier inconnu dans un intervalle donné, par des essais successifs. Chaque essai donne lieu à un diagnostic de comparaison de l'essai et du nombre entier « secret », pour découvrir que l'utilisation d'un « algorithme de dichotomie » peut être une solution à ce problème. Nous faisons l'hypothèse que la dichotomie va s'imposer aux élèves comme une stratégie « rapide » et « gagnante » (SRG). Nous traduisons cela dans la tâche donnée aux élèves par le fait que le nombre entier « secret » doit être découvert *en faisant le minimum de propositions* et en partant de l'hypothèse que les élèves comprennent cela comme un objectif de performance comparée qui n'est pas exprimé en termes d'optimalité. En effet, des questions sur l'optimalité, mais aussi sur la complexité, ne peuvent être traitées au niveau du lycée.

ESPACES DE TRAVAIL ALGORITHMIQUE (ETA)

Depuis Laval (2015), nous nous intéressons dans un premier temps au plan épistémologique constitué :

- d'artefacts « programmables » : la calculatrice, les objets programmables, le langage naturel, le pseudo-code, les langages algorithmiques, les organigrammes et les logiciels de programmation. La construction d'algorithmes passant par un langage, plusieurs types de langages peuvent être employés pour exprimer des algorithmes. Cependant, il ne faut pas prendre le mot « langage » au sens technique de programmation. En effet, l'objet de l'algorithmique est de comprendre si l'on peut résoudre tel ou tel problème par le calcul, et si oui, de quelle manière, et à quel coût en termes de temps et de mémoire ;
- d'un « ensemble d'idées théoriques » constitué de concepts de modélisation mathématique et d'algorithmes, de l'étude de la structure de l'algorithme et du choix des variables itératives, ainsi que de l'« effectivité » et du « coût ». Une première vérification consiste souvent en quelques essais. En effet, on peut exécuter l'algorithme « à la main » ou après l'avoir programmé sur l'ordinateur avec quelques données dont on peut connaître le résultat. Si le résultat n'est pas conforme à l'attente, on prouve ainsi que l'algorithme est incorrect.

De nombreux outils formels ou théoriques sont développés afin de décrire les algorithmes, de les étudier et d'exprimer leurs « qualités », et de permettre de les comparer. En effet, pour décrire des algorithmes, des structures algorithmiques sont mises en évidence : – « structures de contrôle » (séquences, conditionnelles, boucles) ; – « structures de données » (constantes, variables, tableaux, structures récursives du type listes, arbres, graphes). Pour justifier de leur qualité, des notions de correction, de complétude et de terminaison sont mises en place. Pour comparer des algorithmes, une théorie de la complexité des algorithmes est définie ;

- d'un « ensemble d'objets » où un algorithme est un traitement sur des objets qui peuvent être des objets mathématiques ou des objets du monde, notamment lorsqu'il s'agit de résoudre un problème. Par exemple, l'« algorithme glouton » (Greedy algorithm) vise à optimiser le « rendu des monnaies ». Comme dans les ETG, les objets sont ceux sur lesquels porte le problème. Ils aident à distinguer des artefacts qui servent à les manipuler.

Pour l'ADD, le plan épistémologique peut se présenter comme en figure 1.

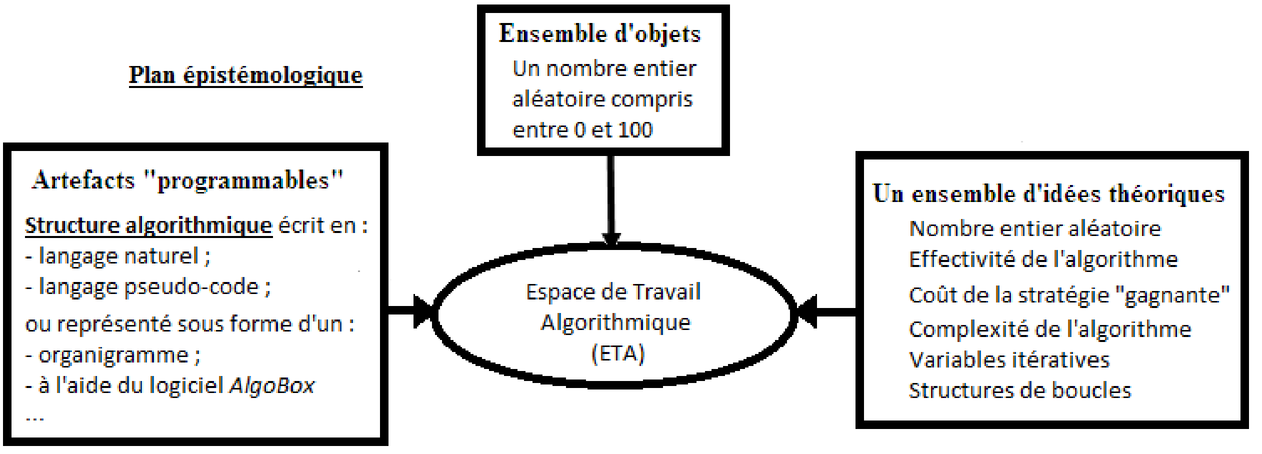


Figure 1: Plan épistémologique de l'ADD

Dans un second temps, nous nous intéressons à une ouverture sur le niveau cognitif des ETA en interaction avec le niveau épistémologique. L'algorithmique enseignée dans les classes des lycées français ne se réduit pas à un simple corpus qui consisterait à n'aborder que l'aspect théorique et technique de l'algorithmique.

> *La démarche algorithmique est [...] une composante essentielle de l'activité mathématique. [...] Ce qui est proposé dans le programme est une formalisation en langage naturel propre à donner lieu à traduction [...] à l'aide d'un logiciel. Il s'agit de familiariser les élèves avec les grands principes d'organisation d'un algorithme : gestion des entrées-sorties, affectation d'une valeur et mise en forme d'un calcul*[2].

Ainsi, comme pour les mathématiques enseignées dans le secondaire, l'algorithmique « *enseignée au lycée n'est pas un corpus désincarné de propriétés et d'objets réduits à des signifiants manipulables par des systèmes formels, elle est d'abord et principalement une activité humaine* » (Kuzniak & Richard, 2014, p. 4). Il est essentiel de comprendre comment des élèves utilisent et s'approprient des connaissances algorithmiques dans leur pratique des mathématiques, et comment ils donnent du sens aux structures et aux variables itératives. Il en est de même pour le concept de nombre pseudo-aléatoire et les objets tangibles que sont les langages utilisés pour construire des algorithmes.

En prenant appui sur les travaux mis en place dans les ETG (Kuzniak, 2011) et les perspectives faites sur les ETM (Kuzniak & Richard, 2014), nous proposons un deuxième niveau de l'ETA *centré sur le sujet vu comme un sujet cognitif*. Cette ouverture sur le champ cognitif *[va] se faire en étroite relation avec les composantes du niveau épistémologique et, pour rester dans un cadre didactique, il est possible d'adapter l'approche sémiotique de Duval* (2006). De Duval, nous adoptons pour l'activité algorithmique l'idée de trois processus cognitifs :

- *un processus de visualisation* en relation avec la représentation de l'algorithme et le support matériel (Kuzniak & Richard, 2014) ;
- *un processus de construction* (Ibid.) déterminé par les langages et les instruments utilisés (organigrammes, langage naturel, pseudo-code, langage de programmation, ordinateur, logiciels algorithmiques, calculatrice,…) ;
- un processus discursif qui produit des argumentations ainsi que des preuves (Ibid.).

ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUES DE RÉFÉRENCE

Notre travail didactique nous permet d'étudier les interactions entre ETA et ETM$_{discret}$, ainsi qu'entre ETA et ETM$_{probabilités}$. L'élève établit l'hypothèse que l'ADD va s'imposer comme une SRG, implémentable dans un environnement informatique. Nous traduisons cela dans la tâche donnée aux élèves par le fait que le nombre entier « secret » doit être découvert « en faisant le minimum de propositions » et en faisant l'hypothèse que les élèves comprennent cela comme un objectif de performance comparée. De plus, les élèves doivent établir un lien entre un calcul de moyenne de deux nombres entiers et la partie entière de la moyenne obtenue lors de la programmation sur machine de l'ADD. L'apport des ETM$_{discret}$ et ETM$_{probabilités}$ peut se résumer ainsi (Tableau 1) :

	Un algorithme « qui tourne »	Des réponses « sûres » à des questions
Espace d'objets	Structures algorithmiques, partie entière, répétition, comparaison, calcul de moyenne, représentation des nombres	Numération décimale, nombre entier, écriture fractionnaire
Artefacts	Dispositif, langage, variables itératives, corps de boucles	Formes algébriques
Référentiel théorique	Contraintes du langage	Nombre aléatoire, partie entière

Tableau 1

QUESTIONS ET MÉTHODOLOGIE

La méthode consiste à mettre en place une ingénierie didactique (Artigue, 1992) pour tester l'hypothèse que le travail sur des algorithmes peut favoriser chez l'élève l'apprentissage de nouvelles notions mathématiques, ainsi que développer des démarches et des compétences. Notre choix ici, porte sur le champ des « mathématiques discrètes » ainsi que sur des concepts issus du champ des probabilités pour les ETM de référence et d'une structure itérative pour l'ETA.

Nos questions

Notre questionnement général se spécifie ainsi :

(Q1) Dans le cadre d'une genèse, quelle est la prise de conscience de la part de l'élève de la nécessité d'une stratégie « gagnante » et « rapide » répondant à une problématique de recherche d'un nombre entier « secret » et de la programmer dans un environnement informatique afin d'en vérifier sa validité. Quelle adidacticité ? Quelle contribution d'un travail de construction d'algorithmes ?

Les élèves n'ont pas nécessairement l'intuition d'une stratégie particulière pouvant répondre à une problématique donnée. De plus, ils ne distinguent pas forcément l'opérateur humain d'une machine sur laquelle est implémenté l'algorithme associée à cette stratégie afin d'en contrôler sa pertinence et sa validité. De même, ils n'ont pas conscience du type de traitement que cette implémentation peut nécessiter. La prise de conscience souhaitée renvoie à des questions liées à la représentation du traitement par un environnement informatique avec la mise en place d'ETA qui doit, dans le cadre d'ingénieries ultérieures sur l'algorithme de dichotomie « continue » (qui ne sont pas présentée dans cet article), interagir avec des ETM spécifiques caractériser par ces ETA en lien avec des concepts mathématiques issus du domaine de l'analyse.

Dans le cadre d'une ingénierie sur la dichotomie « discrète », nous pouvons observer chez les élèves une première série d'interactions entre les genèses discursives mises en place dans un ETA*logiciel* sur les représentations des traitements des données, des structures informatiques, des variables, mais aussi sur les observables (production et interprétation) lors de l'exécution de l'algorithme dans l'environnement informatique et un ETM spécifique mettant en lumière une réflexion de la part de l'élève sur des concepts comme celui de nombre entier aléatoire, d'intervalle, de moyenne et de fonction partie entière.

(Q2) Les constructions de deux algorithmes représentent pour l'un la tâche du joueur A (celui qui pense à un nombre entier « secret ») et pour l'autre l'action du joueur B (celui qui doit trouver le nombre entier « secret »). Comment articuler ces deux phases de travail, chacune centrée sur un algorithme ?

L'algorithme réalisant les actions du joueur A comprend le choix du nombre entier « secret » et les réponses aux propositions d'un joueur B « humain ». Celui du joueur B consiste à poser des questions au joueur A « humain » de façon que le joueur B détermine en un minimum de propositions le nombre entier « secret ».

L'intérêt de l'algorithme du joueur B est sa structure analogue à celle du joueur A, mais il n'implique pas la gestion de variables de boucle. Ainsi, nous séparons la difficulté pour les élèves.

(Q3) Quelles variables itératives et quels concepts mathématiques sont sollicités ? Quelles interactions ?

En dehors du tirage d'un nombre aléatoire, le travail sur l'algorithme du joueur A ne se situe que dans un ETA, tandis que celui du joueur B met en jeu de façon très liée un ETA et des ETM. En effet, l'utilisation de variables dans une structure de boucle, plutôt que lors de simple déclaration ou d'alternative, peut être favorisée par le fait que, dans la boucle, le concept de variable informatique apparaît différent de celui de variable mathématique.

Nous pouvons ainsi identifier trois opérations sur les variables dans une boucle, renvoyant à trois aspects cognitifs : la mise à jour, le test d'arrêt et l'initialisation. De plus, comme le souligne Samurçay (1985), nous avons également deux types de variables intervenant dans des problèmes de programmation : celles qui sont des données explicites du problème et celles qui sont rendues nécessaire par la solution informatique.

Nous pouvons aussi faire l'hypothèse que plus le traitement informatique des variables s'éloigne de l'exécution « à la main » de l'algorithme, plus les élèves sont susceptibles de rencontrer des difficultés, comme lors de la gestion d'un invariant de boucle par exemple.

Plusieurs questions concernant le perçu des élèves sur l'initialisation des variables, sur les variables d'accumulation ou sur les compteurs, peuvent alors se poser. Pouvons-nous attendre à ce que les variables d'accumulation soient moins bien traitées par des élèves débutants que les autres ?

En effet, nous pouvons supposer que les variables avec lesquelles les élèves éprouvent le moins de difficultés sont vraisemblablement les compteurs. Ceci est peut-être dû au fait que ce type de variable est relativement institutionnalisé. Une question peut alors se poser : en est-il de même avec la structure de boucle « Répéter… Jusqu'à … » ? Nous privilégions d'interpréter ce questionnement général à l'aide des ETA, cependant, nous nous intéressons aussi à la productivité de ce choix.

Méthodologie

Notre approche et notre méthode sont les suivantes :

- mettre en œuvre et évaluer une unité d'enseignement en Seconde et dans le cycle scientifique terminal des lycées français, sur de nouvelles démarches autour de la conception de structures d'algorithmes. Nous souhaitons ainsi étudier les interactions chez l'élève entre un travail dans le

champ de l'algorithmique et le domaine des « mathématiques discrètes » (**Q1** et **Q2**), ainsi que la dépendance par rapport au niveau scolaire ;
- construire et analyser des algorithmes permettant de modéliser les observations faites « à la main » sur les joueurs A et B (humains) et nécessitant l'utilisation de concepts mathématiques comme : partie entière, moyenne, comparaison, nombre entier aléatoire, etc. (**Q2** et **Q3**) ;
- écrire les algorithmes modélisant les tâches des deux joueurs après avoir joué en binôme, afin que les élèves travaillent sur les structures et expressions des algorithmes représentant le joueur A et le joueur B **(Q2)** ;
- élaborer un contrat didactique avec l'enseignant responsable de la classe. En effet, les binômes analysent et expérimentent « à la main » le jeu proposé, puis déterminent une SRG, implémentable dans un environnement informatique de façon que le joueur B puisse trouver l'entier « secret » choisi par le joueur A.

Après cette phase de recherche « à la main » et la description de la stratégie, les élèves proposent deux algorithmes, sous forme « spatiale » à l'aide d'un organigramme ou « textuelle » en les écrivant en langage naturel. Ces algorithmes permettent de modéliser respectivement le rôle de chacun des deux joueurs. La transcription en en langage pseudo-code de ces algorithmes permet une implémentation dans l'environnement numérique *AlgoBox*[3], afin de tester leurs validités et d'étudier la stratégie choisie manuellement.

Diverses structures algorithmiques sont ainsi proposées, mais aussi des remédiations par l'enseignant quand cela s'avère nécessaire pour répondre aux difficultés, tant techniques que théoriques, rencontrées par les élèves. Par exemple, l'enseignant doit prendre en compte que le choix d'un nombre entier « secret » entre deux bornes entières, présuppose la connaissance chez l'élève du nombre entier « pseudo-aléatoire », compris entre deux bornes entières, proposé par l'environnement informatique.

De plus, le calcul de moyennes peut faire apparaitre une autre difficulté pour les élèves quand celle-ci n'est pas un nombre entier. En effet, cela nécessite chez l'élève une utilisation de la « fonction partie entière » de l'environnement informatique. De même, à chaque essai, une des difficultés des élèves consiste à réduire l'intervalle de recherche, qui est déterminée en fonction des comparaisons entre l'essai et le nombre entier « secret ».

Les élèves travaillent dans plusieurs environnements algorithmiques : langage naturel, pseudo-code et langage informatique. Ils utilisent le logiciel *AlgoBox*. En effet, un texte écrit en *AlgoBox* peut être vu soit comme un algorithme si on s'intéresse à sa logique et à ses performances, soit comme un programme si on s'intéresse à son implémentation.

CONSTRUCTION D'UNE INGENIERIE

Comme mentionné plus haut, l'ingénierie présentée ici s'inscrit dans une ingénierie globale ayant pour objectif d'étudier un travail algorithmique sur un même sujet. C'est une contribution à l'apprentissage au cours des trois années du lycée de notions issues du champ de l'analyse. En effet, l'intérêt que nous portons sur les algorithmes de dichotomie « discret » et « continu » vient des liens qui existent entre ceux-ci et les notions d'analyse enseignées au lycée, en particulier dans les classes scientifiques.
Dans le cas « discret », la condition d'arrêt et l'alternative dans le corps de boucle sont plus simples à construire pour les élèves. La structure est proche de celle du cas « continu », ce qui permet de graduer la difficulté dans la construction. Le travail se situe dans une approche de type « analyse numérique » de l'algorithme de dichotomie « discret ».
Nous anticipons cependant qu'il ne va pas s'agir d'un simple transfert de structure. La condition d'arrêt porte sur une valeur numérique dans le cas « discret », tandis que dans le cas « continu », elle porte sur une amplitude.

Le scenario

Pour aider les élèves, nous devons anticiper certaines difficultés lors de l'élaboration du scénario. En effet, les élèves doivent :

- construire d'abord les étapes intermédiaires entre le jeu pratiqué « à la main » et le passage à l'écriture des algorithmes ;
- définir et modéliser une SRG, implémentable dans un environnement informatique ;
- organiser la transition de la pratique du jeu faite « à la main », à la rédaction de plusieurs algorithmes en langage naturel de la stratégie définie ;
- concevoir que la tâche laissée au joueur A consiste à définir un nombre entier pseudo-aléatoire entre deux bornes entières ;
- calculer des moyennes et utiliser la fonction partie entière afin de déterminer une valeur approchée de ces moyennes quand elles ne sont pas des nombres entiers ;
- passer à un langage de programmation.

Lors de l'expérimentation, il est nécessaire que les élèves sachent comment faire une interprétation significative de la stratégie et des résultats obtenus.

Le scénario proposé dans trois classes d'un lycée français, une Seconde, une Première et une Terminale Scientifiques, décrit une ingénierie où les élèves s'approprient un processus de SRG dans le champ des « mathématiques discrètes » et écrivent des structures algorithmiques afin d'implémenter cette stratégie dans une machine.

Enfin, nous souhaitons étudier deux espaces de travail distincts, ainsi que leurs interactions qui conditionnent les apprentissages mathématiques et algorithmiques, en particulier à travers des choix instrumentaux et des registres sémiotiques (au sens de Duval).

Ce scénario nécessite deux séances découpées en trois phases : **(1)** une phase « jeu » pratiquée « à la main » par les élèves regroupés en binômes sans tenir compte de singularités particulières, pour éviter ainsi des difficultés de gestion des élèves ; **(2)** une phase de « construction de l'algorithme du joueur A » (algo A) ; **(3)** une phase de « construction de l'algorithme du joueur B » (algo B).

Les phases

Une première phase « jeu » (5 à 10 min.) où les élèves pratiquent le jeu et conjecturent une SRG.

Phase « algo A » (le joueur A choisit le nombre entier « secret ») (30 à 40 min.)

Après la phase d'appropriation du jeu, les élèves écrivent un premier algorithme pour le joueur A au « papier-crayon », soit sous une forme « textuelle » (langage naturel), soit sous une forme « spatiale » (organigramme). L'écriture de cet algorithme peut entraîner des difficultés, particulièrement chez les débutants : expressions des alternatives et de l'itération. On s'attend à des alternatives successives plutôt imbriquées et à une expression de la boucle de type « Si condition sortir Sinon recommencer », c'est-à-dire du type « GOTO ».

Phase « algo B » (le joueur B procède aux essais pour déterminer le nombre entier « secret ») (Pas de contrainte de temps, l'enseignant laisse l'initiative aux élèves). Cette phase est découpée en trois sous-phases :

- **Sous-phase « 1B » :** Les élèves font la conjecture d'une SRG pour deviner le nombre (stratégie du joueur B) et imaginent un algorithme décrivant cette stratégie en vue de sa réalisation sous forme d'un traitement par une « machine », sans toutefois que l'expression de ce traitement soit soumise aux contraintes d'un langage formalisé donné. La conception de cet algorithme peut s'appuyer sur la structure construite lors de la phase « algo A », mais va entraîner d'autres difficultés. Ici, l'algorithme doit calculer les valeurs successives des bornes. On s'attend à ce que les élèves conçoivent la moyenne des bornes comme assurant une stratégie permettant la réduction de l'intervalle (dichotomie). Cependant, la moyenne n'est pas nécessairement entière, ce qui implique la nécessité d'une fonction rendant une valeur entière proche (partie entière). La prise de conscience de la nécessité de variables de boucle et leur mise en œuvre est une autre difficulté.

- **Sous-phase « 2B » :** les élèves écrivent l'algorithme du joueur B, décrite lors de la sous-phase « 1B » sous la forme d'un organigramme, dessiné au « papier-crayon », comme première formalisation. On s'attend à une présentation du type sortie à l'intérieur de la boucle, particulièrement chez les débutants.

- **Sous-phase « 3B » :** Les élèves procèdent à une formalisation de l'algorithme du joueur B sous forme « textuelle » et sous forme d'un organigramme et à son implémentation sur ordinateur. Nous utilisons un environnement de programmation « textuelle », qui correspond à la culture du lycée, n'autorisant que la structure « TantQue… Faire ». Pour l'organigramme, nous souhaitons donner plus de choix à l'élève, et nous choisissons d'utiliser un environnement implémentant les deux structures « TantQue… Faire » et « Répéter… Jusqu'à ».

Ceci peut représenter une contrainte pour les élèves. Elle les conduit à modifier la structure adoptée en « papier-crayon », tout en gardant le même traitement des variables. On s'attend aussi à ce que l'exécution mette en évidence des faiblesses en ce qui concerne les variables : initialisation des variables représentant les bornes de l'intervalle courant (VP1 et VP2) dans lequel se trouve le nombre entier « secret » et une variable VP correspondant à la partie entière de la moyenne de VP1 et VP2. Il est important que VP1 et VP2 soient initialisées avant la boucle. VP peut prendre sa valeur initiale dans le corps de boucle.

Analyse a priori

Une série d'ETM avec des composants spécifiques est organisée, avec la combinaison d'ETA et d'ETM$_{discret}$ nécessitant un réel changement dans la stratégie de résolution.

En effet, au cours de l'expérimentation, les élèves prennent conscience qu'ils doivent combiner plusieurs registres, en particulier lors du choix des formulations « textuelle » ou « spatiale » des algorithmes, ainsi que sur le choix des structures itératives et la gestion des variables.

- **Phase « algo A » :** Les élèves de chaque binôme peuvent présenter la situation sous la forme d'un tableau (tableau 2).

Nombres proposés par le joueur B	Réponses du joueur A
Réponse 1 (R_1)	« Le *nombre entier secret* est plus grand » ou « Le *nombre entier secret* est plus petit »
…	…
Réponse *n* (R_n)	« Bravo, tu as gagné »

Tableau 2

Ainsi, ils introduisent le principe d'un « test » que doit mettre en place le joueur A pour répondre au joueur B (tableau 3) :

Test	$R_1 < N$ ou $R_1 > N$ (N étant le *nombre entier secret*)	…	$R_n = N$

Tableau 3

Les élèves terminent cette phase par l'écriture au « papier-crayon » d'un algorithme du joueur A, en le présentant soit sous une forme « textuelle », soit sous un organigramme.

- **Sous-phase « 1B » :** Les élèves réfléchissent aux stratégies possibles pour déterminer le nombre entier « secret ». L'enseignant peut rappeler, si nécessaire, la consigne : *Le joueur B doit deviner ce nombre entier « secret » en faisant le minimum de propositions*. Ainsi, il peut inciter les élèves à réfléchir aux stratégies mises en place dans la classe par les joueurs B de chaque binôme pour déterminer le nombre entier « secret » N lors de la phase « algo A ». Dès le début de cette sous-phase, nous pouvons espérer qu'une majorité des binômes va se diriger vers une stratégie se basant sur le principe de la dichotomie. L'enseignant peut aussi inciter les élèves à actualiser à chaque étape les informations évoquées lors des essais précédents, mais sans aucune stratégie particulière pour stocker les nouvelles informations. Ainsi sont conservées, au fur et à mesure du jeu, les réponses données aux tests par le joueur A. Les élèves ont à décrire une stratégie « gagnante » en un minimum de coups où l'élève A est joué par la machine. Pour préparer la sous-phase suivante, la construction d'un algorithme du joueur B, les élèves doivent mettre en évidence la réduction de l'intervalle grâce à la moyenne des bornes (dichotomie), comme assurant une SRG sans toutefois l'exprimer avec les contraintes d'un langage formalisé donné. Les élèves doivent aussi considérer des nombres entiers même si la moyenne n'est pas entière. Ainsi, l'écriture de l'algorithme du joueur B va pouvoir s'appuyer sur la structure construite pour l'algorithme du joueur A, mais aussi sur une mise en œuvre des variables de boucle représentant les bornes de l'intervalle et la moyenne de ces bornes obligeant l'élève à utiliser la notion de partie entière.

- **Sous-phase « 2B » :** Les élèves formalisent un algorithme du joueur B, qu'ils ont décrit lors de la sous-phase précédente sans les contraintes d'un langage formalisé donné. Ils doivent formaliser cet algorithme sous la forme d'un organigramme, dessiné au « papier-crayon », permettant entre autres d'utiliser des structures de type « TantQue… Faire » ou « Répéter… Jusqu'à ».

- **Sous-phase « 3B » :** Après la formalisation de l'algorithme du joueur B sous forme d'un organigramme, les élèves procèdent à son implémentation sur ordinateur sous forme « textuelle ». Ils ont la possibilité d'utiliser les structures « Tant Que…Faire » ou « Répéter… Jusqu'à » suivant le logiciel algorithmique qu'ils utilisent. Ils peuvent rencontrer des problèmes d'ordre syntaxique dus au langage machine dépendant du logiciel choisi. Il est souhaitable que l'enseignant ait préparé les élèves en amont, afin que les difficultés de ces derniers ne soient pas dues à la syntaxe du langage de programmation du logiciel. Une fois l'algorithme implémenté, l'élève doit tester cet algorithme sur plusieurs essais, afin de voir s'il fonctionne, s'il y a une erreur dans l'algorithme ou s'il y a un souci de syntaxe.

Analyse a posteriori

Conformément à ce qui est prévu au cours de l'analyse a priori, le problème d'une valeur numérique entière lors d'un calcul de moyenne des bornes de l'intervalle, est une réelle difficulté chez certains élèves. Nous observons aussi que la nécessité de valeurs entières peut rester implicite. En effet, des élèves proposent un algorithme complet du joueur B, en faisant l'hypothèse implicite, au sens de « Théorème en acte[4] » que l'écriture $(a + b)/2$ donne automatiquement un nombre entier, et ainsi cette « étape » de calcul n'est pas prise en compte dans l'algorithme qu'ils proposent. D'autres élèves ont conscience que cette moyenne peut ne pas être entière et cherchent des stratégies de compensation. En effet, un élève propose d'obtenir une valeur entière approchée, en faisant référence aux Sciences Physiques. Il faut cependant l'intervention du professeur pour que ce traitement soit associé à la « fonction partie entière » et à son expression dans le langage algorithmique. Ceci rejoint des observations concernant la conception des fonctions par les élèves au début du lycée : un traitement (processus) n'est pas nécessairement compris comme établissant une dépendance fonctionnelle (objet) exprimable à l'aide du formalisme fonctionnel. Quelques élèves se dirigent initialement vers la construction d'une série d'alternatives, mais passent rapidement à une itération, en tirant profil du travail réalisé lors de la phase « algo A ». Comme le prévoyait l'analyse a priori, la mise en œuvre de variables de boucles peut faire l'objet de difficultés chez certains élèves. Cependant, le travail fait pendant la phase « algo A » atténue ces difficultés chez une majorité d'élèves. L'utilisation de structures itératives nécessite l'identification et la construction d'invariant de boucle (mise à jour), d'une condition de continuation (test) et d'une initialisation de variables (Rogalski & Samurçay, 1990). L'utilisation de « variables » et leur « affectation » à l'initialisation et dans le corps de boucle sont nouveaux pour des élèves débutants. Dans un algorithme « papier-crayon », les nombres en jeu peuvent être identifiés par leur fonction (par exemple « le nombre choisi ») plutôt que par leur valeur. Cependant, ceci ne se traduit pas nécessairement directement par l'emploi de variables itératives des valeurs différentes à divers moments du traitement.

CONCLUSION

Comme nous l'avions prévu dans l'analyse a priori, le travail sur les structures a été laborieux pour certains élèves. Cependant, le choix fixé au départ de faire travailler les élèves dans un premier temps sur l'algorithme du joueur A (choix du nombre entier secret et réponses aux propositions du joueur B), au lieu d'aborder directement la réalisation de l'algorithme du joueur B, a été productif. Cela a permis aux élèves d'étudier d'abord la structure avant de se confronter aux difficultés des variables itératives. Ainsi, les élèves ont pu mettre en évidence une structure pour le joueur A et la réutiliser pour le joueur B. Au cours des deux premières phases, les élèves ont construit une SRG fournissant une solution à ce problème. Passant à l'algorithme du joueur B, ils ont explicité une règle du choix d'un nombre à proposer (implicite lors du jeu réel) sous forme d'une alternative à l'intérieur du corps de l'itération.

Pour conclure, il paraît aussi important de considérer que des questions sur la complexité et l'optimalité sont difficiles à ce niveau de la scolarité puisqu'il y a plusieurs types de complexité (*au pire*, *en moyenne*, *au mieux*) et qu'une preuve d'optimalité relativement à un de ces types est hors de portée de la part des élèves considérés. Par exemple, comparer de façon théorique la complexité de l'« algorithme de dichotomie » à celle de certains algorithmes élaborés par certains élèves (valeur proposée tirée au hasard entre les bornes, plutôt que partie entière de la moyenne des bornes) est loin d'être simple. Par méthode « rapide et gagnante », les élèves doivent donc comprendre qu'on recherche une procédure « systématique » permettant l'écriture d'un algorithme, et réduisant à chaque étape l'intervalle de recherche, plutôt qu'un algorithme « optimal ». En ce sens, d'autres solutions que la dichotomie (comme celle du tirage au hasard, ou une recherche par valeurs croissantes) auraient certes pu être admissibles, mais cela nécessiterait d'évaluer l'intérêt d'admettre ces autres solutions et de les comparer de façon empirique, ce qui n'a pas été l'objet de cet article.

NOTES

1. BO spécial n° 8 du 13 octobre 2011.

2. Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009 : http://media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf, 7 mai 2017

3. *AlgoBox* est un logiciel libre permettant l'élaboration et l'exécution d'algorithmes.

4. Un *théorème en acte* est une règle d'action utilisée par les élèves et compatible avec la conception qu'ils se font d'une connaissance. Il est vérifié dans un certain domaine seulement.

REFERENCES

Artigue M. (1992). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématique*s, vol. 9-3, 281-308.

Duval R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime, Numero Especial*, 45-81.

Engel A. (1979). *Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique*. Cedic, Paris.

Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 11, 175-193.

Kuzniak A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 16, 9-24 : IREM de Strasbourg.

Kuzniak A. & Richard P. R. (2014) Espace de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives. *Relime, Numero extraordinario 1*.

Laval, D. (2015). L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar. *Actes du Quatrième symposium international – Espace de Travail Mathématique* de juillet 2014, 103-115. Madrid, Espagne.

Samurçay R. (1985). Signification et fonctionnement du concept de variable informatique chez des élèves débutants. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 16, 143-161.

Tanguay, D. (2015). Circulation et coordination dans les espaces de travail, pour une activité articulant géométrie et arithmétique. *Actes du Quatrième symposium international – Espace de Travail Mathématique* de juillet 2014, 69-85. Madrid, Espagne.

ÉTUDE PROSPECTIVE D'UN SYSTÈME TUTORIEL À L'AIDE DU MODÈLE DES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Nicolas Leduc
École Polytechnique de Montréal ; nicolas.leduc@polymtl.ca
Michèle Tessier-Baillargeon
Université de Montréal ; michele.tessier-baillargeon@umontreal.ca
Jean-Philippe Corbeil
École Polytechnique de Montréal ; jeanphilippecorbeil@gmail.com
Philippe R. Richard
Université de Montréal ; philippe.r.richard@umontreal.ca
Michel Gagnon
École Polytechnique de Montréal ; michel.gagnon@polymtl.ca

L'élaboration de démonstrations en géométrie peut être un véritable défi pour un élève au secondaire. Afin de l'aider dans cet apprentissage, plusieurs systèmes tutoriels ont été proposés, mais aucun ne permet d'explorer librement le problème tout en offrant un soutien continu. Nous avons donc conçu QEDX, qui est issu d'une collaboration multidisciplinaire, afin de répondre à ce besoin. Dans cet article, nous proposons d'analyser notre système à l'aide du modèle des ETM. D'une part, nous montrons que les interactions possibles à l'interface de QEDX en font un ETM. Nous proposons ensuite une analyse des structures logicielles en utilisant ce même modèle. En fait, nous l'appliquons à l'analyse des interactions qui existent entre le travail de l'élève et le fonctionnement de l'agent tuteur en considérant ce dernier comme étant en situation de résolution de problème.

Mots-Clés: *Didactique des mathématiques, Génie informatique, Système tutoriel intelligent (QED-Tutrix), Démonstration en géométrie, Travail didactique et travail mathématique, Découverte, raisonnement et communication*

INTRODUCTION

L'apprentissage de la démonstration peut être difficile pour des élèves habitués à produire des textes argumentatifs (Tall, 1991). En effet, ils doivent accepter que ce soit la structure formelle de la démonstration, en plus de la valeur des arguments utilisés, qui permet de juger de sa validité. Pour les aider à réaliser cette transition, plusieurs logiciels ont été développés, au cours des années, par différents groupes de recherche, par exemple, Geometry Tutor (Anderson, Boyle, & Yost, 1985), Advanced Geometry Tutor (Matsuda & VanLehn, 2005 ; Matsuda, 2004), Mentoniezh (Py, 1994, 1996, 2001), etc. Cependant, malgré leur succès et les impacts qu'ils ont sur l'apprentissage, ces logiciels offrent un soutien à l'élève qui est différent de l'aide apportée par l'enseignant (Matsuda & VanLehn, 2003). En réaction à cette observation, nous avons conçu QED-Tutrix (QEDX), un système tutoriel inspiré des interactions réelles entre les enseignants et les élèves.

QEDX est un système tutoriel intelligent qui permet de guider l'élève, à la manière d'un enseignant, lors de l'apprentissage des démonstrations en géométrie euclidienne. Il est issu d'une collaboration étroite entre des chercheurs en didactique des mathématiques et en informatique. Il se veut un logiciel interactif qui guide l'élève sans lui imposer de contrainte dans l'ordre de ses actions. Ce dernier peut donc naviguer librement dans QEDX et inscrire les pas de sa démonstration selon le raisonnement qui lui est propre et s'inspirer, au besoin, des conseils du tuteur pour ultimement obtenir une démonstration complète reconnue par le système. Si le système juge qu'il n'est pas en mesure d'aider adéquatement l'élève, il peut le référer à son enseignant. Notre but étant de proposer un système tutoriel qui peut interagir avec l'élève à la manière d'un enseignant, tout en rendant plus ergonomique l'apprentissage de la démonstration, nous avons opté pour une approche de conception dans l'usage (Rabardel, 1995), soit une alternance entre des analyses didactiques théoriques et des expérimentations.

L'objectif principal du présent article est de proposer une étude prospective de l'architecture interne de QEDX afin de démontrer que le tuteur implanté, lorsqu'il est en interaction avec l'élève, résout un problème à la manière d'un élève dans un Espace de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2011). Pour y parvenir, nous proposons, dans un premier temps, une brève revue de la littérature qui sera suivie par une description des théories didactiques appliquées lors du développement de notre système. Nous reprenons ensuite les conclusions de l'article de Tessier-Baillargeon, Richard, Leduc, et Gagnon (2014) pour expliquer, par l'entremise des différentes démarches mises en œuvre par l'élève, que QEDX, lorsque mis à profit pour résoudre un problème, devient un ETM. Dans la section suivante, nous décrivons les quatre couches logicielles de la version actuelle de QEDX. Nous montrons ensuite le parallèle possible entre le travail de chacune d'elles et le modèle des ETM, ce qui constitue la contribution originale de cet article. De plus, la richesse de l'architecture proposée permet d'entrevoir de nouvelles fonctionnalités, dont les principales seront décrites et analysées à la lumière des ETM. Enfin, l'article se termine par une discussion générale combinée à la conclusion.

BASES THEORIQUES

Dans cette section, nous présentons premièrement les principaux systèmes tutoriels pour la démonstration en géométrie. Nous décrivons la stratégie habituelle qui est utilisée pour les produire et nous expliquons pourquoi, malgré leur succès, ils ne sont pas en mesure de proposer une aide semblable aux interventions des enseignants (Matsuda & VanLehn, 2003). Il en ressort que pour produire un système respectueux du travail effectué par l'élève, il est nécessaire d'ancrer son développement a priori et son analyse a posteriori sur des théories didactiques solides. Ainsi, il ne s'agit pas de construire un objet technique pour ensuite le mettre à l'épreuve en contexte didactique, mais plutôt de comprendre un besoin didactique pour concevoir un outil selon une méthodologie anthropocentrique (Rabardel, 1995), c'est-à-dire qu'elle place l'utilisateur au centre du processus. Nous exposons donc les principales théories qui ont servi de base au développement de QEDX, soit la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998), la genèse instrumentale de Rabardel (1995) ainsi que les ETM (Kuzniak, 2011).

Nous avons recensé deux principales approches pour la conception des systèmes tutoriels intelligents qui visent l'apprentissage des démonstrations en géométrie. Dans la première, l'objectif est de produire un système tutoriel qui maximise les résultats scolaires de l'élève en l'incitant à travailler à la manière des experts du domaine. Des systèmes comme Geometry Tutor (Anderson et coll., 1985), Geometry Explanation Tutor (Aleven, Popescu, & Koedinger, 2001a, 2001b), Advanced Geometry Tutor (Matsuda & VanLehn, 2005 ; Matsuda, 2004), ANGLE (Koedinger & Anderson, 1993 ; Koedinger, 1991), etc. ont été conçus à la suite de l'analyse des stratégies de résolution des experts et certains sont aussi basés sur différentes théories cognitives, par exemple ACT-R (Anderson, 1996 ; Anderson et coll., 2004). Par contre, aucune théorie didactique n'a été mise en application explicitement au cours de leur développement. Des évaluations à l'aide de prétests et de post-tests ont démontré que ces systèmes ont un impact positif sur les résultats scolaires. Cependant, il est difficile de savoir si ce sont les stratégies imposées ou d'autres fonctionnalités du système qui influencent réellement les résultats observés. En fait, ces systèmes ne respectent pas la démarche de résolution naturelle, car ils ne permettent pas à l'élève d'explorer librement le problème avant de passer à la rédaction de sa preuve, ce qui constitue la principale limite de ces systèmes (Tessier-Baillargeon, Leduc, Richard, & Gagnon, à paraitre).

La seconde approche consiste à s'inspirer des stratégies de résolution des élèves réels afin de leur proposer un système qui les soutient tout au long du processus de construction d'une preuve. C'est dans cette optique que des systèmes comme Baghera (Webber, Bergia, Pesty, & Balacheff, 2001 ;

Balacheff et coll., 2003), Cabri-Euclide (Luengo, 2005, 1997), Mentoniezh (Py, 1994, 1996, 2001), etc. ont été développés. Ils permettent généralement à l'élève d'explorer librement le problème et d'esquisser sa démonstration avant de produire sa rédaction finale. Dans cette approche, une évaluation qualitative, concernant les interactions entre l'élève et le système, est habituellement utilisée afin de valider ce dernier. L'objectif n'est donc plus de maximiser les résultats scolaires, mais bien de s'assurer que le système permet à l'élève de développer des compétences en démonstration en se référant aux théories didactiques appropriées. La principale lacune de ces systèmes concerne l'aide offerte qui est relativement limitée, car ils proposent une validation des actions plutôt qu'un accompagnement de l'élève. De plus, les chercheurs ont tendance à voir ces systèmes comme des artefacts sans prendre en compte les schèmes d'utilisation résultant de leurs interactions avec l'élève. À l'inverse, notre système, soit QEDX, est conçu à partir de l'analyse de schèmes d'utilisation observés et offre une aide à la résolution relativement complète en analysant en temps réel le travail de l'élève. Conséquemment, dans la suite de cet article, nous démontrons que le fonctionnement et la structure de notre système en font un véritable ETM.

Avant d'expliquer les raisons qui nous laissent croire que QEDX est un ETM, nous allons présenter les principales théories didactiques appliquées à son développement. Tout d'abord, notre système s'enracine dans la TSD de Brousseau (1998) (figure 1). Celle-ci représente une situation didactique comme une interaction élève-milieu qui est régulée par l'enseignant (flèches 1 et 2 de la figure 1). Elle permet donc de bien modéliser les interactions didactiques dans une classe ordinaire. Afin d'y intégrer un système tutoriel intelligent, comme QEDX, la notion de milieu didactique, soit une extension du milieu de Brousseau, a été proposée (Richard et al, 2011). En fait, QEDX intègre à la fois un milieu virtuel de résolution de problèmes ainsi qu'un agent tuteur qui joue le rôle d'un enseignant virtuel. L'ajout des relations 6 et 7 (figure 1), qui sont en fait une transposition des relations 1 et 2, sans pour autant éradiquer ces dernières, montre que l'agent tuteur influence le système élève-milieu virtuel en lui fournissant une aide modélisée selon un contrat didactique réel observé et complémentaire aux interventions de l'enseignant. Ainsi, lorsqu'en interaction avec l'élève, QEDX occupe une place importante dans la relation didactique. Conséquemment, les interactions entre l'élève et l'artefact doivent être prises en compte lors de son développement et de son analyse.

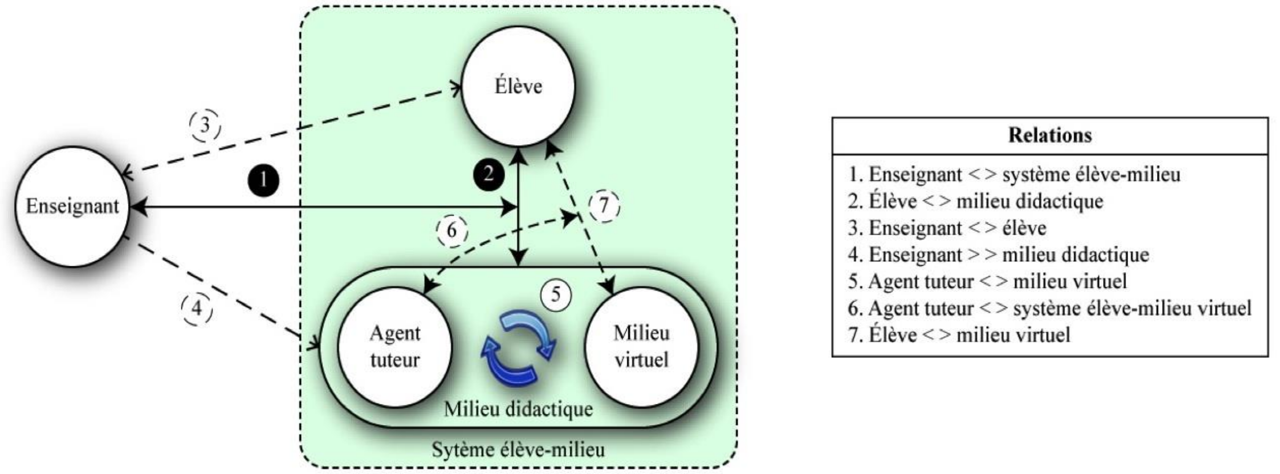


Figure 1: Carte des interactions didactiques (traduit de Richard et coll. (2011))

La construction d'un système tutoriel comme QEDX, qui est en mesure de prendre en compte la relation 1 de la figure 1 pour produire une relation 6 cohérente, est très ambitieuse et une approche centrée sur le fonctionnement de l'artefact, sans considération de l'utilisateur produit rarement les résultats escomptés. Nous avons donc opté pour une approche anthropocentrique, au sens de Rabardel (1995). Par conséquent, le développement de QEDX s'est fait selon le paradigme de conception dans l’usage (Rabardel, 1995), illustré à la figure 2, soit en exécutant une série d’allers-retours entre la théorie et l’expérimentation. Notre but est de concevoir et d’adapter notre système en fonction de l’utilisation constatée. Nous créons donc un artefact, mais nous analysons l’instrument ainsi que les schèmes d’utilisation qui le définissent et qui découlent de son utilisation par les élèves lors de chaque expérimentation. Par conséquent, QEDX n’est pas un produit fini, car il est en constante évolution. La version analysée dans le cadre de cet article est issue du second cycle de développement qui a mené à la validation des messages discursifs. Elle contient en fait la structure discursivo-graphique ainsi que celle des messages.

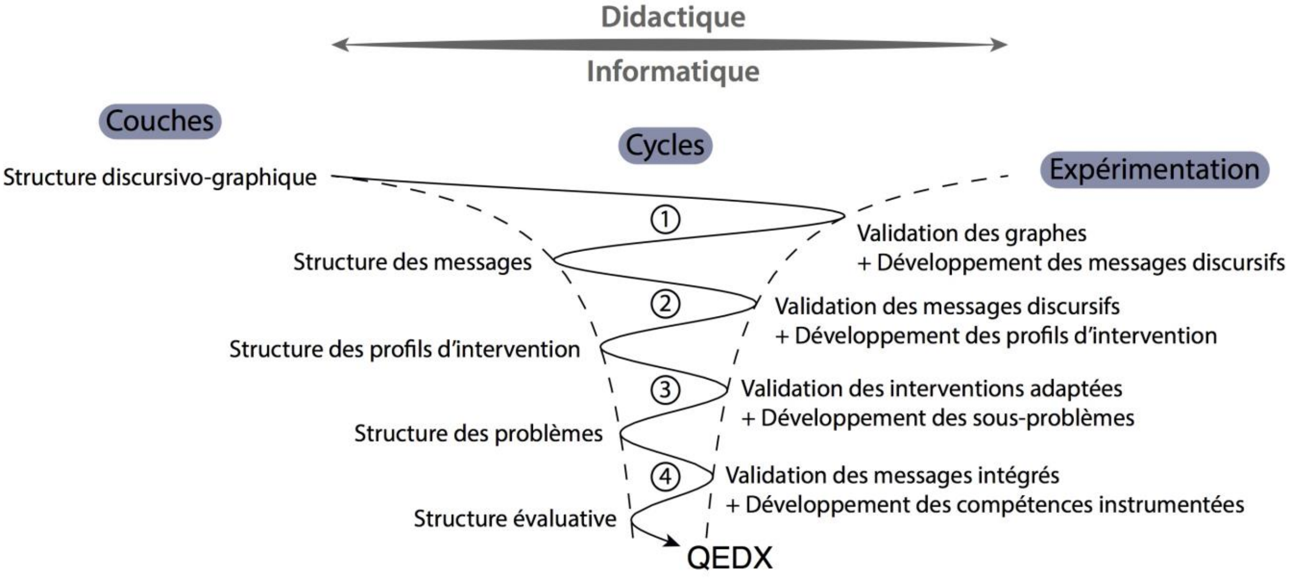


Figure 2: Cycles de développement de QEDX (adapté de Richard et coll. (2011))

Chaque cycle de développement de QEDX est divisé en quatre phases qui s’apparentent à celles mises en œuvre dans le cadre de l’ingénierie didactique. Nous retrouvons donc "la phase 1 des analyses préalables, la phase 2 de la conception et de l’analyse a priori des situations didactiques de l’ingénierie, la phase 3 de l’expérimentation et enfin la phase 4 de l’analyse a posteriori et de l’évaluation" (Artigue, 1996) qui sont adaptées au développement d’un système tutoriel intelligent. La construction itérative de QEDX peut alors être perçue comme une succession de micro-recherches. Cependant, il est important et même essentiel d’effectuer un retour sur les phases antérieures afin d’ajuster notre système à la lumière des nouvelles données recueillies. Cette stratégie s’inspire de la Théorie Ancrée de Glaser et Strauss (1967). Celle-ci admet que le chercheur est influencé par les événements vécus, les données recueillies, son cheminement théorique, etc., et que ces expériences viendront transformer le processus même de la recherche. Il ne s’agit donc pas de tenter d’éliminer ces influences, mais plutôt de s’en imprégner consciemment afin que les analyses représentent le plus fidèlement possible la réalité observée. Cette approche est essentielle afin d’adapter de façon continue les fonctionnalités de QEDX par rapport aux schèmes d’utilisation observés.

Enfin, nous avons tenté, en concevant QEDX, de créer un environnement propice à l’exercice réussi de la géométrie et, pour ce faire, nous nous sommes inspirés du cadre des Espaces de Travail Mathématique (ETM). Par définition, l’ETM est un univers organisé dans lequel s’effectue le travail du mathématicien (ici, du géomètre) et, selon Kuzniak (2011), il intervient naturellement lors de l’analyse de l’interaction sujet-milieu au cours de la résolution de problèmes mathématique. Le concept d’ETM permet de préciser la relation 2 (figure 1) de la TSD. À cette fin, Kuzniak (2011) propose d’utiliser trois genèses alors que Kuzniak et Richard (2014) proposent trois démarches (figure 3). Dans le cadre de cet article, l’analyse de l’interaction entre l’élève utilisateur et QEDX, qui s’appuie sur l’observation des démarches de découverte, de raisonnement et de communication, confirme et précise le statut d'ETM de notre système. Il est à noter que lorsque nous mentionnons que QEDX constitue un ETM, nous sous-entendons, l'artefact QEDX lorsqu'en interaction avec l'élève puisque notre analyse porte sur l'espace de travail qui découle de cette interaction et non sur l'artefact isolé.

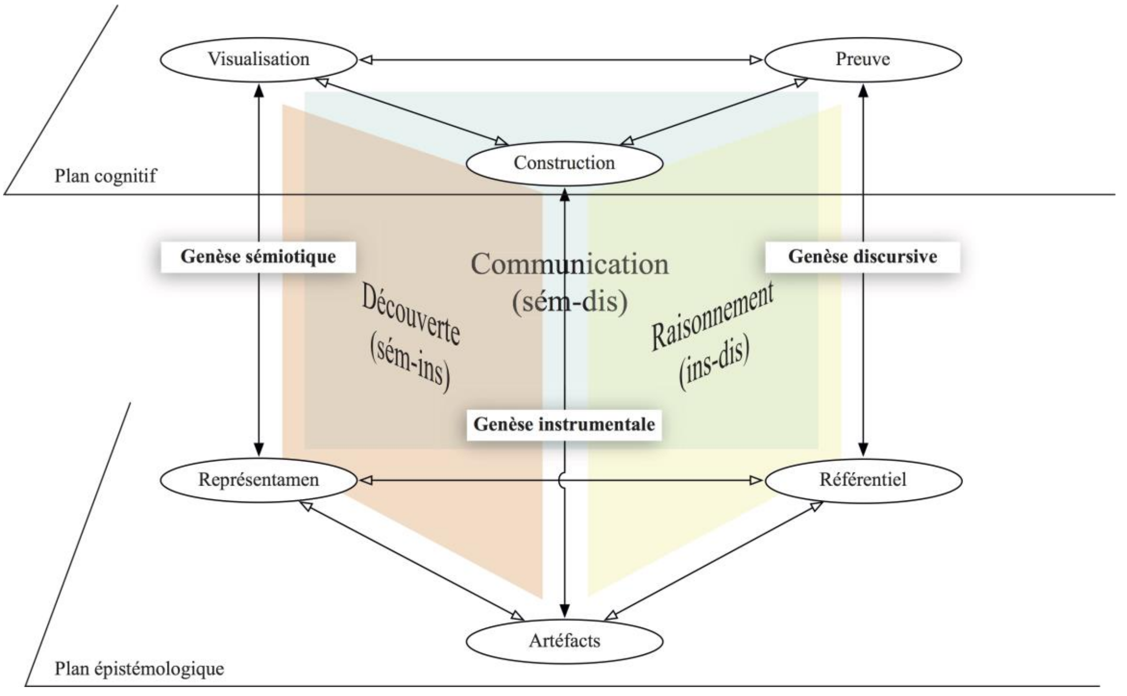


Figure 3: Le travail au sein d'un ETM (Kuzniak et Richard, 2014)

Premièrement, la démarche de découverte s'articule autour de l'exploration des propriétés des objets géométriques et l'intégration des figures dynamiques tend à enrichir celle-ci (Coutat & Richard, 2011). Ensuite, la démarche de raisonnement intervient lorsque l'élève tente de consolider les propriétés observées en un système formalisé. La démarche de communication permet enfin à l'élève de passer de la figure géométrique au raisonnement déductif, c'est-à-dire qu'elle s'accomplit principalement lors de la rédaction de la démonstration. Ces trois démarches permettent donc d'analyser le travail mathématique d'un élève.

LES ETM POUR L'ANALYSE DU TRAVAIL DE L'ELEVE A L'INTERFACE DE QEDX

L'analyse d'un système tutoriel peut se faire en utilisant une approche de type boîte blanche, en décortiquant l'architecture logicielle, ou de type boîte noire, en ne s'intéressant qu'aux interactions disponibles à l'interface. Cette dernière approche peut être exécutée par quiconque est en mesure d'utiliser le logiciel alors que l'approche de type boîte blanche nécessite des connaissances poussées en informatique. L'équipe en didactique des mathématiques a réalisé une analyse a posteriori de type boîte noire du travail de l'élève à l'interface de QEDX. Dans cette section, nous présentons les principaux résultats expérimentaux didactiques tirés de l'article de Tessier-Baillargeon et al (2014) en y intégrant une description des éléments de l'interface nécessaire à la compréhension du travail de l'élève. Ces résultats s'appuient sur l'analyse a posteriori des démarches de découverte, de raisonnement et de communication exprimées au sein du travail mathématiques d'élèves de 15-16 ans travaillant avec la seconde version de QEDX. Nos conclusions permettent de confirmer le statut d'ETM de QEDX[1].

QEDX se compose d'une fenêtre principale (figure 4) qui est visible en tout temps et de trois onglets qui permettent d'explorer librement le problème et de produire une preuve. Dans le haut de la fenêtre, l'énoncé du problème ainsi que la figure statique associée y sont affichés en permanence et ne peuvent pas être modifiés. Il y a ensuite la zone de gauche en dessous de l'énoncé qui permet d'afficher le contenu de l'onglet choisi par l'élève. Les différents onglets seront décrits en détail plus bas. À droite des onglets, nous retrouvons la zone de clavardage, qui est accessible en tout temps, et qui contient la discussion entre Prof Turing (vert), qui est l'agent tuteur développé dans le cadre de ce projet et l'élève (bleu). Prof Turing réagit à chaque énoncé soumis par l'élève et lui indique s'il fait partie d'une solution reconnue. Il est aussi en mesure de fournir des indices pour relancer le processus de résolution d'un élève bloqué. Enfin, au bas de la fenêtre, la ligne de saisie, à l'aide de laquelle l'élève peut soumettre des énoncés qui constituent sa contribution à la discussion, est affichée. Dans le cas où un énoncé devrait être complété, une rétroaction sémaphorique, inspirée des sémaphores utilisés dans le domaine ferroviaire (vert = valide, rouge = invalide), est offerte et indique la validité symbolique des éléments géométriques. Les différents types de rétroactions permettent à l'élève de cheminer dans la construction d'une démonstration valide.

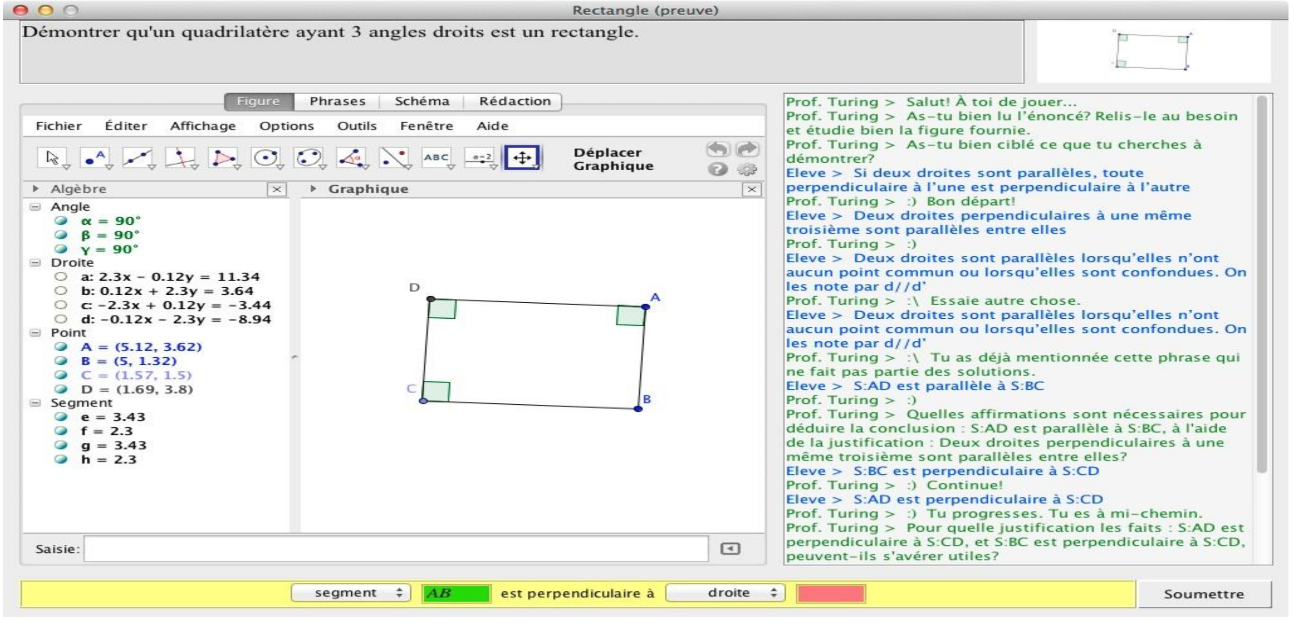


Figure 4: Interface de QEDX

L'onglet initial, affiché lors du chargement d'un problème, est l'onglet figure. Il contient la fenêtre principale de GeoGebra (Hohenwarter & Fuchs, 2004 ; International GeoGebra Institute, 2015) qui a été importée dans QEDX dans le but de permettre à l'utilisateur d'explorer la figure dynamique associée au problème. Cependant, faute de protocoles permettant une communication adéquate des actions à l'interface de GeoGebra, le travail réalisé sur la figure n'est pas reconnu par notre agent tuteur dans la version actuelle du système. Malgré l'absence de tutorat pour les actions sur la figure dynamique, les élèves ont tout de même utilisé cette dernière pour découvrir et tester différentes conjectures et ainsi planifier une stratégie de résolution. Ils ont, par exemple, utilisé l'outil de déplacement afin de produire certaines configurations particulières, ce qui a permis de donner une direction à leur démonstration. Cet onglet est donc une première étape dans la composition de la démonstration et correspond généralement à la démarche de découverte de l'élève dans la nomenclature des ETM. Nous pouvons supposer que si GeoGebra se dotait d'une interface logicielle capable de partager adéquatement les actions de l'élève avec d'autres systèmes, les actions sur la figure, les interactions avec les oracles ou avec de futurs moteurs de déduction automatique pourraient contribuer à d'autres démarches de résolution de problème et ainsi enrichir le travail mathématique de l'élève et parallèlement l'aide offerte à l'interface de QEDX.

À la suite de l'analyse de la figure dynamique et de l'énoncé du problème, l'élève veut partager ses observations et sa stratégie avec le système QEDX. Pour ce faire, l'onglet phrases est mis à sa disposition. Celui-ci contient un répertoire d'énoncés, classés par thèmes, qui sont disponibles pour produire une démonstration. L'élève doit donc choisir judicieusement les thèmes afin de retrouver l'énoncé recherché pour ensuite le compléter, si nécessaire, et finalement le soumettre au système. Il a été observé que certains élèves utilisent le répertoire afin de trouver un énoncé qui leur était jusque là inconnu, mais qui concorde avec leur intuition. L'onglet phrase fait partie intégrante de la démarche de raisonnement, car il permet, par de nombreux allers-retours entre celui-ci et l'onglet figure, d'axiomatiser l'intuition née du processus de découverte pour permettre l'organisation d'un raisonnement qui devra ensuite être communiqué. De plus, par ses rétroactions concernant les énoncés soumis par l'élève, le tuteur de QEDX permet une démarche de raisonnement. En effet, il indique si l'énoncé soumis fait partie d'une solution reconnue, ce qui permet à l'élève de valider sa stratégie.

Le dernier onglet, soit l'onglet rédaction, fut conçu pour permettre à l'élève de visualiser la progression de son travail en lui présentant sa démonstration sous forme de texte. Les phrases sont affichées selon une écriture en chaînage avant et contiennent un code chromatique pour indiquer le statut des énoncés manquants afin de compléter la démonstration. Cependant, l'élève ne peut pas interagir directement avec cet onglet et doit utiliser l'onglet phrases pour soumettre les énoncés manquants. De façon inattendue, certains élèves ont utilisé la rédaction comme moteur pour aiguiller leur recherche des éléments manquant selon leur statut ou encore pour cibler les éléments de la figure qui mériteraient un second regard. Cet onglet n'est donc pas seulement un témoin de la progression de la démonstration ou l'étape finale de la résolution du problème, mais bien un moyen pour les élèves de relancer leur démarche de raisonnement et pour apprivoiser la structure des preuves. D'ailleurs, l'onglet rédaction a été pensé en réponse au constat que les élèves travaillant avec une version antérieure de QEDX, n'étant pas contraint de respecter une structure en chaînage, se soient trouvés déstabilisés et ont manifesté l'intérêt d'inclure dans QEDX une fenêtre ou l'ensemble de leur raisonnement serait affiché. Malgré la grande liberté qu'offre notre système, il a été observé que la démarche de communication se déroule de façon relativement traditionnelle puisque les élèves cherchent naturellement à composer une démonstration ordonnée pour modéliser leur raisonnement.

Un ETM doit permettre à l'élève de faire son travail de mathématicien et de résoudre les problèmes qui lui sont proposés. Nous avons démontré que QEDX, par son interface qui comprend l'agent tuteur, permet à l'élève d'effectuer son travail de mathématicien grâce à des démarches de découverte, de raisonnement et de communication. Nous pouvons donc conclure que lorsque l'élève travaille à l'interface de QEDX, il en résulte un ETM. Ce résultat est important, mais ne nous informe aucunement sur les structures internes de notre système. Dans la suite de l'article, nous montrons comment ces dernières peuvent être analysées à l'aide du modèle des ETM, ce qui constitue notre apport original.

STRUCTURES INTERNES DE QEDX

À la suite de l'analyse du travail d'élèves à l'interface de QEDX, lui conférant un statut d'ETM, il est intéressant de noter que le potentiel de notre système dépasse grandement les fonctionnalités offertes par l'interface de la version actuelle. En effet, lors de la conception d'un logiciel, le concepteur se doit de choisir les composantes selon les fonctionnalités attendues, mais il a l'occasion de mettre en œuvre une architecture beaucoup plus riche afin d'anticiper les développements futurs. Dans cette section, nous décrivons l'architecture logicielle de QEDX en quatre couches, qui, par leurs interactions, permettent de proposer de l'aide pour la résolution des problèmes posés. De plus, le potentiel de chaque couche est brièvement expliqué tandis qu'une analyse du travail de celles-ci, se fondant sur le modèle des ETM, est présentée à la section suivante.

La couche de base de QEDX, soit le graphe HPDIC, sert à modéliser l'ensemble des démonstrations acceptables pour un problème donné. Nous l'avons nommée "graphe HPDIC", car il s'agit d'un graphe qui contient des Hypothèses, Propriétés, Définitions, résultats Intermédiaires et Conclusion. Celui-ci est unique pour chaque problème et est construit à partir des inférences acceptables, tirée d'une démonstration traditionnelle rédigée par des didacticiens ou par des enseignants, en fonction du problème à résoudre et du contexte scolaire. Il s'apparente aux réseaux déductifs de Tanguay (2006). Afin que QEDX puisse le construire, il doit premièrement créer une structure en arbre pour chaque inférence qui est composée d'une justification constituant le nœud central auquel s'arrime les antécédents, en tant que parents, ainsi que le conséquent, en tant qu'unique enfant. Chacun des énoncés utilisés pour composer l'inférence doit provenir du répertoire accessible via l'onglet phrases. À partir de l'ensemble des arbres produits, il suffit de fusionner les nœuds comportant des résultats intermédiaires (antécédents et conséquents) identiques afin de produire le graphe. Celui-ci relie donc les hypothèses à chaque conclusion admissible par une alternance de justifications et de résultats intermédiaires. À partir du graphe HPDIC, nous sommes en mesure d'énumérer toutes les solutions possibles à l'aide d'un algorithme que nous avons conçu et qui fonctionne en chaînage arrière. Le graphe HPDIC est, en fait, une structure statique qui est chargée une seule fois lors du choix du problème.

Le graphe HPDIC constitue véritablement la base de notre système, car les informations qu'il contient sont utilisées par les couches supérieures décrites ci-après. En effet, le MIA active les nœuds du graphe HPDIC au fil du cheminement de l'élève alors que l'EDOI s'appuie sur le travail du MIA pour trouver la solution la plus avancée (celle qui contient le plus grand ratio de nœuds activés) et pour choisir les nœuds du graphe pour lesquels Prof Turing fournira de l'aide. De plus, le texte de la fenêtre de rédaction est construit à partir du graphe HPDIC. Sa structure a aussi été pensée dans le but d'y intégrer les graphes de construction, soit une représentation, sous forme d'inférence, des manipulations admissibles dans GeoGebra (Hohenwarter & Fuchs, 2004 ; International GeoGebra Institute, 2015). Conséquemment, lorsque GeoGebra sera en mesure de communiquer les manipulations graphiques faites sur la figure dynamique, QEDX pourra en tirer parti afin de reconnaître les actions graphiques de l'élève et ainsi diversifier son aide tutorielle. Au terme du développement de QEDX, le graphe HPDIC sera donc la structure qui unifiera les différentes représentations de la preuve et qui permettra d'offrir une aide contextualisée.

La couche suivante, soit le Modèle Itératif de l'Apprenant (MIA), sert à modéliser le cheminement de l'élève lors de l'élaboration de sa démonstration. En créant QEDX, notre but était de proposer, lorsque l'élève se trouve bloqué dans son processus de résolution, différentes pistes de solutions, comme le fait un enseignant. Cette stratégie d'aide est cependant à l'opposé de celle préconisée par une majorité de systèmes tutoriels traditionnels (Matsuda & VanLehn, 2003) qui se limitent à identifier un énoncé à l'intérieur de la solution optimale afin d'inciter l'élève à compléter cette dernière en chaînage avant ou arrière. Une simple énumération des nœuds activés par l'élève, sans égard à l'ordre d'activation, comme on le fait dans ces autres systèmes, s'est avérée insuffisante pour offrir le type d'aide proposé par QEDX. Le MIA permet donc de rendre compte de l'avancement de l'élève, en conservant la chronologie de ses actions, pour être en mesure de proposer une aide mieux adaptée et qui aspire à respecter l'état cognitif de celui-ci. Il permet d'enregistrer des précisions relatives aux actions de l'élève en superposant ces informations aux nœuds concernés du graphe HPDIC. Pour chaque phrase inscrite par l'élève et qui se trouve dans le graphe HPDIC (action valide), nous indiquons, sur les nœuds associés, une valeur qui correspond au moment de l'activation. Ces informations sont constamment mises à jour lors de l'élaboration, par l'élève, d'une démonstration et sont utilisées dans les couches EDOI et GMD pour générer des messages adaptés ainsi que pour lui proposer des pistes de solution relativement à ses actions valides récentes.

La stratégie d'aide de QEDX consiste à générer des messages instantanés ainsi qu'une série d'indices. Ces derniers ont pour objectif de relancer le processus de résolution lors d'un blocage sans pour autant donner directement des réponses. Afin que la couche GMD soit en mesure de produire les messages appropriés, nous devons connaître la démonstration la plus avancée parmi toutes celles qui sont possibles et ordonnancer les inférences selon un ordre qui respecte l'état cognitif de l'élève. Ces deux tâches sont réalisées par la couche d'Évaluation des Démonstrations et d'Ordonnancement des Inférences (EDOI). La couche EDOI sert donc, premièrement, à estimer l'avancement respectif des différentes démonstrations. Cependant, il est important de noter que dans la version actuelle seule la démonstration la plus avancée nous est utile pour évaluer la progression de l'élève dans le but de générer le message instantané et de proposer une démonstration dans la fenêtre de rédaction. Dans QEDX, nous définissons la démonstration la plus avancée comme étant celle dont le ratio du nombre de phrases énoncées par l'élève par rapport au nombre de phrases nécessaires pour la rédiger en entier est maximal. Étant donné que le calcul doit être réalisé pour chaque solution, à la suite de chaque action valide de l'élève, le temps de calcul peut être long pour des problèmes admettant des millions de solutions. Un algorithme permettant d'estimer cette progression, qui propage les ratios dans le graphe HPDIC a donc été proposé.

Dans un deuxième temps, la couche EDOI applique un algorithme d'ordonnancement sur l'ensemble des inférences afin de prioriser celles qui ont été traitées récemment par l'élève. De plus, nous considérons que la solution la plus avancée constitue son plan courant de résolution. Avant qu'un plan ne soit clairement défini, c'est-à-dire que le pourcentage d'achèvement de la solution la plus avancée ne dépasse pas 40%, on ordonne l'ensemble des inférences en ordre inverse du moment de leur activation en utilisant les données du MIA. Dès qu'un plan de résolution est déterminé, les inférences faisant partie de celui-ci sont alors priorisées, et ordonnées en utilisant les données du MIA, avant d'ajouter les inférences ne faisant pas partie de ce plan, ordonnées indépendamment. En début de problème, QEDX permet donc à l'élève d'explorer librement le problème et lui propose de l'aide relative aux derniers énoncés entrés. Par contre, lorsque l'on considère que l'élève a un plan solide, on l'incite, sans pour autant le contraindre, à travailler sur la solution actuellement la plus avancée.

La dernière couche de QEDX contient le Générateur de Messages Discursifs (GMD) qui utilise les données de l'EDOI afin de produire différents messages d'aide. Il propose des rétroactions instantanées ainsi que des indices qui permettent de relancer un élève bloqué dans son processus de résolution. Sa structure a été développée à la suite de l'observation et l'analyse des interventions d'enseignants réels en classe. D'une part, une rétroaction instantanée est générée à la suite de l'écriture, par l'élève, d'un énoncé discursif. Ce message indique, à l'aide d'une émoticône, si l'énoncé est valide ou invalide, selon qu'il est présent ou absent des solutions acceptées. De plus, il est possible d'ajouter un message contextuel pour certaines erreurs courantes. Dans le cas d'un énoncé valide, un message d'encouragement qui dépend du pourcentage de l'achèvement de la solution la plus avancée, déterminée par l'EDOI, peut être affiché. Ces rétroactions ont été inspirées des réactions verbales et non verbales des enseignants lorsque l'élève propose des éléments de réponse.

D'autre part, la couche GMD génère une série d'indices dans le but de relancer le processus de résolution d'un élève bloqué. Dans la version actuelle de QEDX, ces indices sont proposés à des intervalles réguliers et il n'est pas possible d'en obtenir sur demande, par exemple en appuyant sur un bouton. Cette décision a été prise dans le but d'empêcher les abus qui consistent à obtenir des parties de réponse simplement en appuyant de façon répétitive sur le bouton produisant les indices. À la suite de l'analyse des données de la première phase expérimentale (Tessier-Baillargeon, Leduc, & Richard, 2011), nous avons modélisé le type et l'ordre des indices utilisés par des enseignants lors d'interventions réelles. Il en est ressorti que les enseignants choisissent intuitivement une inférence issue de la stratégie qu'ils croient avoir identifiée avant de cibler l'antécédent, la justification ou le conséquent sur lesquels porteront les indices. Dans QEDX, l'ordonnancement des inférences est réalisé par la couche EDOI et chaque inférence de la liste obtenue est utilisée par la couche GMD pour produire une série d'indices. Nous avons aussi décelé une certaine structure tant au niveau de l'ordre des indices au sein d'une inférence que de leur contenu. Nous avons donc implanté une machine à états finis qui comporte tous les états nécessaires pour prendre en compte la majorité des comportements d'enseignants observés lors de notre analyse. Pour chaque inférence de la liste, QEDX ajoute aux différents états de la machine les messages composés par les didacticiens et parcourt ensuite les états afin d'afficher les messages dans l'ordre prescrit. La couche GMD complète donc notre Système Tutoriel Intelligent (STI) et elle est une des principales contributions de notre recherche, car elle permet d'afficher des messages d'aide inspirés des interventions d'enseignants réels.

MODELISATION DE L'ARCHITECTURE DE QEDX PAR LES ETM

L'architecture en quatre couches, décrite à la section précédente, a permis de créer un Système Tutoriel Intelligent (STI) qui s'inspire des interventions des enseignants. Nous avons déjà démontré que le travail de l'élève à l'interface de QEDX lui confère un statut d'ETM et nous allons maintenant adapter ce même modèle pour l'analyse de son architecture informatique. Dans cette section, nous exposons comment le travail didactique effectué par l'architecture interne de QEDX s'apparente au travail mathématique de l'élève définissant l'ETM. Notre analyse porte autant sur les fonctionnalités actuelles de QEDX que sur celles projetées afin d'exposer tout le potentiel de nos choix technologiques au regard des ETM.

Comme pour l'analyse du travail mathématique de l'élève en résolution de problème avec QEDX, une adaptation du modèle des ETM permet de réaliser une analyse plus approfondie de l'architecture de notre système. Cependant, il ne s'agit pas de faire un simple rapprochement entre les composantes du plan épistémologique (figure 3) et les couches logicielles de notre système. Nous proposons plutôt d'analyser le travail du STI de QEDX, qui est une entité engagée dans un processus de résolution de problème au même titre que l'élève. L'objectif est le même pour les deux partis, soit d'obtenir une démonstration valide, mais les moyens mis en œuvre par chacun pour y arriver diffèrent. En effet, d'une part l'élève interagit avec QEDX, et au moyen de trois démarches mathématiques (découverte, raisonnement et communication), résout le problème de démonstration qui lui est proposé. Dans le cas du STI, il ne peut soumettre directement des énoncés pour résoudre et compléter la démonstration et doit donc, en quelque sorte, utiliser l'élève pour y arriver, en l'assistant dans son processus de résolution au sein de l'ETM. Nous proposons donc, par analogie, de considérer un espace de travail où le STI constitue un plan cognitif et où les traces du travail mathématique de l'élève à l'interface de QEDX constituent un plan épistémologique. Ainsi, le travail didactique du STI au sein de ce que nous appellerons un Espace de Travail Mathématique Didactique (ETM^D) s'apparente au travail mathématique de l'élève au sein d'un Espace de Travail Mathématique Adidactique (ETM^A) où adidactique désigne l'interaction entre l'élève et son milieu dépourvue d'intervention didactique explicite. La figure 5 illustre la relation entre l'ETM^D et l'ETM^A en contexte de résolution de problème de démonstration avec QEDX.

Premièrement, dans l'ETM^D, nous considérons que le répertoire d'énoncés ainsi que le graphe HPDIC font partie du plan épistémologique alors que les couches MIA, EDOI et GMD, soit l'intelligence du système, constituent le plan cognitif. En effet, le répertoire d'énoncés et le graphe HPDIC permettent de représenter le travail mathématique de l'élève selon un référentiel adapté à la nécessité épistémique visée par l'enseignant pour un problème donné. Le graphe est annoté lors de la production d'énoncés par l'élève, ce qui provoque une évolution du milieu tel qu'observé par le STI. Il est important de noter que les informations disponibles se limitent actuellement aux énoncés proposés par l'intermédiaire de l'onglet phrases. Par contre, nous envisageons d'enrichir le milieu en rendant accessible des informations plus exhaustives par rapport aux actions de l'élève à l'interface de QEDX. À court terme, par exemple, il serait intéressant d'ajouter des données concernant les manipulations de la figure dynamique. En fait, le graphe HPDIC a été conçu afin de permettre d'y intégrer de telles informations. Le plan épistémologique, tel qu'observé par le STI, peut donc être enrichi afin que ce dernier soit en mesure de mieux comprendre le cheminement de l'élève.

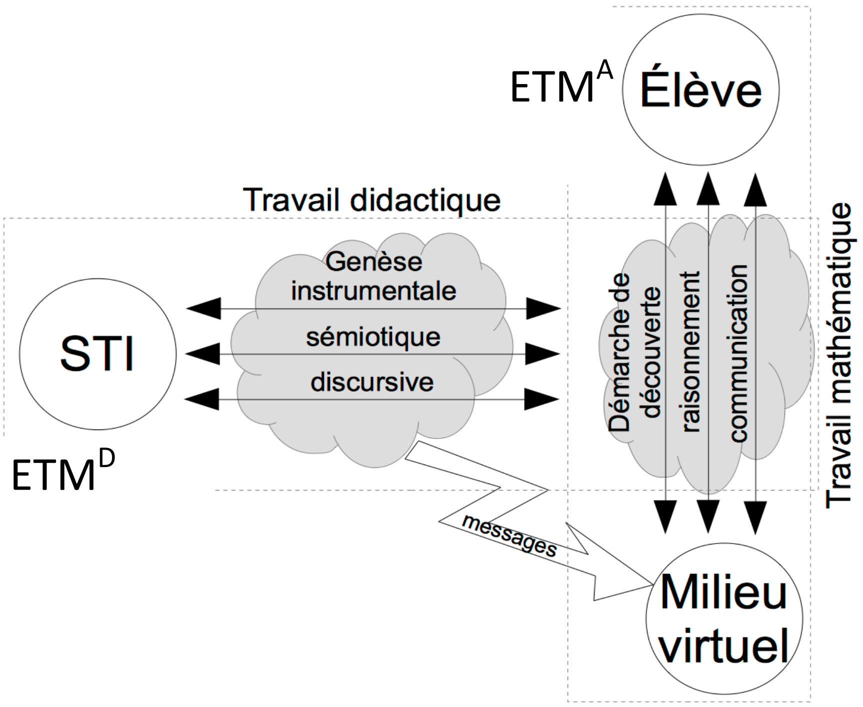


Figure 5: Précision des actions de l'agent tuteur à l'aide d'un ETM^D

Précédemment, nous avons décrit le travail mathématique de l'élève grâce aux trois démarches mathématiques (plans verticaux, figure 3) du modèle des ETM tel que défini par Kuzniak et Richard (2014). Pour éviter des confusions entre l'analyse du travail mathématique adidactique de l'élève et celle du travail du système tutoriel, l'analyse du travail mathématique didactique du MIA, de l'EDOI et du GMD, s'appuie plutôt sur les trois genèses tirées du même modèle (axes verticaux, figure 3), soit les genèses instrumentale, sémiotique et discursive. Le résultat concret du travail mathématique didactique de ces trois couches du STI consiste en une série de messages destinés à guider l'élève dans son processus de résolution. Ces messages sont réinvestis dans le milieu virtuel (représenté par l'éclair de la figure 5) qui s'en trouve modifié et ils influencent par le fait même le travail mathématique de l'élève créant ainsi une boucle d'interactions continue entre le STI et l'élève. Grâce à ses interventions, le STI espère, par le biais du travail de l'élève, compléter la démonstration et ainsi réussir son exercice mathématique didactique au sein de l'ETM^D. Dans la version actuelle de QEDX, les messages d'aide sont uniquement discursifs, mais nous envisageons d'ajouter la gestion de sous-problèmes qui pourraient remplacer certains indices textuels. Ces interventions indirectes ont le même objectif que les messages discursifs, et modifieront aussi le milieu virtuel avec lequel interagit l'élève.

Pour compléter l'analyse de l'ETM^D, nous allons maintenant nous attarder aux trois genèses mises en œuvre par le STI de QEDX. Nous allons premièrement nous intéresser au travail du MIA. Par une genèse instrumentale, le MIA extrait des données du travail de l'élève, données qui serviront d'instrument aux couches EDOI et GMD. Pour ce faire, le MIA garde en mémoire la chronologie des énoncés inscrits par l'élève. Cette chronologie est un instrument primordial pour que l'EDOI soit en mesure d'estimer l'état cognitif de l'élève ce qui permettra ensuite au GMD de produire des messages pertinents. Cependant, le MIA pourra évoluer selon les données qui seront mises à sa disposition par l'entremise d'une description plus riche du travail de l'élève, par exemple, en y ajoutant les manipulations de la figure dynamique. Éventuellement, la séquence des indices du tuteur, jumelée à la chronologie des actions de l'élève, pourra servir à identifier les messages qui ont un impact positif sur le travail de l'élève.

Pour être en mesure d'offrir une aide pertinente à l'élève, l'EDOI analyse les données chronologiques du MIA. Dans la perspective de l'ETM^{D}, c'est surtout dans l'EDOI que s'opère la genèse sémiotique qui caractérise le travail didactique du STI. En effet, c'est grâce à cette couche que les actions observées par le MIA deviennent signifiantes pour le STI. D'une part, l'EDOI identifie la solution la plus avancée, parmi toutes celles qui sont possibles, qu'il considère comme le plan courant de résolution de l'élève. D'autre part, l'analyse des actions les plus récentes permet à l'EDOI d'estimer l'état cognitif de l'élève afin de lui proposer des pistes de solution qui respectent celui-ci. Ces traitements des données issues du MIA permettent donc de donner un sens au travail mathématique de l'élève qui, espère-t-on, est un reflet fidèle de son état cognitif. L'ajout de données dans le MIA a un impact direct sur l'efficacité et la précision de l'EDOI. Par exemple, en ajoutant un onglet qui permet à l'élève d'organiser sa preuve sous la forme d'un réseau déductif, il est possible d'obtenir des informations supplémentaires concernant son plan courant de résolution.

Pour sa part, le GMD est responsable de générer les messages d'aide destinés à l'élève. En effet, le GMD, grâce au sens donné au travail mathématique de l'élève par l'EDOI, procède à la genèse discursive d'indices qui complète le travail didactique du STI. Le défi est de proposer des messages qui aideront efficacement l'élève sans dénaturer le problème. Il ne s'agit donc pas de donner directement les réponses, car bien que de tels messages permettent de résoudre le problème rapidement, ils produisent rarement un véritable apprentissage. En effet, en aucun cas le travail mathématique didactique du STI ne doit dénaturer le travail mathématique de l'élève, il doit plutôt permettre à ce dernier de reprendre en cas de blocage. Le GMD, tel qu'il est implanté dans la version actuelle de QEDX, propose des messages plus ou moins directifs et selon un ordre prédéfini. Ceux-ci tirent leur inspiration des interventions d'enseignants réels. Par contre, il ne s'adapte pas en temps réel aux réactions de l'élève, en priorisant, par exemple, le type de message qui semble le plus efficace pour relancer le processus de résolution. Comme mentionné au paragraphe précédent, la prise en compte de l'effet relatif des interventions du tuteur pour adapter ses messages dynamiquement afin de maximiser son apport au travail mathématique de l'élève est prévue dans le développement de QEDX.

CONCLUSION

L'objectif de cet article était de proposer une étude prospective des structures logicielles de QEDX à l'aide du modèle des ETM. Premièrement, notre système se démarque des logiciels actuellement disponibles, car il aspire à proposer une aide qui respecte le processus de résolution de l'élève en lui permettant d'explorer le problème. La conception de QEDX est basée sur des théories didactiques, dont les principales sont la TSD, précisée par les ETM, et la conception dans l'usage qui nous a menés à réaliser plusieurs cycles de développement. L'analyse du travail mathématique de l'élève à l'interface de QEDX nous a permis de conclure que notre système constitue un ETM^{D} où l'élève peut faire son travail de mathématicien et résoudre le problème de démonstration qui lui est proposé. Un survol de l'architecture logicielle en quatre couches, dont la pièce maitresse est le graphe HPDIC, a ensuite été proposé. Nous avons finalement proposé d'analyser ce STI en tant que sujet en processus de résolution de problème qui doit, en quelque sorte, utiliser le travail de l'élève pour qu'ensemble ils parviennent à une démonstration. Dans cette perspective, nous avons proposé le modèle des ETM^{D} pour décrire le travail mathématique didactique du STI qui s'opère grâce à trois genèses liant le travail mathématique de l'élève, en tant que plan épistémologique, au STI, en tant que plan cognitif. Nous avons ainsi été en mesure d'expliquer le fonctionnement et l'architecture de QEDX à l'aide des genèses de l'ETM^{D}. Il en résulte un travail didactique qui est réinvesti dans le milieu virtuel et qui influence les démarches mathématiques de l'élève au sein de l'ETM classique, ici nommé l'ETM^{adidactique}.

La principale innovation proposée dans cet article est l'adaptation du modèle des ETM afin d'analyser le fonctionnement d'un agent tuteur. Bien que cela puisse paraitre contre-intuitif au départ, l'application de ce modèle pour étudier le rôle des différentes structures internes de QEDX a permis de mieux définir les interactions qui existent à l'intérieur de notre système tutoriel en nous offrant une perspective d'analyse différente. De plus, le modèle des ETM^D est un outil supplémentaire que nous utiliserons pour la suite du développement de QEDX. Cependant, comme les ETM ne s'appliquent, pour l'instant, qu'à la résolution de problèmes mathématiques, notre définition de l'ETM^D s'ancre davantage dans l'univers des problèmes mathématiques. Nous avons donc été contraints, afin de les appliquer à l'analyse du STI, à interpréter certaines définitions dans un sens plus large. Par exemple, la considération du travail mathématique de l'élève comme plan épistémologique n'a pas été prévue dans le modèle des ETM. Les puristes pourraient donc mettre en doute l'applicabilité des ETM dans ce nouveau contexte. Il nous parait donc utile, dans le cadre de travaux futurs de préciser la terminologie des ETM^D pour rendre ce modèle applicable à des cadres plus généraux de résolution de problème.

Les travaux présentés dans le cadre de cet article ouvrent la voie à de nouvelles pistes de recherche autant en ce qui concerne l'avenir de QEDX qu'en ce qui concerne l'application des ETM^D dans un cadre plus général. D'une part, QEDX entre dans une nouvelle phase de développement dans laquelle l'ajout de sous-problèmes à titre d'intervention du tuteur est prévu. De plus, un tuteur de construction qui est en mesure d'interpréter les actions à l'interface de GeoGebra et une interface pour construire les réseaux déductifs sont envisagés. Il sera intéressant d'analyser ces nouvelles fonctionnalités à la lumière des modèles des ETM et des ETM^D afin de mieux comprendre les effets relatifs des rétroactions du système tutoriel sur le travail mathématique de l'élève. D'autre part, la généralisation des ETM^D à un cadre de résolution de problèmes plus général permettrait de l'appliquer et de l'adapter plus aisément à d'autres domaines en dehors de l'enseignement des mathématiques et donc d'envisager l'appellation Espace de Travail Didactique (ETD). De plus, l'application du modèle des ETD pour l'analyse du fonctionnement des systèmes tutoriels pourrait nous permettre de les comparer sous un angle différent. Une collaboration étroite entre les gens en informatique et en didactique sera bénéfique autant pour la précision du modèle des ETD que pour la production des prochaines générations de systèmes tutoriels.

NOTES

1. Dans Tessier-Baillargeon et al 2014, les démarches mathématiques du modèle des ETG (Coutat et Richard, 2011), soient la découverte, la validation et la modélisation, sont employés pour décrire le travail géométrique de l'élève et ainsi préciser le statut d'ETG de QEDX. Le modèle des ETM (Kuzniak et Richard, 2014) étant une généralisation qui englobe les espaces de travail géométriques, les trois démarches de l'ETG sont, sans perte de sens, équivalentes aux démarches de découverte, de raisonnement et de communication du modèle des ETM.

REFERENCES

Aleven, V., Popescu, O., & Koedinger, K. R. (2001a, mai). Pedagogical Content Knowledge in a Tutorial Dialogue System to Support Self-explanation. In *Papers of the aied-2001 workshop on tutorial dialogue systems* (pp. 59–70).

Aleven, V., Popescu, O., & Koedinger, K. R. (2001b). Towards Tutorial Dialog to Support Self-explanation: Adding Natural Language Understanding to a Cognitive Tutor. In J. D. Moore, C. L. Redfield, & W. L. Johnson (Eds.), *Ai-ed in the Wired and Wireless Future, proceedings of ai-ed 2001* (pp. 246–255). Amsterdam, Netherlands : IOS Press.

Anderson, J. R. (1996, avril). *Act: A Simple Theory of Complex Cognition*. American Psychologist, 51 (4), 355-365.

Anderson, J. R., Bothell, D., Byrne, M. D., Douglass, S., Lebiere, C., & Qin, Y. (2004). An Integrated Theory of the Mind. *Psychological Review*, 111 (4), 1036–1060.

Anderson, J. R., Boyle, C. F., & Yost, G. (1985, août). The geometry tutor. In *Proceedings of the Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence* (Vol. 1, pp. 1–7). Los Angeles, CA, USA : Morgan Kaufmann Publishers Inc.

Artigue, M. (1996). *Didactique des mathématiques*. In J. Brun (Ed.), (chap. Ingénierie didactique). Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Balacheff, N., Caferra, R., Cerulli, M., Gaudin, N., Maracci, M., Mariotti, M. A., . . . Webber, C. (2003). *Baghera Assessment Aroject, Designing an Hybrid and Emergent Educational Society* (Vol. 81 ; S. Soury-Lavergne, Ed.). Grenoble, France : Laboratoire Leibniz-IMAG.

Baulac, Y. (1990). *Un micromonde de géométrie, cabri-géomètre* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier - Grenoble I.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La Pensée sauvage.

CABRILOG SAS. (2009). Site web de cabri-géomètre [Manuel de logiciel]. Consulté sur http://www.cabri.com/fr/

Coutat, S., & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 97–126.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory. Strategies for Qualitative Research*. Chicago : Aldine.

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004, juillet). Combination of Dynamic Geometry, Algebra and Calculus in the Software System Geogebra. *In Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference* 2004 (p. 128—133). Pecs, Hungary.

International GeoGebra Institute. (2015). Site web de geogebra [Manuel de logiciel]. Consulté sur http://www.geogebra.org

Koedinger, K. R. (1991). *Tutoring Concepts, Percepts, and Rules in Geometry Problem-solving* (Thèse de doctorat). Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, USA.

Koedinger, K. R., & Anderson, J. R. (1993). Reifying Implicit Planning in Geometry: Guidelines for Model-based Intelligent Tutoring System Design. In S. P. Lajoie & S. J. Derry (Eds.), *Computers as Cognitive Tools* (pp. 15–46). Hillsdale, NJ, USA : Lawrence Erlbaum Associates.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16 , 9–24.

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014, décembre). Espaces de travail mathématique. points de vue et perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa* (Relime), 17 (4-I), 29–39.

Luengo, V. (1997). *Cabri-euclide: un micromonde de preuve intégrant la réfutation. principes didactiques et informatiques. réalisation* (Thèse de doctorat). Université Joseph Fourier - Grenoble I, Grenoble, France.

Luengo, V. (2005). Some Didactical and Epistemological Considerations in the Design of Educational Software: The cabri-euclide example. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10 (1), 1–29.

Matsuda, N. (2004). *The Impact of Different Proof Strategies on Learning Geometry Theorem Proving* (Thèse de doctorat). University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA, USA.

Matsuda, N., & VanLehn, K. (2003, juin). Modeling Hinting Strategies for Geometry Theorem Proving. In P. Brusilovsky, A. Corbett, & F. de Rosis (Eds.), *User modeling* 2003 (Vol. 2702, pp. 373–377). Johnstown, PA, USA : Springer Berlin Heidelberg.

Matsuda, N., & VanLehn, K. (2005). Advanced Geometry Tutor: An Intelligent Tutor that Teaches Proof-writing with Construction. In C.-K. Looi, G. McCalla, B. Bredeweg, & J. Breuker (Eds.), *Artificial Intelligence in Education: Supporting Learning Through Intelligent and Socially Informed Technology* (Vol. 125, pp. 443–450). Amsterdam, Netherlands : IOS Press.

Py, D. (1994). Reconnaissance de plan pour la modélisation de l'élève : le projet mentoniezh. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (1.2), 113–138.

Py, D. (1996). Aide à la démonstration en géométrie : le projet mentoniezh. *Sciences et Techniques Educatives*, 3 (2), 227–256.

Py, D. (2001, juillet). *Environnements interactifs d'apprentissage et démonstration en géométrie* (Habilitation à Diriger des Recherches). Université de Rennes I.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies ; une approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.

Richard, P. R., Fortuny, J. M., Gagnon, M., Leduc, N., Puertas, E., & Tessier-Baillargeon, M. (2011, juillet). Didactic and Theoretical-based Perspectives in the Experimental Development of an Intelligent Tutorial System for the Learning of Geometry. *ZDM Mathematics Education,* 43 (3), 425–439.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 3–21). Springer Netherlands.

Tanguay, D. (2006). *Comprendre la structure déductive en démonstration*. Envol, 134 , 9–17.

Tessier-Baillargeon, M., Leduc, N., & Richard, P. R. (2011, juin). Niveaux d'intervention enseignante pour le développement d'un système tutoriel: Une expérience didactique à l'École secondaire avec le système GéogébraTUTOR. In L. Trouche, H. Chaachoua, M. Hersant, Y. Matheron, & G. Psycharis (Eds.), *Actes des journées mathématiques de l'institut français de l'Éducation (ifÉ)* (pp. 201–208). Lyon, France : École Normale Supérieure (ENS) de Lyon.

Tessier-Baillargeon, M., Leduc, N., Richard, P. R., & Gagnon, M. (à paraitre). *Une Étude comparative des systèmes tutoriels pour l'exercice de la démonstration en géométrie plane : Un examen du problème de recherche pour la conception de geogebratutor.*

Tessier-Baillargeon, M., Richard, P. R., Leduc, N., & Gagnon, M. (2014, décembre). Conception et analyse de geogebratutor, un système tutoriel intelligent : Genèse d'un espace de travail géométrique idoine. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa (Relime)*, 17 (4-II), 303–326.

Webber, C., Bergia, L., Pesty, S., & Balacheff, N. (2001). Baghera Project: a Multi-agent Architecture for Human Learning. *In Workshop - Multi-agent Architectures for Distributed Learning Environments*. (pp. 12–17). San Antonio, TX, USA.

ETM EN EL DOMINIO DE LA ESTADÍSTICA TEMPRANA: DOS CASOS DE ALUMNOS DE GRADO 2 Y SUS REPRESENTACIONES DE DATOS

Soledad Estrella, Pedro Vidal-Szabó, Raimundo Olfos

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

soledad.estrella@pucv.cl, pedro.vidal_s@umce.cl, raimundo.olfos@pucv.cl

Describimos y examinamos el ETM-personal de dos estudiantes de 7 años de edad que cursan el grado 2, a quienes se les propuso una situación de análisis exploratorio de datos en que se requería producir representaciones de datos. Dicha situación fue diseñada por profesores de primaria que participaron en un grupo de Estudio de Clases. La investigación describe y examina cómo una situación de análisis exploratorio de datos permitió que los dos estudiantes transitaran y activaran las tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva. Ambos niños utilizaron sus representaciones de datos para descubrir, razonar y comunicar ideas estadísticas. Se proyecta extender el modelo ETM y levantar un Espacio de Trabajo Estadístico.

***Palabras Claves**: estadística temprana, representaciones de datos, análisis exploratorio de datos, génesis del ETM, estudio de caso*

INTRODUCCIÓN

La estadística requiere una manera diferente de pensar, ya que los datos no son solo números abstractos sino números en un contexto (Cobb & Moore, 1997). En la matemática el contexto oscurece la estructura, mientras que en el análisis de datos el contexto le da sentido. Por su parte, la didáctica de la estadística moviliza una parte importante de los conceptos desarrollados en el campo de la didáctica de la matemática. No obstante, es en la funcionalidad que la estadística y la matemática como herramientas de disciplina se diferencian, para la estadística el contexto en que se presentan los datos es de máxima importancia y la relevancia de la variabilidad le da un sello distintivo, respecto a la matemática.

Este estudio presenta un foco centrado en el análisis sobre la manera de cómo dos niños de primaria de 7 años de edad organizaron y representaron datos para dar respuesta a una situación particular, elaborada por profesores de primaria participantes de un grupo de estudio de clase, quienes integraron el análisis exploratorio de datos y la alfabetización estadística. El área de esta investigación es la estadística temprana, la cual promueve la alfabetización estadística y está siendo una competencia esencial para las generaciones de ciudadanos que se están formando en el sistema escolar, por tanto es relevante fomentarla desde los primeros años de escolaridad (Del Pino & Estrella, 2012). Por ello, al enfrentar a los estudiantes a una situación de análisis exploratorio de datos, respondemos a la necesidad de desarrollar el pensamiento estadístico tempranamente como lo proponen diversos reportes: Common Core State Standards Initiative (2010), Franklin et al. (2007), Franklin y Mewborn (2006), National Council of Teacher of Mathematics (2000), los cuales destacan la importancia de que los niños comprendan aspectos fundamentales del análisis datos. Igualmente, las representaciones de datos son relevantes para la estadística y su desarrollo, pues son una poderosa herramienta para comunicar visualmente el comportamiento de los datos (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Tufte, 1983).

Watson y Fitzallen (2010) refuerzan la idea sobre las dificultades que presentan los sujetos de todas las edades en relación al análisis estadístico y las representaciones de los datos. Si bien hay estudios sobre la comprensión gráfica en educación estadística, no ha sido suficientemente explorada la diversidad de representaciones de datos que producen los niños libremente, sin instrucción previa. Por lo tanto, para aportar en esa línea, este estudio entrega algunos elementos sobre la construcción de las representaciones de datos a propósito de la situación de análisis exploratorio de datos que enfrentan los niños reportados en esta investigación.

Alfabetización estadística temprana

En muchos países se ha incorporado en el currículo escolar los contenidos de Estadística y Probabilidad desde los primeros grados, especialmente para dotar a los estudiantes de una alfabetización estadística (Del Pino & Estrella, 2012). Este tipo de alfabetización involucra la comprensión y uso de lenguaje básico, y también comprende herramientas estadísticas, saber lo que significan términos estadísticos y el uso de símbolos estadísticos, y reconocer y ser capaz de interpretar las representaciones de datos.

En concordancia con Ainley (2015) el aprendizaje de las ideas estadísticas debe otorgarse de modo que llegue a ser significativo para los estudiantes, y así contribuir verdaderamente al desarrollo de una alfabetización estadística útil en la vida cívica, laboral y personal.

Los primeros niveles escolares proveen un ambiente ideal para valorar la estadística, no solo por su importancia en diversos ámbitos, sino que también refuerza algunos conceptos matemáticos como número, medida, conteo, cardinal, partición, clasificación, operaciones, reparto justo, ordenamiento, entre otros (Estrella, Estrella, Goldrine, Morales, Olfos & Vidal-Szabó, 2015).

Análisis Exploratorio de Datos

En el análisis exploratorio de datos (AED) se utilizan las representaciones y resúmenes numéricos para describir las variables de un conjunto de datos y las relaciones entre ellas. Moore (2000) indica que los datos son los distintos valores de la variable, entendiendo como variable a cualquier característica de un individuo.

El propósito del AED propuesto por Tukey (1977) es la exploración sin restricciones de los datos en busca de regularidades interesantes, donde las conclusiones son informales, ya que se basan en lo que se ve en los datos, y sólo se aplican a los sujetos y a las circunstancias para las cuales se obtuvieron dichos datos.

El AED se ocupa de los métodos y las ideas necesarias para organizar, representar y describir datos utilizando tablas, gráficos y resúmenes numéricos. Así, las representaciones de los datos son una poderosa herramienta estadística para expresar visualmente el comportamiento de los datos y permite la interpretación de los mismos en contexto.

Responder a la necesidad de desarrollar el pensamiento estadístico tempranamente en los primeros grados de escolaridad motiva a ofrecer diseños de enseñanza para que los niños enfrenten situaciones de AED, en que los datos sean el foco de la clase como es en la disciplina estadística. En ese sentido, Bell y Janvier (1981) indican que gran parte de la enseñanza de graficar se ha enfocado demasiado sobre lo cuantitativo, lo abstracto y ciertas habilidades localizadas, por lo cual proponen que los estudiantes comiencen con gráficos cualitativos de situaciones concretas y hacer que vean y formulen preguntas de interés para ayudarles a ver la globalidad, en vez de la individualidad.

Sentido-del-dato

El concepto sobre el sentido-del-dato, del inglés *data sense,* se refiere a ver los datos como números en un contexto, leer tablas, diagramas y gráficos, comprender los resúmenes de datos numéricos y gráficos. Al representar los datos gráficamente, los niños pueden obtener información de los mismos al identificar tendencias, al observar y analizar el comportamiento de la mayor parte de los datos, “mayoría”, o comparando los valores de las frecuencias absolutas o subitizando los datos dispuestos en el gráfico.

Para delimitar qué es el sentido-del-dato necesariamente debemos integrar este concepto en construcción las características del sentido-del-número, o sentido-numérico, al cual se refieren Yang, Reys y Reys (2009) como la comprensión general de números y operaciones de una persona, y a la habilidad de manejar situaciones de vida diaria que incluyen números. Esta habilidad se utiliza para desarrollar estrategias flexibles y eficientes (incluyendo cálculo mental y estimación) para manejar problemas numéricos. Asimismo, Reys, Lindquist, Lambdin, Smith y Suydam (1993) indican que los niños al analizar datos pueden desarrollar el sentido-del-número y, a su vez, desarrollar el sentido-del-dato. Algunas investigaciones acerca de la estadística temprana reportan que mediante el análisis exploratorio de datos se desarrolla y se mejora en niños tanto el sentido-del-número como el sentido-del-dato (Estrella et al., 2015).

Proponemos que el sentido-del-dato integra el número simbólico y la toma de conciencia implícita o explícita de la variable en juego asociada y, por tanto, de la medida de magnitud, incluido el rol de la información que se construye en relación al contexto de los datos. Este estudio limita su enfoque de sentido-del-dato al número simbólico, la variable asociada y el contexto del problema, dentro de un proceso estadístico.

Desarrollar en los niños el sentido-del-dato tempranamente fue propuesto por el NCTM (2000, 2009), lo que involucraría recolectar, ordenar y presentar datos. Una idea clave sobre los datos es que pueden ser organizados y representados para proporcionar información estadística sobre alguna pregunta de interés para niños que cursan desde pre-kínder hasta el grado 2. Así, los niños pequeños requieren de experiencias con la organización y la representación de datos en una amplia variedad de formas, que les permitan discutir acerca de qué métodos de organización y visualización de datos son más efectivos y más fáciles de entender y comunicar a otros.

Friel, Bright, Frierson y Kader (1997) señalaban que profesores y estudiantes de primaria y secundaria necesitan saber y ser capaces de hacer respecto a la estadística escolar, y proponían centrarse en el desarrollo del sentido-del-dato, que incluía sentirse confortable en el proceso estadístico, esto es, plantear preguntas, recopilar y analizar datos e interpretar los resultados de manera que respondan a la pregunta o problema inicial. Estos autores también incluían comprender los gráficos y medidas estadísticas, y evaluar el proceso de investigación estadística utilizado para generarlos.

Considerando la alfabetización estadística temprana, el AED y el sentido-del-dato, este estudio indaga en el trabajo de dos niños de grado 2 en relación al análisis de datos y la construcción de representaciones, los cuales dan indicios de grados de comprensión estadística de acuerdo a la situación que enfrentaron. Sostenemos como supuesto de investigación que el análisis de la diversidad de representaciones gráficas entrega una visión más completa de la temprana comprensión estadística. Por lo tanto, la pregunta de esta investigación es *¿Cuáles son algunas de las comprensiones sobre el análisis exploratorio de datos y la representación de datos que sostienen alumnos de grado 2?* Para ello, se examina el ETM-personal de dos estudiantes enfrentados a una situación de AED, específicamente, esta investigación describe y examina cómo una situación de AED provoca, eventualmente, un tránsito y una activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva.

MARCO TEÓRICO

Para estudiar las representaciones de datos de niños que cursan el grado 2, esta investigación describe y examina mediante el modelo Espacio de Trabajo Matemático, en adelante ETM, (Kuzniak & Richard, 2014), el cual da acceso a organizar analíticamente el trabajo que ejecutan los estudiantes enfrentados a una tarea, a través de dos planos, uno de origen epistemológico que concierne a la naturaleza de los contenidos matemáticos en juego, y otro de origen cognitivo que remite a la persona y su pensamiento en acción de resolver actividades matemáticas, ver Figura 1. Además, el modelo ETM considera la génesis semiótica, génesis instrumental y génesis discursiva.

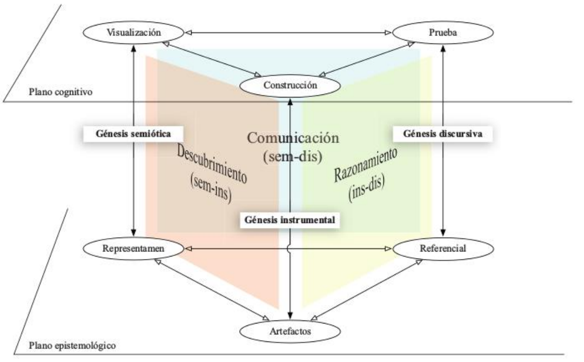


Figura 1: Modelo-ETM

La propuesta de extensión: "ETM - Estadística Temprana" (ETM_{ET}), busca una diferenciación entre el trabajo matemático y el trabajo estadístico, pues existen algunos elementos que caracterizan las génesis semiótica e instrumental y discursiva, según la naturaleza propia del conocimiento estadístico y sus ideas claves para el desarrollo de su pensamiento, entre ellas, los datos, la variabilidad y las representaciones (Ben-Zvi & Garfield, 2004; Burrill & Biehler, 2011).

Las componentes del plano epistemológico del ETM_{ET}

En el dominio de la estadística, la componente *representamen* contiene signos de tipo simbólico como X (variable estadística), x_i (dato i-ésimo), f_i (frecuencia absoluta *i*-ésima), entre otros. También, otros signos como imágenes reales o íconos que representan a los datos de manera individual. En la componente *artefactos*, reconocibles en la educación estadística temprana, se considera la calculadora, una encuesta en papel para el registro de los datos, regla y/o compás para construir representaciones de datos, íconos dibujados como datos, entre otros. La componente *referencial* como sistema teórico, está basada en definiciones y propiedades en estadística, por ejemplo, la suma de las frecuencias absolutas, el concepto de variable y sus categorías, tipos de variable, entre otras.

El plano cognitivo y el plano epistemológico del ETM_{ET}

El ETM con dominio en la geometría (en sus orígenes como Espacio de Trabajo Geométrico), se precisaban procesos de *visualización* que tienen relación con el soporte material y la representación del espacio, procesos de *construcción* relativos a las configuraciones e instrumentos puestos en acción por el sujeto y procesos discursivos que proveen al sujeto de pruebas y argumentos (Kuzniak & Richard, 2014).

En cambio, se propone para la estadística temprana que el sentido-del-dato permita la vinculación entre las componentes del plano epistemológico con el plano cognitivo, al distinguir los datos como "números en un contexto" (Cobb & Moore, 1997). Cabe destacar, que la caracterización de los procesos de visualización, construcción y discursivos, son parte de una investigación en curso de acuerdo a la naturaleza del conocimiento estadístico, trastocando el plano epistemológico y cognitivo, sus componentes y génesis del espacio de trabajo propiamente estadístico.

Las génesis y los planos verticales del ETM_{ET}

Las génesis en el ETM hacen operativo el trabajo matemático en virtud de que articula operativamente las componentes del plano epistemológico con las del plano cognitivo, configurándose tres génesis: la génesis semiótica que nace del vínculo e interacción entre la componente *representamen* con la de *visualización*; la génesis instrumental que se origina de la relación interactiva entre la componente *artefactos* con el de *construcción*; y la génesis discursiva que emana del nexo articulado entre la componente *referencial* con el de *prueba*.

La génesis semiótica da cuenta de los registros de representación semiótica y garantiza la sintaxis, semántica, función y estructura de los signos. Mientras que la génesis instrumental operacionaliza los artefactos que colaboran durante el trabajo matemático en el proceso de construcción. Y la génesis discursiva sirve al razonamiento matemático por medio de los procesos de prueba que se abastecen de teoremas, propiedades o definiciones del referencial.

Los planos verticales conocidos como el de descubrimiento (plano sem-ins), comunicación (plano dis-sem) y razonamiento (plano ins-dis) parecen apropiados para analizar el trabajo estadístico de los estudiantes. Estos planos se constituyen desde la vinculación de las génesis semiótica e instrumental para el plano del descubrimiento; la vinculación de las génesis semiótica y discursiva para el plano de la comunicación; y la vinculación de las génesis discursiva e instrumental para el plano del razonamiento, (Kuzniak & Richard, 2014).

Como se señalaba, esta investigación indaga en la naturaleza de las génesis semiótica, instrumental y discursiva en relación al trabajo estadístico de los estudiantes de grado 2 enfrentados a una situación de análisis exploratorio de datos. De esta manera, se pretende caracterizar dichas génesis y los planos verticales en el ámbito de la estadística temprana, refinando así el "ETM - Estadística Temprana" (ETM_{ET}).

METODOLOGÍA

Los casos de Julia y Manuel

En este escrito se reportan 2 estudiantes, en adelante Julia y Manuel (grado 2, 7 años de edad), pertenecientes a un curso de 38 estudiantes de un colegio particular subvencionado de la ciudad de Valparaíso en Chile. Dicha institución educativa fue seleccionada por tener un puntaje SIMCE (test nacional) sobre 7 puntos respecto del promedio nacional, lo cual asumimos que brindaría mayores elementos de análisis al estudio. A su vez, se contó con el consentimiento escrito de los directores del establecimiento educativo, de los profesores, apoderados y estudiantes.
El criterio de selección de Julia y Manuel, fue por juicio experto de los investigadores vía la calidad de sus producciones realizadas durante la fase de implementación del estudio de clase. Cabe señalar, que tanto Julia como Manuel enfrentaron la actividad propuesta en clases de modo que sus producciones fueron elaboradas por ellos sin instrucción previa, de forma individual y autónoma.

Preparación y aplicación de instrumentos

Los estudiantes seleccionados fueron puestos en situación de resolver un problema de final abierto, el cual fue elaborado por el grupo de estudio de clases constituido por cuatro profesores de primaria del mismo establecimiento educacional. Para el diseño de dicho problema y de la clase, los profesores tomaron en cuenta datos reales del consumo diario de agua de una familia chilena de 5 integrantes, los datos fueron entregados a los estudiantes en una guía de trabajo de forma icónica en que cada ícono representaba un litro de consumo de agua en el hogar. La guía incluía 36 íconos: 10 íconos de ducha, 13 íconos de inodoros, 8 íconos de lavamanos, 4 íconos de lavaplatos y 1 ícono de manguera. La pregunta de la clase fue: "¿De qué manera podemos ayudar a Matías a organizar los datos para reducir el consumo de agua en su hogar?" Esta interrogante motivó a que los estudiantes organizaran y representaran los datos entregados en la guía, de tal modo que pudieran dar respuesta al problema de la clase.

Recogida de datos

Las representaciones de datos producidas en la guía de trabajo de Julia y Manuel fueron fotografiadas y analizadas por los investigadores. Además, fueron realizadas entrevistas clínicas a ambos estudiantes, en que se rescatan las comprensiones que sostienen mediante sus explicaciones orales, registradas por videograbación y, posteriormente, fueron transcritas para su análisis realizado por cuatro investigadores.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis se centra en las producciones y sus características, igualmente, en extractos de las posteriores entrevistas clínicas realizadas a los dos niños. Las producciones que se reportan dan respuestas a la situación planteada, presentan de formas diferentes los datos para dar respuesta a la misma pregunta. Se observa que tanto Julia como Manuel clasifican los datos y usan el concepto de frecuencia absoluta de la categoría de la variable, aunque generan diferentes representaciones, pues Julia produce un gráfico, mientras que Manuel produce una tabla de datos, los que se describen y analizan a continuación.

El caso de Julia

Producción de Julia

En la organización y representación que produce Julia (ver Figura 2), se observa que procede eligiendo y contando los íconos de inodoros en la guía de trabajo. Luego, en el reverso de la hoja en la parte derecha inferior escribe la palabra *inodoro* y la encuadra, después escribe "-13" (esto es, escribe un guion y luego el número 13) sobre el recuadro de la palabra dibuja trece inodoros y finalmente los encuadra. Interpretamos que realizó un conteo y clasificación que le permite identificar la categoría de la variable y el cardinal. Este procedimiento lo reitera para los demás datos, a saber, 10 duchas, 1 manguera, 4 lavaplatos y 7 lavamanos, en el orden inusual de derecha a izquierda.

En la representación de Julia se observa que organiza los datos, construyendo listas icónicas verticales con repetición del ícono, caracterizadas por: una conservación de la unidad (tamaños similares de los íconos); una linealidad gráfica de las barras (verticalidad de las listas icónicas); y una base lineal (sobre la cual se encuentra el rótulo escrito de la categoría de la variable, con su cardinal y las barras). A esta representación la hemos denominado *diagrama ícono-barra*.

Figura 2: ***Diagrama ícono-barra*** **construido por Julia**

ETM-personal de Julia

Génesis semiótica (representamen-visualización)

Desde el conjunto de los datos entregados en forma icónica, Julia clasifica los datos icónicos pertenecientes a la misma categoría, explorando alguna relación que le permite responder a la pregunta.

Por otro lado, Julia reconoce que desde una base lineal y una linealidad gráfica, a nivel operativo, puede llegar a comparar los datos. El contexto de cuidado del agua le da sentido a la variable "consumo de agua" y a las categorías de la variable que emergen y son visualizadas como clases (categorías de la variable), las que ordena horizontalmente (ver Figura 2).

El siguiente diálogo es parte de una entrevista clínica posterior, hecha a Julia sobre su producción:

> *3. Entrevistador: ¿te acuerdas lo que significaba cada uno de estos datos? ¿te acuerdas? [mostrándole la hoja de trabajo]*
>
> *4. Julia: lo que gastaba Matías [el consumo de agua en la casa de Matías]*

Julia al observar los íconos (*representamen*) de la hoja de trabajo comienza a "ver" los datos, los cuales asocia a un contexto de fuentes de consumo de agua, activando el sentido-del-dato.

Génesis instrumental (artefacto-construcción)

Replica los datos icónicos como dibujos en su hoja de trabajo, comienza a ordenarlos posicionándolos desde una base lineal, y a medida que avanza esta construcción (de derecha a izquierda), el orden de los íconos dibujados sigue un cierto criterio de linealidad gráfica por cada categoría de la variable establecida por Julia. El bosquejo inicial de la producción de Julia le permite construir listas de datos compuestas por datos icónicos, en una base lineal con linealidad gráfica de las listas de datos, encuadradas como barras con conservación del tamaño de los íconos (su altura), en que el texto precisa la categoría de la variable y el cardinal determina la frecuencia absoluta respectiva (ver Figura 3).

Figura 3: Diagrama icono-barra en proceso de construcción

> *46. Entrevistador: ¿Y ese 10 por qué lo pusiste? [señala la lista icónica de duchas]*
>
> *47. Julia: Los puse para decirle a la profesora que son 10 y no se equivoque ella al contar.*
>
> *48. Entrevistador: Aquí entremedio tu colocas un guion, ¿por qué lo pusiste? [señala el guion que separa número y texto de la categoría].*
>
> *49. Julia: El guion para que no se juntara mucho porque si no quedaría como pegado y no se notaría el número.*

El signo "-" como artefacto simbólico lleva el cardinal al estatus de frecuencia de la categoría de la variable, y al colocar un guion entre la frecuencia y la categoría de la variable separa lo cuantitativo de lo cualitativo, y simultáneamente los asocia [línea 49]. Al parecer, se activan dos génesis, una relacionada con la construcción de un diagrama ícono-barra y otra vinculada a una construcción de lista de datos, en ambas presenta la categoría de la variable (texto) y la frecuencia absoluta (el cardinal).

Génesis discursiva (referencial-prueba)

Al clasificar Julia, surgen las categorías de la variable, y al contar los datos de una misma categoría emerge el cardinal respectivo que adquiere el estatus de frecuencia absoluta de la categoría. Para cada categoría, Julia verifica su frecuencia volviendo a contar los datos desde la hoja de trabajo, no pudiendo faltar ningún dato y no pudiéndo contar más de una vez un mismo ícono.

> *25. Entrevistador: Por ejemplo explícame este ¿cómo lo hiciste? [señala la lista icónica de duchas]*
>
> *26. Julia: Primero puse este [indica categoría de la variable], después el número para saber cuántos tenía, porque si no me iba a equivocar!*
>
> *27. Entrevistador: Ah! ¿Y ese número de dónde lo obtenías?*
>
> *28. Julia: ... conté todas las duchas y empecé a tacharlas [en la hoja de trabajo]*
>
> *29. Entrevistador: ¿qué nombre le pondrías a este grupo? (indica la lista icónica de duchas). ¿Por qué?*
>
> *30. Julia: 10 duchas, porque son 10 duchas y el número… [señalando la lista icónica correspondiente]*
>
> *31. Entrevistador: Muy bien, aquí hay tres [indica la lista icónica de lavaplatos] ¿por qué hay tres?*
>
> *32. Julia: cuando conté, aquí, 1, 2 y 3 y no habían más [indica con sus dedos los íconos de lavaplatos ubicados en la hoja de trabajo].*

Julia especifica la prueba que utiliza para argumentar la validez de la frecuencia de la categoría, líneas 28 y 32, a través de la estrategia de conteo con tachado del conjunto de datos de la hoja de trabajo.

EL CASO DE MANUEL

Producción de Manuel

La Figura 4 presenta la representación producida por Manuel, correspondiente a una tabla horizontal constituida por un entramado rectangular de 2 filas y 5 columnas, en cuyas celdas superiores se exhibe el encabezado con íconos dibujados que representan las categorías de la variable y en el cuerpo de datos se muestran los cardinales para cada categoría de la variable, los cuales son las frecuencia absolutas.

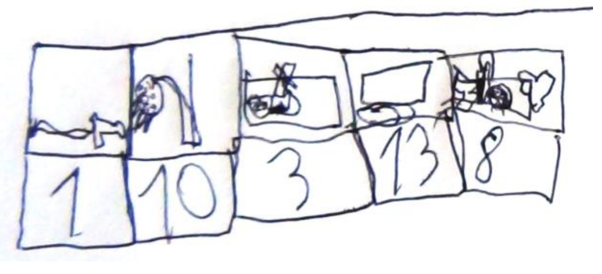


Figura 4: Tabla icónica de frecuencias absolutas construida por Manuel

En el proceso de construcción de la representación de datos de Manuel se observó que procede trazando un segmento superior desde el cual construye celdas, la que completa con el ícono dibujado (categoría de la variable) y bajo ésta escribe el cardinal correspondiente. Este procedimiento lo reitera para cada categoría, realizando una yuxtaposición de listas icónicas verticales sin repetición del ícono, caracterizadas por tener un representante del dato icónico de las categorías y una linealidad gráfica de las celdas (horizontalidad de las listas icónicas). A esta representación la hemos denominado *tabla icónica de frecuencias absolutas*.

ETM-personal de Manuel

Génesis semiótica (representamen-visualización)

Con el conjunto de los datos entregados en forma icónica, Manuel clasifica los datos icónicos pertenecientes a la misma categoría, explorando alguna relación que le permita responder a la pregunta. Al observar los datos icónicos repetidos determina que existe un representante de ellos para la categoría de la variable, expresado como un solo ícono dibujado.

El contexto de cuidado del agua le da sentido a la variable "consumo de agua" y a las categorías de la variable que emergen y son visualizadas como clases (categorías de la variable), pudiendo ordenar horizontal o verticalmente (ver Figura 4).

01. Entrevistador: ¿Recuerdan que significaba cada uno de estos datos?

02. Manuel: Sí, cuanto gastaba en agua.

03. Manuel: La manguera gastaba un poco [hay solo un ícono de manguera]. Y la ducha gastaba más

[hay 10 iconos de duchas].

Génesis instrumental (artefacto-construcción)

Manuel inserta un dato icónico como representante de la categoría de la variable. Estos representantes comienzan a ser posicionados en el encabezado superior (primera fila superior) en una tabla horizontal de frecuencias absolutas. El entramado de celdas permite construir listas yuxtapuestas que devienen en una tabla icónica de frecuencias absolutas, construcción que inferimos de Manuel.

Luego, mediante alguna estrategia de conteo obtiene el cardinal de la categoría de la variable, el cual adquiere el estatus de frecuencia absoluta que inserta en una tabla, como lo señala en el siguiente extracto de la entrevista.

04. Entrevistador: ¿Recuerdas lo que hiciste con estos datos?

05. Manuel: Sí, los tuve que ordenar.

06. Entrevistador: ¿Cómo lo hiciste?

07. Manuel: tachando

08. Entrevistador: ¿tachando? ¿ibas contando?

09. Manuel: algo así.

10. Manuel: tuve que hacer la tabla.

Génesis discursiva (referencial-prueba)

Para cada categoría verifica su frecuencia volviendo a contar los datos desde la hoja de trabajo o utilizando la tabla de frecuencias construida. Manuel argumenta con el cardinal señalando la hoja de trabajo, y con la frecuencia absoluta señalando la tabla, (línea 15 de entrevista).

12. Entrevistador: ¿cuántas duchas hay?

13. Manuel: hay unas diez

14. Entrevistador: ¿cómo lo supiste? ¿lo contaste aquí (hoja de datos icónicos) o lo miraste allá (tabla hecha por el)?

15. Manuel: en la tarea anterior lo hice acá (señala el conjunto de datos de la hoja), pero en esta como ya pasó lo mire de acá (tabla de frecuencia hecha por él).

En la entrevista, Manuel le da sentido a la representación tabular de los datos como una herramienta que le permite, sin contar nuevamente, verificar que el valor del cardinal y de la frecuencia es el mismo. El sentido-del-número dentro del contexto se articula con el sentido-del-dato que emerge en la propia representación usada discursivamente.

CONCLUSIONES

Dada la situación de AED descrita, las representaciones de datos fueron producidas libremente por los estudiantes, y muestran primeramente la determinación de clases de la variable (por medio de la clasificación determinan las categorías de la variable), y el orden de la presentación de los datos (linealidad gráfica, horizontal o vertical). En el caso del *diagrama ícono-barra*, la construcción gráfica se sostiene en una base lineal y en una conservación del tamaño de la unidad, que permiten la comparación visual a través de la linealidad gráfica, como se observaba en Figura 2; en el caso de la tabla icónica, la comparación numérica se hace al comparar numéricamente las frecuencias de cada categoría, ver Figura 4.

En el primer caso (Julia), la construcción del diagrama ícono-barra emergió de una interacción de las génesis semiótica e instrumental, ya que logra una visualización de las categorías desde los datos y ocupa una estrategia de conteo. Además, escribe el nombre de la categoría de la variable y anota el cardinal respectivo, al que podría darse el estatus de frecuencia absoluta, dado que escribe un guion vinculante, ver Figura 2.
En el segundo caso (Manuel), referido a la construcción de una tabla icónica de frecuencias absolutas, la activación también se inicia desde la génesis semiótica. El proceso parte desde la construcción de una lista a una tabla, asociando cardinales a cada categoría de la variable. Al igual que en el caso anterior, la argumentación emerge en el momento de la demanda discursiva, al solicitar en la entrevista que comunique el trabajo que realizó. El registro audiovisual da cuenta que la prueba emergió durante la justificación del proceso de construcción, cada vez que contaba y volvía a contar para determinar el cardinal que correspondía a cada clase, ver Figura 4.
En la génesis instrumental difieren los artefactos puestos en juego en las producciones de Julia y Manuel, ver Figura 5, aunque la génesis discursiva los une y relaciona, en tanto justifican y responden a la situación planteada en la clase. Los íconos dibujados por los alumnos actuaron como artefactos en los ETM-personal de cada caso y evidencian una construcción distinta, ya que en el caso de Manuel los íconos dibujados representan las categorías de la variable y en el caso de Julia los íconos representan a cada dato, es decir, Julia y Manuel instrumentalizan los íconos de distinta manera a nivel conceptual.

Figura 5: Unidades mínimas de representación

El aprendizaje de la estadística, lejos de una aritmetización o algebrización de la disciplina, en un ambiente de AED permite al estudiante una activación y circulación de la génesis semiótica y la instrumental, las que contribuyen y activan la génesis discursiva, pues el enfoque del análisis exploratorio de datos promueve la argumentación y la justificación desde las representaciones y resúmenes numéricos obtenidos al explorar los datos y descubrir la información en ellos. Y en los casos de Julia y Manuel, se verificó que las representaciones no solo representan datos sino que también son dispositivos cognitivos que logran garantizar sus ideas estadísticas que emanan de acuerdo a la demanda argumentativa solicitada en las entrevistas clínicas realizadas en este estudio.

PROYECCIONES

Es posible identificar como elementos constitutivos de un posible Espacio de Trabajo Estadístico, ETM_E, pues respecto a la génesis semiótica, los íconos como *representamen* en contexto permiten la visualización de los datos, y la repetición del ícono deviene en el establecimiento de las categorías de la variable, o bien, un ícono puede representar a un conjunto de íconos de la misma categoría de la variable, pudiéndose comenzar a desarrollar el sentido-del-dato, en la génesis semiótica, e inclusive, en el plano de la comunicación (plano dis-sem).

Mientras que la asociación de los íconos al cardinal respectivo, el uso de la base lineal, conservación del tamaño del ícono y encuadres de linealidad gráfica, actúan como *artefactos* que permiten la *construcción* de: frecuencia absoluta, listas, diagrama ícono-barra, o bien de la tabla-icónica en la génesis instrumental, e inclusive, en el plano del descubrimiento (plano sem-ins).

Por su parte, el conteo repetido y el uso de tachado como estrategia de conteo en la hoja inicial de trabajo, tanto en la tabla icónica como en el diagrama ícono-barra, permite verificar las frecuencias (*referencial*) obtenidas como criterios de justificación que proveen *pruebas* en la génesis discursiva, aunque también podría pensarse en el plano del razonamiento (plano ins-dis).

En síntesis, se aprecia cómo los estudiantes, ante la demanda de una tarea de estadística (una situación de AED) activan de manera articulada las génesis semiótica, instrumental y discursiva; descubren el mensaje implícito del colectivo de datos, a través de las representaciones construidas por ellos, las que permiten apoyar sus argumentos y luego a comunicar información estadística que obtienen a partir de todos los datos. El análisis de los ETM-personal de Julia y Manuel, al precisar sus génesis e interacciones, dan cuenta de las diferencias y similitudes entre las representaciones de datos de tipo gráfica y tabular.

Finalmente, el estudio muestra cómo una tarea estadística de análisis exploratorio de datos permitió que los estudiantes tuviesen un buen desempeño, pues su ETM-personal fue robusto pues activaron y articularon las génesis, pudiendo descubrir, razonar y comunicar ideas estadísticas.

Para futuras líneas de investigación, vislumbramos la existencia de elementos para promover e identificar un Espacio de Trabajo Estadístico coherente y robusto a la epistemología y a los procesos cognitivos propios del conocimiento estadístico y sus usos en otras disciplinas.

REFERENCIAS

Ainley, J. (2015). The uses of statistical literacy. En *Proceedings of the international conference turning data into knowledge: new opportunities for statistics education,* 22-23. Institute of Education of the University of Lisbon: Portugal.

Bell, A., & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the learning of mathematic*s, 2(1), 34-42.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. In *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, (pp. 3-15). Netherlands: Springer.

Cobb, G., & Moore, D. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly, 104*(9), 801-823.

Del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: Relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, *49*(1), 53-64.

Estrella, S., Estrella, P., Goldrine, T., Morales, S., Olfos, R. & Vidal-Szabó, P. (2015). Estadística temprana en los grados K a 4: el caso de Kinder. En Parraguez, M., et al. (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Villarrica, Chile.

Friel, S. N., Bright, G. W., Frierson, D., & Kader, G. D. (1997). A framework for assessing knowledge and learning in statistics (K-8). En Gal & Garfield, Eds.*The assessment challenge in statistics education* (Vol. 12). IOS Press, pp. 55-63.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., and Scheaffer, R. (2007). *Guidelines and Assessment for Instruction in Statistics Education (GAISE) Report: A PreK12 Curriculum Framework*. Alexandria, VA: ASA.

Franklin, C., & Mewborn, D. (2006). The statistical education of preK–12 teachers: A shared responsibility. In *NCTM 2006 Yearbook: Thinking and Reasoning with Data and Chance* (pp. 335–344).

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*.

Moore, D. S. (2000). *Estadística Aplicada Básica*. 2ª Edición, Antoni Bosch editor.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2009). *Navigating through data analysis and probability in prekindergarten-grade 2* (Vol. 1). Reston, VA: Author.

Reys, R., Lindquist, M., Lambdin, D., Smith, N., & Suydam, M. (1993). *Helping children learn mathematics* (6th ed.). New York: John Wiley & Sons.

Tufte, E. (1983). *The Visual Display of Quantitative Information*. Cheshire, CT: Graphics Press.

Tukey, J.W. (1977). *Exploratory Data Analysis.* Reading, Mass: Addison-Wesley Publishing Co.

Watson, J. M., & Fitzallen, N. E. (2010). *Development of graph understanding in the mathematics curriculum. Report for the NSW Department of Education and Training.* New South Wales: Department of Education and Training.

Yang, D. C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2009). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(2), 383-403.

MATHEMATICAL WORKING SPACES SUPPORT THE TEACHING OF PROOF WITH HISTORICAL TEXTS

Vasiliki Tsiapou[1] & Kostas Nikolantonakis[2]

[1]Primary school teacher & PhD student, University of Western Macedonia, [2]Associate Professor, University of Western Macedonia

vana@semiphoto.com, knikolantonakis@uowm.gr

In the present paper we present the way we integrated texts from the history mathematics in a didactic intervention for developing proving abilities to Greek students of the sixth grade in order to facilitate the transition to middle school geometry. We combined the Theory of Semiotic Mediation with the didactic model of MWS arguing for the necessity of an intermediate social-semiotic plane that would enable to detect how meaning, as process that bridges the epistemological with the cognitive plane of MWS, is constructed, by analyzing the teacher's and the students' actions and reasoning with semiotic lenses. With examples from teaching we exemplify the model in relation to the objective.

***Keywords**: original sources, primary school, mathematical working spaces, semiotic approach, proof*

INTRODUCTION

Across the world, a common aim of school mathematics is to provide a foundation for students to justify claims based on mathematical reasoning (e.g. Yackel & Hanna, 2003). Despite the recommendations that reasoning and proving should start from the early grades, research findings have shown that the notion of proof has traditionally been associated with secondary school, thus there is a delayed engagement in the practice of proving (e.g. Stylianides, 2007). Accordingly, and in relation to geometry, when students enter the Greek gymnasium (grade 7) an increase in logical rigor is demanded that does not build on the students' proving experience of the elementary school (Sdrolias & Triandafillidis, 2008). Houdement and Kuzniak (2003) ascribe this delay to the different reference 'Geometries' of the two institutions which in turn affect the practices of the educators. In the elementary school teachers mainly teach a 'spatio-graphic' geometry (GI) where figures are perceived as 'images' and proofs lean on drawings or observations are made with measurement and drawing tools, or by folding and cutting. On the other middle school teachers focus on a 'pre-axiomatic geometry' (GII) where figures exist from properties and definitions. Nevertheless, GII does not entirely concern formal mathematics; it is a transitional level which could begin from the elementary school and be enriched in middle school.

In the paper first we discuss the theoretical frameworks to exemplify our conception of learning and the concomitant implications on teaching. Afterwards we show how we combined them by inserting a social semiotic plane in the model of MWS for teaching reasoning and proof towards GII with the aid of the historical source. With examples from didactic sessions, we focus on the teacher's and the students' actions and reasoning, while engaging with tools, along with reflections from teaching.

THEORETICAL PERSPECTIVES

Mathematical Working Spaces – A model for didactic configurations

The model of Mathematical Working Spaces (MWS) has been developed to describe the mathematical work of the teacher and the students. Recently Kuzniak, Nechache and Drouhard (2016) proposed categories of *tools* for the poles of the epistemological plane:

a. *Semiotic tools* are the signs of mathematical objects organized in 'registers' like language, symbols, figures, etc. and can be modified within the same register (*treatments)* or into another register *(conversions)* (Duval, 2006), with the latter to enhance mathematical understanding.

b. *Technological tools*, are material tools for constructions;
c. *Theoretical tools,* are the properties and theories of mathematical objects.

The cognitive plane (*visualization*, *constructions,* and the *proving process)* is connected with the epistemological with three geneses: *A semiotic genesis* occurs when we decipher signs during visualization. Examples are, the recognition of sub figures in a figure (*perceptual apprehension)*, or the division of a figure into sub-figures and the combination in another one (*operative apprehension)* (Duval, 1995). On the other, when a new sign is produced due to visual explorations, we speak of encoding. In *instrumental genesis*, technological tools are transformed into instruments through the processes of instrumentation and instrumentalization (Rabardel, 1995). *In discursive genesis* meaning is given to properties used within mathematical reasoning of proof, while the identification of properties and definitions enrich the referential with new theoretical tools. The three geneses do not operate separately; three vertical planes (fig.1) account for the organization of the work according to the objectives of the task (Coutat & Richard, 2011):

– *SEM-INS*; the work maybe oriented towards the construction of figures satisfying some conditions or the interpretation of data given by tools. Duval (2006) calls the latter 'dimensional deconstruction' for explaining the visual work that guides the perceptive process. In that case, a figure needs to be seen not only as 2D-objects (e.g. areas), but also as 1D-objects (sides) or 0D-objects;
– *INS-DIS***:** If conclusions are drawn from data given by the use of tools the work is oriented to the instrumental side. If one justifies the construction by appropriate geometrical reasoning, the focus is on the discursive side;
– *SEM-DIS*: the recognition of a mathematical object in its figural representations. The importance of the synergy between the semiotic and the discursive side is evident in Duval's argument for the connection of *perceptual* and *operative apprehension* with *discursive apprehension*.

Learning through a social-semiotic approach

Learning for Vygotsky (1978) is the 'internalization' of cultural forms of thinking in the individual's mind. The process starts in the inter-personal level and it involves the production of *signs* through the use of *artifacts (or tools)* and *social interaction*. Then the process is oriented to the intra-personal level where the interpretation of the signs takes place, as a meaning making process. Bartolinni Bussi and Mariotti (2008) in their *Theory of Semiotic Mediation* (TSM), characterize as artifacts not only material tools but also oral and written forms of language on the grounds that they all embed the mathematical signs of an accumulated human knowledge. They call 'primary artifacts' those used for constructions and 'secondary artifacts' those for the transmission of skills or modes of action, like historical texts, didactic movies, mathematical theories etc. In addition, secondary artifacts are often interpretable in terms of experience with primary artifacts. The authors stated the assumption that: 'any artifact is a *tool of semiotic mediation* as long as it is intentionally used by the teacher to mediate a mathematical content through a designed didactical intervention' (p.754). The proposed methodology is based on the following points (Mariotti, 2006):

a. the teacher analyzes the artefact from an epistemological and cognitive point of view for identifying its semiotic potential, in other words he/she becomes aware of both its evoked mathematical meanings, and of the students' personal meanings during the activity;
b. then he/she designs activities within a didactic cycle of interrelated phases: 1. *activities with the artifact*, centered on the use of the artefact. 2. *Activities for sign production* aimed to

generate personal signs tight to the use of the artefact. 3. *Collective discussion*s for personal signs to develop mathematical signs under the guidance of the teacher.

Connecting the model of MWS with TSM

TSM and MWS frameworks have connections given the prominent role that ascribe to semiosis, artifacts, and a referential that targets at mathematical meanings. In addition, the *multidimensional approach* to 'tools' introduced by Kuzniak, Nechache and Drouhard (2016), constitutes a broader notion of *tools* which is in analogy with TSM's notion of *artifacts*. The *semiotic and theoretical tools* of MWS could be related to the *secondary artifacts* of TSM on the grounds that secondary artifacts are *semiotic tools* that may include verbal, figural or symbolic signs and at the same time are *theoretical tools* which embed mathematical meanings in these signs. In analogy, the *technological tools* of MWS correspond to TSM's *primary artifacts.* Also both theories share Rabardel's notion of 'instrument' as construct of human's mind, a mixed entity of artifact components and mental schemes (Kuzniak, Nechache and Drouhard 2016; Drijvers et.al, 2010; Bartolini Bussi and Mariotti, 2008). The role of artifacts and signs in connection with MWS has also been studied by Barrera (2013) who argues that the dynamic arrangement of the MWS's components and of the epistemological and cognitive levels is due to the action of the sign-artifact in a context of semiotic mediation.

The model of MWS constitutes a valuable framework for the teacher for it provides the conditions for the individual's understanding of mathematics in terms of geneses, in other words it clarifies what we seek to identify. For example, with the use of *semiotic tools* at the epistemological level, the teacher may identify the different registers of representations in the cognitive level as conditions for semiotic genesis to occur. Nevertheless, a question that could be raised is 'by what means can the individual be motivated and enabled to acquire such mastery of semiotic representations and the conceptual landscape based on them?' (Winslow 2004, p. 7) or in MWS's terms, to give rise to semiotic genesis and connect with the discursive side? Kuzniak, Tanguay and Elia (2016) stressed that the analysis of a mathematical work enables 'tracking down how meaning is progressively constructed, as a process of bridging the epistemological and the cognitive perspectives' (p.721). We tried to 'track down' this progression from a social-semiotic perspective, where the relationship between tools and mathematical meanings involves the emergence and evolution of signs in terms of social interaction. For this we inserted in the MWS model an intermediate social-semiotic plane that would account for the social and semiotic phenomena that may foster or constrain the discursive genesis of proof towards GII. Throughout the paper, and for communication purpose, we will use the word 'tools' in Kuzniak's Nechache's and Drouhard's (2016) sense, instead of TSM's 'artifacts', when we refer to a resource that potentially can evoke mathematical meanings, and the word theoretical tool when the actors have evoked these meanings.

THE HISTORICAL SOURCE AND THE DESIGN OF THE INTERVENTION

Settings, Objectives, and analysis of the historical source

The participants were fourteen sixth grade students of an urban primary public school of Thessaloniki. Our initial hypothesis was that the particular students may work in geometry (GI) and the pretests verified the hypothesis. During the intervention, group work and whole class discussions were audio recorded. Other data source was individual journal writing so that students reveal their thinking for and about mathematics. The objective we analyze in this paper is the development of geometric figure understanding and proving abilities towards GII, in order to facilitate students' transition to the more theoretical geometry of middle school.

The historical texts belong to Liu Hui, a renowned Chinese mathematician of the 3rd century CE. One of them is his commentary (Chemla & Guo, 2004) on problem 1.32 of the mathematical Canon *Jiu Zhang Suan Shu* (JZSS) of the 1st century BCE or CE. Liu Hui proved the correctness of the first algorithm offered by the Canon. Commencing from a regular hexagon and inscribing double side polygons, he proved that the circle area equals *½ Circumference × ½ Diameter*. He also corrected the value of π which in the Canon was taken as 3 and reached a value between 3.14 64/625 and 3.14 169/625. The author offered detailed explanations for the construction of his proof justifying mathematically each step (Chemla, 1996). The text invites the reader to constructions (e.g. inscribe polygons) and heuristic methods (e.g. figure transformations). It also integrates various topics (geometry, algebra, arithmetic) and links procedural knowledge (formulas) with conceptual knowledge (process pattern generalizations, theoretical arguments).

Teaching the historical text within the revised model of MWS

We present the operation of the revised model in connection to the present intervention. The activities for each excerpt of the historical source were following the phases of the didactic cycle, and the relevant tasks were organized under the revised model of MWS. Depending on the goals, we were organizing the epistemological plane using as theoretical tools the historical source, and other secondary sources that exemplified the source for analyzing the ancient author's reasoning. In conjunction with students' reference knowledge, we were deciding on the working methods, along with the semiotic and technological tools to be used. For example, for exploring students the historical text, we parsed it into small excerpts without modifications. On the other we replaced the author's algebraic computations with other methods in the grasp of students. Then we were anticipating a conjectured learning process by articulating the vertical planes (the route of MWS) taking into account both the students' cognitive processes or the difficulties they might encounter, and the organization of the epistemological plane.

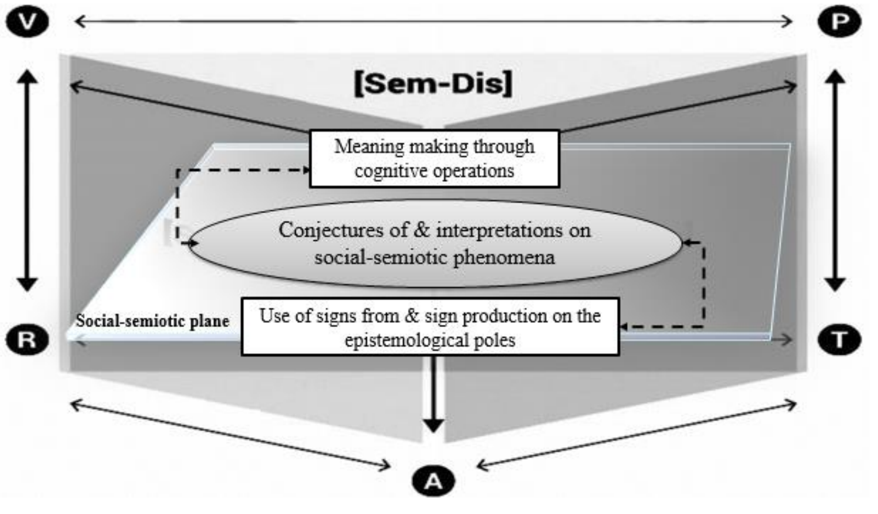


Figure 1: Operation of the social –semiotic plane in the model of MWS of Kuzniak, Tanguay and Elia (2016)

During the design, the teacher marked on the social-semiotic plane actions (fig.1) that would possibly support the learning process: a) forms of social interaction (individual, pairs/groups, or whole class) b) teacher's and students' movements (e.g. scaffolding, collaboration, justifications, and degree of mediation). After teaching, the rise or constrain of the various geneses was interpreted in terms of the teacher's and the students' signs and meanings during the tool mediated social activity. On the social plane, we were placing closer to the cognitive plane our conjectures or interpretations of students' meanings as resulting from reasoning, visual or construction processes. Close to the epistemological plane we were placing the actors' use of tools stemming from the three poles and also their sign productions (e.g. oral, written, graphic, and kinesthetic). Moreover, each action or reasoning was placed near the relevant pole.

ACTIVITIES WITH AN EXCERPT OF THE HISTORICAL TEXT

We present an activity centered on an excerpt of the historical proof. Firstly, we briefly mention some background activities with Liu Hui's introduction to his proof for highlighting both the surrounding mathematical content of the excerpt and the students' proving process in the initial stage of the intervention. Then we present the excerpt and we analyze the 'semiotic tool' proposed by the ancient author. Afterwards we give an overview of the planning process and focusing on specific goals we discuss the teacher's didactical configurations within the revised model of MWS regarding the design, and her reflections on concrete examples from teaching.

Background activities

> "Let the diameter of the circle be 2 chi. The length of one side of a hexagon inscribed in the circle is equal to the radius".

Students following Liu Hui first inscribed a hexagon in a circle of radius 10 (chi: a unit of length measurement in ancient China). For verifying the excerpt's assertion that the hexagon's side equals the circle's radius, students were prompted by the teacher to justify by reflecting on the construction process, and not on eye perception or on the measurement of the corresponding segments, a first attempt for reasoning in GII connecting the instrumental with the discursive side of MWS. A second passage to GII was attempted when the area of the hexagon was under consideration, implicit in the original text. For this Liu Hui used algebraic calculations but the students created various sub-figures (fig.2) and were asked to prove why these subfigures are what are stated to be. For example, for answering 'why' the three subfigures are rhombi, and not parallelograms, (last construction of fig.2) students recalled the definitions of the two quadrilaterals but the members of a team measured the sides and the angles (a GI acceptable proof) for proving that they are rhombi. On the other hand the teacher oriented students to use the *radius-hexagon side* relationship, a passage to GII for justifying the value of the sides. In this initial phase of the intervention students were unaware of the teacher's intentions to establish a new didactic contract that is to reason deductively. Although they accepted as logical the new proof, they considered it as just an alternate of their own.

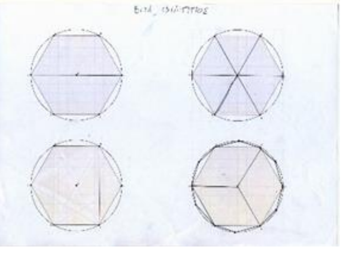


Figure 2: The different sub-figures of the 6gon

The illustrative excerpt and a potential instrument for extracting its meaning

In what follows we analyze the potentiality of Liu Hui's semiotic tool for evoking the mathematical meaning of the excerpt, thus, to become a theoretical tool:

> "If we multiply the radius by one side of the hexagon and then by 3, the product is the area of an inscribed dodecagon".

From the excerpt, Liu Hui's general area formula of an inscribed dodecagon is revealed: *Area dodecagon= 3 hexagon's side · ½ diameter* (and the equivalent *½ perimeter of the hexagon* × *½ diameter*). The formula is the first of a series that leads to the circle area formula through gradual process pattern generalizations and enables the reconfiguration of the dodecagon into a rectangle (fig. 3), a hidden heuristic assumption in the text. For Liu Hui it was natural to reconfigure the 12gon (a visual proof) because in this way he had already proved the area of other planar figures (for details see Man Y-K, 2004). In general, visual proofs were cultural practice in ancient China also connected with the dominant philosophy of Dao whose one of the basic principles is that everything in nature changes forms but its nature remains the same, a rather poetic description, we would say, of Duval's mereologic way. Visual proofs are also part of the elementary students' practice and for this Liu Hui's reconfiguration was not expected to be perceived as alien or bizarre. In the elementary grades, visual proofs usually remain in the instrumental-semiotic plane for the reason that the focus is on the partial 2D regions whose area is found after measuring sides. But in the case of the excerpt theoretical arguments must enter the scene. The deconstruction of the rectangle in its dimensions is prerequisite, namely the width and the height, and be related to the hexagon's sides and the radius. In this way students will deduce and also justify Liu Hui's formula. Otherwise, the conversion from the verbal register of the excerpt to the symbolic *3 hexagon's side* $\cdot$ *½ diameter* will remain meaningless.

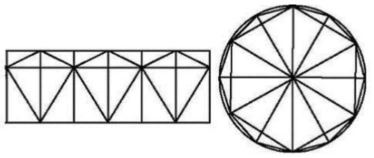


Figure 3: Liu Hui's reconfiguration (Man Y-K, 2004)

An overview of the planning process centered on the use of the 'tool' within the activity

The plan included the goals, and the concomitant teacher's actions: reasoning on cognitive processes, articulation of the planes, and the outcomes in terms of geneses (fig.4). The sub-goals were students to find: 1. spatial relations between the two representations; 2. From this to reason on property relations and calculate the rectangle's actual area based on the previous relations; 3. To deduce the generalized formula *3 hexagon's side* $\cdot$ *½ diameter*, and the equivalent *½ perimeter hexagon* $\cdot$ *½ diameter*. The synergy between figural and discursive genesis in turn would give meaning to the excerpt of the original text, thus become a *theoretical tool*.

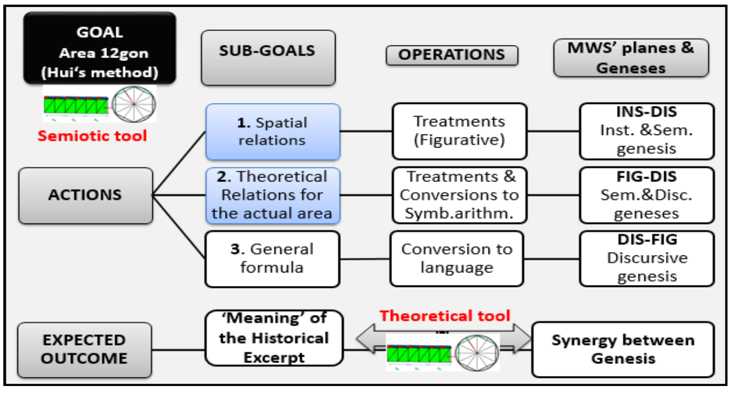


Figure 4: An overview of the planning process

The design of tasks for sub–goal 1 and 2

Here we concentrate on sub-goals 1 and 2. For the design of relevant tasks the teacher needed first to organize the epistemological plane that is to decide on the tools to be used:

Semiotic tools: The two representations of the 12gon on a worksheet.

Technological tools: Software application (fig.5), created by the authors. The application is interactive for it allows the actual reconstruction of Liu Hui's representations. It also offers the possibility to move back and forth the triangles that constitute the inscribed 12gon and could be useful for recognizing students spatial and property relations between the two representations.

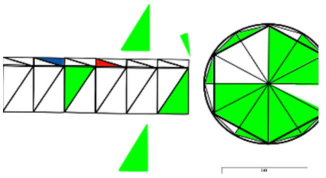


Figure 5: The reconfiguration of the 12gon with software application

Students' theoretical tools: prior knowledge of property relations between the hexagon and the circle (see background activity); the definition of the apothem and its construction on a regular polygon; prior reconfigurations of quadrilaterals for finding their area, e.g. the area of the rhombus by transforming into a rectangle and proceed to dimensional deconstruction for finding the area formula.

Then the teacher conjectured a learning process mapped on the revised model taking into account the required cognitive processes and possible obstacles, and the tools for articulating the vertical planes.

<u>*A conjectured learning process for sub-goal 1*</u>: The task requires treatments in the figurative register, and more particularly the dimensional deconstruction of the rectangle in its width and the height. Students should make mental rotations to find where these segments fit on the figure of the inscribed 12gon, an indication of operative apprehension. This will help them later to discuss in terms of property relations, prerequisite for deducing and justifying Liu Hui's formula.

For sub goal 1 the work in the MWS was conjectured in the following way (fig.6):

1. The work could be located in the DIS-SEM Plane. Starting from the theoretical pole, the teacher evokes prior reconfigurations of other figures, for students to reason by analogy and to proceed to dimensional deconstruction. Then through mental rotations to visualize the spatial relations. Because the worksheet's representations is static, all students may not be able to work in the DIS-SEM plane.
2. Alternatively, the work may be located to the INS-SEM plane. Students may use the application in a collaborative way to proceed to virtual rotations (move and rotate triangles that are near the base and the height from one representation to the other).
3. Then they will be able to visualize more easily the spatial relations.
4. The expected outcome is semiotic genesis which may encoded in students oral or written signs.

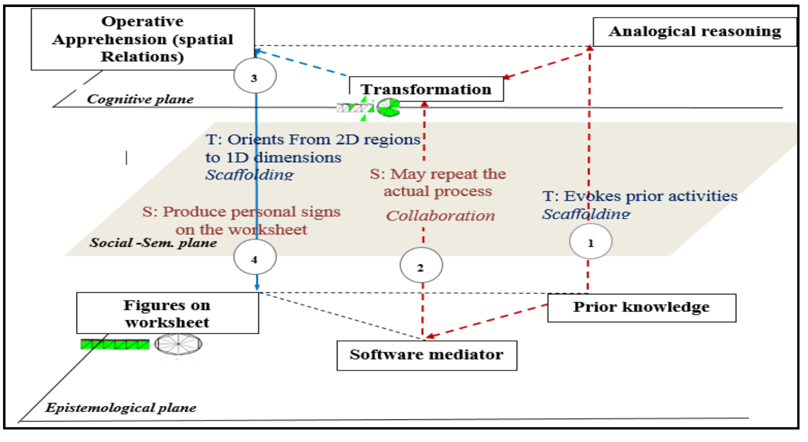


Figure 6: A conjectured learning process for sub-goal 1

Operative apprehension does not require mathematical justifications, so the realization of sub goal 2 is essential for bridging with the discursive side and students find property relations based on deductive reasoning, a task that also requires treatments in the figurative register. Then they can proceed to calculate the dimensions (and the area) a task that requires conversion to symbolic arithmetic. The whole mathematical work revolves around the SEM-DIS plane.

A conjectured learning process for sub-goal 2:

5. Once the spatial relations are established the teacher evokes knowledge about property relations from previous excerpts (i.e. the hexagon's side and the circle radius) for students to use in the new situation.
6. In this way the teacher also tracks the evolution of mathematical meanings in individual students.
7. The task may cause difficulties; they may focus on the 2D triangular regions for calculating the area of the whole rectangle. They would measure the base and the height of the triangles for finding partial area and then calculate the whole area (see background activities). But in the historical text's case a change in focus is required and this time students are expected to use only the dimensions of the rectangle. So the teacher's mediation may be rather strong for orienting students from the semiotic to the discursive pole and reason this time by deduction**.**
8. Finding property relations will help students to calculate the dimensions (and the actual are) without measurements.
9. Depending on students' reasoning the personal signs, for the area calculation, oral or written on the worksheet, will reveal theoretical or empirical reasoning.
10. The expected outcome that will enrich the referential is the rise of discursive genesis through the synergy with semiotic genesis.

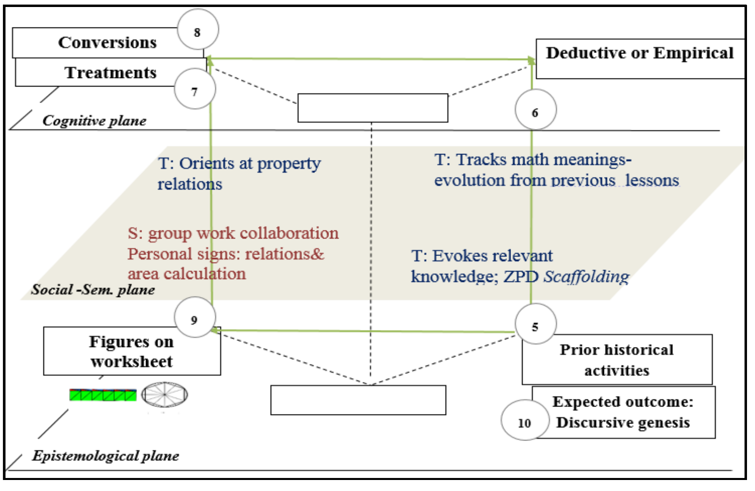


Figure 7: A conjectured learning process for sub-goal 2

Examples from teaching and Reflections

Bellow we present two dialogues from teaching following the three members of a team. The activity belongs to the 2nd phase of the didactic cycle that is activities for the production of personal signs. Each dialogue is accompanied by descriptions of the actual learning process mapped on the revised model of MWS, and interpretations about the social and semiotic phenomena that influenced the learning process.

Dialogues from the actual teaching (part I)

We follow the three members of a team. Sub-goal 1 (spatial relations) was the target but as the dialogues showed there was a quick passage to sub-goal 2 regarding property relations.

Teacher: How could we find the rectangle's area instead of separately calculating each triangle?

Mariam: Base times height.

Teacher: Ok. Why do you say that?

Mariam: It is a rectangle. Don't we find the area of a rectangle in this way?

Teacher: If we proceed with Mariam's proposal we need to find the length of the base and of the height, right?

Mariam: The height is one side of the big triangle plus one side of the small triangle.

Alex: Should we write it down?

Teacher: Can you find what this side is for the circle?

Mariam: A radius*! (Looking for a while at the figure)*

Alex: I am lost!

Pelayia: Me too!

Teacher: Ok. Explain to your team, Mariam, and, if they agree, write down your thoughts in your worksheet how you found it.

Mariam explains tracing lines on the height of the rectangle (figure 8).

Mariam: Look! The height of the rectangle is not one line, there are two. If you rotate the green triangle back in the circle, this line *(pointing at the long part of the height)* is the apothem of the 6gon and this line of the small blue triangle (*pointing at the small upper part of the height)* is the remaining portion. Altogether are the radius.

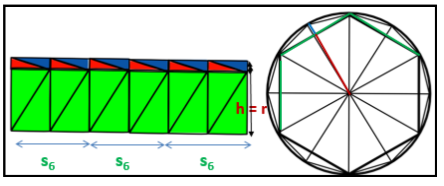


Figure 8: Spatial and property relations between the two representations

Teacher: Try to think about the base too in the same way, I mean to find relation between the base of the rectangle and the inscribed figures.

The teacher comes back to the team a few minutes later.

Alex: We found that the base has six half sides of the hexagon. Six half? *(Alex wonders)* This makes 3 whole sides. *(The others agreed laughing).*

Description of the actual MWS (part I)

The dialogues were mapped on the model of MWS. Mariam is marked as S_1, Alex as S_2, and Pelayia as S_3 (fig.9). The team did not use the application so the work revolved only around the DIS-SEM plane. In the actual teaching both sub-goals 1 and 2a were addressed because:

1. After the teacher's prompt for a different solution strategy for the area of the rectangle (instead of partial areas), a student not only recalled the area formula but also recognized the spatial relations (sub-goal 1) of the two figures without the need of the application. She expressed with multimodal signs mentioning colored parts and mental rotations, indicators of operative apprehension.
2. The teacher continues to sub-goal 2 by evoking prior knowledge

3. The same student responded with a mathematical sign *'the height of the rectangle equals the circle radius*' (sub-goal 2).
4. But the other members of the team could not ascribe any meaning to the sign.
5. The more capable peer was assigned by the teacher to collaborate and explain her thinking. She expressed herself with informal multimodal signs, like imagining mental rotation, and referring to colored parts.
6. The collaboration was successful, since another member contributed with a mathematical sign of his own, *'base = 3 hexagon sides'* (sub-goal 2), when the teacher asked to think in a similar way for the base of the rectangle.
7. These contributions were coded as synergy between operative and discursive apprehension that gave rise to discursive genesis.

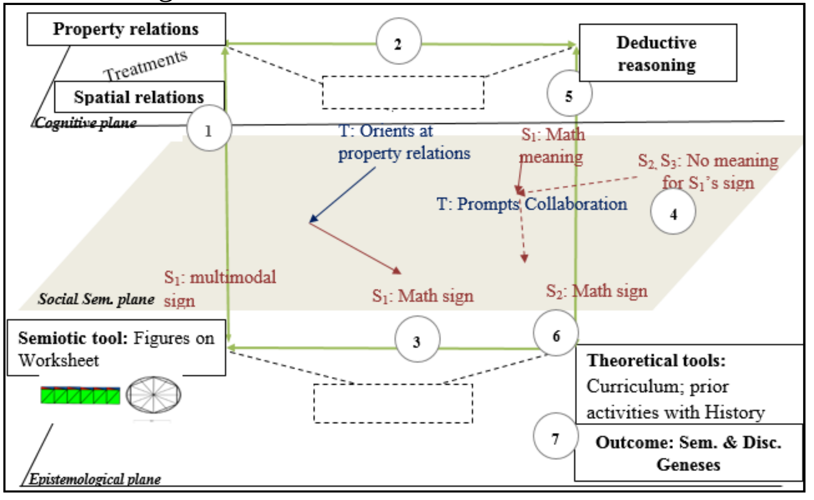


Figure 9: The MWS during teaching (part I)

Reflections in the social semiotic plane (part I)

The actual mathematical work was an example of different conjectured and actual processes. Since a student easily found the spatial relations, the teacher decided not to propose the use of the application (work in the SEM-INS plane) and remain in the FIG-DIS plane. The reasons for such a change were captured by the intermediate social plane and became object of reflection for the teacher about her didactic manipulations. One would say, for example, that the teacher should give more time to students to find the spatial relations using the digital artifact instead of pressing for property relations because only one student who was ready to work with property relations. In fact, the other students' utterance *'I am lost'* showed that they experienced frustration. What helped students to overpass the difficulty, can be explained in terms of peer collaboration, prompted by the teacher, evident in the Alex's signs for the spatial relation between the base of the rectangle and the 6gon's sides.

Dialogues from teaching (part II)

The dialogues concern the values of the dimensions of the rectangle based on the previous property relations (continue of sub goal 2).

Teacher: What is the length of the hexagon's side?

Mariam: 10 cm.

Teacher: Can someone explain why Mariam said that the side equals 10? Alex?

Alex: I don't know. She must have measured.

Mariam: I did not! The side of the hexagon equals the radius. We know that!

Teacher: Alex, look at the hexagon you have constructed. Remember how you constructed the 6gon. Each side of the 6gon is part of another figure. Try to think from the beginning the process

The team gathers around the 6gon hanging on «Liu Hui's corner» in the classroom (fig.10).

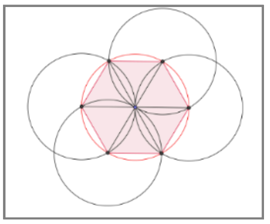


Figure 10: The figure of an inscribed hexagon, as semiotic tool

Mariam: Every radius is a side of the hexagon *(using the thumb and the index she pretended that she was transferring the same radius to all the surrounding circles that were constructed based on the central circle)*

Pelayia: All the circles have radius 10 *(making compass movements with the hand on the figure, as if constructing circles around the central)*

Alex*:* Yes, right…we did it [the hexagon] with the circles around. We made all circles with the same radius. So it is 10 [meaning one of the 6gon's sides that constitute the base of the rectangle] and all [the whole base] is 30 *(tracing the base with a pencil).*

Description of the actual MWS (part II)

The dialogues were mapped on the model of MWS (fig.11) and showed that the actual learning process was also different from the conjectured one, meant to revolve around the DIS-SEM plane (fig. 7). A student's sign and meaning made the teacher to orient the students to work in the INS-DIS plane, even if not real compasses were used, but only the memory of the construction process with compass.

4. Initially the work began in the semiotic side when the teacher asked about the length of the hexagon's side and targeted to the discursive side for students to reveal their reasoning, either empirical based on measurements or deductive based on relations. A student offered a math sign but the reasoning behind was not evident.
5. The teacher asked another member of the team to interpret the sign but his answer showed that he had an empirical interpretation in mind (measurements).
6. The first student recalled knowledge from previous activities to defend her sign: *'The side of the hexagon equals the radius",* and that, by construction, the value of the radius was 10. Thus the personal sign proved to be mathematical.
7. The teacher decided to orient students to the 6gon's figure conjecturing that Mariam's claim was oriented from previous instrumented activities.
8. The teacher prompted students to recall the process, which helped students to reason on the construction steps and comprehend Mariam's claim.
9. As a result, another member of the team produced a new mathematical sign, about the value of the base using relations.
10. The outcome of the activity was that two students made successful conversions based on relation between figures and not on empirical measurements because of the synergy between instrumental and discursive geneses.

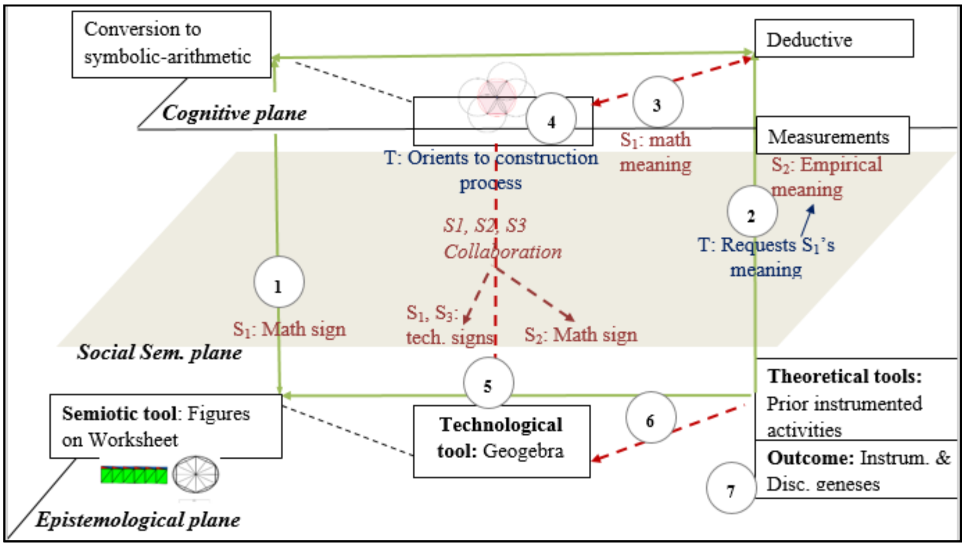


Figure 11: The social semiotic plane in MWS during teaching (part 2)

Reflections in the social semiotic plane (part II)

The synergy between figural and discursive geneses, helped students to start reasoning deductively. The reasons for the evolution of mathematical ideas could be analyzed in the semiotic plane. As the dialogues showed, Alex thought that Mariam had measured for the value of the 6gon's side. But Mariam's warrant for such a claim was backed by the process of the construction of the hexagon in previous activities, a knowledge that proved to be not very solid for Alex and Pelayia. A change in the students' view occurred, after the teacher's decision to use Mariam's implicit knowledge and orient the team around the figure of the hexagon hanging on the wall (fig. 10), a construction of previous activities when students confirmed the excerpt 'the side of the 6gon equals the radius' (see background activities). The team worked in the FIG-DIS plane, on the basis that communication revolved basically around the relation between the circle and the hexagon and not on mere description of the construction process. In a collaborative way, the team recalled the process by making kinesthetic manipulations, transferring same sized radii using thumbs and indices, mental rotations of the compass. With these mathematical signs, though informal in nature and not with adequate terminology, they justified the meaning of Mariam's claim. Also in instances, a degree of generality was achieved, detached from the arithmetical values (radius=10cm) of the concrete artifact, evident in Alex's utterance: *'Yes, right…we did it with the circles around. We made all circles with the same radii'.* This was a departure from the concrete representation and its numerical constraints to a generic representation that is free from any numerical value. We could say that the figure of the hexagon in the beginning was a semiotic tool of the epistemological plane hanging on the wall, but by the time the embedded mathematical sign became apparent, it acquired the status of a theoretical tool which enriched the referential with new elements from GII, thus became an instrument.

DISCUSSION

In the paper we have discussed how we integrated a historical text from the history of Chinese mathematics in the Greek elementary school. The historical text we used is Liu Hui's proof for the circle's area formula and the approximation of π. The objective we discussed was the development of students' reasoning and proving abilities for facilitating their transition to middle school, an educational level where mathematical proof is introduced in a rushed way that does not build on students' previous experience. For achieving our objective, we connected the model of Mathematical Working Space (MWS) with the Theory of Semiotic Mediation and we integrated a social semiotic plane between the epistemological and cognitive planes of the MWS. The reason for such a choice was that both frameworks could complement each other. MWS is a valuable framework for it gave insights for the conditions of an individual's understanding and is effective in didactical configurations for it bridges cognitive and epistemological aspects of mathematics in terms of geneses. On the other hand, the Theory of Semiotic Mediation (TSM) that conceives learning as a meaning making process within a collective activity, offers semiotic lenses both for the analysis of the mediating tools, and for the analysis of the classroom's semiotic and social phenomena.

Depending on the goals of an activity, we were mapping on the revised model of MWS a conjectured learning process within which the various geneses would emerge. This process enabled the teacher's decisions on the articulation of the mathematical work along with conjectures about the social and semiotic phenomena that would support the work, thus would allow the rise and the synergy between geneses. After teaching, the effectiveness of the mathematical work was analyzed based on the teacher's and the students' signs and meanings during the collective tool mediated activity.

With the hope to exemplify the operation of the model, we presented an illustrative activity which was built around an excerpt of the historical proof with the mediation of a semiotic tool proposed by the ancient author. After analyzing the potentiality of the tool for evoking the meaning of the historical excerpt, the design of the tasks followed. With concrete examples from activities that targeted at the emergence of students' personal signs and meanings, we showed how we mapped on the revised model the conjectured learning processes, and the descriptions of the actual mathematical work, accompanied with interpretations from a social semiotic point of view.

At the point where the dialogues ended, the mathematical meaning of the excerpt was still hidden, for the reason that future activities would lead to the generalized formula and the mathematical meaning of the excerpt would unfold. If we consider, though, students' reasoning and proving abilities we could say that it increased, compared to the background activities. We believe that under the teacher's guidance, and also under peer's collaboration, an agreement has been made towards mathematical meanings, evident in the student's personal signs. These signs were tight to the use of tools, but in instances a departure was observed from the concrete tools and its numerical constraints to a generic representation free from numerical values.

The proposed social semiotic plane has limitations because it enables a micro analysis of interactions, difficult to imprint on a plane. Nevertheless, while using it for the analysis of the data it was found useful for the following reasons. The teacher after coding the audio or videotaped dialogues of a team was choosing the critical moments for placing on the model. Comparing different didactic sessions, she was tracking the evolution of mathematical meanings in individuals' students' thinking and how these meanings were influenced by the tools and the social activity (the team work, the teachers' mediation or collective discussions). The above process was being repeated for all the teams. Sometimes we needed to create more than one models when the discussion was about different mathematical themes or if there was a need for more detailed descriptions of a particular session (e.g. interesting arguments, difficulties, dead ends etc.). The model also helped the teacher's reflections on her own teaching for making deliberate adjustments or corrections.

As final remarks, we would say that integrating texts from the history of mathematics in the particular school level seems challenging, yet, the current study responded to the need for detailed empirical studies arguing by means of theoretical constructs (e.g. Clark, 2014). Moreover, because the generalizability of the results is difficult as in traditional experimental research (Bakker & van Eerde, 2015), we attempted to provide detailed descriptions of the teaching-learning process under which the particular classroom integrated the historical text so as the 'outsiders will have a basis for deliberating adjustments to other situations' (Gravemeijer and Cobb, 2006).

REFERENCES

Bakker, A., & Van Eerde, H. A. A. (2015). An introduction to design based research with an example from statistics education. In A. Bikner- Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Doing qualitative research: methodology and methods in mathematics education*. New York: Springer.

Barrera, R. (2013). On the Geometrical Meaning of Multiplication: Geometrical Working Space, Students' Mediation and Chosen Paths. *Proceedings from CERME 6,* Working Group 16, 2.790-2.799.

Bartolini-Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective, In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education, second revised edition* (pp.746-783). Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Chemla, K. & Guo, S. (2004). *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*. Paris: Dunod.

Clark, K. M. (2014). History of Mathematics in Mathematics Teacher Education. In M.R. Matthews (ed.), *International Handbook of Research in History, Philosophy and Science Teaching* (pp. 755-791). Dordrecht: Springer.

Coutat, S., & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 16, 97-126.

Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology—rethinking the terrain* (pp. 89–132). New York: Springer.

Duval, R. (1995): Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In R. Sutherland and J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 103-131

Gravemeijer, K.P.E., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In J. Van den Akker, K. P. E. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 17-51). London: Routledge.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2003). Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms, In M. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the third Conference of the European Research in Mathematics Education*. Paris, France.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM*, *48*(6), 861-874.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, *48*(6), 721-737.

Man, Y-K. (2004). A study of the area Formulas in JZSS and its inspirations to mathematics teaching, In Furinghetti, F., Kaijser,S., and Tzanakis, C. (Eds) *Proceedings HPM 2004 & ESU 4* – Revised edition, Iraklion, Greece: University of Crete, pp. 254-260.

Mariotti, M. A. (2006). New artefacts and the mediation of mathematical meanings. In C. Hoyles, J-B. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study*

Conference, Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain (pp. 378-385). Hanoi University of Technology: International Commission on Mathematical Instruction.

Mariotti, M.A., & Maracci, M. (2012). Resources for the teacher from a semiotic mediation perspective. In G. Gueudet, B. Pepin, &, L. Trouche (Eds), *From text to 'lived resources': curriculum material and mathematics teacher development* (pp. 59-75). New York: Springer

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Sdrolias, K.A., & Triandafillidis, T.A. (2008). The transition to secondary school geometry: can there be a "chain of school mathematics"? *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 159-169.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289–321.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: NCTM.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard: University Press

Winsløw, C., 2004. Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *9*(2), 81-100.

EL USO DE LA ESCRITURA COMO HERRAMIENTA METACOGNITIVA EN LOS PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Luz Graciela Orozco Vaca

Cinvestav – IPN

lorozco@cinvestav.mx

En este escrito se describen los resultados de un experimento de enseñanza, el cual tiene como objetivo apoyar a los estudiantes de secundaria (9° grado) en la resolución de problemas de geometría con el uso de la escritura como una herramienta metacognitiva durante todo el proceso. Pretendemos que la escritura nos ayude a provocar en los estudiantes un proceso de análisis en sus conceptos matemáticos y técnicas de trabajo, para lograrlo diseñamos consignas, presentadas a los estudiantes como preguntas sencillas, a través de las cuales trabajen la escritura como herramienta metacognitiva en la resolución de problemas de geometría, con el fin de organizar y monitorear los elementos que intervienen en el proceso de la actividad.

***Palabras Claves**: Escritura, Herramienta Metacognitiva, Resolución Problemas*

INTRODUCCIÓN

A lo largo de mi experiencia profesional como docente he observado una deficiente comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos por parte de los estudiantes, así como estrategias desorganizadas en la resolución de problemas. Esta desorganización se percibe cuando ellos comienzan a resolver un problema pero no distinguen claramente los datos, ni los procedimientos y el razonamiento que desarrollan para llegar a la respuesta. De la misma manera las anotaciones que realizan en el proceso son desorganizadas y carecen de un carácter sistemático.

El programa de estudios de matemáticas en México de acuerdo con el plan de estudios de la Secretaría de Educación Pública (2011), tiene entre sus propósitos desarrollar en los estudiantes un pensamiento que les permita enfrentar todas las dificultades hasta llegar al trabajo autónomo, considerando la inserción de la resolución de problemas dentro del currículum de educación básica conectando dos campos: el de lenguaje y comunicación con el de pensamiento matemático.

Por otro lado, de los cinco estándares propuestos por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) para la educación matemática, tres se empalman directamente con el primero: resolución de problemas; cuando en el aula clase se resuelve un problema se trabaja en conjunto la comunicación entre los estudiantes, al igual que el razonamiento y la demostración de que su respuesta es correcta, en conjunto con las representaciones que se utilizan en el proceso de solución.

La divergencia entre los dos modelos educativos es que los estándares de la NCTM se han trabajado más de tres décadas (desde los años 80's con pequeñas modificaciones aplicadas en el año 2000), mientras que el plan de la Secretaría de Educación Pública (SEP) entra en función a partir del 2011, después de 6 años consecutivos de aplicar la evaluación ENLACE en educación básica a nivel nacional.

Conviene señalar que aunque en el plan de estudios del 2006 también se tenía un enfoque a la resolución de problemas ENLACE influyo para que la mayoría de los profesores lo pasarán a un segundo término. Esta evaluación de opción múltiple enfocada a español, matemáticas y otra asignatura versátil del plan de estudios se aplicó en cada ciclo escolar del 2006 al 2013, por una parte ayudó a diagnosticar el nivel educativo; pero después del 2008 (en que se compararon los centros educativos de acuerdo con sus resultados obtenidos), se dio un efecto secundario ya que muchos profesores y estudiantes, en sus esfuerzos por mejorar el puntaje de sus escuelas, se enfocaron a trabajar estrategias para tener éxito en las pruebas de opción múltiple, en detrimento de las habilidades para hacer frente a preguntas abiertas en la resolución de problemas de matemáticas.

En el presente trabajo exploramos si el escribir de forma sistematizada puede ser una herramienta que les facilite la resolución de problemas, para ello diseñamos un experimento de enseñanza que plantea utilizar estrategias de escritura como organizador de los elementos que intervienen en distintas fases de las actividades para la resolución de problemas de geometría en noveno grado; encaminando a los estudiantes por medio de preguntas para hacer conjeturas y reflexiones durante todo el proceso para llegar a la solución.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Con el propósito de entender el papel que juega la metacognición en la educación de ciencias naturales Veenman (2012) hace un análisis de la literatura de investigaciones en educación donde ésta interviene. Examina las múltiples diferencias en cuanto a la descripción de este concepto por cada autor así como la falta de acuerdo existente acerca de los componentes de la metacognición y la relación que se establece entre estos elementos (Veenman 2006). Encuentra útil hacer una distinción entre el conocimiento metacognitivo y las habilidades metacognitivas.

El conocimiento metacognitivo lo describe como el conocimiento sobre el sistema cognitivo, como un conocimiento declarativo sobre la interacción entre la persona, la tarea que realiza y las características de la estrategia que utiliza. El conocimiento metacognitivo tiene sus raíces en las creencias de una persona y es un requisito para la obtención de habilidades metacognitivas.

Veenman está de acuerdo con Flavell (1970) en los dos sub-componentes del conocimiento metacognitivo: La meta-memoria que es el conocimiento declarativo sobre las capacidades y los procesos que afectan a la memoria. El conocimiento condicional que es el conocimiento declarativo de cuando aplicar una estrategia y con qué propósitos. Al utilizar una estrategia metacognitiva de forma consciente, paso a paso y gradualmente se transforma en una habilidad metacognitiva.

El conocimiento metacognitivo se evalúa a través de cuestionarios aplicados después de realizar la tarea, pregunta por pregunta o por medio de entrevistas retrospectivas, aunque no se puede reflejar el conocimiento que realmente se utiliza durante la realización de la tarea (Veenman 2005).

Las habilidades metacognitivas son descritas por Veenman (2012), como la regulación de los procesos cognitivos, es decir la capacidad adquirida de la supervisión, orientación, dirección y control de la propia conducta en el aprendizaje y la resolución de problemas. En sí las habilidades metacognitivas son las propias actividades de aprendizaje y el principal determinante de los resultados en el mismo. Veenman hace una distinción entre las actividades que considera representativas de las habilidades metacognitivas y las separa en actividades en el inicio, durante la ejecución y al final de la realización de cada tarea en ciencias naturales (biología, química y física), como podemos ver en la Tabla 1.

Actividades de Aprendizaje		
Al inicio de la ejecución de tarea	Durante la ejecución de tarea	Después de la ejecución de tarea
− Lectura − Análisis de la asignación de tareas − Activación de los conocimientos previos − Establecimiento de metas − Planificación	− Seguir un plan − Cambiar el plan − Seguimiento − Control − Toma de notas − Tiempo y gestión de recursos	− Evaluación del desempeño − Recapitulación − Reflexión sobre el proceso de aprendizaje

Tabla 1: Habilidades metacognitivas (Veenman, 2012)

Estas habilidades metacognitivas, presentan una dificultad recurrente que se exterioriza cuando siendo actividades de orden superior se describen en gran medida en términos de procesos cognitivos de orden inferior. Por ejemplo: en el análisis de la asignación de una tarea se requiere un procedimiento de lectura y razonamiento, la toma de notas obedece a la línea de escritura, la evaluación y reflexión implica hacer comparaciones, las cuales son habilidades metacognitivas. En sí las habilidades metacognitivas constituyen la dirección mientras que los procesos cognitivos integran el medio para el empleo de esas habilidades.

Para Flavell (1979) y Nelson (1999) las conceptualizaciones de la metacognición tiene en común el enfoque de "cognición de orden superior sobre la cognición". Estas concepciones enfatizan el papel de la metacognición en la supervisión del inicio y control de los procesos cognitivos. A partir de esta perspectiva ellos tratan de desenredar el problema de habilidades de orden superior (metacognitivas) y de orden inferior (cognitivas) arraigado en la teoría psicológica.

A partir del modelo de Nelson, Veenman (2011) sugiere que la metacognición podría adoptar la perspectiva de un modelo de auto-instrucciones de arriba hacia abajo para la regulación de la ejecución de las tareas. Este proceso se puede activar como un programa adquirido mediante una lista de auto-instrucciones que se aplican cada vez que el estudiante se enfrenta a la realización de actividades. Veenman sugiere que este programa de auto-instrucciones podría ser representado por un sistema de producción de reglas condición-acción que trabajaron otros investigadores (Anderson 1996, Bluter y Winne 1995, Schunn y Anderson 1999):

- Si se encuentra con una tarea, entonces, busque la asignación de tareas y tome nota de ello.
- Si tiene una idea acerca de la asignación de tareas, entonces trate de buscar en su memoria todo lo que sabe del tema.
- Si entiende la asignación de las tareas, entonces, formule el objetivo que persigue.
- Si ha definido su meta, entonces diseñe un plan de acción para lograr su objetivo.
- Si tiene el plan de acción, entonces, continúe el plan de manera insistente.
- Si está ejecutando su plan de acción, entonces, mantenga estrecha vigilancia con lo que está haciendo y manifieste cualquier anomalía.

Este sistema incorpora una lista de instrucciones metacognitivas auto-inducidas en el sistema cognitivo. Por lo tanto va en línea con el modelo de Nelson, las auto-instrucciones incitan varias actividades cognitivas a nivel del objeto. Para Veenman es importante reconocer que tanto los procesos cognitivos como las auto-instrucciones metacognitivas que están involucrados en la ejecución de las instrucciones son parte del mismo sistema cognitivo. Siempre son necesarias las actividades cognitivas para la ejecución de cualquier proceso relacionado con una tarea en el nivel de objeto, mientras que la actividad metacognitiva representa el directivo en función de meta-nivel para la regulación de la actividad cognitiva.

Con el fin de explicar con más claridad la situación de las actividades cognitivas y metacognitivas en una tarea, Veenman compara las actividades cognitivas con los soldados y las actividades metacognitivas con el general. Explicando que un general sin soldados no puede ganar la guerra y por otro lado todo el ejército desorganizado no podrá tener éxito. En sí las auto-instrucciones dirigen siempre las actividades cognitivas, y si no tienen esta orientación no puede lograrse la tarea propuesta.

Las habilidades metacognitivas son mecanismos que tienen lugar dentro de la cabeza y permanecen encubiertas (Veenman 2006) en consecuencia no se pueden evaluar directamente, pero tienen que ser deducidas de sus resultados conductuales (Veenman 2007). La forma de evaluar las habilidades metacognitivas es a través de dos métodos: en línea y fuera de línea (Veenman 2005). Los métodos en línea son las evaluaciones durante la realización de la tarea, como: la observación, el pensamiento en voz alta, el registro en una computadora del proceso de aprendizaje. Los métodos fuera de línea son cuestionarios o entrevistas que se pueden aplicar antes o después de la ejecución de las tareas, que adolecen los mismos problemas de validez como los de la evaluación del conocimiento metacognitivo.

Veenman (2012) detalla como las habilidades metacognitivas se afinan principalmente a través de cuatro tipos de proceso de aprendizaje: lectura de texto, resolución de problemas, aprendizaje por descubrimiento y escritura. Estas habilidades metacognitivas las relata el autor directamente enfocadas a la educación científica (física, química y biología) puntualizando el desarrollo que se lleva a cabo en todos los cursos de estas materias: los estudiantes deben de leer libros de texto con el fin de adquirir la comprensión conceptual, para después aprender mediante el razonamiento y la aplicación de fórmulas, continuar con el diseño y planificación para llevar a cabo experimentos en los laboratorios y finalmente escribir los informes de los resultados obtenidos.

Veenman afirma que en el campo de la enseñanza de las ciencias las actividades de lectura, resolución de problemas, indagación y la escritura siempre están en conexión. La orientación, el establecimiento de objetivos, la planificación, el seguimiento y la evaluación son indispensables para todos los procesos de aprendizaje en la educación científica. Aunque aclara que la reflexión no siempre se menciona en las investigaciones, tal vez debido a que aparece después de la finalización de las tareas.

Una vez revisado el trabajo de Veenman (2012), quien hace una distinción entre el conocimiento metacognitivo y las habilidades metacognitivas para orientar el desarrollo de éstas en la enseñanza de las ciencias; así como la inserción de la resolución de problemas en el currículo de educación básica (2011), consideramos algunos elementos útiles de dicho trabajo para hacer el diseño de nuestro experimento de enseñanza, el cual consiste en utilizar la escritura como herramienta metacognitiva en la resolución de problemas de geometría y se describe detalladamente en el siguiente apartado.

MÉTODO Y PROCEDIMIENTO

El interés de esta investigación es trabajar, con estudiantes de 9° grado, el uso de auto-instrucciones en la resolución de problemas, a través de las producciones escritas, con el fin de conocer por una parte su pensamiento y por otra parte, movilizar la función de la escritura como herramienta metacognitiva.

Para los participantes en el experimento contamos con 10 estudiantes del turno matutino de la Secundaria Diurna 99, seleccionados al azar. Las sesiones de trabajo fueron en total 20, tres sesiones a la semana (lunes, miércoles y viernes) de 45 minutos cada una. Durante estas sesiones los estudiantes resolvieron doce problemas, siguiendo las preguntas proporcionadas, cada uno a su ritmo de trabajo. Ellos disponían, en cada sesión, de material manipulable para experimentar las intuiciones que surgieran en cada problema, como el geoplano, el juego de geometría, papel, tijeras, lápiz adhesivo, colores.

Diseño del experimento de enseñanza

A partir de la lista de auto-instrucciones que Veenman (2012) sugiere para la regulación de tareas y la inserción de resolución de problemas en el plan de estudios, nos surge el interés de explorar la experimentación con un procedimiento que el estudiante pueda aplicar por sí mismo, sin la necesidad del apoyo total del docente; de manera que se le proporcione una orientación muy simple, pero útil para que logre llegar a la solución. Por lo tanto, nuestro experimento de enseñanza consiste en apoyar a los estudiantes en la resolución de problemas de geometría, para lo cual establecemos un plan de cinco fases (Figura 1).

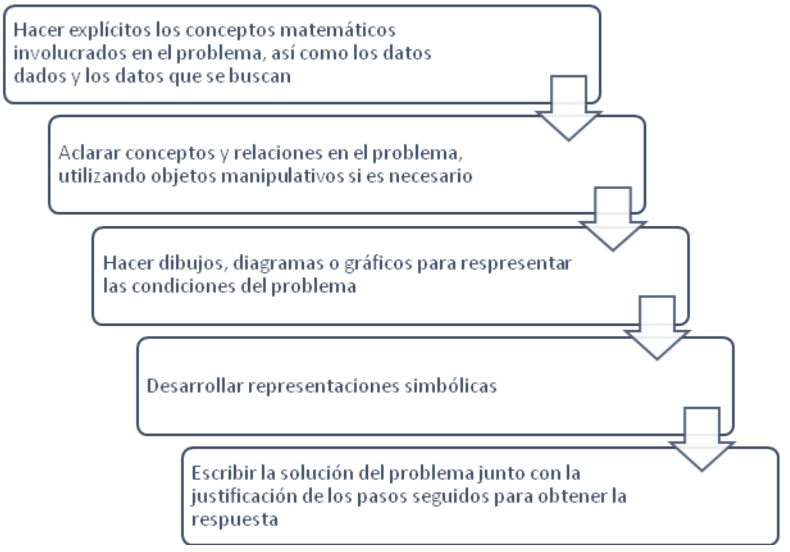


Figura 1: Fases de las actividades para la resolución de problemas

Con el fin de pasar por cada una de las fases, guiamos a los estudiantes por medio de preguntas sencillas que los conduzcan a obtener la solución; en si una lista de auto-instrucciones para la regulación del proceso. Es necesario señalar que dos de las actividades mencionadas por Veenman en la Tabla 1, no aparecen como Actividades de Aprendizaje Representativas de Habilidades Metacognitivas en la Tabla 2 del siguiente apartado. Lo anterior debido a que en esta investigación la actividad del inicio -*el establecimiento de metas*- se concretó en llegar a la solución del problema y durante la ejecución de la tarea -*el control*- se enfocó directamente a la narración escrita de las respuestas de cada pregunta a través de la lista de auto-instrucciones.

Preguntas para utilizar la escritura como herramienta metacognitiva en la resolución de problemas

Las preguntas designadas en este experimento se enfocan, en primer lugar, en la escritura de los datos que presenta un problema, de manera que ayude a esclarecer lo que sabemos del problema y lo que se entiende del mismo. A continuación la escritura de lo difuso, en lo que se debe profundizar. En seguida la escritura de lo que es necesario conocer y posteriormente a donde se va a llegar. Finalmente, el estudiante debe concretar por escrito, la justificación de los resultados obtenidos y la comprobación de que es la solución del problema.

En sí, las preguntas son diseñadas de manera sencilla para los estudiantes, de modo que ellos trabajen las actividades de aprendizaje necesarias para el desarrollo de sus habilidades metacognitivas durante el proceso de solución de un problema. Cada pregunta va enfocada a una actividad de aprendizaje, como se describe en la Tabla 2, trabajando la escritura como herramienta metacognitiva durante todo el proceso.

Las respuestas a las preguntas así como las veredas que decida seguir el estudiante quedarán plasmadas con la escritura en hojas de trabajo, las cuales serán, junto con el material didáctico manipulado, las fuentes de datos para mirar y analizar la influencia de las representaciones en el proceso de resolución de problemas.

Esta investigación es, principalmente de corte cualitativo, donde se utiliza el método en línea para la evaluación de las habilidades metacognitivas (Veenman 2012), a través de la compilación por escrito de todo el proceso seguido por los estudiantes durante la resolución del problema. Todas las anotaciones hechas por los estudiantes en las hojas de trabajo nos facilitarán analizar las expresiones en el proceso, además de considerar la influencia del contexto durante el desarrollo de la resolución de cada problema.

	Preguntas diseñadas para utilizar la escritura como Herramienta Metacognitiva en la Resolución de Problemas	TAREA	Actividades de Aprendizaje representativas de Habilidades Metacognitivas
1	¿Cuáles son los datos que me da el problema?	INICIO	Lectura
2	¿Qué necesito encontrar?		Análisis de la tarea
3	¿Qué conocimientos tengo acerca del tema?		Activación de los conocimientos previos
4	¿Cómo le voy a hacer?		Planificación
5	¿Qué pasos voy a seguir?	DURA	Seguir el plan o cambiar el plan
6	¿Qué dibujos me pueden ayudar para llegar a la solución?		Toma de notas
7	¿Cómo justifico la respuesta que encontré?	DESPUES	Evaluación del desempeño
8	¿Es el único camino que se puede seguir para llegar a la respuesta?		Recapitulación
9	¿Qué otras formas puedes aplicar?		Reflexión sobre el proceso

Tabla 2: Relación de las consignas con las habilidades metacognitivas de Veenman

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este apartado se examinan las habilidades que aplicaron los estudiantes en la resolución de los problemas, no sin antes recordar que para hacer explícitas las habilidades metacognitivas se engloban cuatro categorías en las actividades -la orientación, la planificación, el seguimiento y la evaluación- las cuales se adquieren con las actividades representativas descritas por Veenman (2012), por lo tanto, la interpretación de los resultados será a través de las habilidades metacognitivas que se dan al inicio, durante y después de la resolución de un problema, señaladas en la Tabla 2.

En la primera sesión de trabajo con los estudiantes participantes se requirió la resolución de dos problemas, con el fin de conocer los procedimientos que ellos utilizaban antes de darles a conocer las auto-instrucciones que se aplicarían durante el experimento de enseñanza. Con esta actividad comprobamos que tenían deficiencias en la resolución de problemas, así como estrategias desorganizadas ya que ninguno de los 10 estudiantes obtuvo una respuesta correcta en la primera actividad.

En la siguiente sesión se presentaron las auto-instrucciones que debían seguirse durante la resolución de cada problema y después de trabajar guiados por las preguntas, los estudiantes fueron modificando el proceso de resolución, como veremos a continuación en el análisis de los resultados en uno de los problemas del experimento de enseñanza (Figura 2).

Problema

Supón que los puntos están a una distancia de 1 cm., horizontal y verticalmente. Calcula la suma de las áreas de todos los triángulos que se pueden formar siguiendo las líneas que están marcadas en la figura.

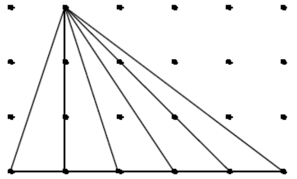


Figura 2: Problema trabajado por los estudiantes durante el experimento de enseñanza

Para trabajar el análisis será necesario conjuntar algunas actividades, en virtud de que en ciertos momentos se trabajan al mismo tiempo, como es el caso de la lectura y el análisis de la tarea, ya que el estudiante tuvo la necesidad de leer el problema para definir cuál era su tarea a resolver; de igual manera la actividad de seguir el plan y el cambio del plan, a causa de si en el momento de estar realizando el plan de trabajo decide hacer algún cambio o no.

Actividades de inicio de la resolución del problema

Las actividades de inicio (lectura, análisis de la tarea, activación de los conocimientos previos y planificación) son preparatorias para la realización de la resolución de cada problema y en algunos casos se entrelazan; una actividad impulsa a la otra; lo cual podremos ver con los procesos aplicados por los estudiantes.

Con las respuestas a estas dos preguntas: ¿cuáles son los datos que me da el problema? y ¿qué necesito encontrar?, observamos que los estudiantes dan una descripción e interpretación correcta de la información del problema y agregan algunas representaciones útiles para exteriorizar la información, en conjunto con los datos necesarios para trabajar el problema, como podemos ver en la Figura 3.

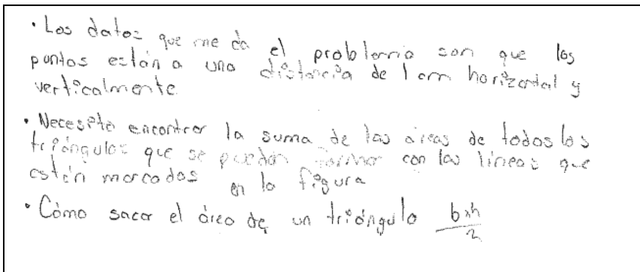
	• Los datos que me da el problema son que los puntos están a una distancia de 1cm horizontal y verticalmente. • Necesito encontrar la suma de las áreas de todos los triángulos que se puedan formar con las líneas que están marcados en la figura. • Como sacar el área de un triángulo $\frac{b \times h}{2}$.

Figura 3: Parte de la respuesta de un estudiante participante en el experimento de enseñanza

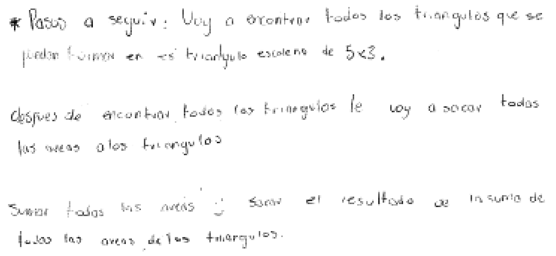
A partir de estas dos preguntas se da la activación de habilidades metacognitivas, en especial la activación de la comprensión lectora y la interpretación basándose en la lectura, así como el uso de los dibujos a modo de representaciones, los cuales les servirán de apoyo durante todo el proceso de resolución del problema. De igual manera en algunos casos se activan parte de sus conocimientos previos, que aún no ha sido indicado en estas dos preguntas, pero lo hacen automáticamente con la lectura y el análisis del problema.

Con la tercera pregunta se da la activación de los conocimientos previos, impulsada por los procesos de memoria de cada estudiante, los cuales se activan cuando establece relaciones entre los datos que le proporciona el problema, lo que tiene que encontrar como respuesta y los conocimientos que considera necesarios para obtener la solución.

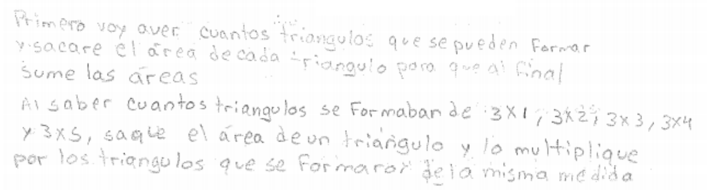
Las actividades que evidenciaron la activación de los conocimientos previos fue la descripción y afirmación de los conceptos de los temas relacionados con el problema y el uso de las fórmulas en conjunto con la escritura simbólica como se puede ver en el tercer punto de respuesta en la Figura 3, el estudiante escribe "como sacar el área de un triángulo" y a continuación anota la fórmula. En sí es recordar la información que tiene guardada en su mente, relacionarla con los datos que debe trabajar y decidir cuál proceso aplicará para obtener la solución, lo cual se completa con la respuesta de la cuarta pregunta ¿cómo le voy hacer para resolver el problema?

La pregunta va enfocada directamente a la última actividad de inicio de la ejecución de la tarea -la planificación- esta parte implica que el estudiante elabore procesos de organización de los pasos que seguirá para llegar a la respuesta. En sí la organización del camino a seguir en conjunto con un orden determinado, el cual debe respetar el estudiante para lograr la solución del problema, es un indicativo del comportamiento planificado. Lo cual podemos ver en la Figura 4 donde dos estudiantes afirman, de diferentes maneras, que van a identificar primero el total de triángulos formados en la figura, para luego agruparlos de acuerdo con la medida de su base y altura, enseguida obtener las áreas por medio de una multiplicación y finalmente hacer la suma de todas las áreas.

Al trabajar la planificación de la tarea los estudiantes demostraron la decisión y el orden de los pasos a seguir en conjunto con las afirmaciones del procedimiento a aplicar en la resolución del problema.



*Pasos a seguir: Voy a encontrar todos los triángulos que se pueden formar en el triángulo escaleno de 5×3
Después de encontrar todos los triángulos le voy a sacar todas las áreas a los triángulos.
Sumar todas sus áreas y sacar el resultado de la suma de todas las áreas de los triángulos.



Primero voy a ver cuántos triángulos que se pueden formar y sacare el área de cada triángulo para que al final sume las áreas
Al saber cuántos triángulos se formaban de 3×1, 3×2, 3×3, 3×4, 3×5, saque el área de un triángulo y lo multiplique por los triángulos que se formaron de la misma medida

Figura 4: Parte de respuestas de dos estudiantes participantes en el experimento de enseñanza

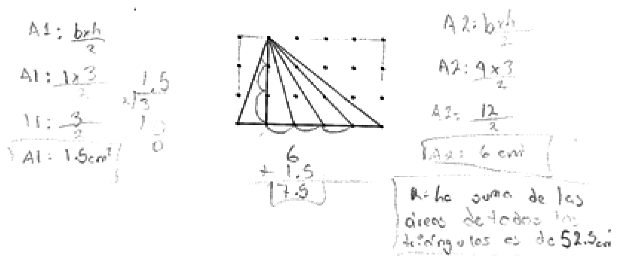
Con estas cuatro primeras preguntas percibimos como se cumple la habilidad metacognitiva de la orientación, la cual para Veenman abarca, leer el enunciado del problema, la activación de los conocimientos previos así como la especificación de lo que se da y lo que se pide. El trabajo de los estudiantes muestra también evidencia del uso de la habilidad metacognitiva de la planificación, ya que se observa como trazan su procedimiento a seguir, organizado en un orden determinado, así como la manera correcta para llegar a la respuesta. Otros componentes de la planificación aparecen con las actividades realizadas durante la resolución del problema lo cual revisaremos en el siguiente apartado.

Actividades durante la resolución del problema

Las actividades durante la ejecución de la tarea son: el seguimiento del plan, cambiar el plan si es necesario y la toma de notas y gestión de los recursos; ya que todas estas actividades guían y controlan la ejecución de la tarea (Veenman 2012). En este experimento de enseñanza decidimos conjuntar las actividades del seguimiento del plan con el cambio del plan y la toma de notas con la gestión, ya que los recursos utilizados se prueban en las representaciones realizadas por los estudiantes en sus hojas de trabajo.

Durante la resolución del problema prestamos atención a los procesos metacognitivos de control y toma de notas en la resolución de problemas, utilizados por los estudiantes, guiados por las preguntas ¿qué pasos voy a seguir? y ¿qué dibujos me pueden ayudar a llegar a la solución? Estas dos preguntas dirigen al estudiante a efectuar la planeación que habían diseñado con la pregunta anterior, comienzan con hacer deducciones, progresan durante todos los pasos y corrigen si se presenta algún error.

En la Figura 5 podemos observar el seguimiento de un estudiante a estas dos preguntas, él comienza con la clasificación de cada grupo de triángulos, A1 todos los que tienen base de 1 cm y altura 3 y obtiene el área. Continúa con A2 todos los triángulos que su base es de 4cm y altura 3cm y así sucesivamente complementando su procedimiento con la representación de todos los posibles triángulos que se pueden formar utilizando un dibujo en la parte inferior y las anotaciones de cada medida y el área que formarían cada uno de ellos, para finalmente sumarlas y obtener la respuesta del problema, la cual encierra en un rectángulo para resaltarla en la parte derecha de la representación dada en el problema.



R= La suma de las áreas de todos los triángulos es de 52.5 cm

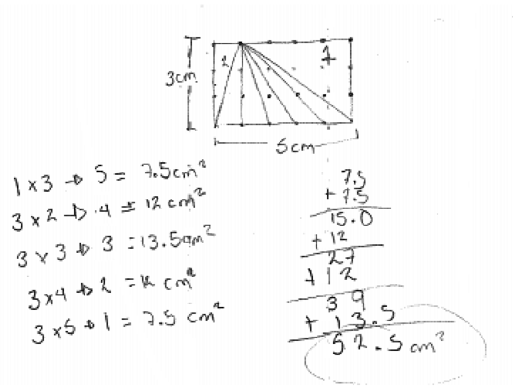
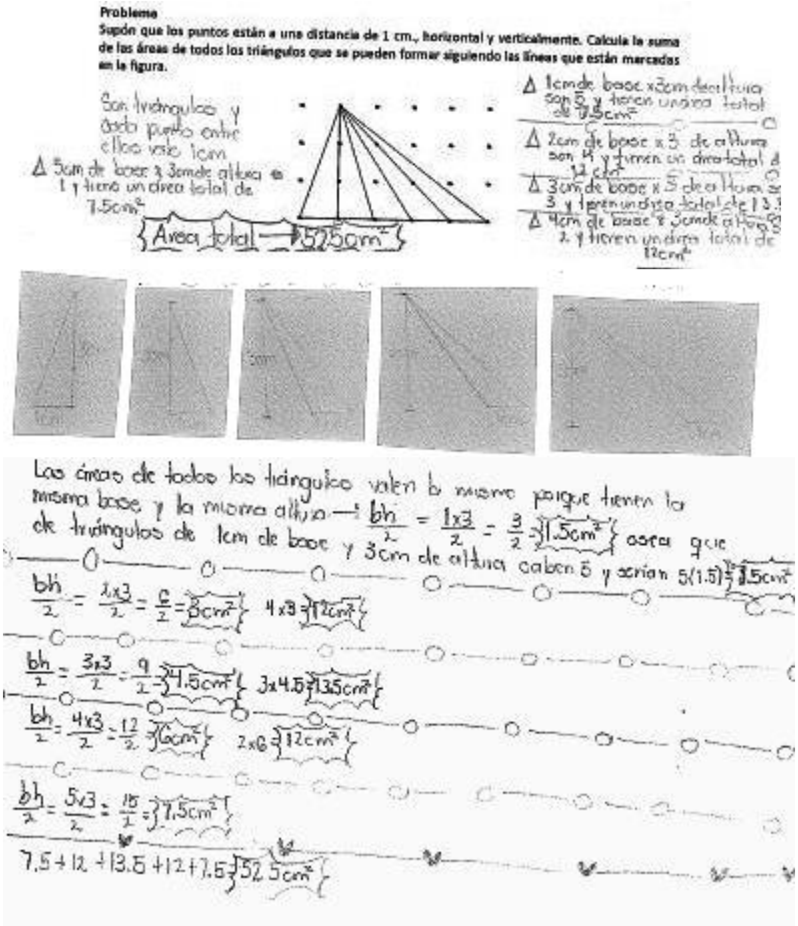


Figura 5: Parte de respuestas de un estudiante participante en el experimento de enseñanza

La escritura se da en todo el proceso de la solución del problema y las notas son hechas por los estudiantes utilizando primero la figura que da el problema para hacer anotaciones de los datos a los cuales van a recurrir durante el proceso, enseguida agregan dibujos que ellos consideran necesarios, así como las fórmulas y operaciones aplicadas en la resolución del problema (Figuras 5 y 6). Además algunos estudiantes recurrieron a otros materiales para hacer las representaciones por separado y luego las agregaron a su hoja de trabajo, como podemos ver en la Figura 6, donde el estudiante hizo la construcción de los diferentes triángulos que cumplían con base 1 y altura 3 en una hoja de color, los recorta y añade a su respuesta; con estas representaciones trabaja enseguida los demás triángulos y obtiene finalmente la suma de todas las áreas.

En estas descripciones (Figura 5 y 6) percibimos que con la toma de notas, los dibujos construidos por los estudiantes y las representaciones dadas en cada problema, en conjunto con las anotaciones de fórmulas y operaciones, ellos dirigen y controlan todo el proceso aplicado en la resolución de cada problema. Al mismo tiempo se evidencian los procesos metacognitivos, a través del seguimiento paso a paso de su plan en conjunto con la comprobación de sus resultados, comunicado en sus hojas de trabajo, los cuales dependen de procesos cognitivos como la escritura y representaciones (anotaciones, operaciones y dibujos) hechos por el estudiante durante la resolución del problema.

La parte condicional de trabajar la escritura, guiados por las preguntas, ha originado ciertas acciones en los estudiantes, como la descripción de todos los pasos aplicados para obtener la respuesta al igual que la presentación de una manera ordenada, la cual les permite monitorear y reflexionar sus procesos. Estas actividades facilitan una entrada a la adquisición de habilidades, donde una estrategia metacognitiva tiene que ser aplicada conscientemente, paso a paso, y así se transforma gradualmente en una habilidad a partir de un proceso de seguimiento.



Son triángulos y cada punto entre ellos vale 1 cm
Δ5 cm de base × 3 cm de altura es 1 y tiene un área total de 7.5 cm^2.
Δ1 cm de base × 3 cm de altura son 5 y tienen un área total de 7.5 cm^2.
Δ2 cm de base × 3 cm de altura son 4 y tiene un área total de 12 cm^2.
Δ3 cm de base × 3 cm de altura es 1 y tiene un área total de 13.5 cm^2.
Δ4 cm de base × 3 cm de altura son 2 y tiene un área total de 12 cm^2.
Área total 52.5 cm^2.
Las áreas de todos los triángulos valen lo mismo porque tienen la misma base y la misma altura →
$\frac{bh}{2} = \frac{1\times 3}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$ cm^2 o sea que de triángulos de 1 cm de base y 3 cm de altura caben 5 y serían 5 (1.5) = 7.5 cm^2.

Figura 6: Respuesta de un estudiante participante en el experimento de enseñanza

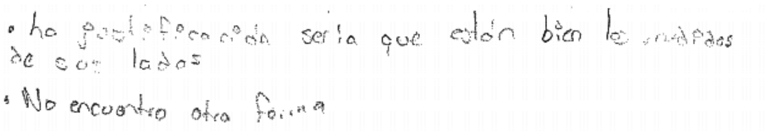
Actividades después de la resolución del problema

La reflexión sobre el proceso de solución de un problema hecha por los estudiantes es una actividad que muchas veces se omite, tal vez, porque se manifiesta al terminar la tarea y no la comunican, ni tienen la oportunidad de expresarla. En esta investigación después de obtener la solución al problema, planteamos tres preguntas enfocadas a hacer una recapitulación o dar una interpretación de los resultados, debido a que generalmente los estudiantes dan por concluida la actividad al llegar a obtener las respuestas de cada problema.

La primera pregunta -¿cómo justifico la respuesta que encontré?- va enfocada a que el estudiante evalúe su procedimiento e interprete sus logros, comprobando que la respuesta y los pasos que decidió seguir para obtenerla son correctos, estos procesos son indispensables para su aprendizaje.

La segunda y la tercera preguntas guían a los estudiantes a hacer una reflexión sobre el proceso y en especial a encontrar otro camino para llegar a la misma respuesta. La segunda pregunta originaba una respuesta cerrada de un sí o un no ¿es el único camino que se puede seguir para llegar a la respuestas? y el no conducía a la última pregunta ¿qué otras formas puedes aplicar?, pero cuando se daba el caso de que la respuesta era un sí la última pregunta la excluían los estudiantes.

En la resolución de los problemas observamos que los estudiantes no tienen la costumbre de hacer justificación de sus respuestas, lo cual de acuerdo con el diccionario de la real academia española define como “probar algo con razones convincentes”, por tal motivo solo hicieron la narración de los pasos seguidos durante el proceso de solución o la afirmación de que obtuvieron la respuesta correcta y el procedimiento que siguieron era el más indicado para obtener la solución. Esto lo podemos ver en la Figura 7 donde el estudiante solo escribe que su respuesta es correcta si se cumplen las medidas de los lados de todos los triángulos formados. Agrega al final que no encuentra otro modo para llegar a la respuesta, por lo cual no contesta la última pregunta.



- La justificación sería que están bien las medidas de sus lados
- No encuentro otra forma

Figura 7: Parte de respuesta de un estudiante participante en el experimento de enseñanza

En cambio, en la Figura 8 el estudiante no da una justificación de su respuesta pero si encuentra otra manera para obtenerla "otro camino sería sacar el área de los triángulos y sumarlas". Comienza hacer la representación de los 5 triángulos que tienen como base 1cm y altura 3cm, obtiene el área de cada uno y hace la suma. Enseguida construye el triángulo de base 2cm y altura 3 cm, continúa con la representación de los demás triángulos, hace las operaciones para encontrar las áreas de cada uno y finalmente comprueba con la suma que se llega al mismo resultado.

La diferencia entre este camino y su procedimiento en la primera solución (semejante a la segunda parte de la Figura 5) fue generalizar cuantos triángulos hay de cada medida y cuál sería el área de cada uno para luego multiplicarla por el número de triángulos y finalmente sumar las áreas. Este segundo proceso es una manera de justificar que siguió el camino adecuado, es trabajar de manera más particular, obteniendo el área de los 15 triángulos para luego sumarlas con el fin de comprobar que su primera respuesta también es correcta.

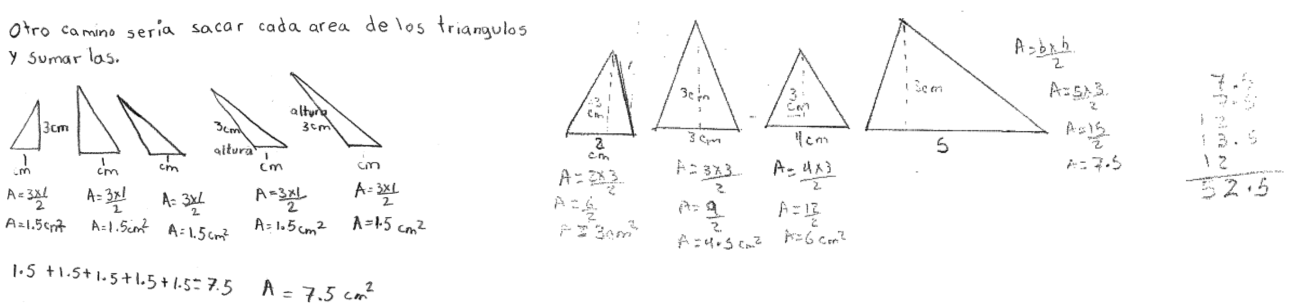


Figura 8: Parte de respuesta de un estudiante participante en el experimento de enseñanza

Observamos que los estudiantes no hicieron la narración perfecta de una justificación, pero todos realizan una evaluación positiva de su desempeño y están seguros de que la respuesta obtenida y el procedimiento aplicado fueron los más indicados para obtener la solución de cada problema. En esta última parte de la resolución del problema se activa otra habilidad representativa de las habilidades metacognitivas "la comprobación del resultado" la cual se realiza buscando otro camino para llegar a la respuesta. Al hacer la comparación de los diferentes procedimientos que se pueden seguir para obtener la respuesta los estudiantes hacen una reflexión y evaluación de sus procedimientos.

Los estudiantes, a través de las preguntas, paulatinamente incorporaron la escritura como instrumento de apoyo en el transcurso de las actividades. Por medio de estas preguntas se ayudó a los participantes a detectar dificultades de comprensión, así como aplicar sus capacidades de comparar y organizar razonablemente la información, predecir inferencias y obtener conclusiones. En todo este proceso ellos utilizan estrategias cognitivas y metacognitivas, las cuales, les son útiles en el procedimiento de la solución del problema, además la escritura los lleva a realizar un análisis y reflexión de todo el desarrollo que siguieron para llegar a obtener la respuesta y comprobar que es correcta.

Resultados del estudio

A partir de los datos presentados en el análisis del problema (Figura 2) y las respuestas en los otros problemas trabajados en el experimento, observamos el desarrollo de habilidades metacognitivas en los estudiantes durante el experimento de enseñanza, las cuales se alcanzaron gradualmente a través de poner en práctica el uso de las preguntas descrito en la Tabla 2. Los diez estudiantes adquirieron una capacidad de orientación y planificación durante la resolución de cada problema, lo cual podemos ver cuando ellos escriben los pasos efectuados durante la resolución, describen como se hizo el procedimiento, porque se hizo e intentan establecer una justificación de su proceso.

La escritura les ayudó a tomar conciencia de los procesos que desarrollaron durante la solución de cada problema. Así mismo con las primeras preguntas, cuando anotan los datos principales y dicen cómo van a resolver el problema cumplen con el "saber qué". Posteriormente consiguieron tener dirección y control de sus procedimientos, al explicar cómo llegaron al resultado hacen explícito el "saber cómo" y al escribir su justificación o valoración los estudiantes cumplen con el "saber porque" ya que dan sustento a su procedimiento utilizado en la resolución y confirman si es correcto su resultado comprobándolo por medio de otros procesos para obtener la misma respuesta, obteniendo así una auto-regulación.

Recordando la descripción de Schoenfeld (1985), el proceso metacognitivo se exterioriza con la reflexión que hace el estudiante sobre lo pensado al realizar una tarea matemática, por consiguiente, podemos afirmar que, en el experimento de enseñanza se dio la metacognición cuando al seguir las preguntas como auto-instrucciones en la resolución de los problemas de geometría los estudiantes:

- Reflexionaron sobre cómo proceder en el problema y los procesos que se generaron al resolverlo.
- Elaboraron las justificaciones en las que sustentan su procedimiento para la resolución de cada problema.
- Establecieron evaluaciones sobre sus resultados y reflexionaron si hay otros caminos con los cuales puedan alcanzar la solución correcta.

Si esto se logró con los doce problemas de geometría podría trabajarse las mismas preguntas para guiar a los estudiantes en la resolución de problemas pertenecientes al eje de sentido numérico y pensamiento algebraico, como en el eje de manejo de la información. De esta manera se brindaría mayor atención al desarrollo de las habilidades metacognitivas en conjunto con la resolución de problemas, con lo cual se conseguiría completar los propósitos del programa de estudios de la SEP al término de los nueve años de educación básica, atendiendo con las cuatro competencias matemáticas propuestas a desarrollar, pero dando un especial énfasis a la última: manejar técnicas eficientemente, para lo cual la SEP reconoce "es necesario que los alumnos la sometan a prueba en muchos problemas distintos, así adquirirán confianza en ella y la podrán adaptar a nuevos problemas" (SEP, 2011).

REFERENCIAS

Anderson, J. R. (1996). *The architecture of cognition*. Mahwah: Erlbaum.

Bolton, G. (2011). *Write yourself. Creative writing and personal development*. Londres y Filadelfia: Jessica Kingsley Publishers.

Butler, D. L. & Winne, P. H. (1995). Feedback and self-regulated learning: A theoretical synthesis. *Review of Educational Research* 65 (3), 245-281.

Carter, S. (2009). Connecting Mathematics and Writing Workshop: It's Kinda Like Ice Skating. *The Reading Teacher* 62 (7), pp. 606-610. DOI: 10.1598/rt.62.7.7.

Flavell, J. H. (1970). Developmental studies of mediated memory. En H. W. Reese y L. P. Lipsitt (Eds.), *Advances in child development and behavior*, Vol. 5, 181–211. New York: Academic.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring. A New Area of Cognitive-Developmental Inquiry. *American Psychologist*, Vol. 34, No. 10, 906 – 911.

Henning, E., Gravett, S., & van Resburg, W. (2002). *Finding your way in academic writing*. Cape Town: Van Schaick Publishers.

Hyde, A. & Hyde, P. (1991). *Mathwise: teaching mathematical thinking and problem solving*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Hyde, A. A. (2006). *Comprehending math adapting reading strategies to teach mathematics, K-6.* Portsmouth, NH: Heinemann.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics. Reston*, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Nelson, T. O. (1999). Cognition versus metacognition. En R. J. Sternberg (Ed.), *The nature of cognition*, 625–641. Cambridge: MIT Press.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 361–379. Hillsdale. NJ: Erlbaum.

Schunn, C. D., y Anderson, J. R. (1999). The generality/specificity of expertise in scientific reasoning. *Cognitive Science, 23*, 337–370.

Secretaría de Educación Pública (2011). Plan y programas de estudios de educación secundaria. Disponible en: http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/index.php/prog-secundaria.

Veenman, M. V. J. (2005). The assessment of metacognitive skills: What can be learned from multi-method designs? In C. Artelt y B. Moschner (Eds.), *Lernstrategien und Metakognition: Implikationen für Forschung und Praxis*, 75–97. Berlin: Waxmann.

Veenman, M. V. J. (2006). Self-questioning as a metacognitive skill. In H. Pedrosa de Jesus and H., van der Meij (Eds.), *Research on questioning*. Aveiro: University of Aveiro.

Veenman, M. V. J. (2007). The assessment and instruction of self-regulation in computer-based environments: A discussion. *Metacognition and Learning, 2*, 177–183.

Veenman, M. V. J. (2011). Learning to self-monitor and self-regulate. In R. Mayer y P. Alexanders (Eds.), *Handbook of Research on Learning and Instruction*, 197-218. New York: Routledge.

Veenman, M. V. J. (2012). Metacognition in Science Education: Definitions, Constituents, and Their Intricate Relation with Cognition. A. Zohar y Y. J. Dori (Eds.), *Metacognition in Science Education*: *Trends in Current Research*. Contemporary Trends and Issues in Science Education 40, 21-36. DOI 10.1007/978-94-007-2132-6_2.

SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LAS FUNCIONES SINUSOIDALES

[1]Minerva Martínez Ortega, [2]Hugo R. Mejía Velasco, [3]Ma. de los Ángeles Martínez O.

[1,2]Cinvestav IPN, [3]Instituto Politécnico Nacional

cetis76@hotmail.com, hmejia@cinvestav.mx, mamigcar@hotmail.com

En este trabajo se muestran resultados preliminares de los significados que alumnos (15-16 años), quienes no han tenido un acercamiento con las funciones trigonométricas, asignan a las funciones sinusoidales cuando éstas se asocian como modelo matemático de ciertos fenómenos físicos periódicos. El empleo de un sensor de movimiento y un programa graficador, así como los signos asociados a las representaciones generadas con estas herramientas son esenciales dentro del espacio de trabajo matemático que permite la relación entre las funciones sinusoidales y los fenómenos armónicos.

***Palabras Claves**: Funciones Sinusoidales, Trabajo Matemático, Representaciones, Modelación, Herramientas Digitales*

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La mayoría de los alumnos del nivel medio superior (grado 10 – 12, 15 a 18 años de edad), tienen dificultades con conceptos ligados a las funciones trigonométricas, a pesar de ello y de acuerdo con Moore (2010), las investigaciones que en matemática educativa se han realizado sobre las funciones trigonométricas son escasas. Los autores que han llevado a cabo dichas investigaciones (Blacket & Tall, 1991; Brown, 2006; Buendía Abalos & Cordero Osorio, 2005; Kendal & Stacey, 1997; Moore, 2009; Weber, 2005; entre otros) concuerdan que independientemente de la estrategia que se emplee, las etapas iniciales del aprendizaje de las funciones trigonométricas están llenas de dificultades.

En ciertas asignaturas de ingeniería y física de nivel universitario es indispensable entender las funciones trigonométricas; sin embargo, al egresar del nivel medio superior, la comprensión que los estudiantes tienen sobre este tipo de funciones es pobre, inadecuado o incluso erróneo. Por ejemplo, muy pocos alumnos manejan que la característica fundamental de estas funciones es la periodicidad y, un menor número de ellos identifican a estas funciones como modelos de fenómenos físicos periódicos (FFP).

Dentro de las funciones trigonométricas, las Funciones Sinusoidales (FS) merecen especial atención, con ellas se pueden estudiar fenómenos naturales, como lo son la corriente eléctrica, la modulación de ondas de radiodifusión y la óptica, entre otros temas. Además, a través de este tipo de funciones es posible determinar, de una manera relativamente sencilla, las funciones trigonométricas restantes. Por lo que en este trabajo se analizan y documentan qué significados asocian los alumnos a las funciones sinusoidales a través del estudio de FFP, como el caminar de manera relativamente consistente o el sistema pendular, y las representaciones gráficas de estos fenómenos.

Las representaciones gráficas son generadas por el movimiento corporal de los alumnos (*embodiment*), un sensor de movimiento y un programa graficador. Lo anterior se realiza con la intención de llegar a definir el objeto matemático que describe a dichos fenómenos, es decir a las funciones sinusoidales, por lo que se establecen la siguientes preguntas de investigación: 1) ¿Qué fenómenos periódicos, al simularse o modelarse, pueden permitir construir significados de las funciones sinusoidales?, 2) ¿De qué manera influye en la construcción de significados de las funciones sinusoidales el uso de herramientas digitales?

Como objetivo se tiene: Describir y analizar los argumentos utilizados por los alumnos para justificar, explicar y/o probar conjeturas al estudiar fenómenos periódicos que permitan llegar a la construcción de las funciones que describen a este tipo de fenómenos.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo con Kuzniak (2011), dentro del paradigma de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) se distinguen el *ETM de referencia, el ETM idóneo y el ETM personal*. En cada ETM es considerado un *plano epistemológico y uno cognitivo*.

El *plano epistemológico* está formado por un *componente referencial, un representamen y artefactos*; mientras que el *plano cognitivo* lo conforman los procesos de *visualización, construcción y prueba*.

Entre los *planos epistemológico y cognitivo* existe una articulación generada por una *génesis semiótica, una instrumental y una discursiva.*

En esta investigación, la *génesis semiótica* considera que en la construcción de significados se ponen en juego percepciones y/o concepciones previamente definidas, pero en el caso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ocurre que los objetos de estudio generalmente se ven como productos acabados, desvinculados de su origen e independientes del sujeto que los estudia (Moreno Armella, 2014).

Por lo anterior planteamos que, al intentar comprender un objeto matemático, considerar como punto de partida a los fenómenos que éstos modelan y a las representaciones funcionales (Hitt, 2006; 2013), es decir a las representaciones que forman parte del *ETM personal* de los alumnos, puede ayudar a una reinterpretación y re-significación de dichos objetos. Por ello se aplica esta concepción al objeto matemático FS. La idea principal es que los alumnos logren pasar de una representación inicial a una representación formal *(representamen)* ya que esta última forma parte del *ETM idóneo* de la FS.

La transición de una representación funcional a una formal es a través de relacionar un fenómeno periódico a la FS y viceversa, asociar la FS con el fenómeno, valiéndose para esto de ciertos artefactos (*génesis instrumental*).

Se define a los artefactos "como aquellas entidades con los cuales los estudiantes interactúan y a través de ellos es posible asignar significado" (Lagrange, 2014, p.317); en este caso particular, se asigna significado a la FS.

Los artefactos usados en esta investigación son un sensor de movimiento y un programa graficador. Éstos pueden ayudar a que los alumnos conozcan el origen de las gráficas obtenidas; por ejemplo, de la acción de caminar con ciertas características frente al sensor y obtener, en tiempo relativamente real, la representación de este movimiento.

Es posible que los jóvenes identifiquen en la gráfica rasgos, signos y símbolos (*génesis discursiva-semiótica*), que permitan comprender el movimiento. En este caso, el movimiento periódico que describe a los fenómenos periódicos (armónicos) y relacionarlo con el modelo matemático que los describe, es decir, con la FS.

Las funciones sinusoidales en el bachillerato.

De acuerdo con Montoya Delgadillo & Vivier (2016), en los ETM existen tres tipos de paradigmas para el *Análisis Estándar:* el *Análisis de Cálculo* (AC), el *Análisis Real* (AR) y el *Análisis Aritmético/Geométrico* (AG).

El paradigma AC tiene como características que las reglas del cálculo están definidas en mayor o menor medida de manera explícita, además se enfatiza en aspectos procedimentales sin reflexionar en ellos ni en la naturaleza de los objetos que se ponen en juego. Dentro del paradigma AR, los cálculos pueden aplicarse de manera intrínseca a objetos matemáticos explícitos, mientras que en el paradigma AG se permiten interpretaciones con implicaciones originadas en la geometría, en cálculos aritméticos o en fenómenos del mundo real.

Generalmente, el programa de un curso de bachillerato de México (alumnos de 17-18 años de edad) establece, con respecto a las funciones trigonométricas, revisar la definición $f(x) = f(x + \mathcal{K})$, las gráficas de las funciones $f(x) = A\mathrm{sen}(Bx + C) + D, f(x) = \mathrm{Acos}(\mathrm{Bx} + \mathrm{C}) + D,$ el análisis del comportamiento de los parámetros fase y ángulo de desfasamiento (México, SEP, 2013; planes y programas de bachillerato).

El orden establecido para el estudio de las funciones trigonométricas en el programa, únicamente favorece el paradigma de trabajo AC, lo cual puede ocasionar que al estudiar las FS, los alumnos no tengan una adecuada comprensión de éstas; por ejemplo, que los alumnos no identifiquen a la periodicidad como la característica principal de este tipo de funciones o que éstas son modelo de fenómenos armónicos.

Modelización

Un modelo puede ayudar a identificar y analizar datos o características observadas; con base en ello, predecir el comportamiento de un sistema en condiciones aún no visualizadas.

Partiendo de la premisa de que estudiar un modelo no es lo mismo que desarrollar el proceso generador del modelo, definimos al proceso de modelización como aquellas acciones creativas por medio de las cuales se desarrolla un modelo matemático.

De acuerdo Confrey & Maloney (2007) a través de los procesos de modelización es posible:

- Transitar de una situación problema a un modelo matemático.
- Incluir actividades de estructuración, matematización y trabajar matemáticamente en la interpretación / validación de cada acción.
- Predecir, describir, explicar, comprender o incluso diseñar parte del mundo.
- Plantear preguntas genuinas (no retóricas).

En esta investigación, los datos o características que se observan son los correspondientes a un fenómeno físico periódico (armónico). Se parte de la idea de dependencia de un sistema físico. De acuerdo con Lagrange (2014), a partir de esta dependencia, los estudiantes pueden trabajar con representaciones no algebraicas referentes al fenómeno y pasar de forma fluida entre representaciones algebraicas y no algebraicas. En nuestro caso es transitar, dentro de un proceso iterativo, entre representaciones no formales (un enunciado, ciertos valores numéricos, bosquejos gráficos, etc.) y formales (representaciones gráficas, tabla de valores y representaciones algebraicas).

Considerando los aspectos anteriores se define una propuesta que puede permitir identificar la característica de las FS y representar los parámetros de este objeto matemático.

DISEÑO EXPERIMENTAL PARA EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES SINUSOIDALES

La idea inicial en este diseño experimental es partir del paradigma AG, particularmente de implicaciones originadas en fenómenos del mundo real, para posteriormente transitar hacia el paradigma AC, para lo cual nos apoyamos en el uso de simulaciones físicas, aplicaciones de movimiento periódico, un sensor de movimiento y un software para desplegar gráficas de funciones sinusoidales.

En esta etapa del diseño es importante considerar una génesis instrumental que permita hacer funcional el uso tanto del sensor de movimiento como de las simulaciones físicas y de las aplicaciones de movimiento.

En general, el proceso que se sigue para pasar de una representación implícita (AG) a una explícita (AC) es cíclico (Figura 1). Es aquí donde entra la génesis instrumental, ya que como menciona Artigue (2002), la génesis instrumental reposa sobre herramientas cuyo uso no es transparente ni

inmediato, necesita un cierto número de procesos. Este proceso involucra diversos movimientos; en un primer movimiento, se busca que desde el fenómeno se represente lo que se percibe (AG), lo cual será abstraído del contexto donde está ocurriendo el fenómeno físico, lo destacable se representa como rasgos, signos o símbolos informales. Esta etapa, generalmente, es de carácter cualitativo.
A partir de lo que se abstrae, se da un segundo movimiento, una reinterpretación del fenómeno; por ejemplo, se pueden determinar descripciones cuantitativas. El objetivo es que el fenómeno se interprete desde la representación generada en el primer movimiento; con esta acción, el alumno desarrolla una génesis discursiva con la cual explicita su razonamiento (Kuzniak, Montoya Delgadillo & Vivier; 2015).

Nuevamente desde el fenómeno, en un tercer movimiento, se discute la representación con relación a en qué medida ésta, realmente, representa al fenómeno (paradigma AC). Se genera una nueva representación, la cual con respecto a la primera (primer movimiento), evoluciona hacia la representación formal de un objeto matemático.

Esquemáticamente:

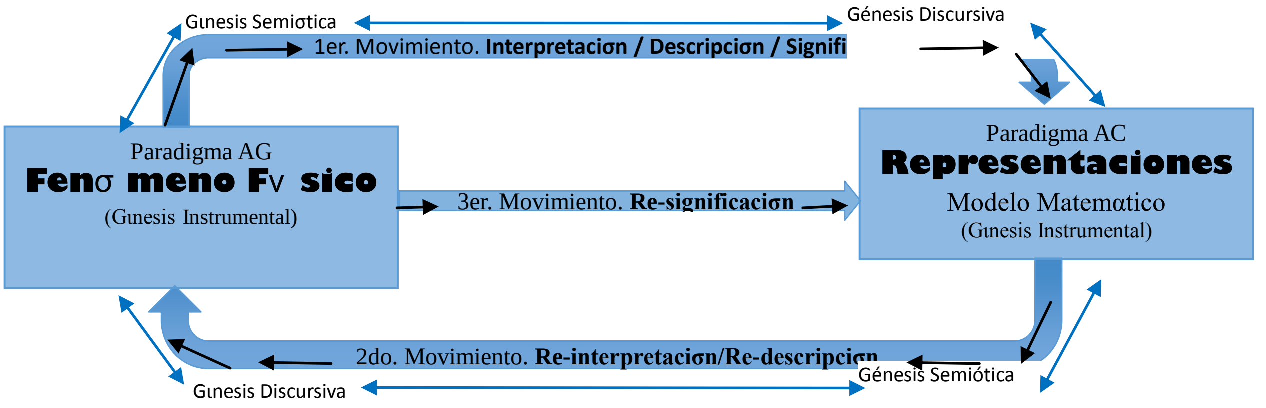


Figura 1: Proceso para la resignificación de las funciones sinusoidales

El esquema de la Figura 1 tiene dos polos, en el de la izquierda está el fenómeno del mundo real (AG). El fenómeno es simulado o modelado de manera física, lo cual requiere de una génesis instrumental de las simulaciones y de los modelos físicos. En el polo de la derecha está el objeto matemático, sus representaciones, que también requieren de una génesis instrumental para corroborar si los parámetros que componen al modelo generado por los alumnos realmente describe al fenómeno analizado.

En esta investigación conjeturamos que, de acuerdo a un diseño adecuado de instrucción, es posible construir un entendimiento básico del fenómeno (génesis discursiva) y una representación elemental del objeto matemático función sinusoidal (AC, génesis semiótica). Las génesis semiótica y discursiva son desarrolladas, por parte de los participantes, durante todo el proceso de re-significación de las funciones sinusoidales.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL

La investigación es de tipo cualitativa. Las actividades de experimentación se aplican en 7 sesiones de 2 horas cada una a un grupo de 20 alumnos que se encuentran cursando el primer semestre de bachillerato (15-16 años), lo que supone no han tenido un acercamiento al tema de las FS.

Para cada sesión se diseña una guía de acciones a seguir en cada actividad. Esta guía es desarrollada y, cuando la situación lo requiere, contestada por escrito por los participantes de la investigación.

En una primera etapa, los alumnos realizan individualmente las acciones marcadas en cada una de las guías de actividades; en cuanto terminan la etapa individual, los jóvenes discuten sus respuestas en equipo de dos integrantes; acto seguido, se produce una etapa de exposición de equipos, el objetivo es que los participantes presenten sus opiniones y conclusiones de lo realizado en cada actividad. Finalmente, a manera de autorreflexión, los alumnos realizan un reporte por escrito, donde explicitan la solución a la problemática planteada.

Previo consenso con los participantes de la investigación, las actividades son vídeo grabadas.

Actividades del Diseño Experimental

Actividad 1. Representaciones Preliminares

Además de que los participantes se ambienten en el uso de las herramientas digitales (génesis instrumental), el objetivo de esta actividad, es que los jóvenes identifiquen y asocien la manera en que se representa el movimiento en una gráfica cartesiana; con la ayuda del sensor de movimiento, la gráfica se produce prácticamente en tiempo real. Se solicita a los alumnos que caminen (indistintamente) hacia el sensor o que se alejen del mismo; o bien, sin caminar por algún lapso (2 o 3 segundos), se mantengan frente al dispositivo que detecta el movimiento. Una vez que se practique y perfeccione el andar frente al sensor, se espera que los participantes identifiquen en las gráficas obtenidas características asociadas al movimiento rectilíneo. Si bien, este tipo de movimiento no es el objeto de estudio en la investigación, se empieza con él, porque éste puede considerarse como uno de los movimientos más naturales al desplazarse, aunado a la facilidad para interpretarlo y describirlo.

Posteriormente se pide a los participantes bosquejar, con lápiz y en papel, cómo es la gráfica de la acción correspondiente al acudir a la escuela si ellos parten de su casa, debiendo regresar a esta última después de tomar clases.

Una vez que obtienen la gráfica, a los jóvenes se les solicita que bosquejen, también con lápiz y en papel, la acción anteriormente planteada, pero ahora correspondiente a una semana de clases (cinco días). En esta actividad, se espera que los alumnos empiecen a identificar algunas características del movimiento periódico.

Actividad 2. Representación de una gráfica sinusoidal.

Una vez que se ambienta a los alumnos en el uso del sensor y en la interpretación general del movimiento rectilíneo, se presenta a los jóvenes una gráfica del tipo sinusoidal (sin que ellos sepan que se trata de una gráfica de este tipo), y se solicita que, caminando hagan los movimientos necesarios para reproducir dicha gráfica. El objetivo de esta acción es que los alumnos identifiquen que la gráfica corresponde a la representación del movimiento periódico.

Actividad 3. Estudio del péndulo.

Se pide a los estudiantes bosquejar con lápiz y en papel la gráfica posición contra tiempo, cuando se hace oscilar la lenteja del péndulo. En la génesis instrumental del modelo físico del péndulo es importante analizar con los alumnos los aspectos relacionados con: 1) el ángulo de oscilación de la lenteja. Para que el movimiento pueda considerarse armónico, debe cumplirse la ley de isocronismo, $\operatorname{sen} \theta \cong \theta$ y esto ocurre para ángulos con valores pequeños, en la investigación se consideraron ángulos menores a 10º (ver Tabla 1). 2) La fricción, debido a ella solamente se consideran las tres primeras oscilaciones de la lenteja, porque éstas mantienen amplitudes relativamente iguales, cosa que no ocurre de la cuarta oscilación en adelante.

$\theta(^{\circ})$	$\theta(rad)$	$\mathbf{sen}\,\theta$
0	0.00000	0.00000
2	0.03491	0.03490
5	0.08727	0.08716
10	0.17453	0.17365
15	0.26180	0.25882

Tabla 1: Ángulo de oscilación

En esta actividad se pretende que los alumnos identifiquen la característica de *oscilación* en el movimiento pendular y la relacionen con la acción de caminar frente al sensor. En el primer caso se solicita que los pasos sean relativamente uniformes y en el del péndulo se consideran solamente las tres primeras oscilaciones. Posteriormente los estudiantes verifican o rectifican la gráfica bosquejada, para ello la comparan con la representación del movimiento pendular generada a través del sensor y el programa graficador. A continuación, se discute con los alumnos algunas características de las gráficas generadas.

Con el objetivo de que los alumnos comprueben la veracidad de lo conjeturado en la actividad anterior, se elige aleatoriamente una gráfica de las obtenidas en la actividad de oscilación del péndulo o del caminar armónicamente y, se pide a los jóvenes mencionar los elementos que observan en la gráfica.

DESARROLLO Y ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

Actividad 1. Representaciones Preliminares

Además de que los alumnos se ambientaran con el uso de las herramientas digitales; el objetivo de esta actividad, fue que los estudiantes identificaran y asociaran la manera en que se representa el movimiento en una gráfica cartesiana.

La actividad comenzó cuando los estudiantes caminaron hacia el sensor o se alejaron de él (génesis instrumental) y dicha acción se plasmó en una gráfica generada por el programa de computación (Figuras 2 y 3; proceso de percepción y visualización de la génesis semiótica).

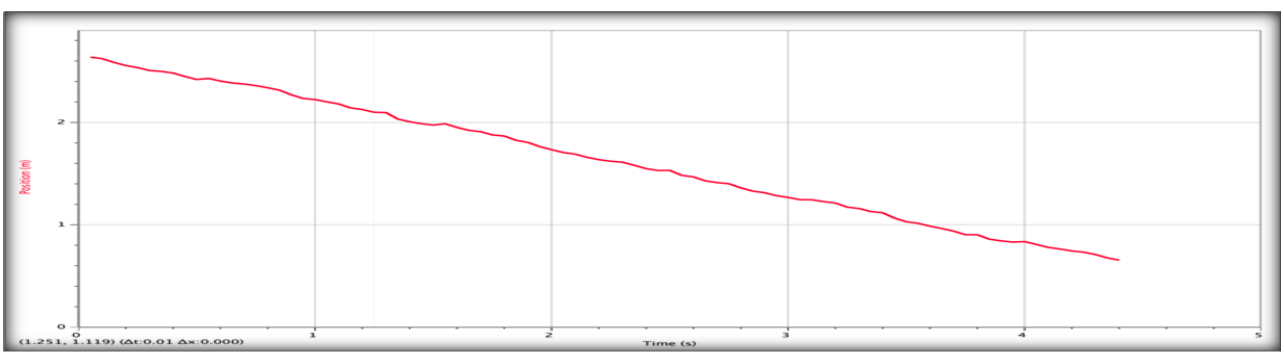


Figura 2: Gráfica generada por Alma al acercarse al sensor

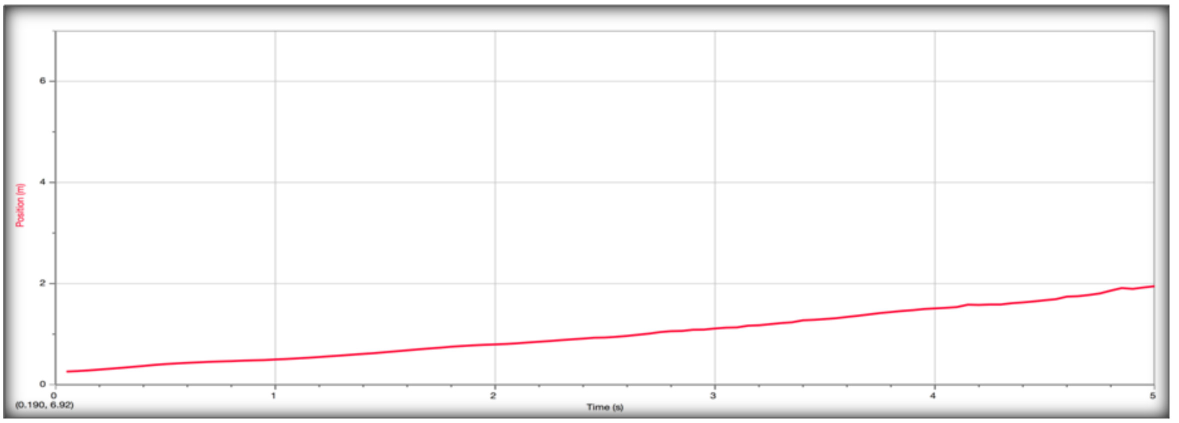


Figura 3: Gráfica generada por Kevin al alejarse del sensor

Cuando los participantes describieron las características de la acción de caminar, lo hicieron dentro del paradigma AG, en éste se permiten interpretaciones con implicaciones originadas en la geometría (Montoya Delgadillo & Vivier, 2016). Los alumnos manifestaron que la acción de acercarse al sensor era una recta con pendiente negativa; mientras que, al alejarse del mismo, la recta era con pendiente positiva (génesis discursiva).

Los participantes identificaron que lo que se estaba representando en las gráficas era la distancia con respecto al tiempo (proceso de visualización, génesis semiótica).

Posteriormente se les pidió a los participantes bosquejar, con lápiz y en papel, cómo sería la gráfica de la acción correspondiente de ir a la escuela si ellos parten de su casa, debiendo regresar a ella después de haber estado en clases.

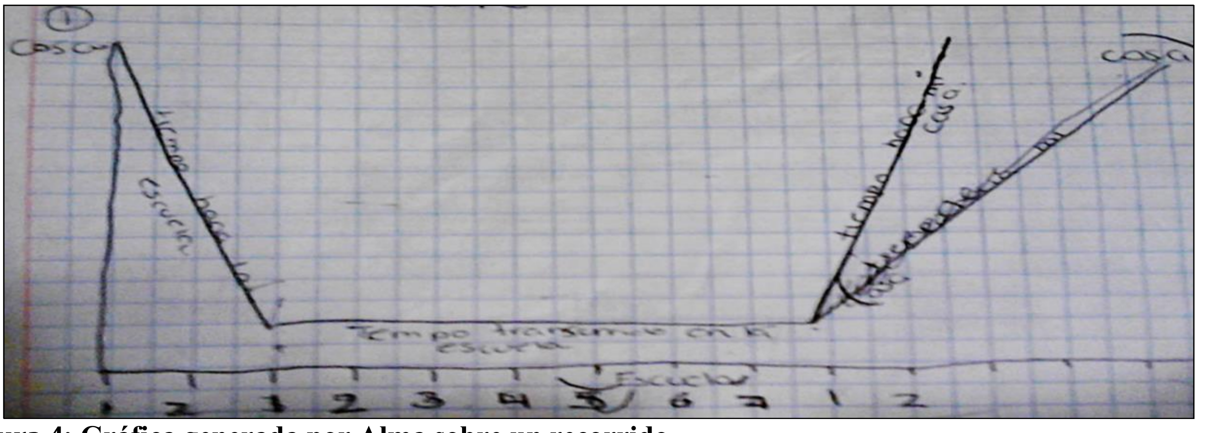


Figura 4: Gráfica generada por Alma sobre un recorrido

- Alma: Es lo mismo, solo que el sensor es la escuela.

Lo expuesto por Alma, representa un ejemplo de que se construyó una representación explícita del sensor al considerarlo como referente. Alma logró trasladar la situación de las gráficas generadas con el sensor a un nuevo contexto, ella estableció un nuevo punto de referencia, la escuela (Figura 4).

Una vez que cada alumno produjo la representación anteriormente solicitada, se les solicitó que bosquejaran, también con lápiz y en papel, la acción anteriormente planteada, pero ahora correspondiente a una semana (génesis semiótica).

Alma relacionó que la gráfica generada con la mediación del sensor de movimiento era semejante a la acción de ir de su casa a la escuela y viceversa, en 5 ocasiones. Además, esta alumna corrigió su gráfica haciéndola lo más simétricamente posible con respecto al traslado de casa escuela y escuela a casa, porque como ella lo mencionó, “es la misma acción” (Figura 5).

En esta actividad, los alumnos empezaron a identificar algunas características del movimiento periódico (al cual ellos se refirieron como repetitivo). Alma, Carlos y Mariano, de manera básica determinaron el período; Alma estableció que tarda 2 horas en ir a la escuela y 2 horas en regresar a su casa. Estos tres alumnos comienzan a articular (sin lograrlo todavía por completo) los paradigmas AG y AC.

La cuestión de la no diferenciabilidad se trató en una sesión posterior. Con la ayuda del sensor, los alumnos concluyeron que es imposible obtener una gráfica con picos, ya que ninguna persona se mueve tan rápido como para lograr representar el movimiento de esa manera (génesis discursiva).

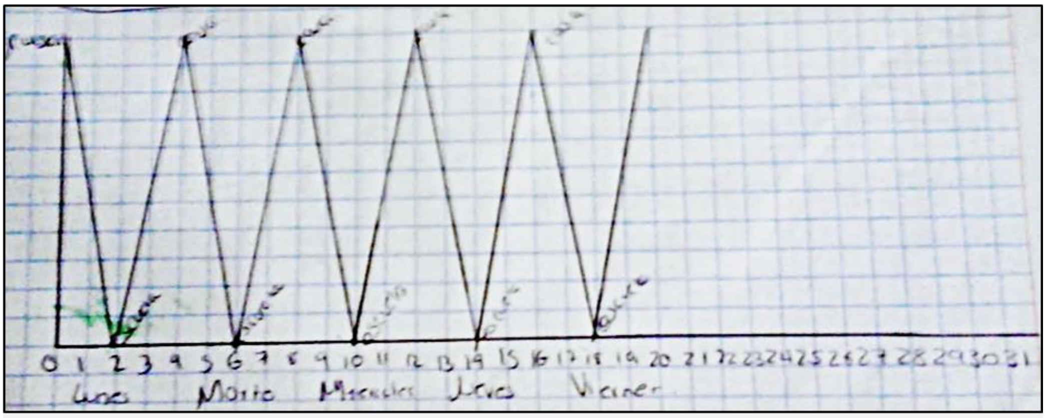


Figura 5: Gráfica generada por Alma sobre cinco recorridos

Actividad 2. Representación de una gráfica sinusoidal.

Una vez que se ambientó a los alumnos en el uso del sensor y en la interpretación general del movimiento rectilíneo, se presentó a los alumnos una gráfica sinusoidal (sin que ellos supieran que se trataba de una gráfica de ese tipo), y se solicitó que hicieran los movimientos necesarios para reproducir dicha gráfica.

Los alumnos caminaron frente al sensor de diferentes maneras; por ejemplo, tratando de seguir la representación icónica de la gráfica, caminaron levantando las rodillas o como algunos de ellos dijeron: “como si caminara un borracho”, también intentaron asociar el tipo de gráfica a la velocidad con la que se caminaba (génesis discursiva, Figura 6).

Figura 6: Caminar icónico de Arturo

Después de un número considerable de intentos, a Carlos se le ocurrió que el movimiento debía ser "haciendo el mismo paso, es decir ir y regresar" (Carlos). El alumno parándose frente al sensor realizó un movimiento que consistió en dar dos pasos hacia el sensor y dos pasos alejándose del mismo (Figura 7). Cuando sus compañeros le pidieron que generara una nueva gráfica, el joven lo hizo dando un paso hacia el sensor y un paso alejándose de él (Figura 8; génesis semiótica-discursiva).

Figura 7: Caminar periódico de Carlos

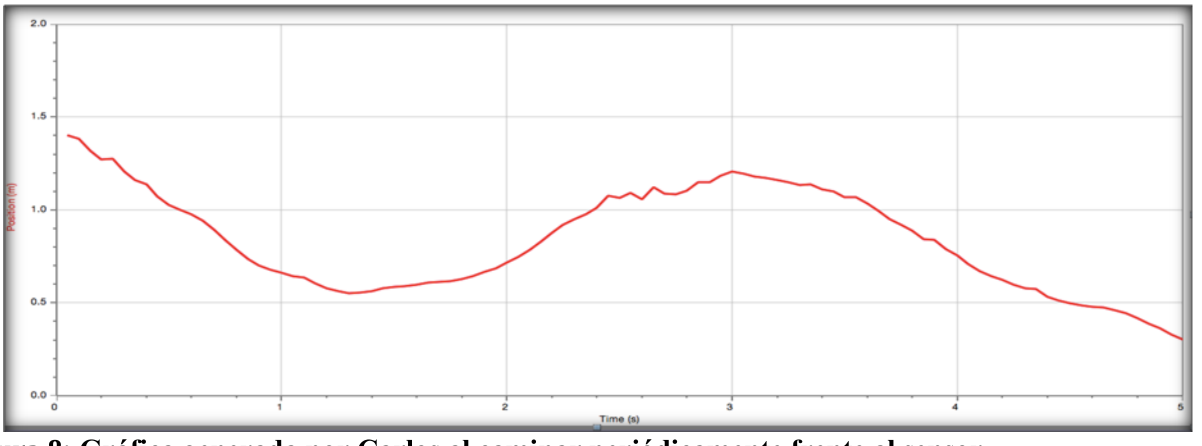


Figura 8: Gráfica generada por Carlos al caminar periódicamente frente al sensor

Profesora: ¿Por qué se te ocurrió que el movimiento debía ser así?

Carlos: Porque si se acercaba uno (hacia el sensor), iba bajando (\ ); si se alejaba uno (del sensor), iba subiendo (/).

Después de realizar esta acción, Carlos asoció que este tipo de gráficas son generadas por un movimiento periódico, ya que preguntó lo siguiente:

Carlos: ¿Se puede poner la mano en el sensor?

Carlos se refirió a si el movimiento que generaría la gráfica solicitada era posible hacerla acercando la mano hacia el sensor y alejando la mano del mismo, ambos movimientos repetidas veces, (génesis semiótica e instrumental).

La profesora le contestó a Carlos que lo verificara por sí mismo, que hiciera ante el sensor el movimiento que él planteó (Figura 9).

Figura 9: Verificación de conjetura

Si bien la gráfica obtenida presentó al inicio un rasgo no periódico (Figura 10), los alumnos identificaron que dicho registro era por un movimiento brusco de la mano; sin embargo, los jóvenes comprobaron que del segundo 0.5 en adelante era válida la conjetura planteada por Carlos.

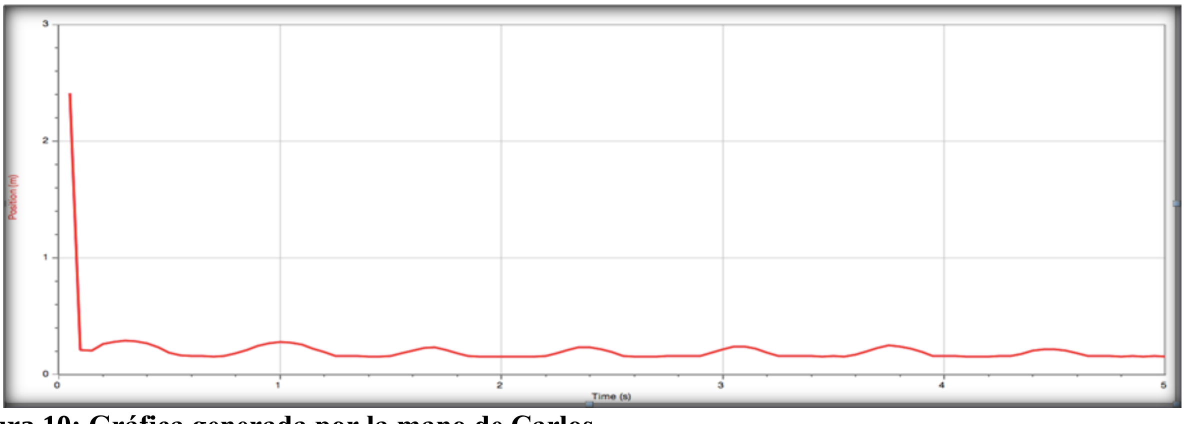


Figura 10: Gráfica generada por la mano de Carlos

Actividad 3. Estudio del péndulo.

En la segunda parte de esta sesión, se empleó un dispositivo físico que simulaba el péndulo simple (Figura 11).

Las características del movimiento pendular se representaron en el plano cartesiano, primero se hicieron manualmente o bajo la predicción de resultados por parte de los alumnos, posteriormente con la mediación del sensor de movimiento, (génesis semiótica).

Figura 11: Modelo Físico del péndulo

Como se mencionó anteriormente, se solicitó a los estudiantes bosquejar la gráfica de posición contra tiempo, cuando se hizo oscilar el péndulo. En la génesis instrumental del modelo físico del péndulo, con los alumnos se analizaron los aspectos relacionado con: 1) el ángulo de oscilación de la lenteja. Para que el movimiento fuera considerado como armónico, debió cumplirse la ley de isocronismo, $sen\,\theta \cong \theta$ y esto ocurrió para ángulos con valores pequeños, en la investigación se consideraron ángulos menores a 10º. (Ver Tabla 1). 2) la fricción, debido a ella, solamente se consideraron las tres primeras oscilaciones de la lenteja, porque éstas tuvieron amplitudes relativamente iguales, cosa que no ocurrió de la cuarta oscilación en adelante.

En esta actividad se pretendió que los alumnos identificaran la característica de *oscilación* en el movimiento pendular y la relacionaran con la acción de caminar. Para verificar o rectificar la gráfica bosquejada por cada alumno, se obtuvo la gráfica del movimiento pendular a través del sensor.

Únicamente tres alumnos bosquejaron de manera correcta la representación gráfica del movimiento pendular, estos jóvenes relacionaron lo que ocurrió cuando se solicitó reproducir la gráfica sinusoidal con movimientos corporales con el movimiento pendular. Ellos enfatizaron en aspectos procedimentales sin necesidad de tener que hacer una nueva reflexión acerca de la representación gráfica del movimiento periódico. El tipo de representaciones gráficas correspondientes a este tipo de movimiento fue integrada a la estructura cognitiva de estos tres alumnos. Lo cual se puedo verificar en lo mencionado por Carlos, "el caminar de manera repetida frente al sensor es como el movimiento repetitivo del péndulo".

La maestra especificó que la gráfica mostrada correspondía a una función sinusoidal, (hasta antes de este momento los alumnos no conocían que la gráfica correspondía a una función de ese tipo). Posteriormente se discutieron con los alumnos algunas características de ella, el principal rasgo a resaltar fue, como los jóvenes lo mencionaron, la repetición o existencia de un patrón.

A continuación se eligió aleatoriamente una gráfica de las obtenidas en la actividad anterior (caminar de manera relativamente uniforme frente al sensor) y, se solicitó a los alumnos que mencionaran los elementos y características que observaban en la gráfica, (génesis semiótica y discursiva).

Primero identificaron las **oscilaciones**, los alumnos las refirieron como *montañas* (por la forma) o máximos, en un principio solo mencionaron las oscilaciones simples (desplazamiento de la lenteja o masa del péndulo, de un punto A hacia un punto B, sin regresar al punto A, pasando solamente una vez por las posición de equilibrio), después de un análisis y discusión guiada por la profesora, los participantes concluyeron que hay *montañas invertidas* y que debían considerarse, la justificación la dio Carlos: "las montañas representan las idas de la pelota (o masa del péndulo) y las montañas invertidas los regresos de la pelota".

La maestra estableció que lo mencionado por Carlos era una oscilación (desplazamiento de la lenteja de un punto A hacia un punto B, y del punto B al punto A, pasando dos veces por la posición de equilibrio). Cuando la profesora solicitó una definición más formal, Samantha definió el concepto de oscilación como "la distancia que recorre la pelota cuando va, más (la distancia recorrida) cuando la pelota regresa", la profesora sugirió sustituir la palabra pelota por masa o lenteja y mencionó que el tiempo que implica una oscilación se conoce como **período (P)**.

La **amplitud** fue el segundo elemento mencionado por los alumnos, éste fue asociado con la altura de las montañas, la maestra retomó la idea de máximo, como el punto más alto de la *montaña* o curva cóncava y, de mínimo como el punto más bajo de la *montaña* invertida o curva convexa, al igual que el período, el valor de la amplitud, fue posible determinarlo con la opción "*explore"* del menú *"analyze",* del programa de cómputo empleado en la investigación. Sin embargo, la maestra mencionó un procedimiento analítico para calcular la amplitud **|A|**:

> Una vez que se localizan las coordenadas del punto máximo y del punto mínimo, se suman los valores absolutos de las ordenadas y el resultado se divide entre 2, el resultado será el valor de la ordenada que junto con cualquier valor de la abscisa (tiempo), será el eje de equilibrio, ya que la amplitud puede definirse como la distancia entre el punto máximo o mínimo y el eje de equilibrio.

Al preguntar a los alumnos qué representaba la amplitud en el fenómeno físico, fue necesario repetir el experimento del péndulo y después de un largo análisis, Mariano mencionó que la amplitud era el "dibujo de las oscilaciones", Carlos definió lo siguiente: "lo que el péndulo abre (ángulo de oscilación) es lo que en la gráfica se ve como la altura".

El desplazamiento vertical (V), fue identificado como la distancia de la masa o lenteja (en la posición de equilibrio) al sensor, Samantha mencionó que "a mayor distancia (del sensor) la gráfica sale más arriba" (Figura 12).

A los alumnos no les llamó la atención que las gráficas no empezaran en el origen cartesiano o instante de tiempo igual a cero, por lo que no identificaron **el desplazamiento horizontal o desfase** (Figura 13), ni que el origen de la gráfica estuviera determinado por el sensor. Se tuvo un desfase temporal con respecto al instante en que la masa o lenteja pasó por la posición de equilibrio, aunque esto podía ajustarse en el programa, (en la opción *model* del menú *analyze,* debían igualarse el desplazamiento horizontal y vertical, identificados en el programa graficador como C y D, respectivamente), el procedimiento no se consideró en la actividad, pero si lo mencionó la profesora, ya que ella refirió que ese concepto era necesario para determinar el modelo matemático, (no se dio la génesis semiótica, ya que los alumnos no construyeron ningún significado de este parámetro).

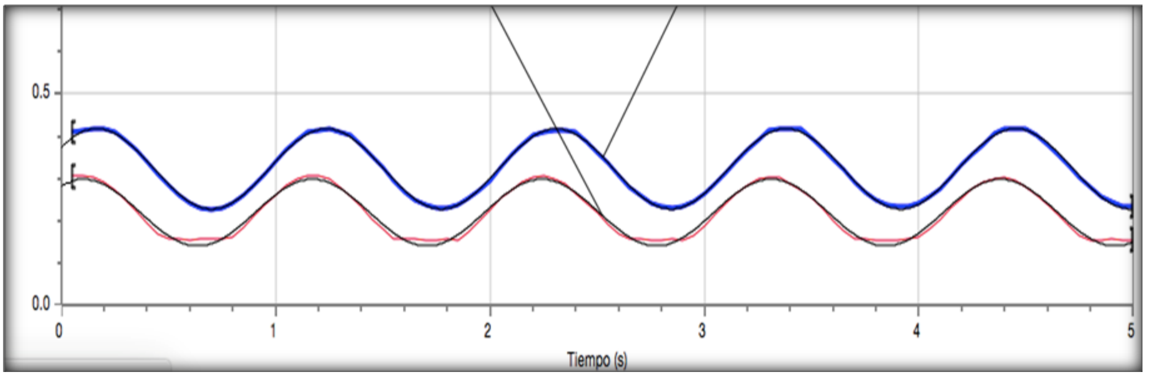


Figura 12: Desplazamiento vertical

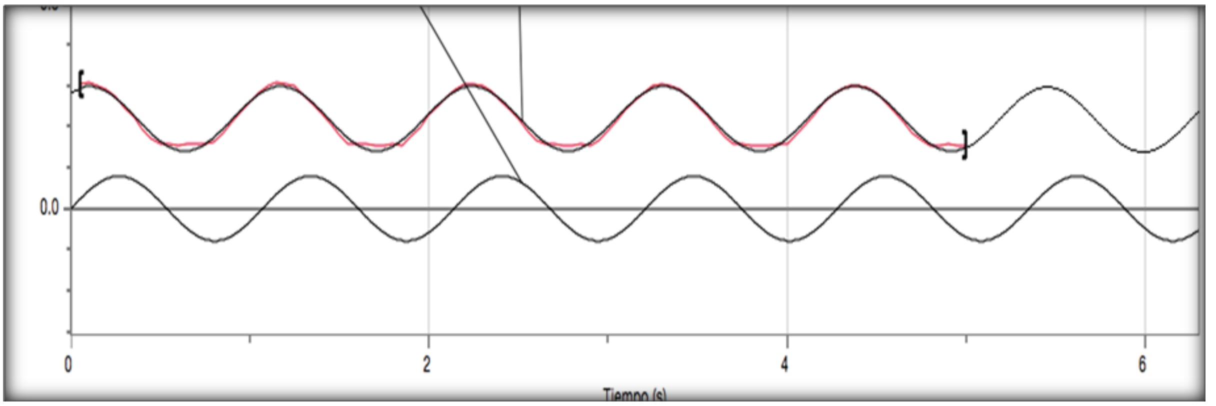


Figura 13: Desfase o desplazamiento horizontal

Aún y cuando anteriormente se habían discutido algunas características de las funciones sinusoidales, cuando la maestra preguntó el nombre de las funciones que se habían analizado, ningún alumno lo recordó.

La maestra mostró que la manera de representar matemáticamente este tipo de funciones es: $f(t) = A\mathrm{sen}(Bt + H) + V$ (paradigma AC).

La representación de los parámetros, fue elegida por los alumnos (la maestra da la estructura), donde A es la amplitud; B la velocidad angular, la cual está relacionada con el período (P), $B = \frac{2\pi}{P}$; H el desfase y V el desplazamiento vertical (ETM personal de los alumnos). La profesora mencionó que la representación común en libros de texto es $f(x) = A\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) + D$, $f(x) = A\cos(\omega t + \varphi_0) + D$. (ETM idóneo de las funciones senoidales).

Se observó una diferencia de signos entre el espacio de trabajo matemático personal de los alumnos y el espacio de trabajo matemático idóneo de las funciones senoidales (Tabla 2).

Parámetro	Signos del ETM de las Funciones Senoidales	
	Personal del Alumno	Idóneo
Amplitud	A	A
Velocidad angular	B	ω
Desfase	H	φ_0
Desplazamiento vertical	V	D

Tabla 2: Signos de las funciones senoidales

Sin embargo, debido al proceso seguido para visualizar los parámetros de las funciones senoidales, los alumnos integraron a su espacio de trabajo la representación formal de las mismas, a partir de ese momento trabajaron con dicha representación. Incluso, la relación que un inicio se definió para la velocidad angular como $B = \frac{2\pi}{P}$, fue adoptada por los alumnos como $\omega = \frac{2\pi}{P}$.

En la siguiente actividad, se les solicitó a los alumnos determinar la representación algebraica de la gráfica presentada en la Figura 14 (la transición del paradigma AG al AC, así como los planos cognitivo y epistemológico del espacio de trabajo de las funciones senoidales se conjugaron en esta actividad).

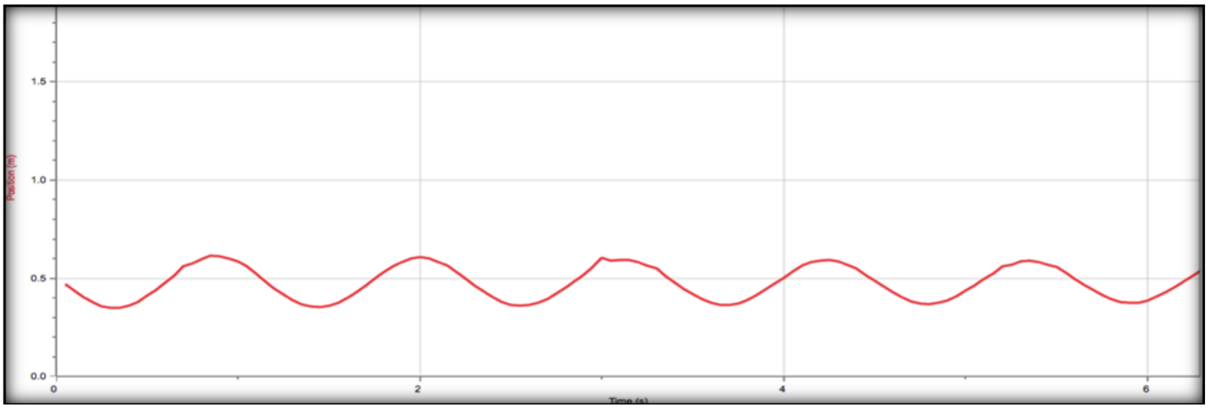


Figura 14: Gráfica del tipo sinusoidal

Los valores de los parámetros de la gráfica anterior (Figura 14), fueron determinados por 2 de los alumnos (Samantha y Carlos); a excepción del desfase, Mariano calculó los valores del resto de los parámetros; los otros alumnos solo calcularon la amplitud y el desplazamiento vertical. (Representación explícita incompleta).

Carlos, trabajando de manera individual, obtuvo la siguiente representación $f(t) = 0.12\,\mathrm{sen}(1.12t - 0.46) + 0.47$. Al trabajar en equipo de dos integrantes, él proporcionó la siguiente explicación a su compañera Roxana:

> Oscilaciones. Son 5.513, el 513 porque con la opción *analyze* y después *examine* se obtiene el *time* en 6.2 y *position* en 513 y el 5 porque son 5 oscilaciones completas. El período 6.2 entre 5.513 igual a 1.12. El desfase, igual, con *analyze* y *examine* se ve que es de 0.46 y el desplazamiento vertical de 0.47. La amplitud, en la segunda oscilación, el mínimo es de 0.354 y el máximo de 0.607, 0.354 más 0.607 igual a 0.961 entre 20.4805; 0.607 menos 0.4805 igual a 0.1265 (Carlos, 15 años).

Roxana aceptó como respuesta válida la representación generada por Carlos. El equipo integrado por estos dos alumnos, al exponer su resultado al resto de sus compañeros, fue cuestionado por Alma con respecto al valor de la velocidad angular, ya que ella mencionó que, a excepción de la velocidad angular, en su equipo habían obtenido los mismos valores de los parámetros; después de un análisis grupal, Mariano pasó al pizarrón y aplicando la fórmula $\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{P}}$, obtuvo que ω = 5.5, el cual coincidió con los modelos de los equipos de Mariano y Alma.

De la explicación que Carlos proporcionó al grupo, sobre su resultado obtenido, se observó que este alumno calculó directamente de la gráfica los desplazamientos vertical y horizontal, lo cual indica que tiene una representación explícita de estos conceptos; sin embargo, para calcular la amplitud no la relacionó con la distancia (vertical) del punto máximo de la gráfica (o punto mínimo) con el valor del desplazamiento vertical, ya que aplicando el procedimiento analítico proporcionado por la profesora calculó dicho valor; por lo tanto, de la amplitud (aunque determina el valor correcto), no se tiene la representación explícita completa.

En general, tres alumnos lograron transitar de representaciones generadas en el paradigma AG a representaciones formales correspondientes al paradigma AC de las funciones senoidales. Los 17 alumnos restantes no lograron dicha transición.

CONCLUSIONES

De manera aislada las funciones sinusoidales, el movimiento que es descrito por este tipo de funciones y las gráficas cartesianas de las mismas no son objeto de significado alguno por parte de los alumnos. La relación iterativa entre el fenómeno, tanto del caminar de manera relativamente uniforme como del movimiento pendular y sus representaciones fue lo que permitió que se asignara significado a los parámetros de las funciones que modelan un fenómeno periódico armónico. Sin embargo, el modelo físico del péndulo presentó la complejidad de que en ocasiones no oscilaba en un solo plano, por lo que no era posible reproducir un movimiento armónico, lo cual en un inició complicó el experimento.

El uso del sensor, así como el software y el modelo físico del péndulo (génesis instrumental), facilitaron la generación, la reproducción, pero sobretodo la discusión y el análisis de los fenómenos periódicos armónicos (génesis discursiva).

Las herramientas digitales fueron mediadoras esenciales para eliminar algunas de las complejidades y dificultades que se presentan al estudiar las funciones sinusoidales; por ejemplo, la forma de generar las representaciones gráficas de los fenómenos armónicos permitió identificar y asignar significado a los signos o rasgos que representan los parámetros de las funciones sinusoidales y, cuando fue necesario modificar dichos parámetros, lo hicieron de una manera relativamente sencilla, ya que solo tenían que caminar frente al sensor o repetir el experimento y comprobar si las predicciones o conjeturas que establecían eran ciertas o tenían que rectificarse. Con respecto al sensor de movimiento, en la etapa de instrumentalización hay que definir el rango en que dicha herramienta percibe el movimiento, de lo contrario no se generarán las gráficas correspondientes.

En general, las herramientas digitales, así como los modelos físicos, el diseño y guía de las actividades permitieron articular los planos cognitivo y epistemológico. Con base en ello, 17 alumnos lograron asignar significado a dos de los parámetros de las funciones sinusoidales (amplitud y desplazamiento vertical). Un participante no le asignó significado al desplazamiento horizontal, pero si a los parámetros restantes; mientras que dos alumnos lograron dar significado a todos los parámetros de las funciones objeto de estudio.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7 (3), 245–274.

Blackett, N., & Tall, D. (1991). Gender and the Versatile Learning of Trigonometric Using Computer Software. *Proceedings of the 15th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 144-151). Assisi: Furinghetti F.

Brown, S. (2006). The Trigonometric Connection: Students´Understanding of Sine and Cosine. En J. M. Novotná (Ed.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1* (pág. 228). Praga: PME.

Buendía Abalos, G. & Cordero Osorio, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics. 58*(3), 299-333.

Confrey, J., & Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 57–68). New York: Springer.

Hitt, F. (2006). Students´ functional representation and conceptions on the construction of mathematical concepts. An example: The concept of limit. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11,* 253-258.

Hitt, F. (2013). El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real. *El Cálculo y su Enseñanza, 4.* Cinvestav-IPN, México, D.F. 103-122.

Kendal, M. & Stacey, K. (1997). *Trigonometric: Comparing Ratio and Unit Circle Methods*. Australia.

Kuzniak, A. (2011). L´espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,9-24.*

Kuzniak, A. Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2015). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *Conferencia presentada en la XIV Conferencia Interamericana de Matemática Educativa*. México, Chiapas.

Lagrange, J. (2014). Functions y technological enviroments: from multi-representation to connected functional workspaces. *Proceedings Fourth ETM Symposium* (págs.317-335). Madrid España, 30 junio - 4 julio, 2014.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM*, 48(6), 739-754.

Moore, K. C. (2009). An investigation into precalculus students' conceptions of angle measure. *Paper presented at the Twelfth Annual Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education (SIGMAA on RUME) Conference*, Raleigh, NC: North Carolina State University.

Moore, K. C. (2010). The role of quantitative reasoning in precalculus students learning central concepts of trigonometry (Unpublished doctoral dissertation). Arizona State University, Tempe.

Moreno Armella, L. (2014). Matemática Educativa: del signo al píxel. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

SEP (2013). Plan y programa de estudio 2013. Educación Media Superior. Bachillerato Tecnológico. México.

Weber, K. (2005). Students´ Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal*, *17*(3), 91-112.

EL USO DE ARTEFACTOS Y SIGNOS EN EL PARADIGMA DEL TRABAJO CON GRÁFICAS CARTESIANAS

Ulises Salinas-Hernández[1], José Guzmán-Hernández[†] & Isaias Miranda-Viramontes[2]

[1]Cinvestav-IPN, México; [2]CICATA-IPN, México

asalinas@cinvestav.mx, jguzman@cinvestav.mx, imirandav@ipn.mx

El presente artículo documenta el desarrollo cognitivo de estudiantes de grado 12 en su trabajo con el análisis de gráficas cartesianas del movimiento de objetos y la manera en que las interpretan a partir del concepto físico de sistema de referencia. La metodología utilizada es de tipo cualitativa, y está apoyada en el uso de artefactos y signos como mediadores en los procesos de aprendizaje; para lo cual se utilizó un software como elemento fundamental para el desarrollo de actividades desarrolladas por los estudiantes que participaron en la investigación. La recopilación de datos se llevó a cabo mediante videograbación de las clases cuando el profesor de física trabajaba con sus estudiantes.

Palabras Claves: *Espacio de Trabajo Matemático (ETM), gráficas cartesianas, artefactos, signos*

INTRODUCCIÓN Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La interpretación del movimiento de objetos por medio de gráficas cartesianas ha sido foco de interés en diversas investigaciones en educación matemática (e.g., diSessa, Hammer, Sherin & Kolpakowski, 1991; Doorman 2005). Por su parte, Miranda, Radford y Guzmán (2007, 2013) plantean que el estudio de fenómenos relacionados con el movimiento, al no ser una tarea fácil de llevar a cabo, requiere de la comprensión del funcionamiento de una forma cultural de descripción gráfico-visual. Al hablar de una forma cultural, los autores dirigen su atención hacia una perspectiva teórica de orientación semiótica; hacia la interacción social y la movilización de signos y artefactos llevada a cabo por los estudiantes.

Con base en estas investigaciones, y en la noción de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2011), en este artículo ponemos atención en dos aspectos que consideramos esenciales para el aprendizaje de la interpretación de gráficas cartesianas de movimiento. Por un lado, la interacción entre artefactos y signos (en su carácter de mediadores del conocimiento –aproximación semiótica–) y su relación con la génesis discursiva. Esta perspectiva, a su vez, la utilizamos como eje de análisis dentro del modelo de los ETM a través de la génesis semiótica. Y, por otra, la noción de paradigmas como orientadores y guías en la resolución de problemas. De manera específica, el propósito de este trabajo es analizar cuál es el papel del uso de artefactos (software) y signos semióticos (lenguaje y gestos) en la articulación de los niveles epistemológicos y cognitivos, en estudiantes de bachillerato, dentro de un espacio de trabajo que propicia la interpretación de gráficas cartesianas de representaciones funcionales de movimiento a partir del concepto físico de sistema de referencia.

Además de la introducción, el artículo se divide en cuatro partes. En la primera parte abordamos los conceptos clave de la noción de la aproximación metodológica y teórica de ETM y su relación con otras propuestas teóricas. En la segunda parte, exponemos la metodología utilizada en la toma de datos. En la tercera, mostramos las actividades implementadas así como el análisis de los datos. En la cuarta parte presentamos las conclusiones y las observaciones finales de la investigación.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

La noción de ETM, concebida como "un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos." (Kuzniak & Richard, 2014, p. 7), surge como respuesta a una manera de enseñanza en la que los estudiantes se desempeñan como simples receptores del saber de los maestros. Es importante señalar que el estudio de un ETM se presenta como una estructura metodológica sobre la cual será posible apoyarse para desarrollar nuevos Espacios de Trabajo específicos (Kuzniak, 2011). Esto permite, a su vez, diversificar la investigación matemática; por ejemplo, la relacionada con la forma de interpretar gráficas cartesianas de movimiento.

Para promover el cambio hacia una visión en la que se permitiera al alumno desarrollar sus conocimientos matemáticos hacía falta, en primera instancia, incorporar una noción de la disciplina como una ciencia vinculada con su contexto temporal [histórico] y social [cultural]. Así, en la perspectiva del ETM, el estudiante es visto dentro de su marco escolar: con profesores, tareas y evaluaciones que surgen y se desarrollan a partir de normas establecidas por un grupo de expertos [científicos] y que reciben el nombre de paradigmas.

Los ETM se estructuran a partir de la articulación de dos niveles: el epistemológico y el cognitivo. El nivel epistemológico se compone por un conjunto de elementos teóricos, signos y artefactos dentro de un espacio en el que se desarrolla el trabajo matemático. Todos los elementos están determinados, a su vez, por el paradigma que permite su organización. En el nivel cognitivo se sitúa al individuo [estudiante] quien, para apropiarse de los conocimientos matemáticos, hace uso del espacio de trabajo a través de procesos de visualización, construcción y razonamientos discursivos (Kuzniak & Richard, 2014). Los mismos autores señalan que:

> “la manera de articular los dos niveles es a través de tres génesis fundamentales: Una génesis instrumental que determina la característica funcional de los artefactos en el proceso constructivo; una génesis semiótica basada en los registros de representación semióticos que asegura a los objetos tangibles del ETM su estatus de objetos matemáticos operatorios; y una génesis discursiva de la prueba que dará un sentido a las propiedades para ponerlas al servicio del razonamiento matemático.” (Kuzniak & Richard, 2014, p. 10).

La manera en que se desarrolla el trabajo matemático, en el contexto escolar, se vincula por un lado con un conjunto de orientaciones delimitadas por las instituciones educativas; y por el otro por el trabajo del profesor. De esta manera se definen tres tipos de ETM (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016): de referencia, idóneo y personal. El ETM de referencia se define con respecto a la relación con el conocimiento, idealmente bajo criterios matemáticos. Está basado en paradigmas por los cuales los componentes del ETM se orientan y estructuran. El ETM idóneo depende de la institución involucrada (contexto escolar), y se define de acuerdo con la manera en que se pretende enseñar el conocimiento; está en relación con la función y el lugar dentro de algún currículum. Y el ETM personal está relacionado con cada individuo (estudiante o profesor) y se define por la manera en que aborda y maneja un problema matemático dentro de las capacidades cognitivas de cada individuo y con su propio conocimiento.

Entre los trabajos que dan cuenta de la componente semiótica del trabajo matemático se encuentran: los registros de representación semiótica de Duval (1999) en donde se aborda la importancia del uso de diferentes registros tales como gráficas, ecuaciones, diagramas y figuras para la apropiación de los conceptos matemáticos; así como el trabajo de Radford (2008) quien aborda la importancia del uso de artefactos y signos como mediadores del proceso de toma de conciencia de los objetos matemáticos. También es conveniente mencionar el trabajo de Radford, Demers, Guzmán, y Cerulli, (2003) en donde se reporta la producción de significados de expresiones gráficas y la importancia de la coordinación entre gestos y palabras en dicho proceso. En el ámbito del uso de herramientas, entre otros, destacamos el trabajo de Artigue (2002), quien especifica las potencialidades del *instrumento*, a través de la génesis instrumental. Desde esta aproximación, la de la génesis instrumental, el instrumento, parte artefacto y parte esquemas cognitivos, se vuelve realmente instrumento para un individuo a partir de la construcción de esquemas personales o apropiación de esquemas sociales pre-existentes (p. 250). En dicho proceso se ponen en juego una componente de *instrumentalización* dirigida hacia el artefacto y que corresponde a los usos que se hace de éste, y una componente de *instrumentación*, dirigida hacia el sujeto y en la cual se desarrollan los esquemas del sujeto; es la influencia que tiene el instrumento en el desarrollo cognitivo del estudiante.

Paradigmas

Uno de los elementos centrales dentro de los ETM es el lugar que ocupa la resolución de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Es aquí en donde se incorpora la noción de paradigma. De acuerdo con Kuzniak (2011), los paradigmas orientan y guían el trabajo matemático en una institución, en general, y en el salón de clases, en particular. La idea de paradigma como un conjunto de creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico es retomada de la noción de paradigma introducido por Kuhn (1971). Kuhn menciona que los científicos nunca aprenden conceptos, leyes y teorías en abstracto por sí mismos. Señala que “el proceso de aprendizaje de una teoría depende del estudio de sus aplicaciones, incluyendo la práctica en la resolución de problemas, tanto con un lápiz y un papel como con instrumentos de laboratorio” (Kuhn, 1971, p. 85).

Como lo señala Hacking (1985), los paradigmas más importantes son los que generan campos científicos. Estos paradigmas señalan el tipo de problemas en los que se puede o no trabajar. Kuhn (1971) señala: “Los hombres cuya investigación se basa en paradigmas compartidos están sujetos a las mismas reglas y normas para la práctica científica” (p. 34). Así, para la presente investigación, consideramos que la interpretación de gráficas cartesianas del movimiento de objetos se sitúa en prácticas científicas que determinan el contexto en el cual se encuentran los estudiantes y en la que llevan a cabo sus interpretaciones; las que son posteriormente evaluadas de acuerdo a los criterios definidos en el plano epistemológico. Santos-Trigo, Moreno-Armella y Camacho-Machín (2016) señalan: “este marco [ETM] explícitamente articula actividades epistémicas que definen prácticas matemáticas y cómo los estudiantes se involucran en exploraciones matemáticas válidas” (p. 827, traducción libre).

Artefactos y signos como mediadores

Tomando en cuenta el carácter primordial de las herramientas y signos tanto en la práctica científica como en su característica semiótica como mediadores del pensamiento en el ámbito de los ETM, es pertinente mencionar la aproximación histórico-cultural de Vygotsky (2009), para quien el uso de herramientas y de signos psicológicos (tales como el lenguaje y gestos) juega un papel primordial en el desarrollo del pensamiento. Según Vygotsky (2009), las herramientas y los signos son mediadores de las funciones psicológicas superiores; incluso, son utilizados para controlar la actividad propia y la de los demás (Kozulin, 2000): el uso de la herramienta influye sobre el objeto de la actividad humana, mientras que el uso del signo influye sobre los procesos psicológicos. La relación existente entre la herramienta y los signos es tal que, mediante su uso, el hombre transforma su propia naturaleza [pensamiento].

MÉTODO

Esta investigación es de carácter cualitativo. El lugar donde se llevó a cabo la investigación fue en un laboratorio de física de una escuela secundaria de la ciudad de México (grado 12). Los participantes del estudio fueron: el profesor, quien imparte la asignatura de física desde hace más de 30 años, y 11 estudiantes (16-18 años). Se implementaron cinco actividades, en orden secuencial. Todas fueron diseñadas por los tres investigadores del presente artículo; sin embargo, antes de escribir la versión final de cada actividad, se incorporaron sugerencias del profesor, quien tuvo acceso a las versiones preliminares. En conjunto, las actividades tienen el propósito de documentar la evolución del conocimiento de los estudiantes respecto del análisis de gráficas cartesianas obtenidas con un sensor virtual de movimiento (software) en un experimento de la caída de un objeto por un plano inclinado. Así, las actividades se dividen en dos partes: las primeras dos corresponden a la implementación del experimento –de la caída de una pelota por un plano inclinado– por parte de los estudiantes; mientras que las actividades 3, 4 y 5 corresponden a preguntas para indagar la comprensión de los estudiantes entorno al fenómeno físico de la caída de un móvil por un plano inclinado y la relación con las gráficas cartesianas generadas por dicho movimiento.

La recolección de datos se llevó a cabo durante cinco sesiones de trabajo; dos horas por sesión (una sesión por semana). Las primeras dos actividades –correspondientes a la realización del experimento– se llevaron a cabo durante las primeras tres sesiones; mientras que las actividades 3, 4 y 5 se realizaron durante las últimas dos sesiones. Todos los participantes fueron video-grabados durante todas las sesiones. Además, se les dio hojas de trabajo que orientaron las actividades. Después de las cinco sesiones, se recabaron las hojas de trabajo y éstas fueron analizadas junto con los videos de cada sesión. No se hicieron entrevistas a los participantes de la investigación.

Para los objetivos del presente artículo, se presenta el análisis de momentos de discusión entre los estudiantes ocurridos durante el desarrollo de la actividad 1 (explicada en la siguiente sección); así como el análisis de una pregunta seleccionada de la actividad 3 y una pregunta seleccionada de la actividad 5.

Sensor virtual de movimiento

En la actividad 1 (ver Anexo 1) los estudiantes llevaron a cabo (en equipos de 3 y 4 integrantes) un experimento de la caída de una pelota por un plano inclinado para obtener gráficas cartesianas de distancia (vertical) vs. tiempo e interpretarlas en términos del concepto físico de sistema de referencia. Para la obtención de las gráficas, los estudiantes utilizaron un software (AviMéca) que les permitió trabajar con el concepto de sistema de referencia (Figura 1); el procedimiento que siguieron fue video-grabar la caída de la pelota por el plano inclinado, con alturas diferentes en cada ocasión. De cada video obtenían una tabla de valores con las variables: tiempo en segundos [t(s)], posición horizontal en metros [x(m)] y posición vertical en metros [y(m)] (Figura 2). Se les indicó que con ayuda de Excel, obtuvieran las gráficas correspondientes utilizando solamente las variables tiempo (eje horizontal) y posición vertical (eje vertical); con lo que obtendrían gráficas de parábolas (cóncavas o convexas) dependiendo de la elección del sistema de referencia (Figura 1).

Es importante señalar que, previo al inicio de las sesiones para la toma de datos, uno de los investigadores asistió al laboratorio para mostrar a los estudiantes el software que posteriormente ellos utilizarían. Se les hizo una demostración con un video y se aclaró las dudas que tuvieron. Todos los estudiantes ya tenían un conocimiento sobre otro software similar al AviMéca.

Figura 1: (Izquierda) Un estudiante deja caer una pelota por el plano inclinado. La captura de pantalla muestra los ejes cartesiano producido por el software AviMéca (derecha) y la configuración del sistema de referencia en el mismo (derecha).

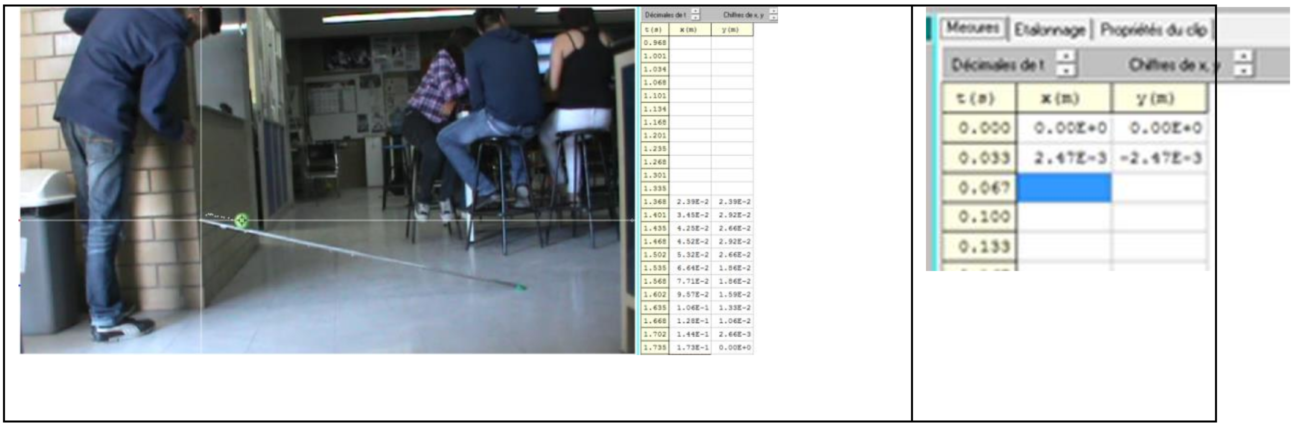


Figura 2: Captura de pantalla del proceso de toma de datos con el software

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El análisis lo hemos dividido en dos partes. La primera de ellas la centramos en extractos obtenidos de las discusiones (Extractos) involucradas con el uso del software (actividad 1); la segunda, en las respuestas seleccionadas de las actividades 3 y 5. El concepto eje que guía las actividades de los estudiantes es el relativo a los sistemas de referencia. Dentro de este concepto dos elementos que lo componen y que los estudiantes deben manejar es el de origen del sistema de referencia y la dirección que implica el cambio de concavidad de las gráficas cartesianas.

El propósito del artículo se vincula con la interpretación de las gráficas cartesianas de acuerdo al concepto de sistema de referencia. No obstante que en la actividad 1 los estudiantes obtuvieron varias gráficas a través del software, todas las gráficas de posición vertical vs. tiempo que obtuvieron fueron de la misma forma (cóncavas). Por lo tanto para nuestro análisis es suficiente una sola gráfica –entre todas las obtenidas por los estudiantes– para analizar el papel que tiene el artefacto y los signos en el proceso de producción de significados por parte de los estudiantes y determinar la dificultades a las que se enfrentan para darse cuenta del papel que tiene el sistema de referencia para cambiar la concavidad de las gráficas.

Análisis de los extractos

En el Extracto 1, se presenta el primer momento, durante la sesión 2, en el que los cuatro integrantes del Equipo 1 trabajan con el software que les permite obtener las gráficas del movimiento de la pelota por el plano inclinado. Es el momento en que inició el trabajo con la herramienta.

Extracto 1-Sesión 2

1 E2: [*Mientras E2 está trabajando con el software AviMéca para construir la tabla de valores de la Actividad 1, todos los integrantes del Equipo 1 están observando la pantalla; véase Figura 3*] Es aquí, ¿no?, ¿se pone aquí el plano o no? [*Señala la parte más alta del plano inclinado, de donde se suelta la pelota*].

2 E1: ¿Dónde?

3 E2: Aquí [*Indicándole a E1 que se fijara en dónde estaba colocado el cursor sobre la pantalla*].

4 E1: ¿Dónde estás?... [*Inaudible*] [*Los otros tres integrantes del Equipo 1 hablan al mismo tiempo*]. A ver, muévete tantito [*Pidiendo a E2 que moviera el cursor para que él lo pudiera localizar*]. Ah, ya te vi [*Localiza el cursor*].

5 E2: Es aquí, ¿no? [*Señala nuevamente la parte más alta del plano inclinado*].

6 E3: Sí.

7 E2: O ¿dónde es?

8 E3: En la u…[*No termina la palabra*] en el mero centro, centro, centro, centro [*Indicando el centro de la pelota*].

9 E2: No, pero eso es para poner la, el plano [*Inaudible*] o ¿en dónde?

10 E1: Pregúntale [*Le dice a E2 que le pregunte al profesor*].

11 E4: No me acuerdo dónde la… [*Inaudible*] sí creo que es ahí.

E2 no sabe dónde colocar el sistema de referencia (1). Hasta este momento podemos decir que el único elemento que se desarrolla en el Extracto 1 es el correspondiente a la génesis instrumental en el sentido del proceso de *instrumentalización*; el uso que los estudiantes hacen con el software, pero sin ninguna influencia recíproca aún del software sobre las acciones de los estudiantes (*instrumentación*).

A partir de aquí, a través del lenguaje utilizado por E2, se advierte que él no cuenta con las herramientas psicológicas [lenguaje] adecuadas para expresar sus ideas. En particular, a la misma palabra ("plano") le asocia dos significados diferentes (1 y 9). La que usa en un primer momento (1), se refiere al marco de referencia pero sin entender aún su significado institucional, mientras que la segunda (9), se refiere al lugar del objeto [pelota de tenis] que se utiliza para obtener la tabla de valores. Al utilizar E1, en un primer momento, la palabra "plano" en lugar del "marco de referencia" o "sistema de referencia" propicia que E3 interprete que lo buscado por E2 es el lugar en el objeto [pelota] que se utiliza para la toma de datos (8). En el extracto se observa la coordinación en el plano instrumental-discursivo en el momento en que los estudiantes inician a interactuar con el software.

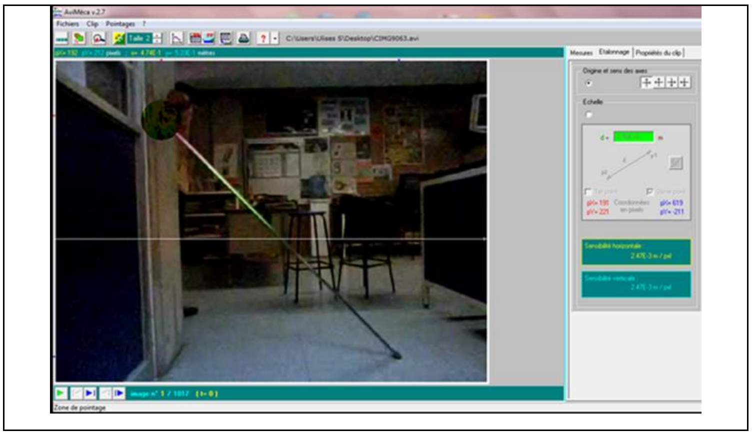


Figura 3: Captura de pantalla del momento en que los estudiantes trabajan con el software

En el resto de la sesión, los estudiantes se dedicaron a terminar de videograbar el experimento y obtener sus respectivas gráficas cartesianas.

Durante la sesión 3, después de que el Equipo 1 terminó de trazar todas las gráficas de las actividades 1 y 2, se les indicó que las compararan y describieran las diferencias y semejanzas entre ellas. De esta manera, en el Extracto 2, se observa la interacción por parte de todos los integrantes del Equipo 1 en su discusión sobre el sistema de referencia.

Extracto 2-Sesión 3

1 E4: Podríamos decir, al cambiar el sistema de referencia varían las… ¡ay!, ¿cómo decirlo?...varían los datos, ya sean positivos o negativos [*Es interrumpido por E3*].

2 E3: No, los datos son los mismos, pero lo que cambia, lo que los hace cambiar de positivos a negativos es el sistema de referencia [*E1 corrige diciendo: "marco, marco de referencia"*]. [*E4 intenta decir algo, pero E3 continúa*] Pero los datos son los mismos porque van de caída.

3 E2: Pero también cambian los datos.

4 E3: Lo que cambia es el positivo o negativo.

5 E4: Pero también cambian los datos, mira fíjate, mira fíjate la prueba avi [*Pretende utilizar el software AviMéca, pero no lo hace*].

6 E3: Ah no, sí, sí cambian; es cierto.

(…)

7 E4: Si cambias el estado de referencia también los datos cambian, por lo cual la gráfica cambia.

E4 intenta elaborar una idea para luego escribirla, pero tiene un momento de duda sobre lo que debe decir (1). El intento por parte de E4 para elaborar su idea se puede interpretar, en el marco de la teoría de Vygotsky, como un proceso de planificación de su pensamiento, es decir la interiorización de los elementos –conceptos y argumentos– que den cuenta de la Actividad que se pretende resolver; en este caso el aprendizaje del concepto de sistema de referencia. Se observa cómo E4 trata de establecer una relación entre los datos y el sistema de referencia. El hecho de que lo diga en voz alta indica una necesidad de establecer un diálogo con sus compañeros. Esto le ayuda a esclarecer sus ideas. De esta manera, se observa que el lenguaje opera como instrumento psicológico que le permite a E4 a avanzar en la comprensión del concepto de sistema de referencia. En el Extracto 2 se observa el carácter mediador de la herramienta desde una perspectiva semiótica, como portadora de significados. Estos significados están determinados por el tipo de problemas que se pueden resolver con la herramienta. En otras palabras, el software es proveído con una serie de características de acuerdo con su objetivo de uso, en este caso la obtención de datos de posición y tiempo de un movimiento físico a partir de un sistema de referencia.

En el extracto anterior se observa la existencia de un trabajo conjunto sobre los tres planos (génesis). El plano entre la génesis instrumental del uso de la herramienta y la génesis semiótica está en estrecha relación con la génesis discursiva que provoca en los estudiantes una orientación de su razonamiento dirigida hacia el núcleo sobre el significado institucional del sistema de referencia. Como lo señalan Resnick y Halliday (1970): "Aun cuando las leyes físicas son las mismas en todos los marcos de referencia, los valores de las cantidades físicas medidas (…) pueden no ser iguales. Por consiguiente, es importante que el estudiante siempre se dé cuenta de cuál es su marco de referencia en un determinado problema" (p. 30).

Aun cuando los estudiantes han iniciado el proceso hacia la toma de conciencia sobre el significado de los sistemas de referencia, es importante destacar la siguiente expresión de E3 (2): "Pero los datos son los mismos porque van de caída." En lo dicho por E3, se observa una característica común en los estudiantes: perciben la gráfica como una representación exacta del movimiento observado, no como una representación en la que se analiza la manera en que dos variables están relacionadas. En el Extracto 3 se observa este mismo pensamiento en otro de los estudiantes del Equipo 1. En este momento se desarrolla un trabajo semiótico-discursivo en donde los estudiantes buscan dar significado a los elementos del sistema de referencia trabajados con el software. Se observa también un desarrollo respecto de la génesis instrumental. Ahora, el software ha influido –

mediante la instrumentación– en la manera en que los estudiantes tratan de dar significado a los datos; en particular E4 (5) se refiere al software como un elemento para interpretar sus resultados.

También durante la sesión 3, después de que el investigador revisó las gráficas obtenidas por el Equipo 1, le pidió a los integrantes que trabajaran con el software, con la finalidad de que observaran si al cambiar el sistema de referencia se modificaba, de alguna manera, la concavidad de las curvas.

Extracto 3-Sesión 3

1	E1: Es que nunca vamos a obtener una curva hacia arriba si solamente cambiamos el sistema de referencia. Es ilógico, porque nuestra pelota siempre va a ir hacia abajo.
2	Investigador: O sea, como la pelota siempre va hacia abajo, tú dices que nunca va la gráfica a ser hacia arriba [*Dirigiéndose a E1*].
3	E1: Mientras estemos cambiando el sistema de referencia. El sistema de referencia nos va a dar la posición de nuestra gráfica, pero siempre va a estar curva.
4	Investigador: ¿Hacia abajo?
5	E1: Ajá.

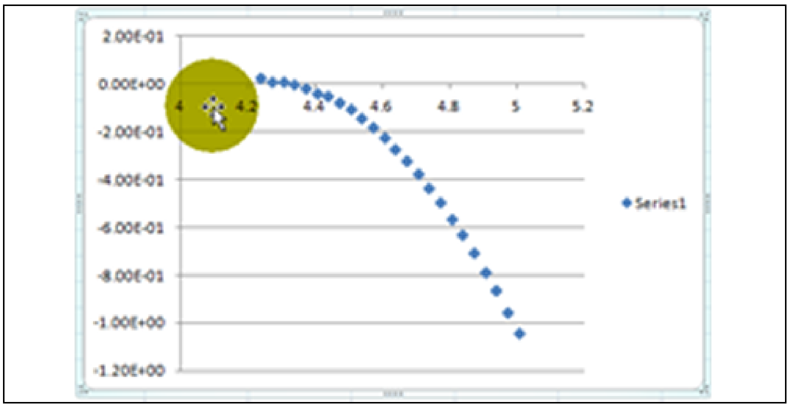


Figura 4: Una de las gráficas obtenidas por el Equipo 1 al realizar la Actividad 1

Después de que el Equipo 1 intentó, en dos ocasiones, cambiar la concavidad de las curvas obtenidas en el AviMéca por medio de la modificación del sistema de referencia del software, E1 llegó a la conclusión de que el sistema de referencia no influye en la concavidad que van a tener las curvas (1). Esta aseveración confirma el proceso de aprendizaje de E1, percibido a través del lenguaje que utiliza. E1 se refiere al sistema de referencia por su nombre. Antes del Extracto 3, el Equipo 1 se refería a un sistema de referencia como “plano” (véase 1 del Extracto 1). Al referirse al sistema de referencia, E1 se ubica en un ámbito más abstracto relacionado con una noción matemática representada en el software, mientras que al hablar del “plano” está pensando en el dispositivo físico que se usa en el experimento; es decir hay un cambio de atención en el objeto de análisis. Se observa también que E1 usa la palabra “curva”, sin embargo, aún no la identifica como una parábola.

E1 no asocia la orientación [concavidad] de la curva como algo dependiente del sistema de referencia (1). Para este estudiante, el movimiento de un objeto [pelota] es independiente de la manera en que puede representarse dicho movimiento. Además, para E1, el sistema de referencia sólo permite ubicar la curva en algún lugar del plano cartesiano (3). Para él, la curva es un objeto, en cierto sentido, inamovible. Así, hay rastros en su diálogo que indican que él considera a la gráfica como la trayectoria recorrida por un cuerpo. Por lo tanto, como la trayectoria que sigue la pelota es hacia abajo, no se puede modificar la gráfica generada por su movimiento.

En el siguiente extracto, se presenta un momento muy importante dentro de las actividades del ETM con gráficas cartesianas, cuando se lleva a cabo una interacción entre el profesor y otro de los equipos de la clase (Equipo 2). Así, durante la sesión 3, mientras los integrantes del Equipo 2 trabajaban en la obtención de sus gráficas, le preguntaron al profesor sobre “cómo afecta el cambio de origen del sistema de referencia”. Así, en el Extracto 4 se observa la contribución del profesor para aclarar las dudas del Equipo 2.

Extracto 4 – Sesión 3.

1	Profesor: Eso no te dice que tenga la pelota un comportamiento diferente [*Refiriéndose al origen del sistema de referencia*]. Si tú hubieras puesto el origen [*Mueve la cabeza hacia arriba y hacia abajo, a manera de pregunta*].
2	E9: ¿Más abajo?
3	Profesor: En donde sale la pelotita…[*Es interrumpido por E9*].
4	E9: Aquí, ¿no? [*El profesor pregunta: “¿dónde?”*].Y también si yo lo quisiera cambiar, me lo cambiaría, ¿no?
5	Profesor: Eso no afecta la forma de la gráfica, o de los datos de la gráfica. Cambia algunos parámetros, cambia algunos parámetros porque te va a decir, bueno al tiempo cero, la posición no es cero; o al tiempo cero, la posición es cero. Si avanza diez [*Hace un movimiento con la mano hacia la derecha; véase Figura 5a*], pues si tú pones el origen acá [*Señala el lugar donde colocaría el marco de referencia; véase Figura 5b*] ¿cuánto avanza?

Figura 5a

Figura 5b

Figura 5: A partir de la elección de un sistema de referencia, el profesor analiza con E9 la posición de la pelota (derecha)

El profesor da una respuesta breve sobre cómo la ubicación del origen del sistema de referencia no tiene relación con el movimiento que sigue el objeto [pelota] (1). Pero no aborda el tema respecto de qué manera afecta los valores de la tabla y, por consiguiente, la gráfica. Posteriormente, trata de que E9 encuentre la respuesta, preguntándole qué cambiaría al colocar el origen del sistema de referencia en otro lugar (1). Sin embargo, al decir: “En donde sale la pelotita” (3), el profesor toma en cuenta solamente la posición del sistema de referencia y deja de lado el punto en la pelota respecto del cual se van a tomar los valores; es decir, el profesor no especifica que los valores de la distancia y la forma de la gráfica se modifican al cambiar el sistema de referencia. Como señala Vygotsky (2009), los individuos personas tienen una línea de desarrollo social y cultural de sus funciones psicológicas superiores. Así, el profesor, al ser parte del contexto cultural del estudiante influye en el desarrollo cognitivo de éste. De hecho, al no ser claro en su lenguaje [pensamiento] en el momento de explicar la importancia del sistema de referencia, puede ocasionar una comprensión errónea o incompleta de este concepto en sus estudiantes.

Por otra parte, se observa cómo el profesor utiliza gestos (véase *Figura 5*) en su diálogo con los estudiantes. El gesto de la mano extendida (véase *Figura 5a*) lo utiliza como significación de un movimiento continuo, cuando dice: “Si avanza diez” (refiriéndose al origen del sistema de referencia). Mientras que cuando dice: “pues si tú pones el origen acá” (véase *Figura 5b*) lo dice en sentido a una posición estática. Como señala Radford (2008), el uso de gestos [artefactos] son parte constitutiva e inherente del pensamiento; no son simplemente una ayuda al mismo; esto es se piensa con ellos. Son un elemento que permite el desarrollo cognitivo y que a su vez van cargados de significados. Sin embargo, los gestos utilizados por el profesor no provocan en el estudiante una toma de consciencia sobre el papel del sistema de referencia en el tipo de gráfica que obtienen. En el gesto solamente está presente el origen y no la orientación, por lo que no ayuda al estudiante a darse cuenta de qué manera sería posible cambiar la orientación de las gráficas y no solamente su desplazamiento en el plano cartesiano.

A través de la génesis discursiva que se desarrolla entre el profesor y E9, se observa un momento en donde entran en contacto, por un lado, el ETM idóneo, el cual posibilita el trabajo matemático dentro del paradigma de la manera en que se construyen gráficas cartesianas relacionadas con el movimiento de objetos y en donde el sistema de referencia es elemento primordial para su construcción y, por otro, el ETM personal tanto del profesor como del alumno. Sin embargo, observamos que el ETM personal no se ha desarrollado lo suficiente entre profesor y alumno como para alcanzar el ETM idóneo que permita la solución del problema. Por lo tanto E9 trabaja en su ETM personal de manera que no puede resolver su duda con la ayuda del software de la misma manera que lo hizo el Equipo 1. Hay una dependencia mayor hacia la figura del profesor que hacia la herramienta.

Análisis de las respuestas en las hojas de trabajo

Después de que los estudiantes del Equipo 1 realizaron y discutieron el experimento, se procedió a observar si los estudiantes eran capaces o no de representar y analizar, sin ayuda del plano real, el movimiento de la pelota en términos del concepto de sistema de referencia. De tal manera que se seleccionaron las siguientes preguntas de las actividades 3 y 5 (una pregunta por actividad), de algunos integrantes del Equipo 1.

Pregunta 1 de la Actividad 3

1. Se monta un plano inclinado (P1) de longitud AB=150 cm, a una altura AC=120 cm (Figura 3.1). Se deja caer una pelota desde lo más alto del plano inclinado (A). Con esta información contesta las siguientes preguntas.

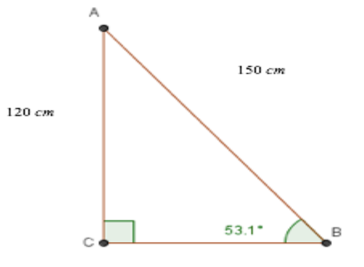


Figura 3.1: Representación geométrica del Plano inclinado P1.

Pregunta:

Para el plano inclinado de la Figura 3.1, qué tipo de gráfica se generará en término de la distancia y el tiempo? Haz un esbozo de la gráfica que se obtiene.

Figura 6: Pregunta 1 de la Actividad 3

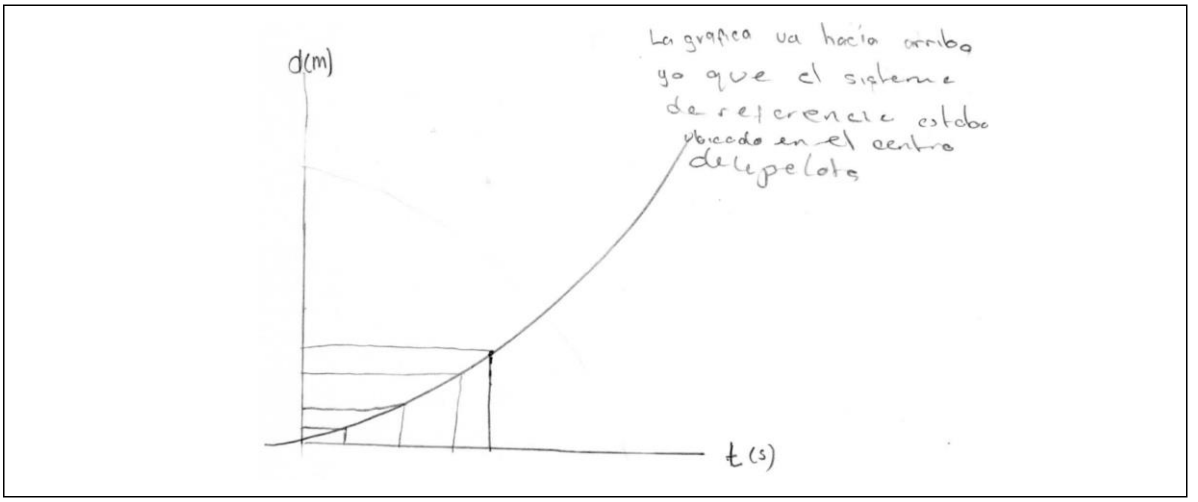


Figura 7: Respuesta a la pregunta 1 de la Actividad 3 por parte de E3

E3 identifica que el sistema de referencia es el causante de la orientación de la curva, sin embargo, no tiene claro aún el concepto de sistema de referencia. Para E3, basta con que este sistema se sitúe en el centro de la pelota para que la curva esté “hacia arriba”. No ha logrado darse cuenta de que la orientación de la gráfica depende de la orientación de los ejes, una vez elegido el sistema de referencia. En el trazo hecho por E3, se observa también que la gráfica toma valores negativos de la variable tiempo. Podría inferirse que E3 no ha logrado darse cuenta de cuáles son los valores del tiempo permitidos en este tipo de movimientos. Al tratarse de la representación de un experimento físico, los datos obtenidos de la distancia inician a partir del momento en que se inicia a tomar los datos. Imposibilitando la obtención de valores negativos de la variable tiempo. En este momento se ha dejado el experimento, y la necesidad de un análisis funcional del movimiento de un objeto es necesario para dar cuenta de la representación gráfica. El estudiante comienza a acercarse al objetivo de las actividades incrustadas en el ETM idóneo.

Pregunta 2 de la Actividad 5

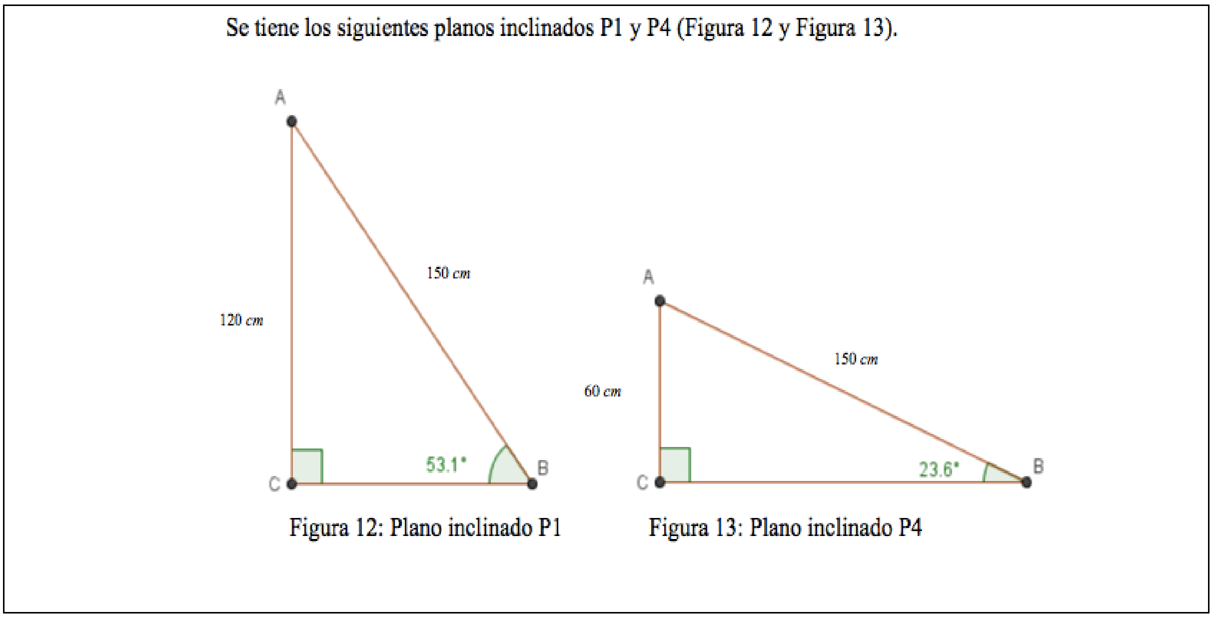
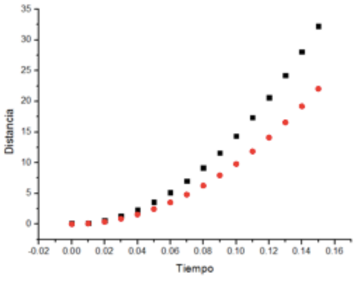


Figura 12: Plano inclinado P1

Figura 13: Plano inclinado P4

Observa la siguiente gráfica que corresponde a los planos P1 y P4.



Gráfica 3

Pregunta

2. Las curvas de la Gráfica 3 ¿se tocan en algún punto? Si es así, ¿por qué y en dónde?

Figura 8: Pregunta 2 de la Actividad 5

La respuesta de E2 a la pregunta 2 de la Actividad 5 fue: "Se tocan en (0,0) ya que tienen el mismo sistema de referencia que sería el origen, y también se van tocando en algunos otros puntos debido a que como se va dando la trayectoria al inicio su velocidad es semejante." Así, a diferencia de E3 (véase *Figura 7*), E2 logró establecer alguna relación entre el sistema de referencia y el origen. Sin embargo, aún es inexacto en su noción de dichos conceptos. También se resalta el hecho de que E2 menciona que además de que se tocan en el origen (0,0), las curvas se tocan "en algunos otros puntos". Esta respuesta se basa más en la percepción de la gráfica que se le presenta (Gráfica 3 de la Figura 8) que en un análisis del movimiento de los objetos. Cada curva corresponde a planos inclinados con diferentes alturas (los estudiantes lo saben) por lo que al contestar la pregunta 2 de la Actividad 5, E2 no retoma lo realizado en la Actividad 1 en las cuales los estudiantes podían observar que para planos inclinados con diferentes alturas, sus curvas solamente se tocaban en el origen si se ponían en un mismo sistema de ejes coordenados.

CONCLUSIONES

En el presente artículo se presentaron resultados de actividades orientadas a documentar el proceso de aprendizaje de estudiantes de bachillerato en el análisis de gráficas cartesianas obtenidas con un sensor virtual de movimiento (software), en un experimento de la caída de un objeto por un plano inclinado. El aprendizaje del concepto de sistema de referencia estuvo mediado por el software [herramienta]. De esta manera, el trabajo matemático realizado por el profesor y sus estudiantes, dentro de la génesis instrumental, permitió que la confusa relación entre movimiento real y representación gráfica, que en un principio tuvieron los estudiantes, fuera trabajada hacia una mejor comprensión de los conceptos involucrados. En este proceso la génesis discursiva fue asimismo importante dentro del ETM como medio de razonamiento y comprensión de los conceptos teóricos involucrados. En conjunto, el uso de la herramienta computacional y la interacción entre los alumnos fue fundamental para ayudar al estudiante a distinguir y vincular el movimiento físico (caída de un objeto por el plano inclinado) con su representación gráfica y, de esta manera, influir a su vez en el desarrollo de los significados de los conceptos.

Dentro de la evolución del ETM con gráficas cartesianas, la interacción entre los participantes fue determinante para su constitución. Es decir, la interacción que se llevó a cabo tanto entre los estudiantes del Equipo 1, como la que se generó entre los estudiantes de este Equipo 1 con el profesor. Aunque el trabajo con la herramienta contribuyó al desarrollo conceptual de los estudiantes, es importante señalar que el concepto de marco de referencia no se logró comprender en su totalidad. El comentario precedente se evidencia por el hecho de que los estudiantes del Equipo 1 no pudieron obtener gráficas convexas. Así, el conocimiento del significado conceptual del sistema de referencia no permitió a los estudiantes darse cuenta de que éste es muy importante en la descripción del movimiento de objetos y, por supuesto, en la orientación de las gráficas. Futuras investigaciones son necesarias para dar cuenta sobre cómo los estudiantes logran relacionar la elección de un sistema de referencia con la manera en que se representa el movimiento por medio de gráficas.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los participantes en esta investigación. Al profesor encargado del grupo en el cual fueron tomados los datos; así como a los estudiantes y a la escuela por permitirnos llevar a cabo esta investigación.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

DiSessa, A., Hammer, D., Sherin, S. & Kolpakowski, T. (1991). *Inventing graphing: Meta-representational expertise in children*. Journal of Mathematical Behavior, 10, 117-160.

Doorman, L.M. (2005). *Modelling motion: from trace graphs to instantaneous change*. (Tesis doctoral: Universiteit Utrecht, Nederlands) Recuperada de http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/1727

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Hacking, I. (1985). *Revoluciones Científicas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos psicológicos. La educación desde una perspectiva sociocultural.* España: Paidós.

Kuhn, T. S. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Fondo de cultura económica.

Kuzniak, A. (2011). *L'espace de Travail Mathématique et ses genèses*. In Annales de didactique et de sciences cognitives (Vol. 16, pp. 9-24).

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. In *Troisième symposium Espace de travail mathématique* (pp. 7-12).

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM, 48*(6), 721-737.

Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática, 19*(3), 5-30.

Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2013). Un origen matemático vs. dos orígenes fenomenológicos: la significación del movimiento de objetos respecto del punto (0,0). *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 183-208.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J., & Cerulli, M. (2003). Calculators, Graphs, Gestures and the Production of Meaning. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 55-62.

Resnick, R., & Halliday, D. (1970). *Física: Vol. 1.* México: CECSA.

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., & Camacho-Machín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM*, *48*(6), 827-842.

Vygotski, L. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. España: Critica.

ANEXO 1: ACTIVIDAD 1

En equipos de tres o cuatro personas se realiza la siguiente actividad:

1. Monten el siguiente arreglo:
   a) Un plano inclinado (P1) de 150 *cm* de longitud y altura 110 *cm*.
2. Obtengan el ángulo de inclinación del plano inclinado.
3. Una o dos personas del equipo dejan caer desde lo más alto del plano inclinado una pelota de tenis; mientras que otra persona graba a una distancia aproximada de dos metros (o lo suficiente para que se vea el plano inclinado en la toma).
4. Con ayuda de AviMéca y Excel tracen la gráfica del movimiento, de distancia contra tiempo, de la pelota de tenis cuando ésta desciende por el plano inclinado (P1).
5. Bajen el plano inclinado 10 *cm* y repitan los puntos 2, 3 y 4.
6. Bajen el plano inclinado 20 *cm* y repitan los puntos 2, 3 y 4.
7. Bajen el plano inclinado 20 *cm* y repitan los puntos 2, 3 y 4.
8. Bajen el plano inclinado 20 *cm* y repitan los puntos 2, 3 y 4.
9. Comparen las gráficas obtenidas en los puntos 4, 5, 6, 7 y 8, y describan las diferencias y semejanzas entre ellas.
10. En un mismo sistema de ejes coordenados, coloquen todas las gráficas generadas en 4, 5, 6, 7 y 8, y describan las diferencias y similitudes entre ellas.
11. Elabora una conclusión de la actividad realizada.

ANÁLISIS DE LA CONCEPCIÓN DE UN BANCO DE PROBLEMAS EN LÍNEA ALEATORIOS PARA LA EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS

Jorge Gaona

Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot

jorge.gaona@etu.univ-paris-diderot.fr

En este artículo se analiza el banco de problemas que conforman un sistema de evaluación en línea. Este banco fue concebido por un grupo de profesores de una universidad chilena. Este análisis se realiza comparando los problemas que conforman este sistema con los problemas que los profesores utilizan en sus evaluaciones en lápiz-papel. Primero se hizo una comparación general caracterizando los problemas en tipos de tareas, luego se hizo una comparación local a partir de la agrupación de tareas en grupos de tareas y se finalizó con un análisis de una tarea particular para comprender cómo se transforma el espacio de trabajo matemático al cambiar de soporte.

***Palabras claves**: ETM, evaluación en línea, funciones*

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es amplia la variedad de programas y aplicaciones en línea que han sido desarrolladas para tal propósito. No obstante, en las salas de clases, la integración no ha ido a la par con las expectativas que producen los nuevos desarrollos (Artigue, 2010).

Entre todas las tecnologías desarrolladas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, los sistemas de evaluación en línea han tenido una importante evolución a nivel técnico; este desarrollo se discutirá brevemente en una sección en la que se describen las potencialidades y limitaciones en torno a este tipo de sistemas.

La puesta en marcha de un sistema de evaluación en línea por parte de una institución educacional, supone de parte de ella la toma de una serie de decisiones, las cuales pueden tener diversos efectos dependiendo de las elecciones realizadas.

Hay instituciones que deciden utilizar un banco de problemas ya creados de manera externa a la institución y otras que deciden crear su propio banco de problemas.

Si buscamos en la literatura sobre evaluaciones en línea, las investigaciones están centradas en las actividades de estudiantes o profesores con este tipo de recursos (Abboud-Blanchard, Cazes, & Vandebrouck, 2008; Cazes, 2008; Cazes, Gueudet, & Vandebrouck, 2006; Sancho-Vinuesca & Escudero, 2012) o en las potencialidades y limitaciones técnicas de este tipo de sistemas (Heck & Gastel, 2006; Naismith & Sangwin, 2004; Sangwin, Cazes, Lee, & Wong, 2010; Sangwin & Grove, 2006), pero sobre el diseño de tareas específicas, la investigación es escasa.

Si una institución utiliza un banco externo de problemas ya diseñados, las decisiones que deben tomar estarán centradas en la implementación, como por ejemplo la elección de preguntas a implementar o las reglas para los estudiantes; en cambio, las instituciones que eligen desarrollar un banco de problemas, además deberán crear los problemas matemáticos que compondrán el sistema. Entonces, se podría esperar que los problemas concebidos por profesores que enseñan en la institución podrían estar "más próximos" a los problemas matemáticos que habitualmente ellos trabajan con sus estudiantes.

Estas decisiones en el diseño - que pueden ser tomadas de forma más o menos explícita - afectarán, entre otros elementos, el espacio de trabajo matemático potencial de los estudiantes, el cual es nuestro foco de atención.

En esta investigación, nos interesa caracterizar y luego comparar (1) los problemas concebidos por los profesores en este "nuevo" escenario virtual y (2) las preguntas de las evaluaciones lápiz-papel. Ambos conjuntos de problemas fueron generados por un equipo de profesores de una universidad chilena, en el marco de un proyecto interno de su departamento de matemáticas.

Realizar la comparación con los problemas que aparecen en las evaluaciones lápiz-papel nos pareció pertinente pues en ellas se puede observar lo que los profesores esperan que el estudiante logre desarrollar durante la unidad de funciones, además al analizar instrumentos de evaluación de diferentes períodos académicos se pueden obtener tareas recurrentes y por tanto "valorizadas" por los profesores.

Tomando como referencia las evaluaciones en lápiz-papel esperamos determinar cuáles son las similitudes y diferencias entre estos dos soportes y analizar a través de un caso particular cuáles son los cambios en el espacio de trabajo matemático potencial al cambiar de soporte.

Para analizar y caracterizar cada conjunto de problemas se realizó un análisis general, esto nos permitió tener elementos de comparación.

En una segunda etapa, se realizó un análisis más detallado de uno de los problemas utilizando la noción de Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011, 2013; Kuzniak & Richard, 2014) de tal forma de comprender cuáles son los cambios al adaptar ciertos tipos de tareas a la plataforma. Al respecto, Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016, p.5) indican lo siguiente:

> los Espacios de Trabajo Matemático y su estudio deben permitir dar cuenta de cómo un determinado conjunto de tareas y actividades terminan por estructurar (o no) un trabajo matemático complejo y rico por parte de profesores y estudiantes.
>
> […] un estudio detallado de los tipos de tareas con sus conocimientos técnicos y teóricos permite diferenciar la estructuración del campo.

Los problemas de la plataforma analizados, fueron diseñados durante el año 2014 por un grupo de 4 profesores de una universidad chilena, utilizando una plataforma Moodle[1] integrada con Wiris[2] para su diseño.

Estos profesores cuentan con una formación matemática (grado de magíster en matemáticas) y una experiencia de entre 3 y 7 años realizando clases. Este trabajo lo realizaron en el marco de un proyecto docente de la universidad para desarrollar una base de problemas para los estudiantes en las asignaturas de matemáticas.

METODOLOGÍA Y MARCO TEÓRICO

Datos analizados

Las evaluaciones lápiz-papel que se estudiaron corresponden a las evaluaciones oficiales de los últimos 5 semestres entre el primer semestre del 2013 y el primer semestre del 2015. Cada evaluación consta de 4 problemas sobre funciones, las que a su vez se subdividen en tareas. En total hay 62 tareas analizadas.

Acá la noción de tarea se refiere a una acción precisa que se espera del estudiante, la cual está descrita por un verbo y un determinante, por ejemplo: Graficar una función, calcular la intersección entre dos funciones, entre otras.

La plataforma está compuesta por 31 problemas sobre funciones, y algunas de ellas se subdividen en tareas. En total hay 33 tareas analizadas. Cada uno de estos problemas está definido con parámetros aleatorios en el enunciado, los cuales a su vez, son definidos por un algoritmo que el profesor programó al momento de crear el problema.

Una vez comparadas las tareas en cada uno de los soportes, se eligió un representante de cada uno de los conjuntos de problemas y se comparó utilizando la noción de Espacio de Trabajo Matemático, con el fin de comprender los cambios que se producen al cambiar de soporte.

La noción de Espacio de trabajo matemático (ETM) fue introducida por Houdement y Kuzniak (1996, 2006) en el dominio de la geometría (ETM_G). Actualmente el modelo considera de forma más general el Espacio de trabajo matemático asociado a un dominio específico (Kuzniak, 2011).

Según Kuzniak y Richard (2014, p2) el ETM "designa un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos".

Planos del ETM y su articulación mediante génesis

El ambiente, referido en el párrafo anterior, se articula en dos niveles, uno de naturaleza epistemológico, relacionado con los objetos matemáticos estudiados y otro cognitivo, que está relacionado con el pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas.

El nivel epistemológico está compuesto de tres polos:

- Representamen, constituido de signos semióticos en el sentido de Peirce (1978).
- Artefactos, constituido de elementos materiales o simbólicos que se transforman en instrumentos a partir de un proceso dialéctico en el sentido de Rabardel (1995).
- Referencial, constituido de definiciones y teoremas que conforman el sistema teórico de referencia.

El nivel cognitivo está compuesto de tres procesos:

- Visualización, relativa a la representación de los objetos mediante signos en una tarea dada.
- Construcción, relativa a la utilización de los instrumentos materiales o simbólicos para resolver una tarea.
- Justificación, relativa a la utilización de argumentos y pruebas en la realización de una tarea.

Los dos niveles, junto con sus polos descritos anteriormente se articulan mediante tres procesos de desarrollo dependientes los unos de los otros:

- Génesis semiótica, es un proceso que articula el polo de los objetos matemáticos mediante sus representaciones semióticas con la visualización.
- Génesis instrumental, es un proceso que articula el polo de los artefactos con la construcción, transformándolos en instrumentos.
- Génesis discursiva, es un proceso que articula las propiedades, definiciones y teoremas con el proceso de justificación.

Los diferentes elementos del ETM está relacionados a través del esquema de la Figura 1.

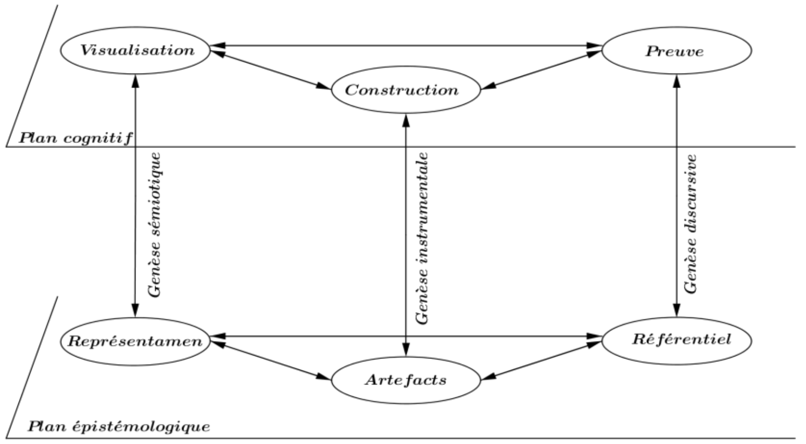


Figura 1: ETM y sus génesis (Kuzniak, 2011)

SISTEMAS DE EVALUACIÓN EN LÍNEA: LIMITACIONES Y POTENCIALIDADES, UN PANORAMA GENERAL

En general, las características de un sistema de evaluación en línea son variadas y dependen de la tecnología utilizada por cada uno, pero al menos todos los sistemas cuentan con dos características básicas:

- El sistema permite que los problemas propuestos sean corregidos automáticamente.
- El sistema permite guardar al menos el resultado de las respuestas de los estudiantes, es decir, dado un problema que el alumno respondió, el sistema puede guardar información acerca del resultado de esta respuesta.

Estas características son globales y no tienen que ver necesariamente con la disciplina de matemáticas. En cambio, las características particulares referentes a la interacción entre el alumno y el ordenador, con las que cuente (o no) el sistema de evaluación utilizado, sí estarán directamente relacionadas con el potencial espacio de trabajo matemático de los estudiantes.

Para poder hacer una síntesis de las potencialidades y limitaciones con las que, en general, cuentan este tipo de sistemas, la descripción de sus componentes se separó en tres partes[3]: enunciado del problema, respuesta del estudiante y retroalimentación.

Enunciado del problema (ordenador → estudiante):

En los enunciados, es posible proporcionar a los estudiantes interacciones con simuladores, objetos dinámicos, figuras, esquemas, gráficos bidimensionales y tridimensionales o procesos iterativos con o sin aleatoriedad en los parámetros que definen cada una de estas configuraciones mencionadas. Cada uno de estos elementos puede potenciar el proceso de visualización a través de "puntos calientes" (Stacey & Wiliam, 2013, p723). Si además, los objetos son interactivos, pueden funcionar como *medio* en el sentido de Brousseau (1998) ya que la interacción con el objeto retroalimenta al estudiante. En el caso de Wiris, se pueden crear enunciados con números, símbolos o gráficos aleatorios, no obstante, estos gráficos no son manipulables por lo tanto funcionan sólo como signo y no como instrumento.

Respuesta del estudiante (estudiante → ordenador)

En la respuesta del estudiante, es posible clasificar la interacción en dos grandes grupos: problemas en los cuales el estudiante debe identificar la respuesta correcta o problemas donde el estudiante debe producir una respuesta.

En el primer caso, están las preguntas del tipo opción múltiple, verdadero/falso y emparejamiento. Si los sistemas permiten solamente concebir/utilizar este tipo de problemas, hay una limitación en el trabajo potencial del estudiante, sobre todo si lo comparamos con las posibilidades que ofrece la evaluación en lápiz-papel. De todas formas, los problemas de opción múltiple pueden servir para articular diferentes registros semióticos (Duval, 1995).

En el segundo caso, se pueden distinguir diferentes niveles de interactividad en las respuestas de los estudiantes, cuando estos deben producir una respuesta: 1) de tipo gráfico/geométrico; 2) de tipo algebraico.

En el primer caso los avances más importantes están en el uso de deslizadores dentro de un entorno gráfico o geométrico desarrollados en sistemas como Aleks[4] o la versión beta de Question Type Geogebra[5]. En el caso de Wiris una de sus limitaciones es precisamente las posibilidades que ofrece para concebir problemas de este tipo, ya que el estudiante- en el mejor de los casos- debe elegir un gráfico (con parámetros aleatorios) entre varias alternativas, por lo que el trabajo matemático cambia (Berg & Boote, 2015).

En el segundo caso, los sistemas cuentan con un espacio en el cual el estudiante escribe un número y/o una expresión algebraica que debe ser comparada con una respuesta preconcebida en el sistema. Si el sistema no cuenta con un CAS (Computer Algebra System, por sus siglas en inglés) limita las posibles respuestas de los estudiantes, por ejemplo, no reconociendo la equivalencia entre ½ y 0.5, o x^(1/2) y $sqrt(x)$, sin pensar aún entre expresiones algebraicas más complejas o expresiones trigonométricas.

Contar con un CAS, a pesar de ser muy potente desde el punto de vista tecnológico y matemático, como lo indican Sangwin et al. (2010) hace emerger ciertas limitaciones cuando se compara con la evaluación que el profesor puede realizar en lápiz y papel; por ejemplo no todos los sistemas de este tipo pueden diferenciar dos expresiones a un segundo nivel: si están o no factorizadas, simplificadas, entre otras características.

En el caso de Wiris, el sistema cuenta con un CAS y con un sistema de diferenciación de segundo nivel como se muestra en la Figura 2.

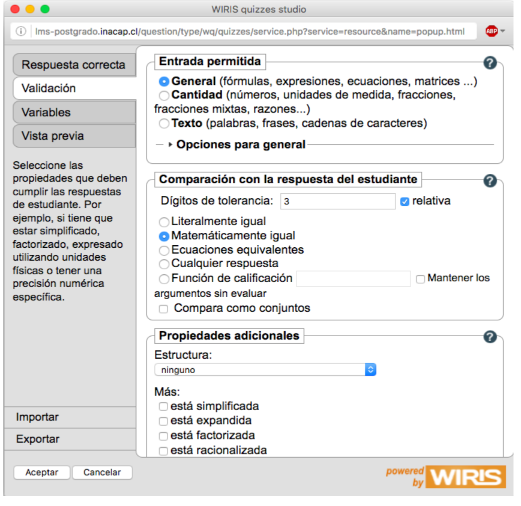


Figura 2: Opciones para diferenciar expresiones en un segundo nivel

Otro elemento a considerar, es la existencia (o no) de herramientas para escribir la respuesta de los estudiantes, como por ejemplo, los editores de ecuaciones, lo cual puede dificultar la respuesta de los estudiantes en el caso de expresiones algebraicas complejas (Heck & Gastel, 2006). Más recientemente, se está integrando una nueva tecnología a los sistemas de evaluación: reconocimiento de expresiones manuscritas en línea (Alvaro, 2015; Awal, 2011; Lallican, Viard-

Gaudin, & Knerr, 2000). En el caso de Wiris, este ha integrado el uso de editor de ecuación y de reconocimiento de escritura a mano alzada, no obstante en el momento en que los profesores concibieron estas preguntas, esta opción aún no estaba disponible.

Hay además sistemas que permiten crear preguntas abiertas como por ejemplo: ingrese una matriz de 2×2 con determinante 1, o un número primo mayor a 100, como por ejemplo el sistema Stack[6] o el mismo Wiris.

Retroalimentación (ordenador → estudiante)

Una de las variables que mayor impacto tiene en el aprendizaje de los estudiantes es la retroalimentación. Este impacto está dado tanto por el tipo de retroalimentación como por la forma en que se entrega (Hattie & Timperley, 2007).

En el caso de los sistemas de evaluación en línea, las características técnicas del sistema elegido tienen una incidencia directa en la variedad, calidad y configuración posible de la retroalimentación.

La mayor parte de los sistemas cuentan con retroalimentación de tarea, es decir, el sistema les indica a los estudiantes si la respuesta que ingresaron es correcta o no. Hay otros sistemas que pueden dar una retroalimentación de proceso, es decir, dar ideas o la solución paso a paso en función de los parámetros aleatorios y otros que van un poco más allá y dan una retroalimentación utilizando la respuesta de los estudiantes como elemento de la retroalimentación, como es el caso mostrado por Cazes y Vandebrouck, (2008, p. 246) y desarrollado en el sistema Wims[7].

En general, la retroalimentación de proceso puede ser especialmente sensible para aquellos estudiantes que realizan un procedimiento incorrecto pero obtienen una respuesta correcta (Cazes et al., 2006).

En el caso de Wiris, es posible hacer una retroalimentación paso a paso en función de los parámetros aleatorios pero no es posible utilizar la respuesta de los estudiantes para generar una retroalimentación a partir de ella.

Teniendo en cuenta las potencialidades, pero sobre todo las limitaciones de estos sistemas y en particular del utilizado en la concepción de este banco de problemas, podemos hacer una comparación local tomando en cuenta los elementos de la comparación global y las posibilidades que ofrece esta tecnología.

RESULTADOS

Comparación general: tareas concebidas en ambos soportes

La comparación que se presenta a continuación está centrada en los tipos de tareas y en el trabajo potencial que pueden realizar los estudiantes en uno y otro soporte.

En cada soporte se utilizaron varios tipos de tareas, hubo algunas que fueron comunes y otras que estuvieron presentes sólo en uno de los soportes. En cada soporte el porcentaje se calculó en base al total dentro del mismo, es decir, para las tareas en lápiz-papel, el porcentaje se calculó en base a las 62 tareas y en las tareas de la plataforma en base a las 33 tareas totales. El resumen de las tareas trabajadas en cada soporte se puede ver resumidas en la Tabla 1. Los tipos de tareas, a su vez, son separados en tres grupos: tareas sobre gráficos, tareas de cálculo y tareas de verificación. En la penúltima columna se calcula la diferencia entre el porcentaje de tareas en la plataforma y las tareas en lápiz-papel y en la última columna mediante un signo "+" o "-" se reporta si hubo un aumento o disminución en las tareas de la plataforma con respecto a las tareas en lápiz-papel.

Como se indicó en el párrafo de más arriba, los tipos de tareas se dividieron en tres grupos. Si comparamos los tres grupos a nivel macro podemos ver que hay un cambio en la proporción de los grupos entre el soporte lápiz-papel y el soporte plataforma.

En lápiz-papel, el trabajo está mayormente concentrado en tareas de cálculo, no obstante, las tareas sobre gráficos y las tareas sobre verificación también ocupan un espacio considerable en este soporte.

Tipos de tareas	Lápiz-papel		Plataforma		Δ
	N	%	N	%	
Tareas sobre gráficos	**10**	**16,1%**	**3**	**9,1%**	(-)
Graficar una función	10	16,1%			(-)
Identificar el gráfico de una función			3	9,1%	(+)
Tareas de cálculo	**39**	**62,9%**	**25**	**75,8%**	(+)
Calcular la función inversa	6	9,7%			(-)
Calcular el dominio de una función	6	9,7%	3	9,1%	(-)
Identificar el dominio de una función			4	12,1%	(+)
Calcular el recorrido de una función	6	9,7%	2	6,1%	(-)
Identificar el recorrido de una función			1	3,0%	(+)
Resolver una inecuación	4	6,5%	1	3,0%	(-)
Resolver una ecuación	4	6,5%	3	9,1%	(+)
Calcular la función compuesta	4	6,5%	2	6,1%	(-)
Generar la expresión algebraica de una función	3	4,8%	2	6,1%	(+)
Calcular el intervalo en el cual una función es creciente	3	4,8%			(-)
Calcular la imagen de un número	3	4,8%	5	15,2%	(+)
Identificar el intervalo de inyectividad de una función			1	3,0%	(+)
Identificar condiciones puntuales de una función			1	3,0%	(+)
Tareas sobre verificación	**13**	**21%**	**5**	**15%**	(-)
Verificar la inyectividad de una función	5	8,1%	1	3,0%	(-)
Verificar la paridad de una función	4	6,5%	1	3,0%	(-)
Verificar la sobreyectividad de una función			1	3,0%	(+)
Verificar la biyectividad de una función	3	4,8%	1	3,0%	(-)
Determinar el máx/min de una función cuadrática	1	1,6%	1	3,0%	(+)
Total	**62**	**100%**	**33**	**100%**	

Tabla 1: Tipos de tareas utilizadas en cada soporte

En cambio, en la plataforma esta proporción cambia, ya que tanto las tareas de verificación como las de gráficos disminuyen en comparación con las tareas de cálculo.

Además de la proporción de cada grupo de tareas, se puede observar que las tareas se transforman entre un soporte y otro, pasando de tareas de "cálculo" o "verificación" a "identificación", este cambio algunas veces viene dado por las limitaciones de la tecnología, como en el caso de las tareas sobre gráficos (como se analizará con más detalle más adelante), pero otras veces por una subutilización de las posibilidades de la herramienta tecnológica para concebir los problemas en la plataforma.

Para poder comprender cuáles de estos cambios producidos son el resultado de limitaciones tecnológicas y cuáles se deben a una subutilización de la plataforma, se dará una descripción resumida de las potencialidades y limitaciones de este tipo de sistemas y se indicará cuáles de estas características particulares cuenta o no Wiris.

Comparación local: tareas sobre gráficos, de cálculo y de verificación en ambos soportes

La forma en que el grupo de tareas sobre gráficos y sobre verificación se concibieron en la plataforma se debe en parte a las limitaciones de la plataforma pero también a una subutilización, pero las limitaciones son de naturaleza diferente.

En el caso de las tareas sobre gráficos, la tarea: "Graficar una función" en formato lápiz-papel, a raíz de las limitaciones en la plataforma descritas anteriormente necesariamente se transforma en una pregunta de identificación, no obstante como veremos en la comparación particular, se observa que dentro de las posibilidades que tenían, la elección hecha por los desarrolladores limita aún más el trabajo potencial de los estudiantes.

En el caso de las tareas de verificación, en ambos soportes el estudiante debe elegir entre verdadero o falso, no obstante en el lápiz papel lo que valora el profesor no es tanto la respuesta sino que su justificación. En contrapartida, en la plataforma lo que se valora es la respuesta correcta, por lo que el estudiante elige una de las opciones pero no está "obligado" a justificar su respuesta, lo que cambia sustancialmente el trabajo matemático potencial.

Por último, en el caso de las preguntas de cálculo, las preguntas que se transformaron de "calcular" a "identificar" fueron resultado de una subutilización de las posibilidades del sistema más que de las limitaciones de este. No tenemos otros datos para explicar esta subutilización, no obstante conjeturamos que pueden ser consecuencias de dificultades de tipo instrumental.

Comparación particular: Adaptación de la tarea "graficar una función" en evaluación lápiz-papel a la plataforma

Ejemplo pregunta "graficar una función" en lápiz-papel

En la Figura 3 se muestra una pregunta en la cual se pide graficar una función por partes y que a su vez está compuesta por una función cuadrática y otra afín.

En la consigna, se puede observar que las funciones están escritas en un registro algebraico, donde los coeficientes de cada uno de los términos son números enteros y los dominios particulares de cada una de las funciones están escritos como una desigualdad. Por su parte en el referencial teórico, están las funciones lineal y cuadrática y los conceptos de intervalo abierto y cerrado en los reales.

Para resolver este problema se puede esperar dos tipos de soluciones posibles: el uso de una tabla de valores o un estudio analítico de las funciones para realizar las gráficas.

En el caso de una tabla de valores, este registro semiótico funcionaría como una conversión intermediaria que juega un rol de artefacto simbólico, ya que permite obtener pares ordenados para luego dibujarlos en un plano y trazar la curva. Para aplicar esta técnica no se necesita conocer características particulares de la función involucrada, salvo poder comprender el proceso de cálculo subyacente a cada componente de la función. Por tanto, el trabajo del estudiante estaría en el plano [sem-ins]. Si los estudiantes eligen esta técnica, podrían tener dificultades en representar la discontinuidad en x=3 ya que una vez obtenidos los puntos, de forma errónea, los unen sin tomar en cuenta la separación del dominio.

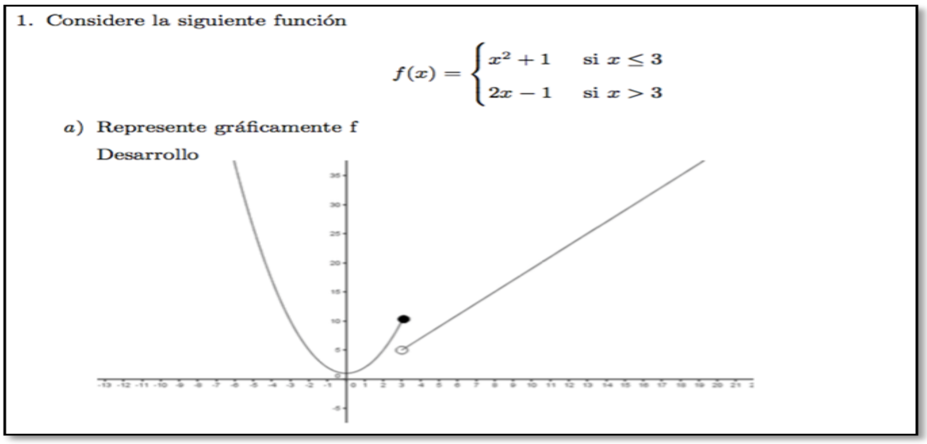


Figura 3: Ejemplo de tarea "graficar una función"

En el caso de que los estudiantes realicen un estudio analítico, deben reconocer el primer componente de la función como una función cuadrática y la segunda una función afín y a partir de este reconocimiento de signos, evocar las propiedades particulares de cada una. En el caso de la función cuadrática, analizar el coeficiente de x^2 para determinar la concavidad, calcular el vértice y/o calcular el discriminante para determinar la no existencia de ceros de la función, también podrían utilizar la propiedad de paridad de la función para obtener la simetría de la función con respecto al eje y. En el caso de la función afín, pueden identificar la pendiente, el coeficiente de posición y/o la intersección con el eje x. En todos estos casos, es el referencial teórico el que se activa, por tanto, el trabajo se encuentra en el plano [sem-dis].

Posibles adaptaciones de las tareas sobre gráficos de funciones a la plataforma

Lo descrito anteriormente, nos permite tener una idea de lo que valoran los profesores en las tareas de por ejemplo "graficar una función" y permite pensar en posibles adaptaciones de esas tareas en la plataforma. Tomando en cuenta las limitaciones del sistema describiremos las posibles adaptaciones, tomando en cuenta las potencialidades y limitaciones de la plataforma, para terminar analizando lo efectivamente creado por los profesores.

Como ya se ha indicado antes, la tarea "graficar una función" se transforma en una tarea de identificación, pues no es posible que los estudiantes produzcan un plano cartesiano y sobre este un trazo para que el sistema posteriormente lo reconozca como un gráfico, por tanto esta es una primera limitación que vemos en esta transformación.

Esta pregunta se puede transformar en una tarea de identificación creando, por ejemplo, una función de opción múltiple donde el estudiante deba reconocer un gráfico de una función a partir de una función escrita en un registro diferente, o a la inversa.

Tomando como referencia la pregunta diseñada en lápiz-papel, se podría dar el mismo enunciado, parametrizando la pregunta a distintos niveles:

- Un primer nivel sería la parametrización de cada uno de los números que aparecen, es decir, en el diseño de la pregunta podría ser algo como esto:
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x \leq x_0 \\ cx + d, & x > x_0 \end{cases}$$
Después de definir cuáles serán los parámetros, los profesores deberían decidir cuál será el rango en el que variarán cada uno de los parámetros, es decir, cuáles son los valores que tomarán a, b, c, d y x_0.

- Dada la importancia que los profesores dan a la conversión de los símbolos "≤" y ">", estos también se podrían parametrizar de tal forma que fueran cambiando en diferentes combinaciones.
- Se podría parametrizar también el nombre de la función y su variable *y* el registro en el que está escrito el dominio, por ejemplo como un intervalo: $x \in (x_0, \infty)$.
- Por último, se podría aleatorizar la función misma, es decir, que las componentes de la función por partes cambie aleatoriamente; esta aleatorización presenta la dificultad de que la naturaleza de la tarea puede cambiar mucho, puesto que en la primera componente en vez de aparecer una función cuadrática podría aparecer una función diferente.

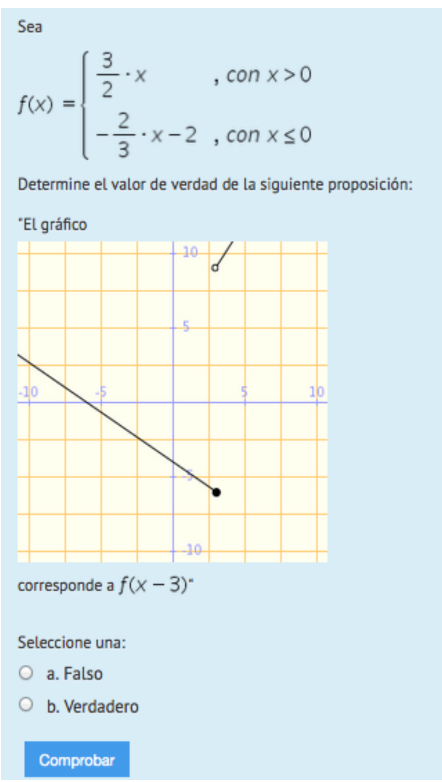
Por otra parte, las respuestas podrían ser gráficos que varíen en función de los errores que los profesores han detectado en la respuesta de los estudiantes y proveer observaciones y ayudas específicas al momento que los estudiantes elijan las respuestas que corresponden a esos errores.

A su vez, se puede definir una retroalimentación paso a paso en función de los parámetros aleatorios elegidos, de tal forma de indicar a los estudiantes cuál es la relación entre los diferentes signos que componen la función y la respuesta esperada.

Ejemplo de adaptación efectiva en la plataforma

De las tres tareas concebidas en la plataforma sobre gráficos, se eligió la que se muestra en la Figura 4, ya que, de entre las 3 que había, es la que más se acerca a la "representante" elegida de las preguntas del soporte lápiz-papel, a pesar de que el contenido de las preguntas difiere bastante.

Enunciado



Algoritmo

```
si vof==1 entonces
   aa=dibujar(f3,x,(e+0.12)..20)
   ab=dibujar(f4,x,-20..e)
   circu=dibujar((x-e)^2+(y-f3(e))^2=0.04)
   p=dibujar(punto(e,f4(e)),{tamaño_punto=7})
   graf=dibujar{aa,ab,p,circu}
   oc="Verdadero"
   op="Falso"
sino
   fal=aleatorio(1,3)
   si fal==1 entonces
      aa=dibujar(f5,x,(e+0.12)..20)
      ab=dibujar(f6,x,-20..e)
      p=dibujar(punto(e,f6(e)),{tamaño_punto=7})
      circu=dibujar((x-e)^2+(y-f5(e))^2=0.04)
      graf=dibujar{aa,ab,p,circu}
      oc="Falso"
      op="Verdadero"
   sino_si fal==2 entonces
      aa=dibujar(f7,x,(e+0.12)..20)
      ab=dibujar(f8,x,-20..e)
      p=dibujar(punto(e,f8(e)),{tamaño_punto=7})
      circu=dibujar((x-e)^2+(y-f7(e))^2=0.04)
      graf=dibujar{aa,ab,p,circu}
      oc="Falso"
      op="Verdadero"
   sino_si fal==3 entonces
      aa=dibujar(f9,x,(e+0.12)..20)
      ab=dibujar(f10,x,-20..e)
      p=dibujar(punto(e,f10(e)),{tamaño_punto=7}
      circu=dibujar((x-e)^2+(y-f9(e))^2=0.04)
      graf=dibujar{aa,ab,p,circu}
      oc="Falso"
      op="Verdadero"
   fin

fin
```

Definición de los elementos aleatorios del enunciado

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \#g & , con\ x > 0 \\ \#h & , con\ x \leq 0 \end{cases}$$

Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

"El gráfico
#graf
corresponde a $f(x - \#e)$"

Figura 4: Elementos que componen una pregunta sobre gráficos en la plataforma

La Figura 4 está compuesta de tres partes: a la izquierda el enunciado, la cual es la imagen que efectivamente ve el estudiante; a la derecha el algoritmo, que define el valor que toman los elementos aleatorios y abajo la definición de los elementos aleatorios del enunciado, que es el espacio donde se definen los elementos a aleatorizar, esta designación se realiza mediante el símbolo #.

El enunciado contiene una de las iteraciones que ven los estudiantes, analizaremos el trabajo potencial del estudiante de esta iteración en particular, y una vez analizado el algoritmo se analizará cómo cambia la pregunta dependiendo de los valores que puede tomar dada la naturaleza aleatoria que tiene la pregunta, además se analizará este trabajo potencial suponiendo que el estudiante no responde al azar e intenta responder a la pregunta pedida.

En este caso particular, se pide determinar si la gráfica que aparece corresponde a la traslación de la función por partes, escrita en registro algebraico, donde los números que las definen son racionales. La función por partes está compuesta por dos funciones afines y el dominio de la función está separado en x=0.

Por su parte el gráfico se encuentra en el rectángulo [-10,10]×[-10,10], la función graficada tiene dos componentes afines y en la componente izquierda, la imagen de un valor que se encuentra entre 2.5 y 5 está marcada con un punto negro y la parte derecha con un punto sin el interior pintado.

Por último, se pide determinar si la gráfica que aparece corresponde a la gráfica de la función compuesta $f(x$-3).

Las posibles estrategias que puede utilizar el estudiante parten por determinar la expresión algebraica de la función $f(x$-3), esto implica conocer la técnica algebraica de composición, lo que se encuentra en el plano [sem-ins] y también el estudiante debe conocer la definición de dominio de una función para calcular el dominio de la función compuesta, esto implica evocar la definición de dominio de función, por lo que se trabaja en el plano [sem-dis].

Una vez que el estudiante calcule la función compuesta, puede determinar si la gráfica que aparece corresponde a la gráfica de la función que calculó. Para realizar esto, podría utilizar las dos técnicas mencionadas en el análisis de la pregunta en lápiz-papel (utilizar una tabla de valores o hacer un estudio analítico para graficar la función por partes) o identificar ciertos signos en la expresión algebraica para encontrar la respuesta.

En la iteración que se muestra en este caso la respuesta correcta es “Falso”, porque al componer las funciones una de las componentes resultantes es -2x/3 y en la gráfica no aparece una recta que pase por el origen.

Si la comparamos con la actividad que debe realizar el estudiante en lápiz-papel, vemos que esta se complejiza, podríamos suponer que es un intento de “superar” la limitación de la pregunta. No obstante, todo este análisis es válido siempre y cuando el estudiante se comprometa con la resolución de la tarea, pero en la plataforma sólo se valora la respuesta correcta y no las argumentaciones. En este caso por ejemplo, el estudiante podría elegir al azar una de las dos opciones y tener un 50% de probabilidad de tener la respuesta correcta sin hacer ningún trabajo matemático. Estos cambios de “valorización” deben ser tomados en cuenta a la hora de diseñar estos problemas.

Ahora, como se indicó más arriba, esta pregunta tiene parámetros aleatorios, y el análisis que se hizo sólo tomó en cuenta una de las iteraciones, no obstante hay que hacer un análisis de las posibilidades que pueden aparecer y que están dadas por los parámetros del enunciado y los valores que pueden tomar definidos en el algoritmo de la Figura 4.

En esta pregunta los elementos aleatorios son: las componentes de la función por partes escrita en lenguaje algebraico y que son denominadas #g y #h, el gráfico denominado #graf, el valor del coeficiente de posición de la función con la que se compone #f y por último el valor de verdad de la pregunta. Por otro lado uno de los elementos no aleatorizados es el punto donde se separa el dominio, que para este problema siempre es $x=0$.

En términos generales en el algoritmo se define si la respuesta es verdadera o falsa según la variable vof que puede valer 1 o 2, si es 1 es verdadera, si es 2 es falsa.

El caso falso se subdivide en 3 sub-casos que grafican diferentes composiciones de f: $f(x+e)$, $f(x)+e$ o $f(x)-e$. Se puede observar que en el caso de que en alguna iteración $\frac{b}{a}=1$ y $\frac{c}{d}=-1$ (*a*, *b*, *c* y *d* son los valores que definen las componentes de la función por partes), $f(x)-e$ y $f(x-e)$ coinciden por lo que la respuesta correcta para el sistema será “Falso” cuando en realidad debería ser “Verdadero”.

En síntesis, podemos observar que el profesor tiene dificultades con la parametrización del problema ya que, al parecer, no verificó todos los casos posibles y para ciertos valores se produce un error en la asignación de la respuesta correcta y por otra parte resulta paradojal la diferencia entre la complejidad del algoritmo (en la parte derecha de la Figura 4) para definir la pregunta y la actividad potencial del estudiante al ser desplegada en una pregunta de verdadero o falso.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

En esta investigación se pretendía determinar cuáles eran las similitudes y diferencias –en términos de espacio de trabajo matemático potencial- entre los problemas de las evaluaciones en lápiz-papel y los problemas de la plataforma, ambos creados de forma colectiva por los profesores de la institución.

Como se indicó en la introducción, se podría esperar, a priori, que las preguntas concebidas en la plataforma por los profesores de la misma institución podrían estar “más próximas” a los problemas valorados institucionalmente, en comparación con un banco externo cualquiera diseñado de manera estándar para varias instituciones.

Según lo analizado, aparecen los mismos grupos de tareas: tareas sobre gráficos, de cálculo y verificación, pero su proporción relativa al conjunto total de tareas cambia así como los tipos de tareas al interior de cada grupo.

Con respecto a la proporción de cada grupo relativa al total de tareas se constató en la plataforma una disminución en la cantidad de preguntas sobre gráficos y verificación y un aumento de las preguntas de cálculo. No tenemos datos suficientes para explicar por qué se produjo esta disminución, pero podemos conjeturar que se debe por una parte a la forma en que los profesores se organizaron para generar los problemas en la plataforma, a limitaciones tecnológicas y al proceso de instrumentalización de la plataforma.

Al interior de cada grupo se constató un cambio en los tipos de tareas. En el caso de las tareas sobre gráficos, estas pasaron de "Graficar una función" a "Identificar una función". Este cambio viene dado por las limitaciones de la herramienta tecnológica para generar los problemas; no obstante la "adaptación" que se eligió muestra una sub-utilización de las opciones que tiene el sistema con respecto a este tipo de preguntas, concretamente la tarea se realizó en una pregunta de verdadero o falso lo que implica un 50% de probabilidad de acertar sin realizar trabajo matemático alguno.

En el grupo de verificación las tareas son del mismo tipo, es decir, en el formato lápiz-papel son de verdadero/falso y en la plataforma también, por lo que la transformación del trabajo matemático no viene dado por el enunciado sino que porque en lápiz papel, no sólo se valora la respuesta, sino que se valora sobretodo la justificación, algo que la plataforma no puede corregir automáticamente.

En el grupo de cálculo que resultó ser el que más aumentó, también se apreció un cambio en los tipos de tareas, pasando de tareas de cálculo a preguntas de identificación. A diferencia del primer grupo, este cambio viene dado más que nada por una subutilización de las características del sistema a la hora de concebir los problemas, pues es para este tipo de preguntas que el sistema está más desarrollado a nivel técnico.

Sin embargo, como los profesores son los que concibieron los problemas, estos eventualmente pueden evolucionar, pero parece ser necesario incorporar algún tipo de dispositivo de acompañamiento didáctico e instrumental en el diseño, puesto que como se puede ver en este caso, la organización y el diseño que realizaron los profesores por sí solos no fue suficiente para aprovechar las potencialidades de estos sistemas y "minimizar" los efectos de las limitaciones.

Otra posibilidad de sobrepasar las limitaciones observadas, es la integración con otras herramientas que no tengan las limitaciones del sistema elegido, de tal forma de complementarlo; lo cual, como en el caso anterior también debería contar con un acompañamiento didáctico e instrumental.

Otro elemento que en este artículo no se revisó, pero que está muy ligado al diseño, es el de constatar si hay efectos en la integración de estos recursos por el hecho de que hayan participado profesores de la misma institución en su desarrollo y particularmente si hay alguna diferencia entre la integración que hacen profesores diseñadores e implementadores y profesores que sólo han implementado.

Finalmente, podemos concluir que al comparar las tareas de las evaluaciones en lápiz-papel con las tareas concebidas en un ambiente tecnológico - particularmente en un sistema de evaluación en línea – utilizando los ETM como herramienta de análisis, permite dar pistas de cómo cambian las tareas concernientes a un objeto matemático específico y cómo este cambio puede ser debido a potencialidades y limitaciones de la herramienta tecnológica o a fenómenos de tipo más instrumental.

NOTAS

1. www.moodle.org

2. www.wiris.com

3. En algunos casos, esta separación puede resultar artificial, pues hay casos en que el enunciado del problema y la respuesta del estudiante conforman el mismo espacio de interacción.

4. www.aleks.com

5. https://dev.geogebra.org/trac/wiki/Moodle/QuestionTypeGeoGebra

6. http://stack.bham.ac.uk

7. http://wims.unice.fr/

REFERENCIAS

Abboud-Blanchard, M., Cazes, C., & Vandebrouck, F. (2008). Des enseignants intégrant des ressources de mathématiques en ligne dans leurs classes. In *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 319–344).

Alvaro, F. (2015). *Mathematical Expression Recognition based on Probabilistic Grammars*. Universitat Politècnica de València.

Artigue, M. (2010). The future of teaching and learning mathematics with digital technologies. In *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 463–475). Springer US.

Awal, A. (2011). *Reconnaissance de structures bidimensionnelles : Application aux expressions mathématiques manuscrites en ligne*. École polytechnique de l'université de Nantes.

Berg, C., & Boote, S. (2015). Format Effects of Empirically Derived Multiple-Choice Versus Free-Response Instruments When Assessing Graphing Abilities. *International Journal of Science and Mathematics Education*. http://doi.org/10.1007/s10763-015-9678-6

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990.

Cazes, C. (2008). Activités d'étudiants en mathématiques dans l'enseignement supérieur. Dans F. Vandebrouck (Ed.) La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants (pp 203-230) Toulouse : Octarès Editions. In *Dans F. Vandebrouck (Ed.) La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants* (Octares).

Cazes, C., Gueudet, G., & Vandebrouck, F. (2006). Using E-Exercise Bases in mathematics: case studies at university. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(3), 327–350.

Cazes, C., & Vandebrouck, F. (2008). Panorama sur les bases d'exercices en ligne. *La Classe de Mathématiques: Activités Des Élèves et Practiques Des Enseignants*.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Suisse: Peter Lang.

Gómez-Chacón, I., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema*, *30*(54), 1–22.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, *77*(1), 81–112.

Heck, A., & Gastel, L. Van. (2006). Diagnostic Testing with Maple TA. In *WebALT 2006 Proceedings* (pp. 37–51).

Houdement, C., & Kuzniak, A. (1996). Autour des stratéfies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques.pdf. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *16*(3), 289–322.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *11*, 175–193.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24.

Kuzniak, A. (2013). Travail Mathématique et domaines mathématiques. In *Proceedings of the 3rd symposium Espace de Travail Mathématique* (pp. 1–11). Université de Montréal.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigacion En Matematica Educativa*, 1–8.

Lallican, P.-M., Viard-Gaudin, C., & Knerr, S. (2000). Off-line handwriting recognition from forms. In *Seventh International Workshop on Frontiers in Handwriting Recognition* (Vol. 3, pp. 303–312). Amsterdam.

Naismith, L., & Sangwin, C. (2004). Computer Algebra Based Assessment of Mathematics Online. In *8th Annual CAA Conference* (pp. 235–242).

Peirce, C. (1978). *Ecrits sur le signe*. Paris: Editions du Seuil.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*.

Sancho-Vinuesca, T., & Escudero, N. (2012). ¿ Por qué una propuesta de evaluación formativa con feedback automático en una asignatura de matemáticas en línea ? *Revista de Universidad Y Sociedad Del Conocimiento, 9*.

Sangwin, C., Cazes, C., Lee, A., & Wong, K. (2010). Micro-level automatic assessment supported by digital technologies. In *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 227–250). Springer US.

Sangwin, C., & Grove, M. (2006). STACK: addressing the needs of the neglected learners. In *In Proceedings of the Web Advanced Learning Conference and Exhibition, WebALT* (pp. 81–96).

Stacey, K., & Wiliam, D. (2013). Technology and assessment in mathematics. In *Third international handbook of mathematics education*. New York: Springer.

TOPIC 3/ TEMA 3/ THÈME 3

GENESIS AND DEVELOPMENT OF THEMATHEMATICAL WORK: THE ROLE OF THE TEACHER, THE TRAINER AND INTERACTIONS

GÉNESIS Y DESARROLLO DEL TRABAJO MATEMáTICO: EL PAPEL DEL PROFESOR, EL FORMADOR Y LAS INTERACCIONES

GENÈSE ET DÉVELOPPEMENT DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE : LE ROLE DU PROFESSEUR, DU FORMATEUR ET DES INTERACTIONS

SYNTHESIS/ SÍNTESIS / SYNTHÈSE

Inés Mª Gómez-Chacón, Universidad Complutense de Madrid, España

José Carrillo Yañez, Universidad de Huelva, España

Asuman Oktaç, Cinvestav, Mexico

Gonzalo Espinoza-Vásquez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Carolina Henríquez-Rivas, Universidad de La Frontera, Chile

GENESIS AND DEVELOPMENT OF THE MATHEMATICAL WORK: THE ROLE OF THE TEACHER, THE TRAINER AND INTERACTIONS

1. INITIAL TOPIC DESCRIPTOR

This third theme focuses on advancing reflection on the role of teachers, and on interactions in the creation of a suitable and efficient MWS, already initiated at the MWS4 symposium. It is a question of answering how to manage the interactions of the mathematical work in the classroom, as well as to integrate different dimensions in a holistic way: cognitive, didactic, technical, affective and cultural, in the analysis of these interactions, and in the construction of mathematical thinking. It also reflects specifically on teacher training and the role of trainers in this development. In the classroom, the teacher adjusts and balances the dynamics of MWS. Proposals from different perspectives on this topic can help a greater understanding of the process of genesis, simultaneously putting students and teachers in the same scene. In particular, it is interesting to investigate the process of interaction between the teacher's knowledge and the various mathematical workspaces: how the knowledge of the teacher influences the shaping of mathematical workspaces.

2. PRESENTATIONS

The following presentations took place during the sessions of this theme:

Title of the contribution **Author(s)**	**Mathematical content**	**Specificities**
A unified frame of reference for the study of students' strategies, errors and obstacles within the discursive genesis of the mathematical work space on the concept of intensive quantities N. Alchasidis	Arithmetic Rational numbers	MWS Primary school students
El espacio de trabajo matemático en el estudio de propiedades sintéticas y analíticas de la parábola C. Guerrero & C. Henríquez	Analysis Parabola	MWS -GWS In-service teachers
Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función G. Espinoza-Vásquez	Analysis Concept of function	MTSK-MWS In-service teacher
El conocimiento matemático de futuros profesores en espacios de trabajo matemático utilizando Geogebra con triángulos M. Hernández Escobar & G. Zubieta Badillo	Geometry	MTSK - MWS Pre-service teachers
Relaciones entre el conocimiento del tema (MTSK) y los ETM idóneo y personal D. Zakaryan, C. Ribeiro & G. Espinoza-	Arithmetic Rational numbers	MTSK-MWS In-service teacher

Vásquez		
Una aproximación a las relaciones MTSK-ETM en el aula de formación de maestros M. Montes, Fr. J. Jofré, J. Carrillo & L. C. Contreras	Geometry	MTSK-MWS In-service teacher
How undergraduate students' (studying at the faculty of economics and management) beliefs and self-efficacy beliefs about mathematics, representations and functions contribute to the formation of their mathematical working space St. Nicolaou, A. Gagatsis, I. Elia & P. Michael-Chrysanthou	Mathematics	MWS Beliefs, self-efficacy Economics students
How lower secondary school students' beliefs and attitudes about mathematics, errors in mathematics and assessment contribute to the formation of their MWS Th. Christodoulou, A. Gagatsis, I. Elia & P. Michael-Chrysanthou	Mathematics	MWS Beliefs Lower secondary school students
Uso de recursos en el mejoramiento del conocimiento matemático para la enseñanza Cl. Mayo & J. Guzmán	Geometry	MWS Documentary approach to Didactics - Pre-service teachers
Mesurer des distances inaccessible et l'ETM géométrie: désigner des séries didactiques en utilisant une source historique primaire F. Papadopoulos & K. Nikolantonakis	Geometry Measure	Poster GWS

3. COMMON HORIZONS

Contributions to this topic have not only been based on the MWS, but have also used other theoretical models of understanding the teacher's knowledge, and the role of the teacher in the classroom. Among the most used models one founds the Theoretical Model Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), which, through a system of categories, has been used to deepen the knowledge of mathematics , the Pedagogical content knowledge and the beliefs. Other theoretical frameworks have approached the study of epistemological beliefs and self-efficacy.

As a starting point, the conclusions formulated on this topic in the MWS4 Symposium held in Spain were taken into account. For the initial basis of discussion the following aspects were highlighted:

- The teacher is at the core of this topic, playing an important role as a developer of MWS, particularly in the management and development of students' MWS.
- The teacher interacts with his/her students within the suitable MWS.
- Teachers' knowledge plays a central role in the building of MWS (reference, suitable, personal).

- It seems that the frame of MWS can interact with other frames (e.g. Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, MTSK; Opportunities to learn, OTL) in a complementary way. The vertical planes can be useful for this purpose.
- Concerning methodology, it is important to look at classroom episodes to approach teachers' practice. Although teachers' practice is wider than the classroom teaching, this setting should be privileged.
- Finally, a question arose as a need to be reflected on: Where is the collective work considered in the MWS? Does the MWS of a group make sense?

In order to obtain a common horizon of discussion and aspects of convergence supported in these conclusions formulated in the MWS4 the following questions arose:

- How can we explain and exemplify the influence or the relationship between students' beliefs and the activation of the different geneses in a *suitable* MWS by teachers?
- Examples of different beliefs in connection with different kinds of activation of several MWS geneses. What kinds of beliefs have connections with what kinds of geneses?
- How can research about beliefs help with designing strategies for strengthening personal MWS of students, teachers and pre-service teachers?
- When focusing on the interactions students-teachers, how can one get the information about the geneses, plans and circulations?
- How can the affective domain be integrated into the MWS model?
- How can one link answers to a beliefs questionnaire to the MWS? In particular, how can the lack of a strong opinion about a topic be interpreted in terms of MWS (personal or suitable)?
- Which circulations and planes are activated in pre-service training and which are demanded by the curricular standards? Examples of elements of the suitable MWS, which are not expected on the basis of teachers' personal MWS.
- Examples of geneses and planes, explaining which elements of the personal MWS give sense to the corresponding elements of the suitable MWS.
- How can the features of the subject being studied be noticeable in the research (e.g. in the results)? One can assume that the investigation carried out and, in particular, its results would be sensitive to the subjects (teachers, pre-service teachers, teacher trainers, students).
- What is the contribution of MWS to MTSK? What is the contribution of MTSK to MWS? What is the contribution of dealing with MWS and MTSK together to the understanding of teaching and learning processes?
- What is the nature of the relationship amongst MTSK, MWS and Beliefs?
- Which sub-domains or elements of MTSK seem to be influential in the construction of the several MWS?
- What is the meaning of the relationship MWS-MTSK when applied to the teacher trainer?

As the discussion progressed, it was agreed to synthesize the above issues in the following: How to manage the interactions around the mathematical work in the classroom? And, how does teacher knowledge influence the formation of MWS?

The presentations were organized in three panels:

- Panel 1: The creation of a suitable Mathematical Working Space: the role of students' beliefs and attitudes in the construction of the MWS.
- Panel 2: The building of MWS in different mathematical topics: consequences for the classroom and for teacher training.
- Panel 3: Relationship MWS-MTSK.

The discussion of these panels considered broad and specific aspects in relation to the theoretical development of each model, how these favor the analysis and deepening in the study of the mathematical activity in the classroom, and how these models contribute to the training of the teacher. In a broad perspective, the elements that make possible the interactions between the theoretical models, the didactic knowledge that the teacher deliverer must have, and the knowledge that the training of the teacher must provide to the future teachers were discussed. Also, the discussion focused on particular aspects of each construct and the interaction between them; how the interactions between the MWS poles and the elements that enable the interactions for specific mathematical themes develop, the MTSK and the specialized knowledge of future teachers in specific mathematical domains and spaces, the role of the use of technologies and how it is interpreted from both models, the use of components of a model to strengthen the analysis that can be performed with the other.

4. CROSS-CUTTING HORIZONS AND OPEN RESEARCH TOPICS

4.1 Issues and lines of inquiry

According to the submissions, the specific questions and lines of inquiry presented are:

– How can you explain in more detail the use of MWS in Popper’s scheme through the use of artefacts and visual representations? How can the ideas in the cognitive plane be connected to the assumptions in the epistemological plane? One needs further explanation of the role of tasks in overcoming obstacles and errors during the learning of the concept. (Alchasidis)

– Students’ beliefs about how errors should be handled in the mathematics classroom; teacher’s and students’ role in the use of errors during the teaching process; connections between the use of errors, students’ personal MWS and a suitable MWS. How can we explain and exemplify the influence or the relationship between students’ beliefs and the activation of the different geneses in a suitable MWS by teachers? (Christodoulou/Gagatsis/Elia/Michael-Chrysanthou)

– One deals with the contribution of the affective domain towards the creation of a suitable or a personal MWS. How do students perceive representations and what effect do their beliefs have on the semiotic genesis? The influence of beliefs on knowledge is identified; the influence of knowledge on beliefs is investigated What is the meaning of suitable MWS for Economics students? Examples of different beliefs in connection with different kinds of activation of several MWS geneses are needed. How can one get information about the geneses, planes and circulations through research about beliefs? (Nicolaou/Gagatsis/Elia/Michael-Chrysanthou)

– How can we realise that the subject is a teacher if we do not relate it with his/her suitable MWS or with interactions with their students? What is that teacher’s suitable MWS proposal? Examples of geneses and planes, explaining which elements of the personal MWS would give sense to the corresponding elements of the suitable MWS. (Guerrero/Henríquez)

– Is there any evidence of documental genesis in relation to the GWS generation? What is the repercussion in this research (e.g. in the results) of the fact that the participants are future teachers? (Mayo/Guzman)

- What is the contribution of MWS to MTSK? What is the contribution of MTSK to MWS? What is the contribution of dealing with MWS and MTSK together to the understanding of teaching and learning processes? (Espinoza-Vásquez)
- The relationship between KoT (one of MTSK sub-domains) – Suitable and personal MWS. Can Ana's conception of mathematics as a final product be influenced by her lack of knowledge concerning foundations of procedures? Is this an example of the triangular relationship amongst KoT, MWS and Beliefs (or Conceptions)? Which sub-domains or elements of MTSK seem to be influential in the construction of the suitable MWS? (Zakaryan/Ribeiro/Espinoza-Vásquez)
- One needs examples of the influence of the teacher's MTSK in the successive modifications of his/her MWS (Hernández/Zubieta).
- The relationship between the personal and the suitable MWS of the teacher, and the personal MWS of the students in the class of initial teacher training, articulation of the models MWS-MTSK, use of dynamic geometry software as support in the activation of different elements of the MWS, and the effect of the knowledge about the models MWS and MTSK in the didactical organization that a teacher trainer employs. (Montes/Jofré/Carrillo/Contreras)

In general, the work presented advances in the lines of research proposed in MWS4 and, at the same time, leaves open other questions for future research. For example, to deepen the specialist knowledge of the teacher trainer in relation to the MWS, i.e. what and how the MWS of the future teacher as part of the specialized knowledge of the teacher trainer is (or should be). It is also proposed to investigate the role of the teacher and his/her knowledge in the study and construction of the students' personal MWS. On the other hand, there are two aspects of connection between the MWS and MTSK models that give meaning to the influences of one of them in the analysis that is performed with the other: Each model from the theoretical and the practical perspectives provides complementary elements for the analysis of the mathematical practice of the teacher, from its design to its execution in the classroom. This opens a new dimension to the research that contemplates interactions between MWS and MTSK; that is how one theoretical model contributes to and influences the other

4.2 Some first conclusions

As a result of the contributions of the participants in this topic, the following lines of research are identified: external dimensions, the MWS model, and dialogue between models.

4.2.1. External dimensions

- The affective dimension
  - The affective dimension helps explain students' and teachers' changes in their MWS. Teachers can use students' beliefs in order to influence their students' MWS. In this process, students' beliefs play a relevant role in the development of teachers' suitable MWS.
- Integration versus consideration
  - Apart from the affective dimension, the social one emerged in one of the sessions; however the debate about it focused on the plausibility of integrating new dimensions or planes in the MWS model. It is sustained that the idea is not integrating new dimensions (e.g. affective dimension) in the MWS model, but to consider these dimensions in case it is plausible. How we deal with the impact on MWS of external dimensions is an open question.

4.2.2. What kind of tool is the MWS model?

Although teachers need theoretical elements in order to improve students' learning, in this case through the suitable MWS, it seems that teaching the model itself is difficult in the initial teacher training context (because of the understanding of the notions involved). However, the MWS, apart from being a research tool, seems to be a suitable planning tool, for the teacher as well as for the teacher trainer. For this purpose, exemplified, simplified, easier versions of the model could be helpful. The design of these versions is an open question.

4.2.3. Dialogue between models

The following aspects promote the dialogue on the interaction between models:

- The mathematical task emerged as a unifying element in the dialogue between models. It seemed that to focus on mathematical tasks makes is a powerful way to relate elements of different models.
- MWS and MTSK enrich each other, allowing to carry out a finer grained analysis.
- In the explanation of the transition of an instance of a teacher's suitable MWS to the next instance, the MTSK model can help.
- The current investigations have focused on the search for elements of both models and their relationships. Further research questions and objectives will determine the role of each framework in the investigation. MWS investigations can use the MTSK model for a finer analysis, and vice versa, both having its own model as theoretical framework.
- In the analysis of a teacher's MTSK on, for instance, the use of the calculator in the classroom, the rich explanation of the mathematical activity in the MWS, in particular, the instrumental genesis, can help. It is about privileging a particular genesis taking into account the activity from the perspective of the MWS, not just to focus on that genesis.
- Concerning the relationship between (students' and teachers') beliefs, and the MTSK and MWS models, MTSK can be helpful: MTSK includes a domain of teachers' beliefs on mathematics and on mathematics teaching and learning. At the same time, the subdomain of Knowledge of Features of Learning Mathematics includes teachers' knowledge of students' beliefs.

Finally, the following needs and open questions were proposed:

- What kinds of (students' and teachers') beliefs have connections with what kinds of geneses? Examples of different beliefs in connection with different kinds of activation of several MWS geneses are needed.
- Examples of elements of a teacher's suitable MWS, which are (not) expected on the basis of that teacher's personal MWS are needed. One needs also examples of geneses and planes, explaining which elements of the personal MWS give sense to the corresponding elements of the suitable MWS.
- How can the features (being a teacher, pre-service teacher, teacher trainer, student) of the subject being studied be noticeable in the research (e.g. in the results)? One can assume that the investigation carried out and, in particular, its results would be sensitive to the subjects.
- One needs to explore feasible relationships between MWS-MTSK when applied to the teacher trainer. Is there any relationship between "MTTSK" (Mathematics teachers trainer's specialized knowledge) and the future teacher's referential MWS?

Figure 1 is an evolution of the figure proposed in MWS4. Its purpose is to help understand the final questions raised above.

In the context of initial teacher training, the teacher trainer, using his/her knowledge, develops his/her suitable MWS, which, by interacting with the classroom activity in addition to undergoing progressive adaptations in which his/her MTSK comes into play, collaborates in the development of the personal and suitable MWS of the teacher trainee, thus forming an MWS of reference for such students and future teachers. In this development the knowledge of students act, and the MTSK of students are also being constructed. Thinking about these students in the future, as teachers, or simulating classroom situations, we can say that their suitable MWS, as well as their MTSK, influence, through interaction with classroom activity, the development of the personal MWS of their future students.

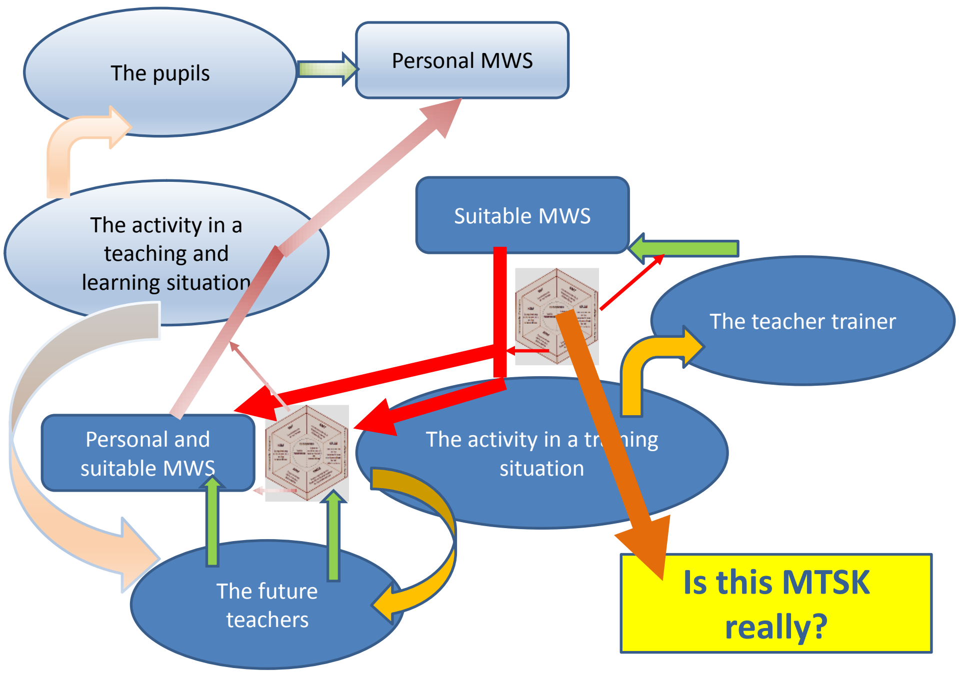


Figure 1: MWS-MTSK diagram in the context of initial teacher training

In the context of initial teacher training, the teacher trainer, using his/her knowledge, develops his/her suitable MWS, which, by interacting with the classroom activity in addition to undergoing progressive adaptations in which his/her MTSK comes into play, collaborates in the development of the personal and suitable MWS of the teacher trainee, thus forming an MWS of reference for such students and future teachers. In this development the knowledge of students act, and the MTSK of students are also being constructed. Thinking about these students in the future, as teachers, or simulating classroom situations, we can say that their suitable MWS, as well as their MTSK, influence, through interaction with classroom activity, the development of the personal MWS of their future students.

The question that remains open at this point is: if, indeed, the specialized knowledge that the teacher trainer puts into play is MTSK. This question makes a lot of sense, since the MTSK talks about the Maths teacher, while the trainer is not just a Maths teacher. His/her knowledge is what we have provisionally abbreviated as MTTSK (Mathematics Teachers Trainer's Specialized Knowledge). On the other hand, this issue led us to question the specialized knowledge that the trainer of the future teacher should have and how this could be related to the reference MWS of the teacher trainee (and future teacher of mathematics) in his/her initial training.

The studies on the MWS of the in-service teacher and the MWS of the students enhance the training of teachers showing the dynamism and plurality of MWSs that the future teacher will face during his/her teaching work. Also, these studies will bring to the knowledge of teacher trainers aspects that their students need as specialized knowledge or in relation to the standards of teacher training.

GÉNESIS Y DESARROLLO DEL TRABAJO MATEMÁTICO: EL PAPEL DEL PROFESOR, EL FORMADOR Y LAS INTERACCIONES

1. DESCRIPTOR INICIAL DEL TEMA

Este tercer tema se centra en avanzar en la reflexión sobre el rol de los docentes y las interacciones en la creación de un ETM idóneo y eficiente, ya iniciada en el simposio ETM4. Se trata de dar respuesta a cómo gestionar las interacciones del trabajo matemático en el aula, así como integrar de forma holística distintas dimensiones: cognitiva, didáctica, técnica, afectiva, cultural en el análisis de estas interacciones y en la construcción del pensamiento matemático. También se reflexiona de forma específica en la formación del profesorado y el rol de los formadores en este desarrollo. En la clase, el profesor ajusta y equilibra la dinámica del ETM. Propuestas desde diversas perspectivas en este tema pueden ayudar a una comprensión mayor del proceso de génesis poniendo simultáneamente en escena estudiantes y profesores. De manera especial, interesa indagar en el proceso de interacción entre el conocimiento del profesor y los diversos espacios de trabajo matemático: cómo el conocimiento del profesor influye en la conformación de espacios de trabajo matemático.

2. PRESENTACIONES

En el marco de este tema fueron realizadas las siguientes presentaciones:

Título de la contribución **Autor(es)**	**Contenido matemático**	**Especificidades**
A unified frame of reference for the study of students’ strategies, errors and obstacles within the discursive genesis of the mathematical work space on the concept of intensive quantities N. Alchasidis	Aritmética Números Racionales	ETM Estudiantes de primaria
El espacio de trabajo matemático en el estudio de propiedades sintéticas y analíticas de la parábola C. Guerrero & C. Henríquez	Análisis Parábola	ETM -ETG Profesores en ejercicio
Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función G. Espinoza-Vásquez	Análisis Concepto de función	MTSK-ETM Profesor en ejercicio
El conocimiento matemático de futuros profesores en espacios de trabajo matemático utilizando Geogebra con triángulos M. Hernández Escobar & G. Zubieta Badillo	Geometría	MTSK -ETM Profesores en formación inicial
Relaciones entre el conocimiento del tema	Aritmética	MTSK-ETM

(MTSK) y los ETM idóneo y personal D. Zakaryan, C. Ribeiro & G. Espinoza-Vásquez	Números racionales	Profesor en ejercicio
Una aproximación a las relaciones MTSK-ETM en el aula de formación de maestros M. Montes, Fr. J. Jofré, J. Carrillo & L. C. Contreras	Geometría	MTSK-ETM Profesor en ejercicio
How undergraduate students' (studying at the faculty of economics and management) beliefs and self-efficacy beliefs about mathematics, representations and functions contribute to the formation of their mathematical working space St. Nicolaou, A. Gagatsis, I. Elia & P. Michael-Chrysanthou	Matemáticas	ETM Creencias, self-efficacy Estudiantes de Economía
How lower secondary school students' beliefs and attitudes about mathematics, errors in mathematics and assessment contribute to the formation of their MWS Th. Christodoulou, A. Gagatsis, I. Elia & P. Michael-Chrysanthou	Matemáticas	ETM Creencias Estudiantes de secundaria
Uso de recursos en el mejoramiento del conocimiento matemático para la enseñanza Cl. Mayo & J. Guzmán	Geometría	ETM Aproximación Documental de lo Didáctico - Profesores en formación inicial
Mesurer des distances inaccessible et l'ETM géométrie: désigner des séries didactiques en utilisant une source historique primaire F. Papadopoulos & K. Nikolantonakis	Geometría Medida	ETG Poster

3. HORIZONTES COMUNES

Las contribuciones a este tema no sólo han tenido como modelo teórico ETM, sino que han utilizado otros modelos teóricos de comprensión del conocimiento del profesor y del rol del profesor en el aula. Entre los modelos más utilizados se encuentra el modelo teórico Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK), que, a través del establecimiento de categorías, ha sido utilizado para profundizar en el conocimiento de la matemática, en el conocimiento didáctico del contenido (Pedagogical content knowledge) y en las creencias. Otros marcos teóricos han abordado el estudio de creencias epistemológicas y de autoeficacia.

Como punto de partida se tuvo en cuenta las conclusiones sobre este tema en el Simposium ETM4 realizado en España. Para la base inicial de discusión se destacaron los siguientes aspectos:

- El profesor está en el centro del tema, desempeñando un papel importante como desarrollador del ETM, particularmente en la gestión y desarrollo de los ETM de los estudiantes.
- El profesor interactúa con sus estudiantes dentro del ETM idóneo.
- El conocimiento de los profesores juega un papel central en la construcción del ETM (referencia, idóneo, personal).
- El marco de ETM puede interactuar con otros marcos (por ejemplo, Conocimientos Especializados del Profesor de Matemáticas, MTSK, Oportunidades de Aprender, OTL) de forma complementaria. Los planos verticales pueden ser útiles para este propósito.
- En cuanto a la metodología, es importante considerar los episodios de clase para acercarse a la práctica docente. Aunque la práctica de los profesores es más amplia que la enseñanza en el aula, este entorno debe ser privilegiado.
- Por último, se planteó la siguiente cuestión para la reflexión: ¿Dónde está considerado el trabajo colectivo en el ETM? ¿Tiene sentido el ETM de un grupo?

Con objeto de obtener un horizonte común de discusión y aspectos de convergencia apoyados en estas conclusiones formuladas en el ETM4 se plantearon las siguientes cuestiones:

- ¿Cómo explicar y ejemplificar la influencia o la relación entre las creencias de los estudiantes y la activación de las diferentes génesis en un ETM idóneo determinado por el profesor?

- Ejemplos de diferentes creencias en relación con diferentes tipos de activación de varias génesis del ETM. ¿Qué conexiones se podrían establecer entre tipos de creencias y tipologías de génesis?

- ¿Cómo puede la investigación en creencias ayudar a diseñar estrategias para fortalecer el ETM personal de los estudiantes, profesores en servicio y futuros profesores?

- En las interacciones de los estudiantes-profesores, ¿cómo se puede obtener información sobre los movimientos entre génesis, planos y circulaciones?

- ¿Cómo puede integrarse el dominio afectivo en el modelo ETM?- ¿Cómo plantear un cuestionario de creencias desde la óptica de ETM? En particular, ¿cómo puede interpretarse la falta de una opinión fuerte sobre un tema en términos de ETM (personal o idóneo)?

- ¿Qué planos y circulaciones entre planos se activan en la formación de futuros profesores y que son exigidos por los estándares curriculares? Ejemplos de elementos del ETM idóneo, que no se esperan sobre la base del ETM personal de los profesores.

- Ejemplos de génesis y planos, explicando qué elementos del ETM personal pueden dar sentido a los elementos del ETM idóneo.

- ¿Cómo se pueden identificar mediante observación las características del sujeto estudiado en la investigación (por ejemplo, en los resultados)? Se puede suponer que la investigación llevada a cabo y, en particular, sus resultados serían sensibles a los sujetos (profesores, profesores de pre-servicio, formadores de profesores, estudiantes).

- ¿Cuál es la contribución de ETM a MTSK? ¿Cuál es la contribución de MTSK a ETM? ¿Cuál es la contribución que puede derivar de tratar conjuntamente el ETM y MTSK para la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje?

- ¿Qué relación se puede establecer entre MTSK, ETM y creencias?
- ¿Qué sub-dominios o elementos de MTSK parecen ser influyentes en la construcción de los ETM variados?
- ¿Cuál es el significado de la relación ETM-MTSK cuando se aplica al formador de profesores?

A medida que avanzó la discusión se convino en sintetizar las anteriores cuestiones en las dos siguientes: ¿Cómo gestionar las interacciones en torno al trabajo matemático en el aula? y, ¿cómo influye el conocimiento del profesor en la formación del ETM?

Las comunicaciones presentadas se organizaron en tres paneles:

- Panel 1: La creación de un Espacio de Trabajo Matemático Idóneo: el papel de las creencias y actitudes de los estudiantes en la construcción del ETM.
- Panel 2: La construcción del ETM en diferentes temas matemáticos: consecuencias para el aula y para la formación del profesorado.
- Panel 3: Relación ETM-MTSK.

La discusión de estos paneles consideró aspectos globales y específicos en relación al desarrollo teórico de cada modelo, cómo estos favorecen los análisis y profundización en el estudio de la actividad matemática en la clase y cómo estos modelos contribuyen a la formación del profesor. Desde una perspectiva global fueron discutidos qué elementos posibilitan las interacciones entre los modelos teóricos, cuál es el conocimiento didáctico que el profesor en ejercicio debe tener y cuál es el conocimiento que la formación del profesor debe otorgar a los futuros profesores. Asimismo, la discusión se centró en aspectos particulares de cada constructo y la interacción entre estos; cómo se desarrollan las interacciones entre los polos del ETM y los elementos que posibilitan las interacciones para temas matemáticos específicos, sobre el MTSK y el conocimiento especializado de futuros profesores en espacios de trabajo y dominios matemáticos específicos, el rol que tiene el uso de las tecnologías y cómo se interpreta desde ambos modelos, la utilización de componentes de un modelo para robustecer el análisis que se puede realizar con el otro.

4. HORIZONTES TRANSVERSALES Y TEMAS ABIERTOS DE INVESTIGACIóN

4.1 Cuestiones y líneas específicas

Las cuestiones y líneas específicas formuladas según las comunicaciones presentadas son:

- ¿Cómo se puede explicar con más detalle el uso del ETM en el esquema de Popper mediante el uso de artefactos y representaciones visuales? ¿Cómo pueden las ideas en el plano cognitivo estar conectadas con los supuestos en el plano epistemológico? Se facilita una explicación más detallada del papel de las tareas para superar obstáculos y errores durante el aprendizaje de un concepto. (Alchasidis)
- Las creencias de los estudiantes sobre cómo los errores deben ser manejados en el aula de matemáticas; el rol del profesor y de los estudiantes en el uso de errores durante el proceso de enseñanza; las conexiones entre el uso de errores, ETM personal de los estudiantes y el ETM idóneo. ¿Cómo podemos explicar y ejemplificar la influencia o la relación entre las creencias de los estudiantes y la activación de las diferentes génesis en un ETM idóneo por parte de los profesores? (Christodoulou/Gagatsis/Elia/Michael-Chrysanthou)
- -La contribución del dominio afectivo hacia la creación de un ETM idóneo o personal. ¿Cómo perciben los estudiantes las representaciones y qué efecto tienen sus creencias en la génesis semiótica? Se identifica la influencia de las creencias en el conocimiento, y se explora la influencia del conocimiento sobre las creencias. ¿Cuál es el significado de ETM

idóneo para estudiantes de Economía? Se necesitan ejemplos de creencias diferentes en relación con diferentes tipos de activación de las génesis de ETM. ¿Cómo se puede obtener información sobre los génesis, planos y circulaciones entre ellas a través de la investigación sobre las creencias? (Nicolaou/Gagatsis/Elia/Michael-Chrysanthou)

- ¿Cómo identificar lo que caracteriza al profesor desde el ETM idóneo y las interacciones con sus estudiantes? ¿Cuál es la propuesta del ETM idóneo para el profesor? Ejemplos de génesis y planos, explicando qué elementos del ETM personal darían sentido a los elementos correspondientes del ETM idóneo (Guerrero / Henríquez).
- ¿Existen evidencias de génesis documentales en relación con la generación de ETG? ¿Cuál es la repercusión en esta investigación (por ejemplo, en los resultados) del hecho de que los participantes son futuros profesores? (Mayo / Guzmán).
- ¿Cuál es la contribución que el ETM puede hacer a MTSK? ¿Cuál es la contribución de MTSK a ETM? ¿Cuál es el aporte de tratar conjuntamente ambos de cara a la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje? (Espinoza-Vásquez).
- La relación KoT (uno de MTSK sub-dominios) y el ETM idóneo y personal. ¿Puede la concepción de Ana de la matemática como un producto final estar influenciada por su falta de conocimiento acerca de los fundamentos de los procedimientos? ¿Es esto un ejemplo de la relación triangular entre KoT, ETM y Creencias (o Concepciones)? ¿Qué sub-dominios o elementos de MTSK parecen ser influyentes en la construcción del ETM idóneo? (Zakaryan / Ribeiro / Espinoza-Vásquez)
- Ejemplos de la influencia del MTSK del profesor en las sucesivas modificaciones del ETM (Hernández / Zubieta).
- La relación entre el ETM personal del profesor y el ETM idóneo del profesor, y el ETM personal de los alumnos en una clase de formación inicial de profesores. Se describe articulación de los modelos ETM-MTSK, el uso de software de geometría dinámica como soporte en la activación de diferentes componentes del ETM, y el efecto del conocimiento sobre los modelos ETM y MTSK en la organización didáctica que emplea un formador docente. (Montes / Jofré / Carrillo / Contreras)

En general, los trabajos presentados avanzan en las líneas de investigación propuestas en ETM4 y, al mismo tiempo, dejan abiertos otros cuestionamientos para futuras investigaciones. Por ejemplo, profundizar respecto al conocimiento especializado del formador de profesores en relación con el ETM, es decir, cuál y cómo es (o debe ser) el ETM *de referencia* del futuro profesor como parte del conocimiento especializado del formador de profesores. También se propone indagar en el rol del profesor y de su conocimiento en el estudio y construcción del ETM personal de los estudiantes. Por otra parte, se vislumbran dos aspectos de conexión entre los modelos ETM y MTSK que dan sentido a las influencias de uno de ellos en el análisis que se realiza con el otro: teórico y práctico pues cada modelo aporta elementos complementarios para el análisis de la práctica matemática del profesor, desde su diseño hasta su ejecución en el aula. Esto abre una nueva dimensión a la investigación que contempla las interacciones entre ETM y MTSK; es decir, cómo un modelo teórico aporta e influye en el otro.

4.2. Algunas primeras conclusiones

Como resultado de las contribuciones de los participantes en este tema, se identifican las siguientes líneas de avance en la investigación: dimensiones externas, modelo ETM y diálogo entre modelos.

4.2.1. Dimensiones externas

- Dimensión afectiva
  - La dimensión afectiva ayuda a explicar los cambios en el ETM de estudiantes y profesores. Los profesores pueden utilizar las creencias de los estudiantes para influir en el ETM de sus estudiantes. En este proceso, las creencias de los estudiantes juegan un papel relevante en el desarrollo del ETM idóneo.
- Integración versus consideración
  - Aparte de la dimensión afectiva surgió en las discusiones la influencia de la dimensión social. Sin embargo el debate sobre ésta se centró en la plausibilidad de integrar nuevas dimensiones o planos en el modelo ETM. Se sostiene que la idea no es integrar nuevas dimensiones (por ejemplo dimensión afectiva) en el modelo ETM, sino considerar estas dimensiones en caso de que sea posible. La forma en que tratamos el impacto en el ETM de dimensiones externas es una cuestión abierta.

4.2.2. Qué clase de herramienta es el modelo ETM?

Aunque los profesores necesitan elementos teóricos para mejorar el aprendizaje de los estudiantes, en este caso a través del ETM idóneo, parece difícil enseñar el propio modelo en el contexto de la formación inicial de docente (debido a la dificultad en la comprensión de las nociones implicadas). Sin embargo, el ETM, aparte de ser una herramienta de investigación, parece ser una herramienta de planificación adecuada, tanto para el profesor como para el profesor formador. Para este propósito, las versiones simplificadas y ejemplificadas del modelo podrían ser útiles. El diseño de estas versiones es una cuestión abierta.

4.2.3. Diálogo entre modelos

Los siguientes aspectos propician el diálogo sobre la interacción entre modelos:

- La tarea matemática surgió como elemento unificador en el diálogo entre modelos. Parecía que centrarse en las tareas matemáticas es una poderosa manera de relacionar elementos de diferentes modelos.
- Los modelos ETM y MTSK se enriquecen mutuamente, facilitando un análisis más fino.
- En la explicación de la transición de una instancia del ETM idóneo a la siguiente instancia, el modelo MTSK puede ayudar.
- Las investigaciones actuales se han centrado en la búsqueda de elementos de ambos modelos y sus relaciones. Otras preguntas y objetivos de investigación determinarán el papel de cada marco en la investigación. Las investigaciones sobre ETM pueden utilizar el modelo MTSK para un análisis más fino, y viceversa, teniendo ambos su propio modelo como marco teórico.
- En el análisis del MTSK de un profesor, por ejemplo, sobre el uso de la calculadora en el aula, la rica explicación de la actividad matemática en el ETM, en particular, la génesis instrumental, puede facilitar una mejor comprensión. Se trata de privilegiar una génesis específica teniendo en cuenta la actividad desde la perspectiva del ETM, no sólo de centrarse en esa génesis.
- En cuanto a la relación entre las creencias (estudiantes y profesores) y los modelos MTSK y ETM, el modelo MTSK puede ser útil: MTSK incluye el dominio de las creencias de los profesores sobre matemáticas y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Al

mismo tiempo, el subdominio de Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM) incluye el conocimiento de los maestros sobre las creencias de los estudiantes.

Finalmente, se propusieron los siguientes aspectos (necesidades y cuestiones abiertas) como puntos de avance:

- ¿Qué relaciones se pueden establecer entre tipo de creencias (estudiantes y maestros) con tipología de génesis? Se necesitan ejemplos de creencias diferentes en relación con diferentes tipos de activación de varias génesis de ETM.
- Parece necesario disponer de ejemplos sobre las componentes de ETM idóneo del profesor, las cuales son (o no) esperadas sobre la base del ETM personal de ese profesor. Se necesitan también ejemplos de la relación entre génesis y planos, explicando qué elementos del ETM personal dan sentido a los elementos correspondientes del ETM idóneo.
- ¿Cómo pueden ser visibles en la investigación (por ejemplo, en los resultados) las características específicas (el ser profesor, futuro profesor, formador de profesores, estudiante) del sujeto estudiado ? Se puede suponer que la investigación llevada a cabo y, en particular, sus resultados serían sensibles a los sujetos.
- Es necesario explorar las relaciones viables entre los modelos ETM-MTSK cuando se aplica al formador de profesores. ¿Existe alguna relación entre "MTTSK" (el conocimiento especializado de los formadores de profesores de matemáticas) y el ETM de referencia del futuro profesor?

La figura 1 es una evolución de la figura propuesta en ETM4. Su propósito es ayudar a comprender los interrogantes finales planteados anteriormente.

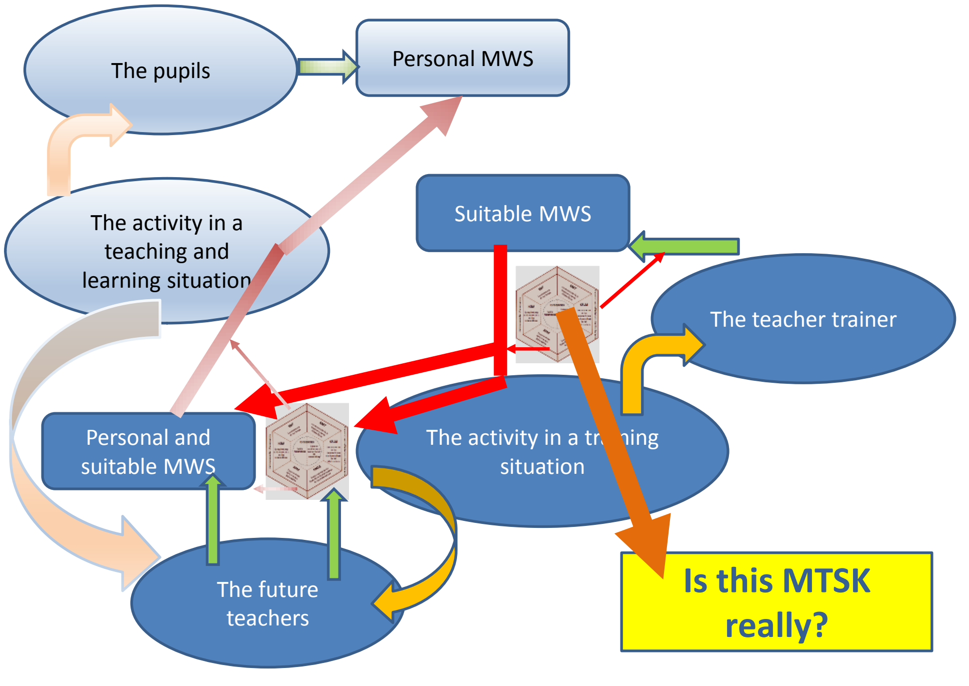


Figura 1: Diagrama ETM-MTSK en el contexto de la formación inicial de profesores

En el contexto de la formación inicial del profesorado, el formador de profesores, empleando su conocimiento, desarrolla su ETM idóneo, el cual, al interactuar con la actividad del aula, además de sufrir progresivas adaptaciones en las que su MTSK entra en juego, colabora en el desarrollo del ETM personal e idóneo del estudiante para profesor, conformando así un ETM de referencia para dicho estudiante y futuro profesor. En este desarrollo actúa el conocimiento del propio estudiante y se va construyendo también el MTSK del mismo. Pensando en este estudiante en el futuro, como profesor, o bien simulando situaciones de aula, podemos afirmar que su ETM idóneo, así como su MTSK influyen, a través de la interacción con la actividad de aula, en el desarrollo del ETM personal de sus futuros alumnos.

La pregunta que queda abierta en este punto es: si, realmente, el conocimiento especializado que el formador de profesores pone en juego es MTSK. Esta pregunta posee mucho sentido, ya que el MTSK habla del profesor de matemáticas, mientras que el formador no es solo profesor de matemáticas. Su conocimiento es lo que hemos abreviado provisionalmente como MTTSK (Mathematics Teachers Trainer's Specialized Knowledge). Y por otro lado, esta pregunta nos llevó a cuestionar cuál es el conocimiento especializado que debe tener el formador del futuro profesor y cómo esto podría estar relacionado con el ETM de referencia del estudiante para profesor (y futuro profesor de matemática) en su formación inicial.

Los estudios sobre el ETM del profesor en ejercicio y el ETM de los estudiantes nutren a la formación de profesores mostrando el dinamismo y pluralidad de ETMs a los que se enfrentará el futuro profesor durante su labor docente. Asimismo, estos estudios aportarán al conocimiento de los formadores de profesores aspectos que sus estudiantes necesitan como conocimiento especializado o de acuerdo a los estándares de la formación de profesores.

GENÈSE ET DÉVELOPPEMENT DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE : LE ROLE DU PROFESSEUR, DU FORMATEUR ET DES INTERACTIONS

1. Descripteur initial du thème

Ce troisième thème approfondit la réflexion sur le rôle des enseignants et des interactions dans la construction d'un espace de travail idoine et efficace, abordée lors du symposium ETM4. L'objectif est d'apporter des réponses pour la gestion des interactions autour du travail mathématique dans les classes, et d'intégrer de manière holistique différents points de vue (cognitif, pédagogique, technique, affectif, culturel) dans l'analyse de ces interactions et dans la construction de la pensée mathématique. Nous proposons également une réflexion spécifique sur la formation des enseignants et le rôle des formateurs dans ce développement. En classe, le professeur oriente et équilibre la dynamique du travail mathématique. Des propositions offrant diverses perspectives sur ce thème pourront contribuer à une meilleure compréhension du processus de genèse impliquant simultanément élèves et professeurs. Nous nous pencherons spécialement sur le processus d'interaction entre les connaissances du professeur et les divers espaces de travail mathématique, à savoir comment les connaissances du professeur influent sur la formation d'espaces de travail mathématique.

2. Contributions

Les contributions suivantes ont été présentées dans le cadre de ce thème :

Titre de la contribution	Auteur(s)	Institution	Pays	Spécificités	Table Ronde
A unified frame of reference for the study of students' strategies, errors and obstacles within the discursive genesis of the mathematical work space on the concept of intensive quantities	N. Alchasidis	Primary School of Kastoria	Grèce	ETM Elèves de primaire	TR 1
El espacio de trabajo matemático en el estudio de propiedades	C. Guerrero & C. Henríquez	Universidad de La Frontera-	Chili	ETM -ETG Professeurs en exercice	TR 1

sintéticas y analíticas de la parábola					
Reflexión sobre algunos elementos que posibilitan la articulación de los modelos ETM y MTSK en tareas sobre el concepto de función	G. Espinoza-Vásquez	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chili	MTSK-ETM Professeurs en exercice	TR 1
El conocimiento matemático de futuros profesores en espacios de trabajo matemático utilizando Geogebra con triángulos	M. Hernández Escobar & G. Zubieta Badillo	Cinvestav	Mexique	MTSK -ETM Professeurs en formation initiale	TR 2
Relaciones entre el conocimiento del tema (MTSK) y los ETM idóneo y personal	D. Zakaryan, C. Ribeiro & G. Espinoza-Vásquez	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chili	MTSK-ETM Professeurs en exercice	TR 2
Una aproximación a las relaciones MTSK-ETM en el aula de formación de maestros	M. Montes, Fr. J. Jofré, J. Carrillo & L. C. Contreras	Universidad de Huelva	Espagne	MTSK-ETM Professeurs en exercice	TR 3
How undergraduate students' (studying at the faculty of economics and management) beliefs and self-efficacy beliefs about mathematics,	St. Nicolaou, A. Gagatsis, I. Elia & P. Michael-Chrysanthou	University of Cyprus	Chypre	ETM Croyances, self-efficacy, Etudiants en économie	TR 3

representations and functions contribute to the formation of their mathematical working space					
How lower secondary school students' beliefs and attitudes about mathematics, errors in mathematics and assessment contribute to the formation of their MWS	Th. Christodoulou, A. Gagatsis, I. Elia & P. Michael-Chrysanthou	University of Cyprus	Chypre	ETM Croyance, étudiants du secondaire	TR 3
Uso de recursos en el mejoramiento del conocimiento matemático para la enseñanza	Cl. Mayo & J. Guzmán	Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional	Mexique	ETM Approche documentaire de la didactique – Professeurs en formation initiale	TR 2
Mesurer des distances inaccessible et l'ETM géométrie : désigner des séries didactiques en utilisant une source historique primaire	F. Papadopoulos & K. Nikolantonakis	Université de la Macédoine Ouest	Grèce	ETG Poster	TR 3

3. Horizons communs

Dans les contributions concernant ce thème, le modèle théorique des ETM n'a pas été le seul à être considéré, il a été utilisé et mis en perspective avec d'autres modèles théoriques de compréhension des connaissances du professeur et de leur rôle dans la classe. Parmi les modèles les plus utilisés figure le modèle théorique MTSK (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge,* ou connaissances spécialisées du professeur de mathématiques) qui, par l'établissement de catégories, a permis d'approfondir notre savoir sur les connaissances de la mathématique, les connaissances didactiques du contenu (*Pedagogical content knowledge*) et les croyances. D'autres cadres théoriques ont abordé l'étude des croyances épistémologiques et de la perception de l'efficacité personnelle.

Les conclusions sur ce thème, énoncées lors du Symposium ETM4 qui s'est tenu en Espagne, ont constitué un point de départ. Pour les discussions initiales, les points suivants ont été soulignés :

Le professeur est au centre du thème, compte tenu de son rôle prépondérant dans le développement de l'ETM, en particulier dans la gestion et le développement des ETM des élèves.

Le professeur interagit avec ses élèves dans l'ETM idoine.

Les connaissances des professeurs jouent un rôle central dans la construction de l'ETM (de référence, idoine, personnel).

Le cadre de l'ETM peut interagir en complémentarité avec d'autres cadres (connaissances spécialisées du professeur de mathématiques, MTSK, possibilités d'apprentissage, OTL, par exemple). Les plans verticaux peuvent s'avérer utiles à cette fin.

Quant à la méthodologie, il est important d'observer les épisodes de classe pour l'approche de la pratique pédagogique. Bien que la pratique des professeurs soit plus large que l'enseignement dans le cadre de la classe, cet environnement doit être privilégié.

Enfin, la question suivante a été soumise à réflexion : où le travail collectif est-il considéré, dans l'ETM ? L'ETM de groupe a-t-il un sens ?

Pour établir un horizon commun de discussion et des points de convergence fondés sur ces conclusions formulées lors de l'ETM4, les questions suivantes ont été proposées :

Comment expliquer et illustrer l'influence ou le rapport entre les croyances des élèves et l'activation des différentes genèses dans un ETM idoine déterminé par l'enseignant ?

Exemples de différentes croyances concernant les différents types d'activation de diverses genèses de l'ETM. Quels liens pourraient être établis entre types de croyances et typologies de genèse ?

Comment la recherche sur les croyances peut-elle aider à concevoir des stratégies visant à renforcer l'ETM personnel des élèves, des professeurs en exercice et des futurs enseignants ?

Dans les interactions élèves-professeurs, comment obtenir des informations sur les mouvements entre genèse, plans et circulations ?

Comment intégrer le domaine affectif dans le modèle ETM ? Comment aborder un questionnaire sur les croyances du point de vue de l'ETM ? En particulier, comment interpréter l'absence d'une opinion forte sur un thème en termes d'ETM (personnel ou idoine) ?

Quels plans et circulations entre les plans sont activés dans la formation des futurs enseignants et requis par les normes des programmes ? Exemples d'éléments de l'ETM idoine, qui ne sont pas attendus sur la base des ETM personnels des professeurs.

Exemples de genèses et de plans expliquant les éléments de l'ETM personnel susceptibles de donner un sens aux éléments de l'ETM idoine.

Comment identifier par l'observation les caractéristiques du sujet étudié dans la recherche (par exemple dans les résultats) ? Nous pouvons supposer que la recherche menée et, en particulier, ses résultats, seront sensibles aux sujets (professeurs, professeurs en formation, formateurs, élèves).

Quelle est la contribution de l'ETM aux MTSK ? Quelle est la contribution des MTSK à l'ETM ? Quelle contribution peut résulter du traitement conjoint de l'ETM et des MTSK pour la compréhension des processus d'enseignement et d'apprentissage ?

Quel rapport peut-on établir entre MTSK, ETM et croyances ?

Quels sous-domaines ou éléments des MTSK semblent influer sur la construction des divers ETM ?

Quel est le sens du rapport ETM-MTSK appliqué au formateur ?

Au cours de la discussion, il a été décidé de synthétiser les questions précédentes en les résumant aux deux questions suivantes : comment gérer les interactions autour du travail mathématique en classe ? Et comment les connaissances du professeur influent-elles sur la formation de l'ETM ?

Les communications présentées ont été structurées autour de trois tables rondes :

TR 1 : la création d'un espace de travail mathématique idoine : le rôle des croyances et des attitudes des élèves dans la construction de l'ETM.

TR 2 : la construction de l'ETM dans différents thèmes mathématiques : conséquences pour la classe et pour la formation des enseignants.

TR 3 : relation ETM-MTSK.

Les discussions ont abordé les aspects généraux et spécifiques concernant le développement théorique de chaque modèle, la manière dont ces modèles favorisent les analyses, permettent d'approfondir l'étude de l'activité mathématique en classe et contribuent à la formation du professeur. D'un point de vue général, les discussions ont porté sur les éléments favorisant les interactions entre les modèles théoriques, les connaissances pédagogiques que les professeurs en exercice doivent posséder, et les connaissances que la formation doit dispenser aux futurs professeurs. Les discussions ont également abordé plusieurs aspects particuliers de chaque construction et leurs interactions ; la manière dont se développent les interactions entre les pôles de l'ETM et les éléments facilitant les interactions pour des thèmes mathématiques spécifiques, les MTSK et les connaissances spécialisées des futurs professeurs en matière d'espaces de travail et de domaines mathématiques particuliers, le rôle de l'utilisation des technologies et son interprétation selon les deux modèles, l'utilisation de composantes d'un modèle pour consolider l'analyse effectuée avec l'autre modèle.

4. Horizons transversaux et questions de recherche ouvertes

4.1 Questions et orientations spécifiques

Les questions et orientations spécifiques formulées dans les contributions présentées sont les suivantes :

Comment expliquer de manière plus détaillée l'utilisation de l'ETM dans le schéma de Popper en utilisant des artefacts et des représentations visuelles ? Comment les idées sur le plan cognitif peuvent-elles être reliées aux hypothèses sur le plan épistémologique ? Une explication détaillée du rôle des tâches visant à surmonter les obstacles et les erreurs lors de l'apprentissage d'un concept est proposée. (Alchasidis).

Croyances des élèves sur la façon dont les erreurs doivent être traitées en classe de mathématiques ; le rôle du professeur et des élèves dans l'utilisation des erreurs lors du processus d'enseignement ; les relations entre utilisation des erreurs, ETM personnel des élèves et ETM idoine. Comment expliquer et illustrer l'influence ou la relation entre les croyances des élèves et l'activation des différentes genèses dans un ETM idoine par les professeurs ? (Christodoulou/Gagatsis/Elia/Michael-Chrysanthou).

Contribution de l'affect à la création d'un ETM idoine ou personnel. Comment les élèves perçoivent-ils les représentations et quel effet ont leurs croyances sur la genèse sémiotique ? Observation de l'influence des croyances sur les connaissances, et de l'influence des connaissances sur les croyances. Qu'est-ce qu'un ETM idoine pour les étudiants en économie ? Des exemples de différentes croyances concernant différents types d'activation des genèses d'ETM sont nécessaires. Comment obtenir des informations sur les genèses, les plans et les circulations entre les croyances par le biais de la recherche ? (Nicolaou/Gagatsis/Elia/Michael-Chrysanthou).

Comment identifier ce qui caractérise le professeur selon l'ETM idoine et les interactions avec ses élèves ? Quelle est la proposition d'ETM idoine pour le professeur ? Exemples de genèses et de plans expliquant quels éléments de l'ETM personnel donneraient sens aux éléments correspondants de l'ETM idoine (Guerrero/Henríquez).

Existe-t-il des preuves de genèses documentaires liées à la génération d'un espace de travail géométrique (ETG) ? Quelles sont les répercussions sur cette recherche (sur les résultats, par exemple) du fait que les participants sont de futurs professeurs ? (Mayo/Guzmán).

Quelle peut être la contribution de l'ETM aux MTSK ? Quelle est la contribution des MTSK à l'ETM ? Qu'apporte leur traitement conjoint pour la compréhension des processus d'enseignement et d'apprentissage ? (Espinoza-Vásquez).

Relation entre KoT (l'un des sous-domaines de la MTSK) et ETM idoine et personnel. La conception que possède Ana de la mathématique comme produit fini est-elle influencée par son manque de connaissances sur les fondements des procédures ? Cela illustre-t-il la relation triangulaire entre KoT, ETM et croyances (ou conceptions) ? Quels sous-domaines ou éléments des MTSK semblent influer sur la construction de l'ETM idoine ? (Zakaryan/Ribeiro/Espinoza-Vásquez).

Exemples de l'influence des MTSK de l'enseignant sur les modifications successives de l'ETM (Hernández/Zubieta).

Relation entre l'ETM personnel du professeur et l'ETM idoine du professeur d'une part, et l'ETM personnel des élèves d'autre part, dans une classe de formation des professeurs. Description de l'articulation des modèles ETM-MTSK, l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique comme support de l'activation des différentes composantes de l'ETM, et des connaissances sur les modèles ETM et MTSK dans l'organisation pédagogique employée par un formateur. (Montes/Jofré/Carrillo/Contreras).

En général, les travaux présentés suivent les orientations de recherche proposées lors de l'ETM4, tout en laissant d'autres questions ouvertes pour de futures recherches. Par exemple, approfondir la question des connaissances spécialisées du formateur concernant l'ETM, à savoir quel est (ou devrait être) l'ETM *de référence* du futur professeur, en tant que connaissances spécialisées du formateur. Il est également proposé d'examiner le rôle du professeur et de ses connaissances dans l'étude et la construction de l'ETM personnel des élèves. Par ailleurs, nous discernons deux aspects de la relation entre les modèles ETM et MTSK qui donnent sens aux influences de l'un d'eux dans l'analyse réalisée avec l'autre : un aspect théorique et un aspect pratique, car chaque modèle apporte des éléments complémentaires pour l'analyse de la pratique mathématique du professeur, de sa conception à sa mise en application en classe. Cela ouvre une nouvelle dimension pour la recherche, incluant les interactions entre ETM et MTSK : quelles sont la contribution et l'influence d'un modèle théorique sur l'autre.

4.2. Quelques-unes des premières conclusions

À partir des contributions des participants sur ce thème, les orientations de recherche suivantes sont proposées : dimensions externes, modèle ETM et dialogue entre les modèles.

4.2.1. Dimensions externes

Dimension affective

La dimension affective contribue à expliquer les changements qui surviennent dans l'ETM des élèves et des professeurs. Les professeurs peuvent utiliser les croyances des élèves pour influer sur leur ETM. Dans ce processus, les croyances des élèves jouent un rôle important dans le développement d'un ETM idoine.

Intégration *versus* prise en compte

Outre la dimension affective, l'influence de la dimension sociale est apparue lors des discussions. Le débat sur cette dimension s'est néanmoins limité à la plausibilité d'intégrer de nouveaux plans ou dimensions dans le modèle ETM. L'idée n'est pas d'intégrer de nouvelles dimensions (la dimension affective, par exemple) dans le modèle ETM, mais de prendre en compte ces dimensions lorsque cela s'avère possible. La manière de traiter l'influence des dimensions externes sur l'ETM est une question ouverte.

4.2.2. Quel genre d'outil le modèle ETM offre-t-il ?

Si les professeurs ont besoin d'éléments théoriques pour optimiser l'apprentissage des élèves, dans le cas présent par un ETM idoine, il semble difficile d'enseigner ce modèle dans le contexte de la formation des enseignants (en raison de la difficulté de compréhension des notions impliquées). L'ETM est toutefois non seulement un outil de recherche, mais également un outil de planification approprié, pour le professeur comme pour le formateur. Des versions simplifiées et illustrées du modèle pourraient être utiles. La conception de ces versions est une question ouverte.

4.2.3. Dialogue entre les modèles

Les aspects suivants favorisent le dialogue sur l'interaction entre les modèles :

La tâche mathématique est apparue comme un élément unificateur dans le dialogue entre les modèles. Il semble que se concentrer sur des tâches mathématiques est un moyen puissant de relier les éléments de différents modèles.

Les modèles ETM et MTSK s'enrichissent mutuellement, ce qui permet d'affiner l'analyse.

Le modèle MTSK peut contribuer à expliquer la transition d'une instance de l'ETM idoine à la suivante.

Les recherches actuelles se sont concentrées sur la recherche d'éléments des deux modèles et leurs relations. D'autres questions et objectifs de recherche détermineront le rôle de chacun des cadres dans la recherche. Les recherches sur l'ETM peuvent utiliser le modèle MTSK pour affiner l'analyse, et inversement, chacun ayant son propre modèle pour cadre théorique.

Dans l'analyse des MTSK d'un professeur, par exemple sur l'utilisation de la calculette en classe, l'explication approfondie de l'activité mathématique dans l'ETM, en particulier la genèse instrumentale, peut contribuer à une meilleure compréhension. Il s'agit de privilégier une genèse spécifique prenant en compte l'activité dans la perspective de l'ETM, et non de se concentrer uniquement sur cette genèse.

Concernant la relation entre les croyances (élèves et professeurs) et les modèles MTSK et ETM, le modèle MTSK peut s'avérer utile : les MTSK comprennent le domaine des croyances des professeurs sur les mathématiques, leur enseignement et leur apprentissage. Le sous-domaine des connaissances des caractéristiques d'apprentissage des mathématiques (KFLM) inclut par ailleurs les connaissances des professeurs concernant les croyances des élèves.

Enfin, les questions suivantes (besoins et questions ouvertes) ont été proposées :

Quelles relations peuvent être établies entre type de croyances (élèves et professeurs) et typologie de genèses ? Des exemples de croyances différentes concernant différents types d'activation de diverses genèses d'ETM sont nécessaires.

Disposer d'exemples sur les composantes de l'ETM idoine attendues (ou non) à partir de l'ETM du professeur, semble nécessaire, tout comme sont indispensables des exemples de la relation entre genèse et plans, expliquant quels éléments de l'ETM personnel donnent sens aux éléments correspondants de l'ETM idoine.

Comment rendre visibles dans la recherche (dans les résultats, par exemple) les caractéristiques du sujet étudié (professeur, futur professeur, formateur de professeur, élève) ? Nous pouvons supposer que la recherche menée et, en particulier, ses résultats, seront sensibles aux sujets.

Il est nécessaire d'explorer les relations viables entre les modèles ETM-MTSK appliqués au formateur. Existe-t-il une relation entre MTTSK (les connaissances spécialisées des formateurs de professeurs de mathématiques) et l'ETM de référence du futur professeur ?

La figure 1 est le développement de la figure proposée lors de l'ETM4. L'objectif est d'aider à comprendre les questions finales précédemment soulevées.

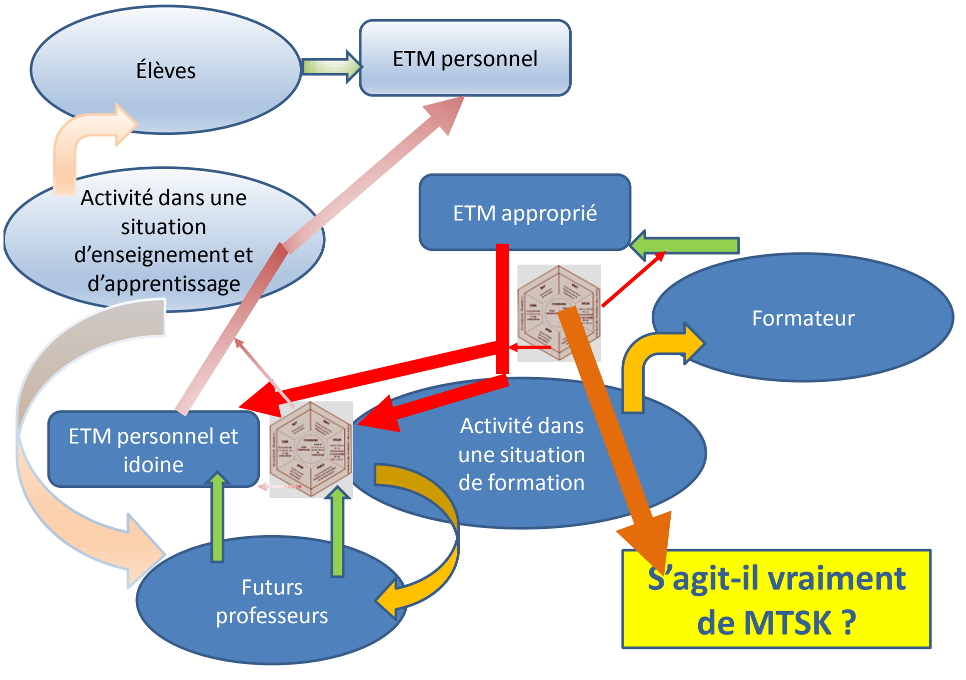


Figure 1 : diagramme ETM-MTSK dans le contexte de la formation des enseignants

Dans le contexte de la formation des enseignants, le formateur, utilisant ses connaissances, développe son ETM idoine qui, en interagissant avec l'activité de la classe, subit des adaptations progressives dans lesquelles intervient ses MTSK, collabore au développement de l'ETM personnel et idoine du futur professeur, créant ainsi un ETM de référence pour cet étudiant et futur professeur. Dans ce développement, interviennent les connaissances de l'étudiant et ses MTSK se construisent. En simulant des situations de classe, nous pouvons affirmer que l'ETM idoine de ce futur professeur, de même que ses MTSK influent, par le biais de l'interaction avec l'activité de classe, dans le développement de l'ETM personnel de ses futurs élèves.

Sur ce point, une question demeure ouverte : les connaissances spécialisées que le formateur met en jeu sont-elles réellement des MTSK. Cette question est fondée, car les MTSK concernent le professeur de mathématiques, alors que le formateur n'est pas seulement professeur de mathématiques. Ses connaissances sont ce que nous désignons par l'acronyme MTTSK (*Mathematics Teachers Trainer's Specialized Knowledge*, soit connaissances spécialisées du formateur de professeurs de mathématiques). Par ailleurs, cette question nous pousse à nous demander quelles sont les connaissances spécialisées que doit posséder le formateur du futur professeur, et comment cela pourrait-il être lié à l'ETM de référence de l'étudiant futur professeur de mathématiques dans sa formation.

Les études sur l'ETM du professeur en exercice et l'ETM des étudiants nourrissent la formation des professeurs en révélant le dynamisme et la pluralité des ETM auxquels sera confronté le futur professeur lors de son travail d'enseignant. Ces études apporteront également aux connaissances des formateurs des aspects dont leurs étudiants auront besoin comme connaissances spécialisées ou pour répondre aux normes de la formation d'enseignant.

A UNIFIED FRAME OF REFERENCE FOR THE STUDY OF STUDENTS' STRATEGIES, ERRORS AND OBSTACLES WITHIN THE DISCURSIVE GENESIS OF THE MATHEMATICAL WORK SPACE ON THE CONCEPT OF INTENSIVE QUANTITIES

Alchasidis Nikolaos

Headmaster of 6th Primary School of Kastoria

nalchas@hotmail.com

In this paper I discuss the implementation of Mathematical Working Space (MWS) model to a teaching sequence concerning intensive quantities (a special type of ratio). The MWS derives from the Geometrical Working Space model that uses Kuhn's theory to categorize the didactic approach of a teaching sequence (which uses artefacts, tools and interrelated axioms and mathematical proof) within a specific Paradigm. This paper discusses the implementation of the model with Popper's and Lakatos notion of falsification. Therefore it focuses on obstacles being created on the one hand because of didactic transposition of rational numbers and on the other hand because of inadequate curricula/textbooks. The epistemological obstacles lie deeply in epistemological assumptions being created within a Paradigm. The paper scaffolds these epistemological assumptions in order to design, analyze and intertwine the big ideas concerning ratios so to propose to educators a methodology of designing a teaching sequence that may help students internalize the above concept.

Keywords*: sophisticated falsification, ratios, epistemological obstacles, learning trajectory, didactic transposition*

INTRODUCTION

Teachers worldwide acknowledge the difficulties in teaching ratios but it's very difficult for them to change the beaten track. The beaten track entails the extended use of tables and charts and the use of cross multiplication algorithm that may help students give the correct answer but may prevent them from internalizing the concept of ratio. In fact in some cases students "potentially interpret the proportion simply as a template for inserting whole numbers into boxes" (Lobato & Ellis, 2010:4).

The weakness of mathematics teachers to change the beaten track lies deeply on the Paradigm they follow which can be dealt as a disciplinary matrix according to Kuhn (1970).

The meaning of Paradigm is twofold. Kuhn was forced to clarify that the term Paradigm refers either to an exemplar or to a disciplinary matrix.

A matrix cannot be criticized since everybody within the scientific community uses that matrix and the results are considered valid within the community. If someone tries to alter the matrix then he is considered as an outcast.

A teacher - being a member of his scientific community of expertise - uses practices that may have been proven insufficient for teaching but are well established within the Paradigm.

Therefore students tend to form misconceptions and adopt alternative ideas. These misconceptions and alternative ideas create obstacles that reappear from time to time. The author believes that it is essential to criticize the disciplinary matrix concerning the didactic transposition of a mathematical object in order to eliminate obstacles' reappearance.

Obstacles are categorized into cognitive obstacles and epistemological obstacles (Bachelard, 1938). Cognitive obstacles are created by students' misconceptions and are of cognitive nature such as the belief of the constancy of taste (Harel, Behr, Post & Lesh, 1994). Epistemological obstacles occur due to the constructive nature of rational numbers system (Q). Q takes for granted a series of mathematical conditions that teachers and students are partly aware of and it is known as whole number bias. They may acknowledge in e.g. that rational numbers refer to equal sharing but are unaware of differences between fractions and ratios. Therefore when a teacher wants to introduce ratios he/she has to take into serious account a series of conditions referring to the quantities involved: Are they part-whole quantities (boys/students) or part-part (boys/girls)? Are we referring to the absolute size of the number or to the relative size? and so on. The partial ignorance of these conditions creates epistemological obstacles.

A certain question thus emerges: How can a teacher integrate tasks in the classroom progression in order to eliminate errors and obstacles?

The MWS seems as an adequate tool to integrate tasks in the classroom because it has two planes, one epistemological and one cognitive. The thorough examination of a mathematical object (or topic) in the epistemological plane can define the relationships between the mathematical object and the right tools for its didactic transposition. The cognitive plane can clarify the effectiveness of the semiotic means, tools and artefacts with respect to the production of proof.

When the MWS scaffolds the space within a certain Paradigm it lacks search of falsifiable elements within the disciplinary matrix and therefore doesn't falsify the scientific method. On the other hand a revised form of methodological falsificationism (Lakatos, 1970) has many features that allow us to criticize the method before depending upon the result of experiments or the results of the problem solving per se. If then the results confirm this theory, we may accept it until we find a better one. If they contradict the theory, we reject it.

NAVIGATING THROUGH THE EPISTEMOLOGICAL AND COGNITIVE PLANE IN MWS MODEL

The MWS (Kuzniak, 2011; Kuzniak & Richard, 2014) is a model that motivates the reflection of teaching and learning in two planes.

The epistemological plane defines a priori expectations about the activity according to the requirements of the mathematical domain, here the rational number system (Q) and its relation to the ratio scheme.

As regards the ratio scheme, three components in interactions are characteristic for the activity in its purely mathematical dimension.

- A set of artefacts such as measuring instruments of quantities and part-whole objects.
- A real and local space as supportive material that may extend from bargraphs and tables to the coordinate plane graphs.
- A theoretical reference system based on definitions and properties of Q and its relationship to the ratio scheme.

From this point of view it is essential to define precisely:

- the discipline followed,
- how the students use the ratio scheme and
- the way they internalize their mathematical knowledge in their practice of the discipline.

This requires a second plane named cognitive. A plane that is centered on the subject and the processes he/she will be involved in solving ratio problems.

These processes are:

- A process of visualization related to the representation of quantities with concrete materials (marbles, m&m's, pictures…) and measures (glasses/jugs with juice and water…)
- A process of abstraction related to graphic representations using symbols and mathematical tools (viniculums, tables, bar graphs …)
- A discursive process producing arguments and proof.

These planes according to the MWS diagram (Tanguay, Kuzniak & Gagatsis, 2014: 30) are related to each other with three strongly interdependent geneses: Semiotic, instrumental and discursive. The diagram in figure 1 shows these three vertical planes. These planes match the connections between these dimensions and may help the teacher/researcher specify precisely the mathematical work in MWS when students solve problems in the classroom. However, there are some questions concerning the nature and the dynamics of these planes as we state further down.

The sem-ins plane (pink) encounters the fundamental characteristic property of ratios: the co-variation of two related quantities that form a single entity. The ins-dis plane (yellow) uses this co-variation to provide discursive proof to validate the solution. The use of pictorial representations and artefacts as tools are being required as verification instruments. Finally the sem-dis plane (blue) starts with the discursive reasoning to conclude to mathematical proof through artefacts now being used by their mathematical properties.

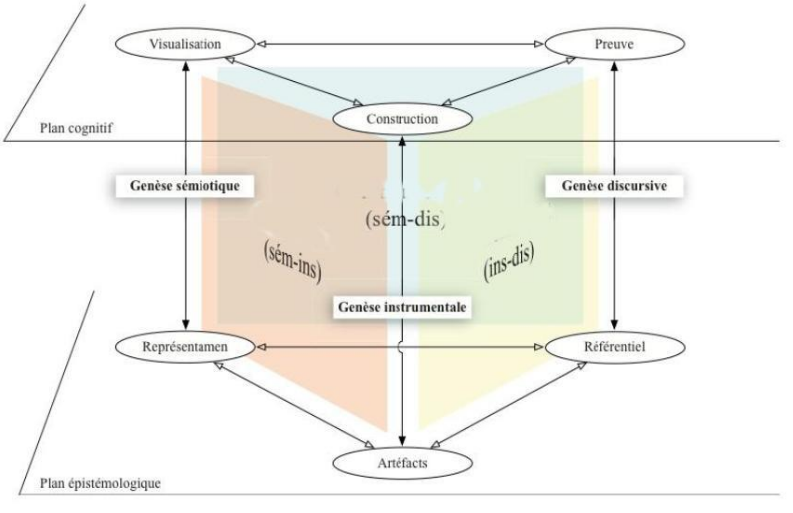


Figure 1: The MWS model (Kuzniak & Nechache, 2015: 3)

The semiotic genesis provides the tangible objects, such as jugs of juice and viniculums or ratio boxes.

The instrumental genesis transforms artefacts into mathematical tools during the construction process. At this point viniculums and ratio boxes are being used as mathematical tools to calculate variables.

A discursive genesis of proof gives meaning to the properties of the artefacts during mathematical reasoning and at this point viniculum is being presented as a division symbol that represents part-part or part-whole relations. A discursive genesis of proof then may (or may not) give new meaning to mathematical reasoning.

A teacher has to take a series of decisions during a teaching sequence. These decisions reflect upon artefacts, mathematical tools and axioms. Also they (the decisions) have a serious impact on the knowledge the students get. So they are discussed further on by the implementation of the model in a criticism that reflects on Popper's falsification process. Of Course Popper refers to major theoretical problems but in our case we refer to theoretical issues concerning classroom practice in relation to students' learning.

SCAFFOLDING THE EPISTEMOLOGICAL PLANE

A teaching sequence concerning intensive quantities and ratios in general includes a series of issues that must be taken seriously in account during the design of the sequence.

For any given number **"a"**, that belongs to the system of natural numbers ($a \in \mathbf{N}$) there's a rational number **"$^{a}/_{1}$"** ($^{a}/_{1} \in \mathbf{Q}$). In our everyday practice we accept as a mathematical condition that "**a**" equals to "$^{\mathbf{a}}/_{\mathbf{1}}$" ($a= {}^{a}/_{1}$), but if we examine thoroughly this condition from a realistic and an epistemological perspective we could argue that **"$^{a}/_{1}$"** is not identified to **"a"** due to the definitions of the two reference systems (N & Q) and especially of the definition of what the unit (1) stands for. Piaget's (1952:viii) hypothesis that a number is a class and an asymmetrical relation takes an additional meaning when we are referring to rational numbers. In e.g. ½ > ¼ is a true condition when we are referring to the absolute value of the number, but ½ may be smaller than ¼ when we are referring to the relative size of the number describing a relation ½ of x in comparison with the relation ¼ of y ($\forall\ x< \frac{1}{2} y \quad x , y \in \mathbf{N}$).

In addition any rational number a/b ($\forall\ a, b \in \mathbf{N}$) may entail different conceptual schemas in realistic problems that give new meaning to the rational number at the cognitive level. The most dominant schema is the part-whole relations schema and worldwide the children learn that we took **"a"** pieces of the unit (a unit divided in **"b"** pieces). But there are other schemas that play an important role in constructing meaning of Q. These schemas (measure, quotient, operator and ratio) have different interpretations and give a whole new meaning in a/b relations (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983). Part-whole relations lie deeply in the absolute size of rational numbers. Ratios are intertwined with the relative size of rational numbers and in many cases are closely connected with part-part relations that refer to different metric systems such as kilometers per hour or boys per pizzas. Many researchers argue about the categories or the taxonomy of these schemas and their relations. And though these schemas are recognized by the mathematicians little attention has being paid to design curricula that support these schemas and create solid understanding on the concept of rational numbers, even when researchers pinpoint the fact that the differences between the systems may lead students to misinterpretations (Post, Behr, Lesh, & Wachsmuth, 1986).

From a mathematical perspective a/b is one number but in terms of ratio tables children deal with a/b as two distinct natural numbers and in the best case a/b is dealt as a comparative index that children connect intuitively to rational numbers' absolute size, rather than the relative size. Therefore, when they seek a missing value they aren't paying attention to the unit reference. Even when they use the operator schema in solving problems (a/b of d^{th}) as Lamon (2012:3) puts it "they just use an algorithm of the cross multiplication in a more sophisticated way rather than think proportionally".

Researchers usually focus on discrete and continuous quantities in part-whole and quotient situations (Empson, Junk, Dominguez & Turner, 2006; Mamede, Nunes & Bryant, 2005). They don't however focus on the relative number size and the fraction as a single entity expressing a constant of proportionality. Stafyllidou and Vosniadou (2004: 516-517) support that "children's acceptance of the idea that decimals and fractions as numbers demand a reconsideration of the identification of the number" and that "the presence of different explanatory frameworks within which the concept of the fraction can be interpreted, shows that a radical reorganization is occurring in children's conceptual structure enabling them to adopt the scientific model". Intensive quantities may provide a series of exceptional and different explanatory frameworks.

Intensive quantities ratio is a special type of ratio. Ratios can refer to extensive quantities or intensive quantities. Extensive quantities, as mass or volume, refer to proportional relations of a system in an additive nature (e.g. if a drink has 20ml of juice and another drink 10 ml of juice how much juice did we use to make these drinks?). Intensive quantities refer to a system without considering the size of the system but focusing on the logic of co-variation and to the constant proportionality (What is the ratio of juice to sugar for one jug in order to have lemonade neither sour nor sweet? What is the ratio of juice to sugar for two or three jugs in order for the lemonade to have the same taste?). One quantity is directly proportional to the constant of proportionality and the other inversely proportional to the constant of proportionality. Therefore, intensive quantities are an important key factor for students in order to shift their thought from the logic of part-whole relations and additive reasoning to the logic of co-variation and multiplicative reasoning and to deal with "a/b" as a single contrast and not as two numbers (Howe, Jaffri, Nunes & Bryant, 2004). They also have many similarities to fractions because in some cases (e.g. density, speed) they cannot be flipped and in other situations (mixtures) they can be presented either in part-part (2 girls per 8 boys) or in part-whole (2 girls per 8 children) relations.

These ideas aren't isolated, nor classified but they intertwine and help students "make meaning" of ratio. Using gift boxes in e.g. and putting **many** objects **to one** box may help students gradually deal with quantities as **many as one** and then comprehend the idea of **unitizing**. Examining the relations between two ratios a/b=c/d a student may find "within" relations $a=x*b \Rightarrow c=x*d$ or "in between" relations $a=y*c \Rightarrow b=y*d$ $(\forall\ x, y \in \mathbf{Q})$. A student may then gradually develop multiplicative thinking and start recognizing direct proportions that refer to within and in between relations or inverse proportions that refer to within proportions in a different manner $x = a*b = c*d$ $\Rightarrow$ *if* $a*$y=c then b/y=d. Direct relations can also be connected to a/b=c/d=1/e or the unit rate a/b=f/1 $(\forall\ a, b, c, d, e, f \in N)$.

Therefore a general question occurs:

"How can a didactic sequence be organized by teachers in order to help students internalize ratios?"

This question causes other questions to occur:

- Which idea is best connected with which artefacts?
- How can these artefacts be transformed into mathematical tools in the ins-dis plane?
- How will the properties of these mathematical tools promote the discourse and connect the idea in the cognitive plane with the assumptions in the epistemological plane?

These questions may help us navigate through the MWS model in order to design and analyze an effective sequence of connecting ideas, internalizing ratios and shifting students thought to more sophisticated levels of reasoning as long as we examine them critically.

CONNECTING THE EPISTEMOLOGICAL WITH THE COGNITIVE PLANE: OBSTACLES & TRAJECTORIES

Confrey (2006) uses the term "learning trajectory" to describe the effort of a student to learn new ideas throughout a procedure and via a conceptual corridor. As Confrey states "the "conceptual corridor" is a theoretical construct describing the possible space to be navigated successfully to learn conceptual content"**.**

The student therefore moves from one landmark to the other facing obstacles until (or if) he/she learns these new ideas. This movement is restricted by a series of factors. One factor is the zone of proximal development of the student (Vygotski,1978). Another factor is the curriculum development that defines the prior knowledge of the student and the goals the pupil has to achieve. For e.g. an 11 year old student can argue about the proportions of materials in a mixture and he/she may be able to use numbers to find a proportion. But his/her mental schemas are limited if he tries to reason with general numbers and give mathematical proof about the relation of the variables involved in a quantity.

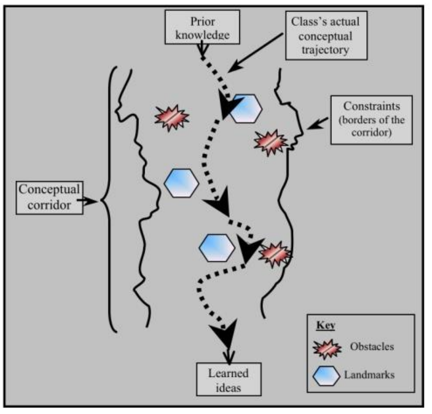


Figure 2: The Learning Trajectory Model (Confrey et al, 2009)

While the model of Confrey can be seen as a 2D model the MWS model can be seen as a 3D model of a trajectory.

It may describe in detail this movement from prior knowledge to learning ideas and the mathematical object per se. The connections between the geneses and the planes can be considered as landmarks and the movement not straightforward but 3dimensional and in a rather sophisticated way.

Giving an example in order students to understand that a/b is one number a teacher has to examine thoroughly his practice in conjunction with:

a. epistemological beliefs of the field

b. signs and signifiers

c. the appropriateness of mathematical artefacts

d. the effortless transformation of an abstract mathematical artefact (in e.g. coordinate planes) into a mathematical tool

e. the appropriateness of this mathematical tool to provide proof

f. the implementation of the tool in indicating the association between the two entities for connecting axioms and proof

All these questions form a primary level of sophisticated falsification concerning the scientific method.

From this point of view obstacles may occur during the circulation of the elements of the model of cognitive and epistemological nature.

Referring to our example and implementing it to MWS model according to the subject, there are certain landmarks in the didactic procedure. At the same time certain obstacles occur according to the students' cognitive level and the didactic transposition.

Landmarks concerning a ratio “a/b” referring to intensive quantities, such as population distribution, are different to those referring to mixtures. A problem concerning population distribution has to deal with discrete quantities in opposition to a problem concerning mixtures. This differentiation acquires different landmarks in the didactic approach. Another differentiation between speed and distribution acquires different semiotic tools. Scatter plots are ideal for presenting distribution and diagrams for speed. When a teacher designs a lesson then he has to criticize his knowledge in conjunction with the mathematical artefacts and tools. He/she has to test whether these tools/artefacts can promote discourse and allow students to use them in order to reach mathematical proof.

In an ideal MWS with the appropriate landmarks any kind of obstacle would be dealt effectively and the trajectory would be straight (fig. 3).

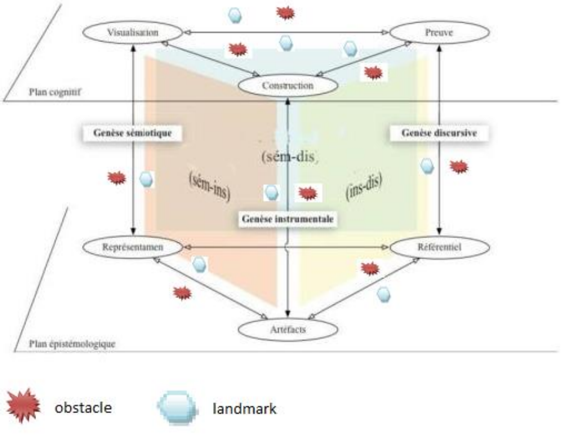


Figure 3: The MWS model as a conceptual corridor

In a realistic model the teacher holds two kinds of knowledge that transform his beliefs, knowledge of mathematics and knowledge of didactic content. Carrillo et al (2013) refers to that type of Knowledge as Mathematical Teachers Specialized Knowledge (MTSK). MTSK of a concrete teacher can be operated as a lens that distorts the mathematical object and prevents the completion of the trajectory. We know for certain that any theory is falsifiable (Popper, 1972). During the implementation of the model the teacher has to spot the falsifiable elements in this knowledge and construct a series of sessions aiming to highlight the anomalies between epistemological assumptions, mathematical tools/artefacts and mental schemas of students that prevent them to give meaning to the properties used within mathematical reasoning.

If the teacher doesn’t focus on these aspects the trajectory won’t be straight and may be incomplete. A teacher in the sem-ins plane when dealing with a/b intensive quantities will have to pose a general question and a series of minor questions:

In order for students to comprehend that a/b is one quantity:

a. Shall I deal with discrete or continuous quantities?
b. Will I use table charts or viniculums as signifiers?
c. Will the table charts be adequate tools for moving to ins-dis plane and start reasoning about the constant of proportionality or not?
d. Are these tools appropriate to provide proof through discourse?

The appropriateness of the questions may help students achieve understanding. The inappropriateness may prevent students from obtaining the new knowledge and distort their mental schemas of the mathematical object (fig. 4).

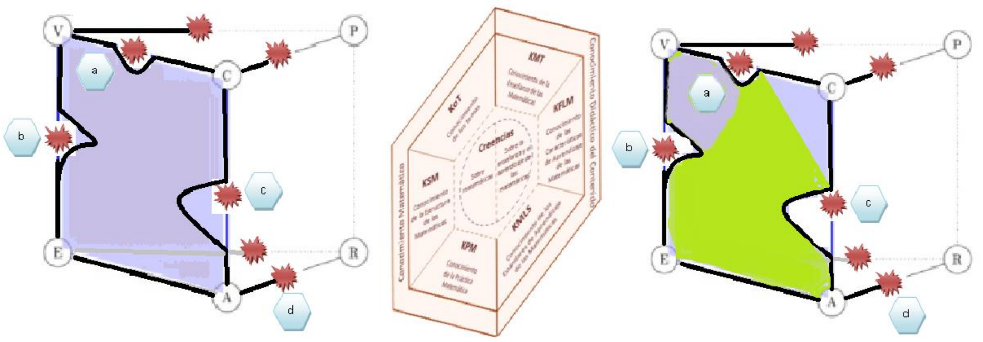


Figure 4: The lens distortion that prevents the circulation between the planes

Therefore the model may be used to pose a series of questions concerning epistemological and cognitive aspects of one mathematical object. These questions may be more profound according to age and level of sophistication. It also may be connected with other domains of mathematics or with the very nature of the systems of numbers.

A student during his/her movement in the conceptual corridor may use one type of semiotic means (in e.g. word problems) along with the artefacts (in e.g. tables) to construct meaning without understanding ratio schema and to act in a rather mechanical way of putting correct numbers in a box. Therefore he/she cannot argue adequately nor scaffold the big ideas behind the schema.

Examining Q we find 11 big ideas that are mainly intertwined with the ratio schema concerning both cognitive and epistemological plane:

- the co-variation between quantities
- within and in between relations
- the relative size of fractions and ratios
- proportional and inversely proportional relations
- many to one (the definition of the unit)
- many as one (unitizing)
- the unit rate
- equivalence
- the representations the quantity may be given (as decimal, percentage, fraction of ratio)
- part-part and part-whole relations
- the constant of proportionality (what it is and what it means)

These ideas are based on mathematical assumptions formed by epistemological constructs. Although mathematicians and curriculum reformers recognize the epistemological constructs of rational number system they pay little attention to the connection of the real and local space with the suitable artefacts of the epistemological plane in order to achieve a figural, instrumental and discoursive genesis concerning the construction of cognitive schemas in the students. For each one of these ideas the teacher has to use different semiotic means, artefacts and mathematical tools to help students construct meaning.

IMPLEMENTING THE MODEL IN THE RATIO DOMAIN

When a teacher decides that he/she wants to teach ratio in a class, he/she has to seriously take into account the epistemological constructs concerning ratio.

If a teacher wants to refer to the relative size of a/b then he/she has to criticize whether the semiotic means support the artefacts and promote discourse. Whether the semiotic means provide a sufficient visualization and the artefacts construct meaning on the cognitive level.

Supposing a teacher wants to present a/b as a single number has a series of options extending from jugs of mixtures to bar charts as semiotic means to tables, viniculums and mental calculations as artefacts that may (ro may not) promote discourse.

If the teacher chooses to use jugs of fruit punch and mental calculations of rational numbers for solving problems then he/she may be able to promote visualization and construction at the cognitive level but it cannot promote sufficient mathematical reasoning to provide axioms and proof. At a certain point the student may start developing his/her mathematical reasoning but other tools are needed to provide proof. And he/she has to move from schema I to schema II.

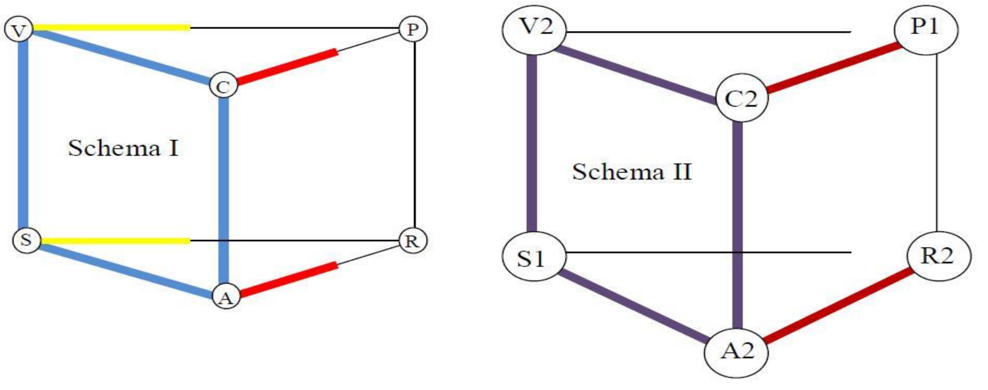


Figure 5: differentiation of the schema according to semiotic means, mathematical tools and epistemological issues

Therefore the teacher has to alter his/her approach of the model. He/she may keep the jugs as semiotic means but may use general numbers in order to facilitate students to form axioms and start developing adequate proof. In that way there‘s a shift in the epistemological plane that reflects another shift in the cognitive plane.

This schema may have a dynamic form according to the choices of the teacher.

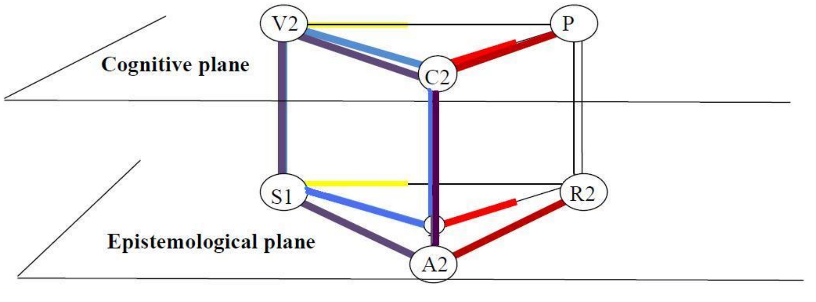


Figure 6: The dynamic transformation of the schema

The question that occurs refers to the extent that a teacher makes choices and to the appropriateness of the choices he/she makes.

Given the previous examples I believe that this model can be adjusted to Popper's (1972:164) Logic of inductive behavior in which "We start with a problem (P_1) **"how can students comprehend that a/b refers to the relative size of a number?"** In this problem we offer some sort of tentative solution - a tentative theory (TT1) **"We will use continuous quantities, mixture problems regarding jugs of fruit punch and mathematical tools such tables and mental calculations"**; this theory is then criticized, in an attempt at error elimination (EE) **"The tables are not suitable for representing the relative size of a/b"**; and as in the case of dialectic, this process renews itself: the theory and its critical revision give rise to new problems (P_2, P_3 …. P_n) later on"

Therefore the following schema: P_1 -> TT -> EE -> P_2 can be used as many times needed in order for the teacher to design a teaching sequence. In that way students may adopt eventually the epistemological model and overcome cognitive obstacles. The epistemological construct "a/b as a number of relative size" forms a problematic situation. The tentative theory can be articulated as an hypothesis: "If I use intensive quantities word problems and introduce viniculum as a division, will the students be able to articulate an axiom and give proof?." This hypothesis can be tested and be proven false.

Then there comes a second hypothesis as P2: "If I use intensive quantities word problems and introduce coordinate planes along with viniculum as a division and tables, will the students be able to articulate an axiom and give proof?" This hypothesis may be proven true under certain conditions.

Finally, a third hypothesis can be articulated, a fourth and so on in order to help students develop mathematical reasoning, form axioms and give mathematical proof.

Epistemological construct	Semiotic means	Artefacts	Mathematical tools	Articulation of Axiom and proof
a/b as a number of relative size	Problems of intensive quantities concerning missing value	collections, Jugs of fruit punch	tables or viniculum as a division, algorithms or mental calculations	An initial stage of reasoning but no articulation of an axiom
	Problems of intensive quantities concerning equivalence	viniculum, tables	coordinate planes	an articulation of optical proof
	Problems of intensive quantities concerning equivalence or missing value	general numbers	identities	Articulation of mathematical reasoning and proof based on general numbers and identities

Table 1: Connecting epistemological constructs with semiotic means and artefacts in different occasions

Every time we use slightly altered landmarks in order to refine teaching so as to achieve a schema closer to the ideal schema of MWS (fig.5). For doing so we have to alter our MTSK.

CONCLUSIONS

There's an open question of how a teacher can integrate tasks in the classroom progression in order to eliminate errors and obstacles to students concerning intensive quantities.

The answer to this question varies according to a series of parameters concerning the MTSK of the teachers in conjunction with the students' zone of proximal development, prior knowledge and alternative ideas.

The implementation of MWS model to designing a teaching sequence may prove adequate regarding intensive quantities though additional effort has to be made in order to scaffold the epistemological obstacles and connect them with students' misconceptions that create cognitive obstacles.

Obstacles that often reappear can be an indication that the design of a teaching sequence is inadequate. The teacher then has to make an additional effort to modify his MTSK in order for students to overcome these obstacles.

This procedure is not easy but it may be safe if we examine the falsifiable parts of the teaching sequence and try to eliminate errors as many times as needed.

Furthermore, a need occurs to scaffold the fibration between other domains of mathematics and ratios; domains such as probability and statistics in order to see how one affects the other. Also, sessions need to be adjusted according to different educational systems due to the differences of their curricula that form students' previous knowledge.

REFERENCES

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris, Librairie philosophique: Vrin, 1999 (1ère édition: 1938)

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., & Post, T. (1988). Rational Number Learning Aids: Transfer from continuous models to discrete models. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 10(4),* 1-17.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H.-G. Steiner (Ed.), *Theory of mathematics education: ICME 5 – topic area and miniconference: Adelaide, Australia*. Bielefeld, Germany: Institut fuer Didaktik der Mathematik der Universitaet Bielefeld.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muρoz-Catalan, M. C. (2013). *Mathematics teacher specializedknowledge.* Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey

Confrey, J., Maloney, A. P., Nguyen, K. H., Mojica, G., & Myers, M. (2009). Equipartitioning/splitting as a foundation of rational number reasoning using learning trajectories. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.345-352). Thessaloniki, Greece: PME.

Empson, S. B., Junk, D., Dominguez, H. Turner, E. (2006). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: A cross-sectional study of children's thinking. *Educational Studies in Mathematics, 63(1),* 1-28

Gagatsis, A. & Kyriakides, L. (2000). Teachers' Attitudes Towards Their Pupils'Mathematical Errors. *Educational Research and Evaluation, 2000, Vol. 6 (1)*,24–58

Harel, G., Behr, M., Post, T. & Lesh, R. (1994). Invariance of ratio: The case of children's anticipatory scheme of constancy of taste. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25(4), 324-345.

Howe, C, Jafri, S, Nunes, T & Bryant, P. (2004). Intensive quantities: why they matter to Mathematics education. Paper presented at *TLRP Annual Conference,* Cardiff, November 2004.

Howe, C., Nunes, T. & Bryant, P., (2011). Rational Number and Proportional Reasoning: Using Intensive Quantities to Promote Achievement in Mathematics and Science. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9,* 391 - 417

Kuhn, T. (1970). *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago: University of Chicago Press

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2015). Using the geometric working spaces to plan a coherent teaching of geometry. *Proceedings Cerme8. Praha.*

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et des sciences cognitives, 16, 9-24.*

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Troisième symposium Espace de travail mathématique,* 7-12.Leatham

Lakatos, I. (1970). *Science as Successful Prediction στο Musgrave, A. Lakatos, I. Criticism and the Growth of Knowledge.* Cambridge: Cambridge University Press

Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and instructional Strategies for Teachers*. New York and London: Routledge

Lobato, J., & Ellis, A. B. (2010). *Essential understandings: Ratios, proportions, and proportional reasoning*. In R. M. Zbiek (Series Ed.), Essential understandings. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mamede, E., Nunes, T., & Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 3.* (pp. 281-288). Melbourne: PME.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. London: Routledge Falmer.

Piaget J, Inhelder B. (1951/1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children*. New York, NY, US: Norton

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. London & New York: Routledge

Popper, K. (1972). *Objective Knowledge*. London: Clarendon Press

Post, T., Behr, M., Lesh, R., Wachsmuth, I. (1986). Selected Results from the Rational Number Project. In *Proceedings of Ninth Psychology of Mathematics Education Conference the Netherlands (pp. 342-351)*. International Group for the Psychology of Mathematics Education, ANTWERP The Netherlands.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understand-ing of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14,* 503–518.

Tanguay, D., Kuzniak, A., Gagatsis, A. (2014). The mathematical work and mathematical working spaces. Troisième symposium Espace de travail mathématique, 27-32.Leatham

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO EN EL ESTUDIO DE PROPIEDADES SINTÉTICAS Y ANALÍTICAS DE LA PARÁBOLA

Guerrero-Ortiz Carolina[1], Henríquez-Rivas Carolina[2]

[1]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso - Chile

[2]Universidad de La Frontera – Chile

c_cguerrero@yahoo.com, carolina.henriquez@pucv.cl

Presentamos una forma de abordar la enseñanza y aprendizaje de la parábola a partir de sus características matemáticas en el enfoque sintético. Con sustento en el constructo Espacio de Trabajo Matemático, proponemos un camino para orientar el quehacer didáctico del profesor favoreciendo los procesos de visualización y construcción en coordinación con razonamientos discursivos. Los resultados de esta investigación se proponen como aporte al trabajo del profesor y como un material de estudio para la formación de profesores, lo cual impacta en el quehacer didáctico del profesor y su práctica en el aula.

Palabras Claves: *Trabajo matemático, enfoque sintético, parábola, profesor*

INTRODUCCION

Con intención de favorecer el trabajo geométrico sintético, en esta investigación se aborda una problemática relacionada con la enseñanza y aprendizaje de la parábola. En el contexto de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), Kuzniak y Richard (2014) señalan que la información disponible para el profesor en la creación de su ETM *idóneo* privilegia los tratamientos algebraicos, lo cual favorece el plano vertical [*Sem-Ins*]. El estudio de Guerrero-Ortiz, Reyes-Rodríguez y Espinosa-Pérez (2015) reporta que la visualización de propiedades de la parábola estudiada en un enfoque sintético, puede apoyar en los estudiantes en el desarrollo de ideas geométricas relevantes para un trabajo matemático eficaz. No obstante, abordar el estudio de la parábola desde esta perspectiva requiere cuidado, pues como señalan Michael-Chrysanthu y Gagatsis (2014), la forma en que las figuras geométricas son usadas para resolver tareas geométricas puede estar influenciada por la ambigüedad que los estudiantes encuentran en las figuras. Una pregunta abierta, según estos autores, se dirige a indagar en el conocimiento del profesor relativo a las dificultades que esta ambigüedad en las figuras puede causar a los estudiantes.

Gómez-Chacón y Escribano (2014) identifican cómo los estudiantes exploran conceptos matemáticos a través de diferentes tipos de visualización relacionados con la idea de lugar geométrico. En este sentido, el trabajo de Guerrero-Ortiz, et al. (2015) sugiere que el estudio de lugares geométricos puede ser potenciado mediante la visualización de las propiedades sintéticas en las construcciones y el soporte de un software de geometría dinámica.

En relación al tránsito entre los enfoques sintético y analítico, la investigación de Henríquez-Rivas y Montoya-Delgadillo (2015) presenta un estudio al ETM *idóneo* del profesor de secundaria. Posteriormente, las autoras proponen una situación que favorece dicha actividad (Henríquez-Rivas & Montoya-Delgadillo, 2016).

Por otro lado, la revisión de libros de geometría analítica evidencia la enseñanza de las cónicas a través de la presentación de definiciones, sus representaciones en el sistema de coordenadas cartesianas y el trabajo algebraico (Lehmann, 1998; Efimov, 1971). Al estudiar la representación gráfica de la parábola se favorece la identificación del foco, vértice y directriz, dejando de lado sus características sintéticas.

El currículo de liceo chileno de formación general (Ministerio de Educación, 2009) no contempla las cónicas como lugar geométrico y sus propiedades. En el nivel de Tercero Medio (16 años) aparece el estudio de la parábola en la perspectiva de función cuadrática, con atención a la representación y análisis de su gráfica y elementos relevantes (intersecciones, vértices, ejes). El uso de software se sugiere para observar el efecto de la variación de los parámetros. La propuesta del currículo se refleja en el acercamiento que se da al estudio de la parábola en los libros de texto. Por ejemplo, Maregatti y Blumenthal (2015[1]) presentan la parábola en la Unidad Ecuaciones Cuadráticas y Función Cuadrática, dando prioridad al aprendizaje y manipulación de los elementos mostrados en la figura 1.

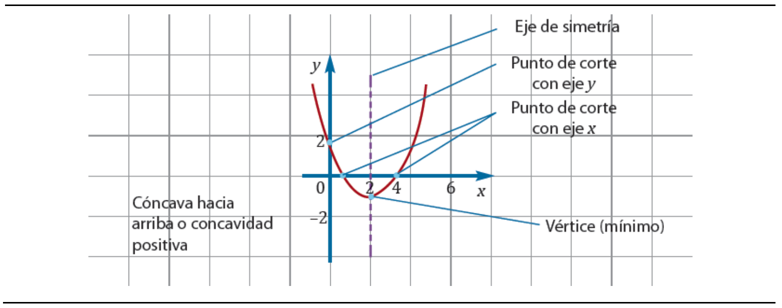


Figura 1: Estudio de la parábola y sus elementos (Maregatti & Blumenthal, 2015, p. 102)

Un *Objetivo Fundamental* del currículo propone estudiar la parábola para modelar situaciones; otro muestra la relación entre geometría cartesiana y figuras geométricas, y la intención por dar continuidad a estos enfoques geométricos. Sin embargo, el punto de vista sintético no es contemplado en la enseñanza de la parábola, aun cuando el currículo lo sugiere. Generalmente se favorece la manipulación algebraica, la visualización es asociada al trabajo en el sistema de coordenadas cartesianas y, en la perspectiva instrumental se favorece el uso de objetos como artefactos simbólicos; por ejemplo, vértice, determinante, raíces e incluso la expresión de segundo grado es asociada a la parábola para resolver problemas.

Dada la brecha existente entre el estudio de propiedades sintéticas y analíticas de las cónicas, nuestro objetivo es identificar y analizar una forma de favorecer los procesos de visualización, construcción y prueba asociados al estudio de la parábola, con la intención de aportar al desarrollo del ETM del profesor. Para ello consideramos características en el enfoque sintético y un posible camino para orientar el quehacer didáctico del profesor. Cabe señalar que, cuando aquí se habla de los enfoques sintético y analítico, se hace en el sentido de Klein (1908), es decir "Geometría sintética, aquella en la cual se estudian las figuras en sí mismas sin intervención alguna de fórmulas, mientras que en la analítica, estas se aplican constantemente mediante el uso de los sistemas de coordenadas" (p. 73).

En lo que sigue, presentamos un marco teórico para analizar el trabajo matemático del docente y proponer actividades para su trabajo en el aula.

MARCO TEÓRICO

Espacio de Trabajo Matemático y sus componentes

Esta investigación se sustenta en el marco *Espacio de Trabajo Matemático*, *ETM* (Kuzniak, 2011), en el dominio de la geometría (ETM_G), abarcando los enfoques con y sin coordenadas cartesianas. Asimismo, se consideran los aportes de Kuzniak y Richard (2014) relativos a los planos verticales, relacionando los planos epistemológico y cognitivo mediante la articulación entre las *génesis* en relación con una tarea específica. En el plano cognitivo las componentes son *visualización, construcción* y *prueba;* en el epistemológico, *representamen, artefactos* y *referencial*. Estas componentes se articulan mediante tres génesis: *semiótica, instrumental* y *discursiva*, y los planos verticales son: [*Sem-Ins*], [*Dis-Ins*] y [*Sem-Dis*].

En la *génesis semiótica*, el *representamen* está relacionado con la noción signo de Peirce (1978) y el enfoque semiótico de Duval (1995, 2005). Un signo remite a su objeto bajo un proceso semiótico, llamado *visualización*.

En la *génesis instrumental*, inspirada en la concepción de Rabardel (1995), la componente *artefactos* distingue entre un sistema material o simbólico empleado como un medio en el proceso de *construcción*.

La *génesis discursiva*, relacionada con la concepción de prueba de Balacheff (1987) y razonamiento de Duval (1995). La componente *referencial* remite a elementos de índole teórico y cómo estos se utilizan en un proceso de *prueba*.

Se identifican tres tipos de ETM: *de referencia*, *idóneo* y *personal*. El primero se encuentra asociado al espacio de trabajo "paradigmático" que orienta y estructura la organización de sus componentes. El segundo se organiza en una institución escolar dada para permitir a un alumno comprometerse en la resolución de un problema. Y cuando el problema se propone a un individuo el trabajo matemático esta asociado a su ETM *personal*. Como señalan Kuzniak y Richard (2014), en clase, el diseño del ETM *idóneo* depende del ETM *personal* del profesor. En esta investigación los análisis se dirigen al *ETM personal* del profesor, y se propone como aporte al ETM *idóneo* en el estudio de la parábola.

Espacio de Trabajo Geométrico y Paradigmas Geométricos

En el ETM_G es preciso aclarar algunas consideraciones:

- la *visualización* (Duval, 2005). Duval distingue dos modos de ver las formas (figuras geométricas o gráficos cartesianos), una funciona de manera *icónica*, asociada al reconocimiento de las formas. La otra de manera *no-icónica*, la cual implica la deconstrucción de las formas ya reconocidas visualmente.
- los *artefactos* (Rabardel, 1995). Pueden ser de origen *material*, como una regla, un compás o un software. O bien, pueden ser *simbólicos,* como algoritmos y rutinas, que permiten producir un resultado en un registro semiótico distinto al figural.
- la *prueba* (Balacheff, 1987). Se distingue entre *pragmáticas* e *intelectuales,* y una tipología propia para cada una de estas según el estatus de los conocimientos y la naturaleza de la justificación subyacente. Una prueba *pragmática* está asociada a la acción sobre los objetos y la justificación es a través de realizaciones materiales. Una prueba *intelectual* requiere el uso del lenguaje, la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos.

Houdement y Kuzniak (1999, 2006) identifican los *paradigmas geométricos*: *Geometría Natural* (GI), *Geometría Axiomática Natural* (GII) y *Geometría Axiomática Formal* (GIII). En el paradigma GI el trabajo geométrico se desarrolla sobre objetos reales, destaca la importancia de la aproximación y la medida, la fuente de validación es el mundo real y sensible. En el paradigma GII, los objetos geométricos son descritos por una propiedad y su definición, el razonamiento de validación esta fundado sobre leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático involucrado. El paradigma GIII es caracterizado por la separación entre la axiomática y la realidad, el razonamiento de validación es realizado a través del sistema axiomático formal del modelo subyacente.

Proponemos un aporte al ETM *idóneo,* a través del análisis de las *circulaciones* del ETM *personal* del profesor, con base en la afirmación de Kuzniak y Richard (2014), quienes mencionan que el diseño del ETM *idóneo* depende del ETM *personal* del profesor. Para ello mostramos el análisis de una propuesta que favorece la activación de las tres génesis, específicamente, el proceso de visualización *no-icónica* en coordinación con las génesis instrumental y discursiva, privilegiando los planos verticales [*Sem-Dis*] e [*Sem-Ins*], la componente referencial y el paradigma GII. Además, se identifican y analizan características sintéticas de la parábola.

METODOLOGÍA

La experimentación se desarrolló con tres profesores (P1, P2, P3) de Enseñanza Media, cuya experiencia docente es entre dos y cuatro años; uno de ellos realiza un postgrado en Didáctica de la Matemática. Esto se resume en la Tabla (1).

Experiencia (años)	Profesor	Formación de Postgrado
2	P1	Sí
3	P2	No
4	P3	No

Tabla 1: Profesores Participantes

Se trata de una investigación de corte cualitativo, específicamente *Estudio de Caso* (Stake, 1999), pues permite analizar en detalle el ETM *personal* de los participantes. Se propuso a los profesores resolver una situación que consta de dos actividades. Los participantes trabajaron individualmente con el uso de artefactos como regla y compás o software geométrico (GeoGebra), la elección de éstos quedó a su voluntad. Las respuestas fueron entregadas en versión lápiz y papel. Dos participantes utilizaron tecnología y nos proporcionaron sus construcciones digitales.

Presentamos el análisis del ETM *personal* de uno de los participantes (P2). Consideramos su trabajo por la claridad exhibida en su producción y la información que aporta en el estudio del ETM. Además, destacamos su disposición para responder a nuestros cuestionamientos y ampliar la información proporcionada. Su trabajo se caracteriza por presentar de forma detallada el proceso de solución y por utilizar de manera coordinada artefactos tradicionales y tecnología, tales como regla, compás y un software geométrico en la justificación de sus conclusiones. En relación al uso del software, P2 a diferencia de P1 y P3, utiliza además la herramienta "Rastro" como elemento de validación en el proceso de construcción (actividad 1). Particularmente, P2 responde según lo esperado en términos del ETM, es decir, emplea la componente referencial en la construcción geométrica (actividad 1) y en el trabajo discursivo de la prueba (actividad 2).

La situación implementada consta de dos actividades:

- *Actividad 1.*

Dado el foco **F** y el vértice **V** de una parábola, construir usando regla y compás:
a) el eje de la parábola
b) la directriz de la parábola
c) la parábola
En cada caso explica la construcción identificando definiciones y propiedades matemáticas.

Figura 2: Actividad 1

Prescinde de una figura puesto que el enunciado la describe, privilegia el plano vertical [*Sem-Ins*], en el cual la visualización *no-icónica* es del tipo *constructeur* (Duval, 2005) y demanda el uso de artefactos. Además, activa el plano [*Ins-Dis*] en la explicación de la construcción. El paradigma geométrico GII es más evidente; sin embargo, aparecen elementos de GI asociados al uso de los artefactos materiales, lo que denominamos GII/gI, similar al trabajo de Goméz-Chacón y Kuzniak

(2011) que muestra el paso de GI a GII a través de una tarea. El propósito aquí es movilizar la definición de parábola y sus elementos, puesto que en la siguiente actividad serán requeridos.

- *Actividad 2*.

En la siguiente figura, la recta **m** es directriz de la parábola **c**, la recta **d** es su eje focal, **A** es el foco y **E** su vértice. La recta **b** es tangente a la parábola en el punto **D**, la recta **l** es paralela a la directriz y pasa por E, y la recta **f** pasa por D y es perpendicular a la directriz.

Probar que:

a) el punto **H** es punto medio del segmento **AG**
b) el punto **H** es punto medio del segmentos **EJ**
c) la recta **b** bisecta al ángulo ADG

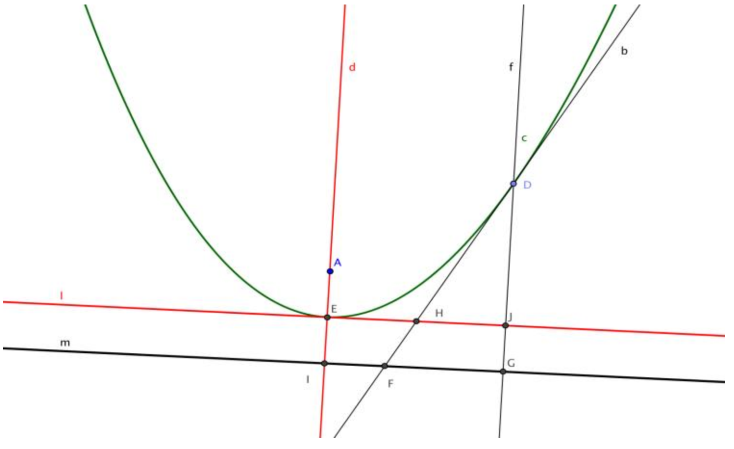


Figura 3: Actividad 2

Para dar continuidad al trabajo sintético anterior y favorecer el proceso de prueba, se presentó una figura y el enunciado que describía sus características. El objetivo es determinar propiedades de las figuras planas que se pueden asociar a la parábola y la recta tangente a ella y, además, favorecer la visualización de elementos como segmentos, ángulos y triángulos congruentes, en coordinación con los razonamientos discursivos. En este caso se privilegia el plano vertical [*Sem-Dis*], específicamente la visualización no-icónica del tipo *inventeur-bricoleur* (Duval, 2005) y el empleo de los elementos necesarios de la componente referencial en un discurso que demanda la prueba. En esta actividad el paradigma que se privilegia es GII.

En ambos casos se enfatiza la componente referencial. Cabe destacar que evitamos la solución con casos particulares o ejemplos *prototípicos* (Schwarz & Hershkowitz, 1999) de la parábola asociados a su presentación con coordenadas. Consideramos relevante determinar propiedades de los objetos matemáticos en un ambiente de geometría dinámica, razón por la cual observamos el uso que los participantes dan al software como medio de apoyo en la identificación de propiedades sintéticas.

En lo que sigue, presentamos el análisis a priori para cada actividad.

UNA CONTRIBUCIÓN AL ETM$_G$ IDÓNEO

Presentamos dos actividades relativas a la enseñanza de la parábola y mostramos una estrategia para cada actividad basada en los fundamentos del ETM y sus componentes, lo cual favorece ciertas circulaciones específicas en cada una.

Actividad 1

La *Actividad 1* (Figura 2) pretende que los profesores utilicen nociones de la geometría euclidiana para construir la parábola; por ejemplo: el primer postulado de Euclides, simetría central y perpendicularidad, la parábola como lugar geométrico y la mediatriz. A través de la definición de mediatriz y perpendicularidad se construyen algunos puntos que pertenecen a la parábola, y al repetir secuencialmente este procedimiento es posible re-construir geométricamente la definición de parábola como lugar geométrico.

Un camino de solución

La construcción del eje y directriz de la parábola se describe desde la perspectiva teórica: por postulado de Euclides se determina el eje de la parábola, llamémosle a (Figura 4a). Luego, por reflexión del foco F con respecto a V se determina el punto F’, puede trazarse una circunferencia con centro V y radio $\overline{VF}$, como muestra la Figura (4b). La directriz será la recta d perpendicular a la recta a en F’, construida usando artefactos materiales (Figura 4c). En esta fase del trabajo se privilegia el plano [*Sem-Ins*], además, esta construcción requiere nociones auxiliares como perpendicularidad, circunferencia y mediatriz que darán lugar a la configuración geométrica solicitada. Estas nociones activan la componente referencial.

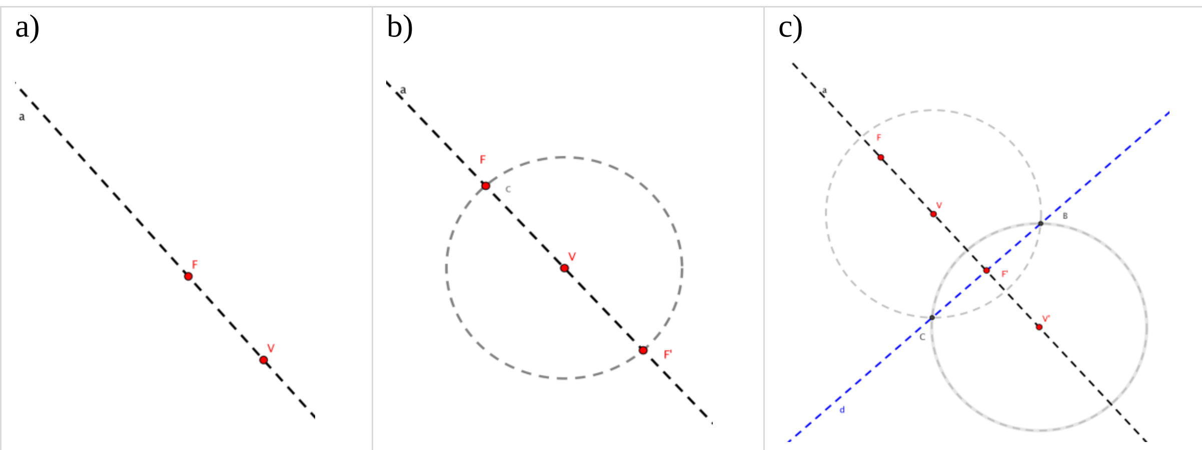


Figura 4: Fases en la construcción de eje y directriz (d) de la parábola

Para la construcción de la parábola se considera un punto D sobre la directriz d. Desde el punto D al foco F se traza un segmento. Luego se traza la recta b, mediatriz de este segmento. Asimismo, se traza la recta h perpendicular a la directriz en D. En la Figura (5) se ilustran los objetos auxiliares utilizados. En esta etapa, el plano [*Sem- Ins*] es privilegiado mediante el uso de artefactos como regla y compás para la construcción.

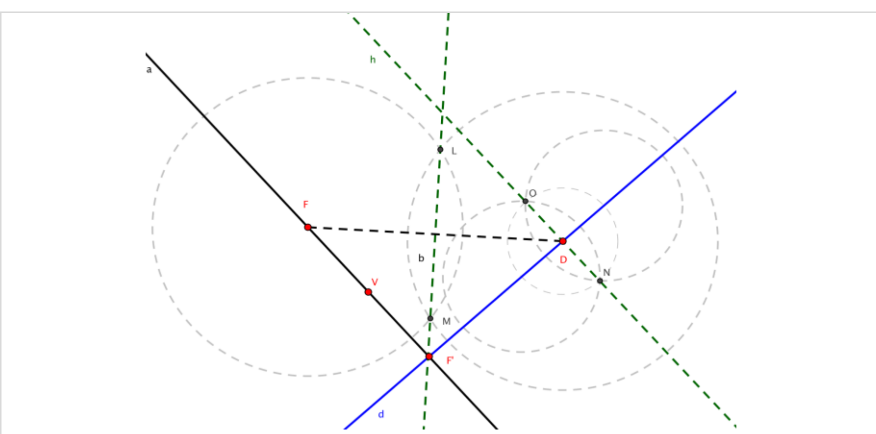


Figura 5: Fase en la construcción de la parábola

Luego se determina el punto de intersección P de la mediatriz del segmento (recta b) y la recta h. El punto P constituye un punto de la parábola, puesto que por definición de mediatriz el punto P equidista de F y D. La repetición de este proceso nos lleva a obtener diferentes puntos de la parábola (Figura 6).

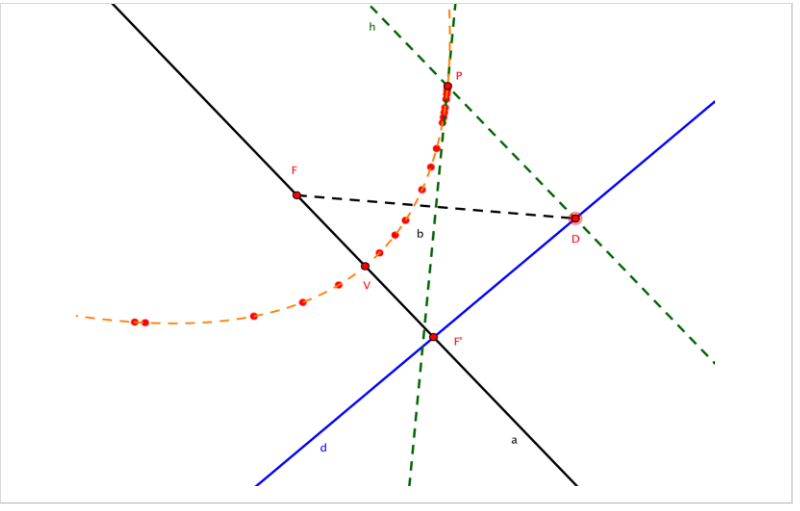


Figura 6: Construcción de la parábola

En este caso, además de conocer la definición de parábola como lugar geométrico, otros elementos de la componente referencial deben ser articulados en el proceso de construcción, como la definición de mediatriz. La circunferencia tiene un rol de mediador en el proceso de construcción de la parábola, por ello puede ser considerada como un *instrumento simbólico*.

Por otro lado, en esta construcción se evidencia el proceso de visualización no-icónica del tipo *constructeur* (Duval, 2005), como una secuencia articulada y organizada de pasos. Un aspecto relevante de esta construcción es que la configuración final de la parábola requiere articular una serie de construcciones que pueden ser vistas como una deconstrucción de la figura (Duval, 2005), de las cuales el individuo puede ser o no consciente.

Destacamos que la actividad requiere enunciar las propiedades y definiciones que demanda la visualización de la figura, para representar o construir los objetos solicitados, es decir, las características de la expansión discursiva corresponden a los de una *explicación* (Duval, 1992-1993, 1995). Esto apoya la idea de la caracterización del paradigma GII/gI en la actividad; si bien GII es más evidente puesto que los artefactos son empleados para realizar construcción geométrica (no para medir), requiere elementos del referencial y la visualización implica la deconstrucción de la figura, también aparecen elementos de GI asociados a la génesis discursiva que demanda la *explicación*.

Actividad 2

En esta actividad (Figura 3) el trabajo de los participantes se enfoca en la identificación de propiedades sintéticas de las figuras planas que se pueden asociar a la figura dada. Se ponen en juego conocimientos como: congruencia y semejanza de triángulos, teorema de Tales, paralelismo, perpendicularidad y correspondencia entre ángulos. Estos conocimientos son organizados para desarrollar un razonamiento discursivo, lo cual requiere de una deconstrucción figural y añadir trazos suplementarios con el fin de analizar localmente la figura para reconocer y conectar propiedades geométricas en la organización de los pasos deductivos del razonamiento.

Un camino de solución

A continuación, presentamos un camino para la demostración en cada caso.

a) Por demostrar. H punto medio de $\overline{AG}$

Como A es el foco e I es la intersección entre el eje focal y la directriz, se tiene que el vértice E es punto medio de $\overline{AI}$, entonces $\overline{AE} \cong \overline{EI}$.

Luego, las rectas l y m son paralelas por hipótesis. Entonces, por teorema de Tales se tiene que los lados correspondientes de los triángulos AIG y AEH son proporcionales y dado que $\overline{AE} \cong \overline{EI}$, la razón es $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, H es punto medio de $\overline{AG}$.[1]

b) Por demostrar. $\Delta AEH \cong \Delta GJH$

De la demostración anterior tenemos que $\overline{AH} \cong \overline{HG}$. Como E es punto medio de $\overline{AI}$, y las rectas l y m son paralelas (por hipótesis), se tiene que $\overline{AE} \cong \overline{GJ}$. Además, de la figura y los datos proporcionados, los triángulos AEH y GJH son rectángulos en E y J, respectivamente, y los ángulos EHA y GHJ son opuestos por el vértice, entonces se tiene que los ángulos EAH y HGJ tienen igual medida (el complemento de los ángulos opuestos por el vértice EHA y GHJ).

Así, por criterio de congruencia de triángulos (ángulo-lado-ángulo), los triángulos AEH y GIH son congruentes. Por lo tanto, H es punto medio de $\overline{EJ}$.

c) Por demostrar. Recta tangente b es bisectriz del ángulo ADG

$\overline{AH} \cong \overline{HG}$por (a), luego$\overline{AD} \cong \overline{DG}$ por definición de parábola como lugar geométrico. Y $\overline{HD}$ es lado común de los triángulos AHD y GHD. Entonces los triángulos AHD y GHD son congruentes, por criterio de congruencia (lado, lado, lado). Por lo tanto, los ángulos ADH y GDH son congruentes.

Desde la perspectiva teórica, notamos que en los tres casos anteriores (a, b, c) el plano privilegiado es [*Sem-Dis*], ya que los razonamientos deductivos son desarrollados en coordinación con la visualización de la figura dada. Destacamos que el proceso de visualización demanda *deconstruir* la figura y relacionar la información obtenida con los elementos del referencial (teoremas de congruencia, definición parábola, semejanza de triángulos, entre otros) para ponerlos en coordinación con el razonamiento deductivo. Es decir, existe una interrelación entre los procesos de visualización y de prueba. En este caso, el proceso de prueba es del tipo intelectual, específicamente, una demostración (Balacheff, 1987). Se privilegia el paradigma GII, pues se trata de un razonamiento deductivo, el cual requiere propiedades y definiciones (en el dominio de geometría euclidiana).

Síntesis de la circulación en el ETM$_G$ según las actividades

Las circulaciones anteriormente descritas (a priori) se sintetizan en las Figuras (7 y 8).

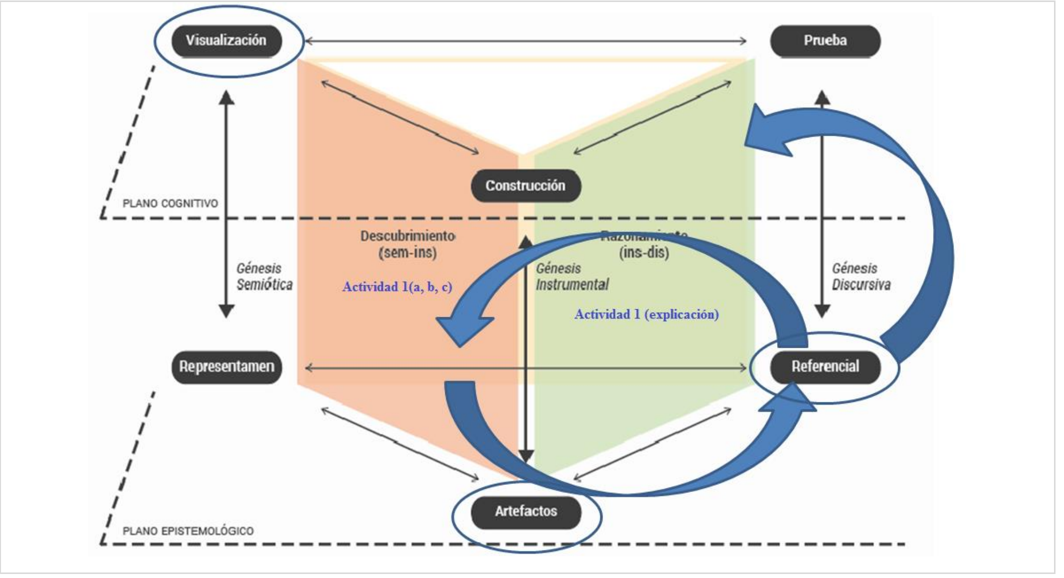


Figura 7: Circulación del ETM$_G$ según Actividad 1

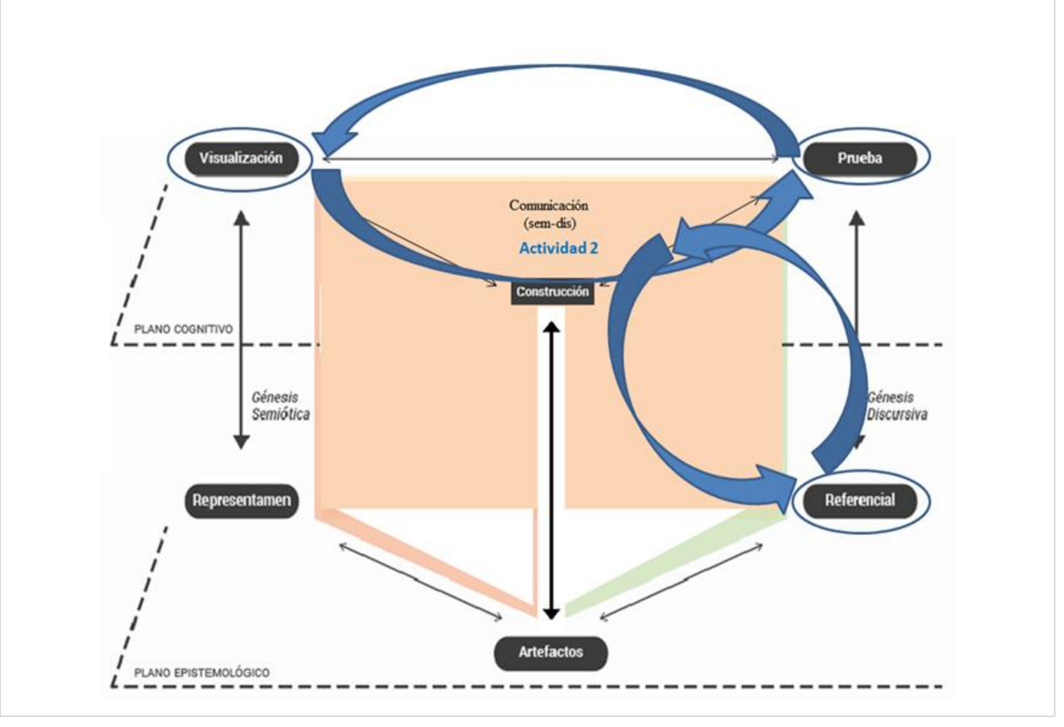


Figura 8: Circulaciones del ETM$_G$ según Actividad 2

La situación activa la circulación en los tres planos verticales; la actividad 1 los planos [*Sem-Ins*] e [*Ins-Dis*], y la actividad 2 el plano [*Sem-Dis*]. En ambos casos, la componente referencial es fundamental para permitir esta circulación entre las génesis. En la actividad 1, los procesos de visualización y de construcción son los más privilegiados. En la actividad 2 se favorece el proceso de prueba en coordinación con la visualización.

ANÁLISIS DE DATOS

Presentamos el análisis al ETM$_G$ *personal* desarrollado por P2 en las actividades 1 y 2.

Actividad 1

En la actividad 1, P2 declara haber utilizado GeoGebra como un medio para dar dinamismo inicialmente a los objetos matemáticos en la construcción, señala:

P2: “me era más fácil porque podía animar, hice la construcción de una parábola dado el foco y la directriz en GeoGebra, […], animé el punto que generaba la parábola, en el papel hice sólo algunos casos pero copiando el procedimiento de GeoGebra. Partí con GeoGebra porque podía activar el rastro del punto”.

Al observar el *protocolo de construcción* proporcionado por el programa, se identifica que P2 sigue un procedimiento similar al que señalamos en el análisis a priori de esta tarea. A diferencia de lo que nosotros mostramos, aquí cambia el estatus del uso de los objetos matemáticos, debido a que en la construcción con GeoGebra (Figura 9) ciertos objetos son usados como una herramienta en el procedimiento de construcción, ya *instrumentalizados* (Trouche, 2002); por ejemplo, mediatriz, recta perpendicular e intersección. Mientras que en el trabajo con lápiz y papel, la circunferencia toma relevancia siendo usada como un *instrumento* en la construcción de dichos objetos.

El uso del software permite contemplar herramientas como “Rastro” y procesos que no habíamos considerado inicialmente. Esta acción, según P2, le facilitó realizar la construcción con regla y compás, pues ya tenía una noción del procedimiento a seguir. Además, se puede observar que con el uso de “Rastro” emerge la validación empírica a medida que P2 obtiene puntos adicionales de la parábola, favoreciendo de esta manera una forma de *prueba pragmática* (Balacheff, 1987) apoyada en el reconocimiento de la construcción obtenida. No observamos elementos del referencial involucrados (aludidos) en la validación, lo que podría deberse a que P2 ha interiorizado las características de los objetos matemáticos involucrados en esta tarea.

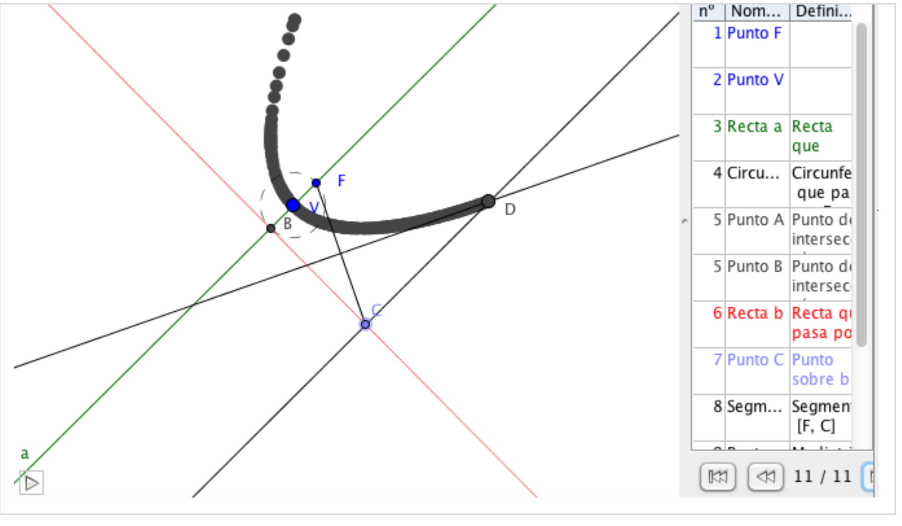


Figura 9: Construcción de P2 usando GeoGebra

En el trabajo con regla y compás, como P2 afirmó anteriormente, reproduce la construcción realizada con GeoGebra para cinco puntos pertenecientes a la parábola. Notamos que al explicar su construcción –plano [*Ins-Dis*]– identifica la propiedad de simetría que posee la parábola, pero de acuerdo a la construcción realizada, los puntos de la parábola fueron obtenidos por construcción (y no por simetría), tal como se observa en la Figura (10).

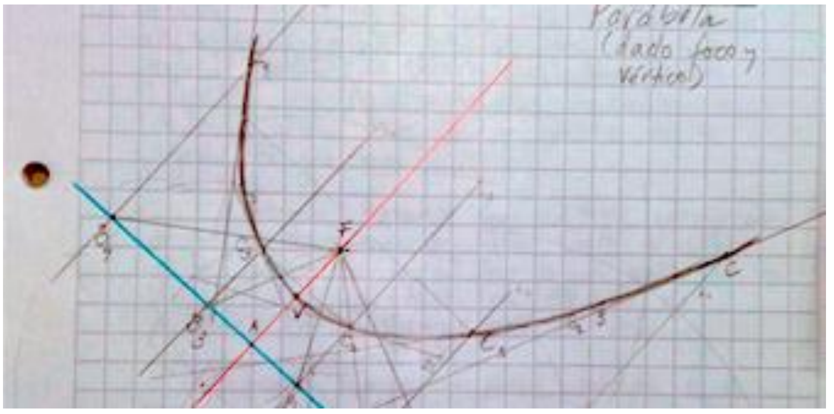


Figura 10: Construcción de la parábola por P2 usando regla y compás

Por último, destacamos la activación de los planos [*Sem-Ins*] e [*Ins-Dis*], como lo habíamos previsto en la construcción con regla y compás. Notamos que el ETM$_G$ *personal* de P2 se caracteriza inicialmente por la activación del plano [*Sem-Ins*] y, luego, la génesis discursiva al usar el software y la herramienta “Rastro” en la validación empírica. En este sentido, la validación se determina por lo que P2 *ve* de su construcción con la herramienta “Rastro”.

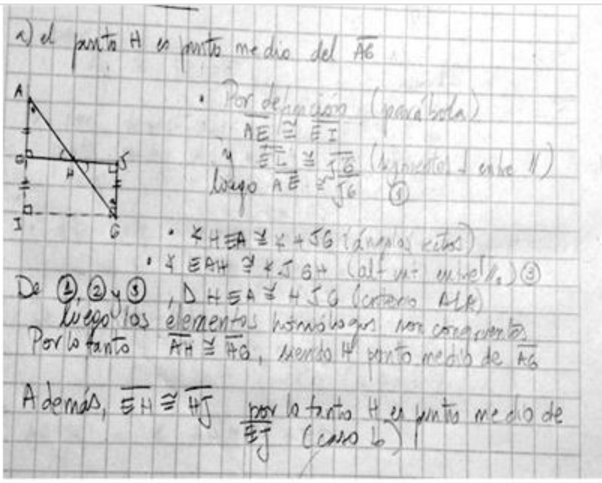
Asociamos al paradigma GI la descripción de los pasos realizados, justificados con lo que *ve* de la construcción. Adicionalmente, notamos que en la construcción emplea regla no graduada y compás, y la definición de parábola como lugar geométrico, identificando también la simetría en los puntos de la parábola; elementos que vinculamos con GII.

Actividad 2

Aquí P2 declara no haber empleado el software. Si bien P2 demuestra una organización deductiva distinta al a priori, es válida en términos de su valor epistémico teórico (Duval, 1995), mostrando un encadenamiento de pasos en el razonamiento deductivo. Desde el punto de vista de Balacheff (1987) se trata de una prueba intelectual del tipo demostración.

Específicamente en el caso del punto a), la demostración se realiza utilizando el criterio de congruencia ángulo-lado-ángulo, haciendo referencia a la relación de ángulos entre rectas paralelas y a la información que le ofrece la definición de parábola sobre la congruencia de los segmentos determinados por el foco, el vértice y el punto de intersección entre el eje focal y la directriz.

En el punto b) responde por deducción de la congruencia demostrada anteriormente. Adicionalmente plantea una demostración alternativa, por el mismo criterio anterior, pero empleando otros elementos del triángulo. Esta demostración se muestra en la siguiente Figura (11).



Por definición (parábola)

$\overline{AE} \cong \overline{EI}$

y $\overline{EI} \cong \overline{JG}$ (por segmentos perpendiculares entre paralelas)

luego $\overline{AE} \cong \overline{JG}$ (1)

$\sphericalangle HEA \cong \sphericalangle HJG$ (ángulos rectos) (2)

$\sphericalangle EAH \cong \sphericalangle JGH$ (alterno interno entre paralelas) (3)

de (1), (2) y (3), $\Delta HEA \cong \Delta HJG$ (criterio ALA), luego los elementos son congruentes.

Por lo tanto $\overline{AH} \cong \overline{HG}$, siendo H punto medio de $\overline{AG}$.

Además, $\overline{EH} \cong \overline{HJ}$ por lo tanto H es punto medio de $\overline{EJ}$ (caso b)

Figura 11: Demostración por P2 de los puntos a) y b)

En el punto c), P2 realiza una demostración similar a la planteada en nuestro análisis. Es decir, que por el criterio de congruencia de triángulos (lado-lado-lado) prueba lo que hemos demandado. Además, en uno de los pasos de su razonamiento utiliza la definición de parábola como lugar geométrico, identificando la congruencia entre los segmentos AD y DG.

En esta actividad, el plano privilegiado por P2 es el [*Sem-Dis*] en el cual la visualización (no-icónica) es coordinada con la prueba (intelectual), y activa en cada paso del razonamiento discursivo elementos del referencial, como la definición de parábola y la congruencia de triángulos. Cabe destacar que el ETM_G *personal* de P2 en términos de visualización es no-icónica del tipo *inventeur-bricoleur*, y si bien no fue preciso añadir trazos auxiliares a la figura de partida, requiere la deconstrucción dimensional en coordinación con el trabajo discursivo de la prueba. El trabajo de P2 privilegia el paradigma GII, pues los elementos del referencial (por ejemplo, teoremas de congruencia) empleados en coordinación con la visualización, son organizados en una *axiomatización parcial* (Houdement & Kuzniak, 2006) en el razonamiento deductivo, y no requiere ni se emplea la completitud del sistema de axiomas.

CONCLUSIONES

Mostramos un camino en el cual a través de la solución de tareas es posible activar ciertas génesis del ETM y articularlas para proponer las circulaciones mostradas en las Figuras 7 y 8. Nuestra propuesta explora en la parábola, un objeto que usualmente se estudia en el enfoque analítico, algunas características y propiedades del trabajo geométrico sintético. Es decir, damos relevancia a la construcción y análisis de las figuras, pues nos parece particularmente importante activar procesos de visualización como una manera de favorecer el estudio en el enfoque sintético de la parábola y complementar con el tratamiento analítico usual.

Nuestra propuesta privilegia una forma de visualizar que coordina la construcción instrumental y la deconstrucción dimensional de una figura en coordinación con los razonamientos discursivos. Para el logro de este propósito, el cual implica la articulación entre las génesis y diversas fases en el proceso cognitivo del individuo, es necesario planificar una secuencia de tareas que permitan conectar diferentes fases de trabajo asociado con aspectos epistemológicos y cognitivos; en este caso las actividades 1 y 2.

La situación que hemos propuesto y los análisis presentados, sustentados en el ETM, nos permiten hacer explícita una síntesis como se muestra en la siguiente Tabla (2).

	ACTIVIDAD 1		ACTIVIDAD 2	
Génesis	**Esperado**	**Observado**	**Esperado**	**Observado**
Paradigmas Geométricos	GII/gI	GII/gI	GII	GII
Génesis Semiótica	Visualización no-icónica (Constructeur)	Del mismo tipo	Visualización no-icónica (Inventeur-bricoleur)	Del mismo tipo
Génesis instrumental	Artefacto material (Regla y compás)	Adicionalmente uso de software para validar con herramienta "Rastro"	Artefacto material (no se observa) Artefacto Simbólicos (En la expansión Discursiva)	Uso de artefactos simbólicos para demostrar
Génesis Discursiva	Explicativa	Explicativa apoyada en la validación de tipo prueba pragmática	Demostración	Demostración
Circulación favorecida	[Sem-Ins]↔Referencial→ [Ins-Dis]	[Sem-Ins] → Génesis Discursiva ↔[Sem-Ins] →Referencial → [Ins-Dis]	[Sem-Dis] ↔Referencial	[Sem-Dis] ↔Referencial
Componentes privilegiadas	Visualización, Artefactos (material y simbólico) y Referencial	Regla, compás, y software como artefactos materiales. Circunferencia y mediatriz como artefactos simbólicos.	Visualización, Referencial y Prueba	Del mismo tipo

Tabla 2: Síntesis de los análisis a priori y resultados obtenidos por P2

En la tabla se resume el trabajo esperado según los análisis a priori y los resultados obtenidos de la experimentación para el caso de P2. Si bien, se trata del análisis de un caso, este es realizado en profundidad y nos ha permitido reflexionar sobre aspectos que podrían ser relevantes en futuras investigaciones en el marco del *Espacio de Trabajo Matemático*. Uno de estos, tiene relación con la componente *Artefacto*, asociado con el cambio de estatus cuando se usa en una construcción geométrica, o bien cuando se usa como una herramienta proporcionada por el software. En este último, cuestionamos el hecho que no es del todo evidente el conocimiento que posee el usuario de los objetos matemáticos involucrados; por ejemplo, la construcción geométrica de una mediatriz y el uso de la herramienta "mediatriz" con el software.

Los resultados del ETM *personal* analizado, nos sugieren que la herramienta "Rastro" debería ser mejor explorada para favorecer una circulación (más) dinámica apoyada en la componente visualización y el plano [*Sem-Dis*].

Otro aspecto relevante se vincula con la componente *referencial*, pues como se evidenció en los resultados de los análisis a priori y los resultados de P2, esta juega un papel fundamental actuando como puente en la articulación entre planos verticales y/o génesis del ETM asociado a una tarea específica. Asimismo, del análisis a la actividad 2, basada en la visualización no-icónica (*inventeur-bricoleur*) que coordina la deconstrucción dimensional y razonamiento discursivo, rescatamos la importancia de ampliar el estudio a tareas que, además de involucrar esta forma de visualización, consideren también el uso de trazos suplementarios más complejos en la figura de partida que demanden una deconstrucción visual y una reorganización, lo cual constituye un avance importante en términos de demanda cognitiva.

Desde la perspectiva de los paradigmas geométricos, en la actividad 1 identificamos elementos de los paradigmas GI y GII, siendo GII el más destacado por involucrar el uso de artefactos en la realización de una construcción geométrica; por ejemplo, la regla no graduada. Adicionalmente, elementos del referencial que se precisan necesarios en la construcción. Aquí un análisis superficial podría situar el trabajo solo en GII; sin embargo, las características de la expansión discursiva en ambas actividades, nos llevan a considerar GI (lo denominamos GII/gI). Es decir, esta tarea exige un discurso basado en una explicación y no en un razonamiento deductivo como es el caso de la actividad 2. Esto constituye una gran diferencia en términos del razonamiento, puesto que el rol de una explicación y de una demostración obedecen a una organización discursiva distinta en términos de demanda cognitiva. En este sentido, la explicación no tiene como propósito modificar el valor epistémico del enunciado-objeto, sino que aporta y enriquece con elementos propios en la descripción de la construcción; mientras que en un razonamiento es requerida la organización discursiva de los pasos (Duval, 1995).

Finalmente, consideramos que la situación analizada puede ser empleada como un insumo de estudio para la formación (inicial y continua) de profesores de matemática. Por otra parte, estos análisis proporcionan información teórica especializada en el marco del ETM, que ayuda a orientar y proporcionar herramientas para el quehacer del profesor en el aula. Los elementos presentados en el estudio de caso, contribuyen al análisis y caracterización del ETM *personal* del profesor y, tienen el propósito posterior de contribuir e impactar sobre su trabajo didáctico, el ETM *idóneo,* en el contexto específico del estudio de la parábola. La investigación se propone como un ejercicio de reflexión que relaciona el ETM *personal* del profesor para incidir en su ETM *idóneo*.

Se vislumbra una posible investigación para profundizar en los análisis del ETM, específicamente sobre procesos de visualización y génesis instrumental, que relaciona el carácter dinámico con las aproximaciones sintética y analítica.

Reconocimientos:

[1]Conicyt/Fondecyt/Postdoctorado, No. 3150317.

[2]Beca Postdoctoral PUCV otorgada durante el 2015, en la primera etapa de este trabajo.

NOTAS

1. Reimpresión del año anterior. Revisado en http://www.textosescolares.cl/ el 11-01- 2016.

2. Para demostrar que los puntos A, H y G son colineales basta considerar la recta GH y un punto exterior a dicha recta, en este caso D. Y se debe demostrar que el segmento AD tiene igual medida que el segmento AD', donde D' se determina por la intersección del eje focal y la recta tangente dada.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics, 18*(2), 147-176.

Efimov, N. (1971). *Curso breve de Geometría Analítica*. Moscú: Editorial Paz.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, demontrer, expliquer : Continuite ou rupture cognitive? *Petit X, 31*, 37-61.

Duval, R. (2005). Les ConditionsCognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Functionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Gómez-Chacón, I. & Escribano, J. (2014). Geometric locus activities in a dynamic geometry system. Non-Iconic visualization and Instrumental Génesis. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, (4-II), 361-383.

Gómez-Chacón, I. & Kuzniak, A. (2011). Les espaces de travail géométrique de futurs professeurs en contexte de connaissances technologiques et professionnelles. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 187-216.

Guerrero-Ortiz, C., Reyes-Rodríguez, A. & Espinosa-Pérez, H. (2015). Integrating Synthetic and Analytical Aspects of Geometry Through Solving Problems Using a DGS, In Lorna Uden, Dario Liberona, Tatjana Welzer (Eds.), *Communications in Computer and Information Science. Springer International Publishing.* Switzerland, 283-297.

Henríquez-Rivas, C. □ Montoya-Delgadillo, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 51-70.

Henríquez-Rivas, C. □ Montoya-Delgadillo, E. (2016). El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el liceo. *Boletim de Educação Matemática, 30*(54), 45-66.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics, 40*, 283-312.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Klein, F. (1908). *Matemática elemental desde un punto de vista superior: Geometría* vol. 2. Traducción de R. Fontanilla. Madrid, España: Biblioteca Matemática.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16,* 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*(4-I), 5-15.

Lehmann, C. (1989). *Geometría Analítica*. México D.F : Limusa.

Maregatti, O. & Blumenthal, V. (2014). *Matemática 3º Medio.* Santiago: Editorial Cal y Canto.

Michael-Chrysanthu, A. & Gagatsis, A. (2014). Ambiguity in theway of looking at geometrical figures. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17* (4-I), 165-179.

Ministerio de Educación. (2009). Matemática: Formación general. En *Currículum. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media. Actualización 2009* (pp. 145-194). Santiago: Autor.

Ministerio de Educación. (2015). *Programa de Estudio Matemática. Tercer Año Medio. Actualización 2009* (pp. 145-194). Santiago: Autor.

Peirce, C. (1978).*Ecrits sur le signe.* Paris, France: Seuil.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, France: Armand Colin.

Schwarz, B. & Hershkowitz, R. (1999). "Prototypes: Brakes or Levers in Learning the Function Concept? The Role of Computer Tools", *Journal for Research Mathematics Education*, *30*(4), 362-389.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Trouche, L. (2002). Une aproche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin & L. Trouche (Eds.), *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil du travail informatique: un problème didactique* (pp.187-214). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

REFLEXIÓN SOBRE ALGUNOS ELEMENTOS QUE POSIBILITAN LA ARTICULACIÓN DE LOS MODELOS ETM Y MTSK EN TAREAS SOBRE EL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Gonzalo Espinoza-Vásquez

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

gonzalo.espinoza.v@gmail.com

El presente trabajo aborda la identificación de elementos que posibilitan la articulación entre los modelos Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge - MTSK). A través del análisis de episodios de clases donde se trata el concepto de función, se proporcionan y se discuten ejemplos de planteamiento y/o realización de una tarea matemática por parte del profesor en los cuales es posible observar la articulación entre ambos modelos. Se concluye con una tabla donde se presentan las relaciones encontradas entre los subdominios del MTSK y los componentes del ETM.

Palabras Claves*: complementariedad teórica, articulación ETM-MTSK, conocimiento especializado, concepto de función, profesor de matemáticas*

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con Godino et al. (2013), la comparación y articulación de marcos teóricos se hace relevante para explotar la diversidad teórica como una fuente de enriquecimiento, considerando esta diversidad como un desafío y punto de partida para impulsar el desarrollo teórico mediante la articulación de teorías. El paradigma "networking of theories" ha experimentado un importante auge en los últimos años (e.g. Sriraman & English, 2005; García & Wake, 2010) inspirando investigaciones sobre diferentes modos de establecer conexiones entre teorías (e.g. Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2010; Trigueros, Bosch, & Gascón, 2011) a partir de los tipos de problemas, relaciones entre los componentes teóricos o metodológicos. En este escrito se pretende indagar en la relación entre ETM y MTSK mediante la coordinación entre elementos de cada modelo al analizar una porción de datos, como lo proponen Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010).

Reconociendo la relevancia de estas conexiones, se consideran dos temáticas que quedaron abiertas en el pasado Simposio ETM4: la dialéctica entre los modelos ETM (Kuzniak, 2011) y MTSK (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013), y el rol del profesor en cada uno de los modelos como articulador de ambos (Gómez-Chacón, Escribano, Kuzniak, & Richard, 2015). Asimismo, las discusiones sobre los trabajos presentados en ese Simposio pusieron de relieve la potencialidad del conocimiento especializado del profesor para profundizar en el estudio de su ETM idóneo y personal (Gómez-Chacón, Romero, & Carrillo, 2015). De esta forma, se vuelve interesante observar el quehacer de un profesor en el aula desde la perspectiva de cada modelo para abordar las dos temáticas señaladas. De acuerdo con estas consideraciones, el objetivo de este trabajo es identificar algunas relaciones entre los componentes del ETM y los subdominios del MTSK, teniendo como foco de atención al profesor y su conocimiento especializado sobre el concepto de función. La elección de observar el conocimiento del profesor sobre el concepto de función se basa, principalmente, en que este escrito se enmarca en el desarrollo de un trabajo doctoral que

MARCO TEORICO

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas

Inspirado en modelos del conocimiento del profesor (e.g. Rowland, Turner, Thwaites, & Huckstep, 2009; Kilpatrick, Blume, & Allen, 2006) y principalmente a partir de las reflexiones sobre las potencialidades y dificultades de la aplicación del modelo de Ball, Thames, y Phelps (2008), el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas - MTSK (Figura 1) surge como un modelo analítico para el conocimiento que el profesor de matemática muestra, posee o declara (Carrillo et al., 2013). Este modelo constituye una herramienta para la interpretación y análisis del conocimiento del profesor considerando dos dominios: conocimiento matemático (Mathematical Knowledge - MK) y conocimiento didáctico del contenido (Pedagogical Content Knowledge - PCK).

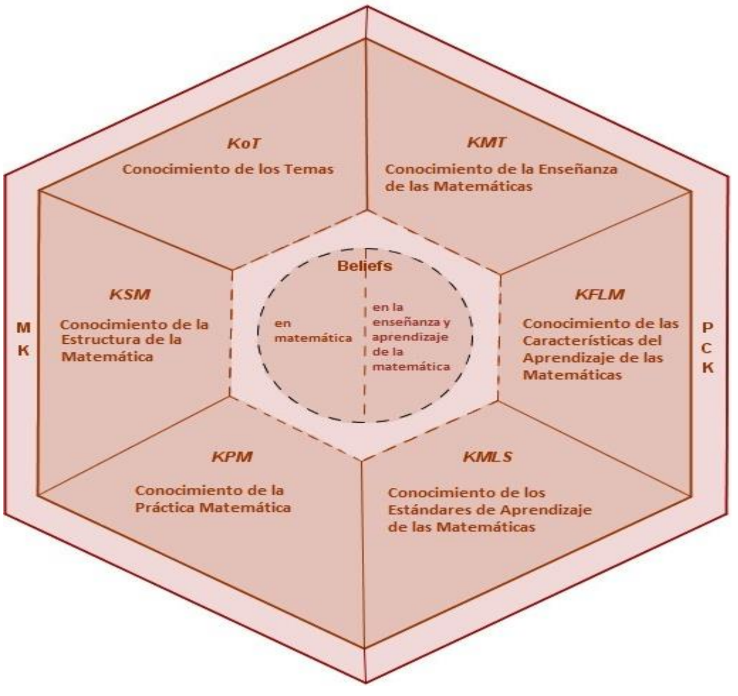


Figura 1: Subdominios del MTSK (Carrillo et al., 2013)

El MK corresponde a los conocimientos disciplinares y está dividido en los siguientes subdominios:

Conocimiento de los Temas (KoT) integra el conocimiento de los contenidos que deben aprender los alumnos con una profundización mayor a éste. Incluye conocer la fenomenología, propiedades y sus fundamentos, los registros de representación, definiciones y procedimientos. Por ejemplo, el conocimiento de los procedimientos para la resolución de ecuaciones lineales de una incógnita con coeficientes reales forma parte del KoT.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM) es el conocimiento de las relaciones entre distintos objetos matemáticos (relaciones intra-matemáticas). Considera las conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones de contenidos transversales y las conexiones auxiliares. El conocimiento de la relación entre la ecuación lineal $f(x)=0$ y las raices de la función afín $f(x)$ es parte del KSM.

Conocimiento de la práctica matemática (KPM) es el conocimiento sobre las características del trabajo matemático, cómo proceder y generar conocimiento en matemáticas. Incluye las prácticas ligadas a la matemática en general y las prácticas ligadas a una temática en matemática. Ejemplo de KPM es conocer el uso de los cuantificadores en demostraciones de propiedades para conjuntos finitos.

Por su parte, el PCK corresponde a conocimientos propios de la labor de la enseñanza de la matemática y está dividido en:

Conocimiento de la enseñanza de la matemática (KMT) corresponde al conocimiento donde el contenido matemático condiciona la enseñanza. Comprende el conocimiento sobre teorías personales o institucionales de enseñanza, recursos materiales y virtuales y actividades, tareas, ejemplos o ayudas como estrategias de enseñanza. El conocimiento de ejemplos de funciones y la elección de su representación en diagrama sagital para conjuntos finitos son estrategias utilizadas por el profesor para hacer comprensible el concepto de función, parte del KMT.

Conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM) como el conocimiento sobre el aprendizaje de un contenido matemático. Abarca el conocimiento sobre las formas de aprendizaje, las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, las formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático y concepciones de los estudiantes sobre matemáticas. Conocer que los estudiantes consideren fácil la evaluación del 0 o 1 en una expresión algebraica es un ejemplo de este subdominio.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) corresponde al conocimiento del profesor sobre lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado. Incluye el conocimiento de los contenidos matemáticos requeridos a enseñar, conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y secuenciación de diversos temas. El conocimiento del profesor sobre la valorización de expresiones algebraicas como conocimiento previo para la evaluación de funciones es parte del KMLS.

Este modelo incluye como parte del conocimiento del profesor las creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje. Se ubican al centro del modelo pues se considera que ellas permean a todos los subdominios. A pesar de que se reconoce la importancia de considerar las creencias del profesor en el análisis de su conocimiento especializado, éstas no serán consideradas para el análisis en este trabajo.

Espacio de Trabajo Matemático

De acuerdo con Kuzniak (2011), la resolución de problemas ocupa un lugar importante en el trabajo del matemático y en la enseñanza de la matemática. Para enfrentar y resolver el problema se debe contar con un ambiente organizado que permita a las personas esta actividad (Kuzniak & Richard, 2014) que han denominado Espacio de Trabajo Matemático (ETM). El ETM está formado por dos planos: el epistemológico y el cognitivo. El plano epistemológico, relacionado con los contenidos matemáticos involucrados, incluye los polos referencial, artefactos y representamen, mientras que el plano cognitivo, centrado en el sujeto como sujeto cognitivo, concerniente a los procesos mentales de quien resuelve la tarea e incluye los polos prueba, construcción y visualización. La forma de articular ambos planos es mediante las génesis discursiva (para prueba y referencial), instrumental (para construcción y artefactos) y semiótica (para visualización y representamen) (Kuzniak, 2011; Kuzniak & Richard, 2014).

Se distinguen tres tipos de ETM. El ETM de *referencia* es el espacio de trabajo definido de manera ideal únicamente sobre la base de criterios matemáticos, el ETM *idóneo* es el acondicionamiento del ETM de referencia para permitir al sujeto que enfrentará la tarea matemática a que aborde y se comprometa con la resolución de dicha tarea, este utilizador trabajará, por su parte, en su ETM *personal* de acuerdo a sus propios conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas. En este trabajo tendremos como foco el ETM *idóneo* y *personal* del profesor pues consideramos que en ellos es posible identificar relaciones entre ambos marcos teóricos presentados.

Por su parte, la tarea matemática no es considerada como parte del ETM pero es un punto de partida para la conformación de este espacio (Kuzniak, 2011). La mirada del ETM está centrada en el trabajo matemático alrededor de la tarea matemática (Kuzniak & Richard, 2014), mientras que el MTSK permite analizar el conocimiento especializado del profesor sobre un objeto matemático movilizado por estas tareas (Carrillo et al., 2014). Resulta esencial observar las tareas que permiten describir el trabajo desde la perspectiva matemática y también desde la perspectiva didáctica (Kuzniak, 2011). Por esta razón, se considera que la *tarea matemática* es, junto con el profesor, un elemento común para ambos marcos pues permite, en parte, estructurar el ETM y es una oportunidad para identificar distintos subdominios del conocimiento especializado del profesor, por ejemplo KoT y KMT. Esto es, la organización de las tareas matemáticas por parte del profesor permite aproximarse a su ETM idóneo y el desarrollo de ellas permite observar su ETM personal del profesor, mientras que en ambas situaciones se puede observar su conocimiento especializado.

METODOLOGÍA

Este trabajo se enmarca en el desarrollo de una tesis doctoral sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre el concepto de función, observando a un profesor en su quehacer profesional con el objetivo de comprender cuál es el conocimiento que moviliza durante la enseñanza desde la perspectiva del MTSK. Por tanto, se adopta un paradigma interpretativo para lograr la comprensión de la realidad del profesor observado. La investigación corresponde a un estudio de caso del tipo instrumental (Stake, 2007).

El caso del estudio es un profesor de matemáticas, que llamaremos Arturo, quien tiene los grados de licenciado en educación de una universidad chilena y magister en matemáticas. Posee experiencia laboral de 10 años en colegios de educación básica y media y 7 años de experiencia como docente universitario. Además ha trabajado como docente en cursos de perfeccionamiento para profesores de educación básica y ha recibido cursos ligados a la docencia universitaria, actualización curricular en geometría y reformulación de programas de estudios. La selección de Arturo se basa en su identificación como *profesor experto* de acuerdo con Rojas, Carrillo, y Flores (2012), quienes asumen que un profesor experto aporta información más significativa sobre la naturaleza de su conocimiento profesional.

Para la recolección de los datos, se observaron y registraron en video las 9 clases que Arturo dedicó a la enseñanza del concepto de función a alumnos de primer año de educación media chilena[1] (14-15 años). Las videograbaciones fueron transcritas y han servido como principal fuente de datos, los que fueron tratados a través del análisis del contenido (Bardin, 1996), determinando episodios de clases de acuerdo a los objetivos tácitos o explícitos del profesor identificados durante las sesiones.

Se etiquetaron las intervenciones de los participantes usando la nomenclatura A: alumno, As: alumnos, Arturo: profesor, tomando como unidad de análisis los fragmentos (extractos) de clases donde se identificaron subdominios del conocimiento especializado del profesor en relación con su ETM idóneo o personal en la presentación de la tarea y/o el desarrollo de la misma. Los extractos corresponden a secciones de las primeras 3 clases de Arturo, los que se exponen en orden cronológico según el desarrollo de las clases. Estos extractos fueron seleccionados de modo que abarcaran todos los subdominios del MTSK para ampliar el espectro de posibles relaciones entre los modelos.

Al analizar el conocimiento especializado del profesor se ha considerado la distinción entre *indicio* y *evidencia* de conocimiento (Flores-Merdano, 2015). El autor señala que una *evidencia* es un elemento que permite afirmar que el profesor posee un conocimiento, ya sea superficial o profundo, mientras que un *indicio* se traduce en una sospecha de la existencia o inexistencia de un conocimiento causada por alguna declaración o acto del profesor. Un indicio requerirá de información adicional para ser confirmado como evidencia. Para el análisis, se han seleccionado episodios de clase en donde fue posible identificar indicios o evidencias de conocimiento especializado en relación con elementos del ETM idóneo o personal del profesor.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Uso de la definición de función

La definición de función que maneja Arturo es la que orienta el planteamiento de las tareas, por tanto consideramos pertinente mostrar cómo la expone. El conocimiento de la definición del concepto de función y su uso para la construcción de ejemplos y no ejemplos de correspondencias funcionales son parte del KoT del profesor (Espinoza, 2015). En nuestro caso, Arturo muestra la siguiente definición:

Arturo: Una función es una correspondencia entre elementos de dos conjuntos (no vacíos), A y B, tales que a cada elemento del conjunto de partida, A, le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada, B.

Junto con saber cuál es la definición de función que entrega Arturo, es importante identificar cómo la interpreta y cuál es el significado que le atribuye a este objeto. La definición propone entender la función como una correspondencia o vínculo entre elementos de dos conjuntos que establece la asignación de un elemento de un conjunto con otro elemento de otro conjunto mediante una "ley", noción que se presenta en el programa de estudio de octavo grado[2] (MINEDUC, 2014). Esta definición y el significado de la función pretenden involucrar a los alumnos en las próximas tareas dotando de un sentido al objeto matemático para conformar posteriormente el ETM personal de los estudiantes. En este sentido, el significado de la función es parte del ETM idóneo de Arturo y lo presenta como una analogía para que los alumnos comprendan el concepto de función (KMT). A continuación, Arturo muestra la analogía de la función como una máquina o proceso entrada-salida.

Arturo: La función funciona igual que una máquina. una especie de máquina. Un ejemplo podría ser la lavadora. La lavadora cumple una función, ¿cuál es la función?

As: Lavar!

Arturo: ¿Qué es lo que usted hace?, si es que lo hacen. Toman una prenda, está sucia, la meten en la lavadora y ¿cómo sale?

As: Limpia.

Arturo: La lavadora ¿cumplió su función?

As: Si.

Arturo: La prenda sucia vendría a ser del conjunto de partida, y la prenda limpia sería de llegada, eso es lo que hace una función.

El uso de esta analogía para identificar los conjuntos que componen a la función (partida y llegada) y caracterizar de una forma práctica los conceptos de dominio, recorrido, imágenes y pre imágenes de la función da cuenta del KMT de Arturo y de los elementos que considera para organizar su ETM idóneo .

En el siguiente extracto, Arturo considera los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{0, 1, 2\}$ para proponer una doble tarea: construcción y validación de correspondencias funcionales usando diagramas sagitales:

Arturo: Voy a hacer con los mismos elementos... podría definir una función *g* que me lleve el *a* en el 0, el *b* también en el cero y el *c* al 2, y ¿a cada elemento de aquí [A] le corresponde un único acá [B]?

A: A unos si, a otros no.

Arturo: ¿Éste *a* tiene una única imagen?

As: Si.

Arturo: El *b* ¿tiene su única imagen?

As: Si.

Arturo: El *c*, ¿tiene su única imagen?

As: Si.

Arturo: Entonces estamos en caso de que son funciones.

La tarea diseñada y ejecutada por Arturo consiste en decidir si la correspondencia construida es o no una función. Busca activar la génesis discursiva de su ETM personal a través de la verificación exhaustiva de la unicidad de imagen usando la definición de función como criterio de validación y para la construcción de la correspondencia, con lo que dicha definición puede considerarse como una herramienta para esta construcción (génesis instrumental). En este episodio se identifica el conocimiento de la definición de función como parte de la categoría definiciones del subdominio KoT en el MTSK en relación a los polos referencial y artefacto en el plano epistemológico del ETM personal del profesor. Por otro lado, se aprecia una intención de enseñanza en la exposición del desarrollo de la tarea lo que permite relacionar el conocimiento de la definición de función y de su enseñanza a su ETM idóneo.

En el siguiente extracto observamos que Arturo atribuye gran importancia a los cuantificadores y su rol en la definición de función para resolver tareas de identificación de correspondencias funcionales (KPM). Al momento de preguntar a sus alumnos: "*¿A cada elemento de aquí [A] le corresponde un único acá [B]?*" busca que sus estudiantes utilicen el nuevo conocimiento sobre funciones (definición) y aporta herramientas para el diseño de las próximas tareas, pues las respuestas (erróneas o correctas) de los estudiantes son los referentes para que Arturo avance en el desarrollo de su sesión de clase. La elección de la representación y la presentación de esta tarea es parte del KMT de Arturo, a la vez que la observación de estas elecciones permiten aproximarse a su ETM idóneo.

Arturo: Voy a poner una que no sea función. Con los mismos elementos *a, b, c,* 0, 1, 2 y 3. Eso ¿es función? ¿A cada elemento de aquí [A] le corresponde un único en [B]?

As: No, al *a* no.

A: Al *a* le corresponde el 0 y el 1.

Arturo: Esa no es función porque a este elemento le corresponde dos y no es único, entonces por eso este ejemplo es una correspondencia, pero es una correspondencia que no es una función. [Escribe en la pizarra "este ejemplo no es función"]

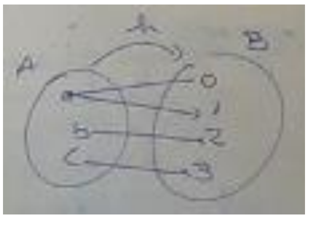


Imagen 1: Tarea sobre reconocimiento de correspondencias funcionales

El conocimiento de las formas de representar la función (Imagen 1) es parte del KoT, mientras que el uso de la definición para validar una función como tal y el rol que tiene el uso de los cuantificadores en esta validación forman parte del KPM, pues está asociado a las formas de proceder para el caso de funciones proposicionales definidas sobre conjuntos finitos. Los razonamientos de validación empleados son considerados como activaciones de las génesis discursivas en el ETM personal de Arturo relacionados a su KPM.

Uso de distintas representaciones

Los sistemas de representación aparecen explícitamente en ambos modelos: *representamen* para el ETM y *sistemas de representación* en el KoT para el MTSK, desde la perspectiva de Duval (1995). La elaboración de representaciones para las funciones involucra el uso de distintos instrumentos. Por ejemplo, la construcción de una gráfica cartesiana puede utilizar algún software, una regla o escuadra; la elaboración de una tabla de valores puede usar software de manejo de datos o calculadora. El uso de estos instrumentos supone dos tipos de conocimientos: el conocimiento del propio instrumento junto con las técnicas y destrezas necesarias para su utilización y el conocimiento de las potencialidades del instrumento para la enseñanza del concepto. Estos conocimientos son considerados por el ETM y por el MTSK, particularmente en el ETM idóneo y en el ETM personal en la construcción de la representación, y en el KMT como conocimiento de recursos materiales o virtuales que potencien la enseñanza. La tarea busca generar una representación para una función y se convierte en una oportunidad para explorar el conocimiento del profesor desde la perspectiva de ambos modelos.

A continuación se presenta un episodio donde Arturo plantea la tarea de graficar la función afín $f(x)=x+3$. Esta tarea es considerada por el profesor como una oportunidad para realizar conexiones entre dominios de la matemática (Geometría y Análisis) dando indicios del KSM del profesor:

Arturo:	Cuando tenemos un gráfico, donde aquí tenemos el eje X y el eje Y, y vamos a graficar la función $f(x)=x+3$. ¿Qué teníamos que hacer para graficar la función?
A:	Darle un valor a *x*.
Arturo:	¿Cuántos necesitábamos como mínimo?
As:	2.
Arturo:	¿Por qué dos?
A:	Porque son dos puntos.
Arturo:	¿Cuál es el fundamento de porqué necesitábamos por lo menos dos puntos?
As:	Porque son dos rectas que se tienen que cruzar; para formar una recta; para que hayan dos puntos.
Arturo:	Porque habíamos dicho que...
A:	Con dos puntos se forma una recta.
Arturo:	Por dos puntos pasa una única recta o una recta tiene al menos dos puntos. Con dos valores para *x* me basta. ¿Qué valores son los mejores para reemplazar?
A:	0 y 1.
Arturo:	0 y 1. Puedo reemplazar cualquier otro, pero los más fáciles son esos. Si el *x* fuera 0, $f(x)$ ¿Cuánto me va a dar?
As:	3.
Arturo:	Eso significa que vamos a graficar el punto (0,3). Si el *x* vale 1, $f(x)$ va a ser 4, y vamos a graficar el punto (1,4).

Como se puede ver en el extracto anterior, el profesor utiliza preguntas para presionar a los estudiantes a dar fundamento a las técnicas empleadas. El conocimiento del profesor sobre el fundamento expuesto para graficar la recta es parte de su KoT. Así mismo se observa que Arturo intenta generar una conexión transversal (KSM) entre el objeto *función afín* (del Análisis) y el objeto *recta euclidiana* (de la Geometría euclidiana), relacionando las características comunes de la recta en la geometría euclidiana ("*Por dos puntos pasa una única recta o una recta tiene al menos dos puntos"*) con el gráfico y la representación gráfica de la función afín ("*Con dos valores para x me basta"*), estableciendo una conexión entre los significados de estos objetos y entre los dominios de la geometría euclidiana (recta), la geometría analítica (recta cartesiana) y el análisis (función afín).

En este extracto, la tarea pretende articular dos tipos de representación: la algebraica y la cartesiana, privilegiando la génesis semiótica. El conocimiento respecto a esta articulación o conversión entre los distintos registros forma parte del KoT y de su ETM personal. Se evidencia la conexión conceptual entre recta en la geometría euclidiana y en la geometría analítica como parte de su KSM en relación a elementos del polo referencial en su ETM personal. Este conocimiento le permite decidir con base en los axiomas de la geometría euclidiana, cuál es la cantidad de puntos suficientes y necesarios para trazar la gráfica de una recta, lo que se considera como conocimiento de las propiedades y fundamentos en su KoT.

También se identifica un indicio del conocimiento de Arturo sobre la relación de sus estudiantes con algunos contenidos vinculados al concepto de función. Por ejemplo, la facilidad que poseen los alumnos para valorizar expresiones algebraicas con los números 0 y 1, como parte de su KFLM.

Cálculo de imagen (valorización) y pre imagen (ecuación)

En el siguiente episodio, Arturo propone una tarea sobre el cálculo de pre imágenes con funciones escritas como expresión algebraica, cuyos coeficientes dificultan encontrar la respuesta mediante estimaciones. La estimación es el procedimiento que los estudiantes han usado hasta ahora para encontrar pre imágenes de una función dada. El profesor evidencia conocimiento sobre la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita en su KoT y como parte del conocimiento que corresponde a un tema del nivel ya estudiado con este curso (KMLS), este conocimiento es utilizado para el diseño del ETM idóneo.

Arturo: Dada una función [escribe $f(x)=5x+1$] cómo poder determinar la pre imagen de una forma más simple y no usar "el tanteo" para poder determinar ese valor [...] Nosotros podemos sacar imágenes y pre-imágenes. Como resumen de la clase anterior, si me piden determinar la imagen de 10, ¿qué es lo que teníamos que hacer? Evaluar el 10 en la función y encontrar su imagen. Si entró el 10, se multiplica por 5 y se le suma 1, y eso me da 51, por lo tanto, la imagen del 10 es 51. [Escribe otra consigna]. La pre imagen de 6. ¿A quién mandé del conjunto de partida para que llegara al otro lado como un 6? Estábamos diciendo que esto [la expresión de la función] me tenía que dar 6 [escribe $5x+1=6$] y si despejábamos, $5x$ me da 5, por lo tanto x es 1.

En el extracto anterior, Arturo calcula imágenes y pre imágenes comenzando por recordar a sus estudiantes que la valorización es el modo de determinar imágenes cuando se tiene la expresión algebraica, lo que corresponde a conocimiento sobre procedimientos (KoT). Desde el ETM, la tarea de calcular la imagen de un elemento dada la expresión de la función privilegia la activación de la génesis instrumental mediante el uso de alguna herramienta que permita dicho cálculo. En este caso la herramienta utilizada es la valorización de una expresión algebraica.

Una situación similar ocurre con la tarea de cálculo de pre imágenes dada la expresión algebraica de la función. La ecuación lineal toma el rol de elemento auxiliar en la determinación de imágenes de la función (conexión auxiliar, KSM) y de herramienta simbólica en su ETM personal.

Arturo: ¿Cuál es la pre imagen de 50? ¿Qué tengo que hacer?

As:	10; 5,8.
Arturo:	¿Qué tengo que hacer?
As:	Resolver la ecuación, pero cambiar el 50.
Arturo:	La función, que en este caso es $5x+1$, tiene que ser 50, porque me están pidiendo la pre imagen de 50, entonces esto ¿a qué es equivalente? $5x=49$, por lo tanto $x=49/5$. La pre imagen de 50 es 49/5.

El procedimiento para resolver la ecuación del episodio involucra conocimiento sobre las propiedades y fundamentos de esta resolución (existencia de inversos y la igualdad como relación de equivalencia), elementos que son parte del referencial en el ETM personal del profesor y de su KoT. La comprobación de la solución puede ser considerada como un razonamiento de validación, activando la génesis discursiva.

La resolución de ecuaciones se ha convertido en el procedimiento privilegiado por Arturo para la determinación de pre imágenes de las funciones trabajadas en este nivel escolar. Tanto en el ETM como en el MTSK se identifican como herramientas para el trabajo con funciones a la resolución de ecuaciones (cálculo de pre-imágenes) y la valorización de expresiones algebraicas (cálculo de imágenes), de este modo, la ecuación y la valorización toman el rol de artefactos simbólicos (Henríquez & Montoya, 2013; Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca & Mena-Lorca, 2014) utilizados en estas tareas.

Relaciones entre los componentes del ETM y los subdominios del MTSK

Hasta ahora se ha pretendido mostrar una serie de episodios de clases en donde fue posible, por una parte, explorar el conocimiento del profesor identificando distintos subdominios del MTSK y, por otra parte, identificar la activación de componentes del ETM personal e idóneo del profesor, emergiendo relaciones entre ambos modelos sin violentarlas. La siguiente tabla (Tabla 1) sintetiza las relaciones entre el ETM y el MTSK expuestas durante nuestro análisis. La primera columna corresponde a los elementos que caracterizan a los episodios de clases en que se presenta alguna relación entre los modelos, las dos siguientes corresponden a los elementos identificados de cada modelo en dicho episodios.

Elemento observado	ETM	MTSK
Definición del concepto de función	Activa la Génesis Discursiva e Instrumental	Da evidencia del KoT (Definiciones) KPM (Formas de demostrar) KMT (Uso de analogías)
Construcción de ejemplos y no ejemplos	Activa la Génesis Instrumental: artefacto	Da evidencia del KoT: Propiedades y fundamentos
Distintas representaciones de la función	Activa la Génesis Semiótica: representamen	Da evidencia del KoT: Registros de representación
Resolución de ecuaciones, valorización	Activa la Génesis Instrumental: artefactos	Da evidencia del KoT (Procedimientos), KSM (Conexión auxiliar) y da indicios del KFLM (formas de interacción de los estudiantes con el contenido)
Resolución de	Génesis Discursiva: referencial	Da indicios de KSM: Conexiones

ecuaciones de la forma *ax*+*b*=0 Cantidad de puntos para graficar una recta	Transversales

Tabla 1: Relaciones entre los componentes del ETM y los subdominios del MTSK

A continuación se expone un ejemplo sobre cómo se interpretan las relaciones en las filas de la Tabla 1. En la cuarta fila se establece la relación entre la génesis instrumental (ETM) y el conocimiento de procedimientos (KoT) en la resolución de ecuaciones (situación). Al solicitar el cálculo de imágenes y pre imágenes mediante ecuaciones o valorización, se observa de manera simultánea que la tarea activa la génesis instrumental mediante el uso de la ecuación o valorización como artefactos simbólicos y da cuenta del conocimiento especializado sobre los procedimientos para la resolución de las ecuaciones o la valorización. Del mismo modo se interpretan las otras relaciones expuestas.

CONCLUSIONES

En relación con una situación de aula observada (como el planteamiento de la definición del concepto de función, su uso para validar correspondencias funcionales o la propuesta de tareas sobre gráficas), la complementariedad teórica (Godino et al., 2013) entre ambos modelos permite profundizar en la comprensión del conocimiento del profesor. En este sentido, observar los episodios expuestos ha permitido identificar, entre otros, las génesis que privilegia Arturo en este tipo de actividades, los artefactos a los que recurre y los fundamentos de sus procedimientos (KoT), así como el conocimiento y uso de la definición de función para validar (KoT-KPM), el conocimiento y uso de ecuaciones para encontrar imágenes y pre imágenes (KSM) e indicios sobre las conexiones (KSM) que pretende establecer entre objetos matemáticos con características comunes (recta euclideana y función afín).

Se ha pretendido seguir las estrategias de conexión entre teorías expuestas en Bikner-Ahsbahs y Prediger (2010) apuntando a que el diálogo entre ETM y MTSK puede realizarse hasta combinar y coordinar las ideas centrales de sus núcleos sin forzar la relación y teniendo como meta la identificación de diversos aspectos que pueden ser observados desde ambas teorías. El análisis de los episodios ha puesto la atención en elementos específicos de cada modelo lo que puede arriesgar la consideración del resto de los componentes de cada teoría (Trigueros, Bosch, & Gascón, 2011), sin embargo queda pendiente la profundización en el análisis y en cada relación identificada para apuntar, por una parte, al desarrollo de cada modelo y, por otro lado, avanzar en la comprensión del conocimiento que posee/utiliza el profesor.

Finalmente, este trabajo abre paso a nuevas interrogantes, por ejemplo, sobre el conocimiento del profesor acerca del ETM personal de sus alumnos y cómo este conocimiento enriquece el PCK del profesor. Asimismo, queda latente el interés por profundizar en los aportes que puede hacer el análisis desde un marco al otro utilizando la totalidad del modelo o alguno de sus componentes.

AGRADECIMIENTO

Trabajo realizado con el financiamiento de CONICYT, Beca Doctorado Nacional 2015, Chile. Folio: 21150897

NOTAS

1. Los niveles de 1º básico (6-7 años), 2º,3º,4º,5º,6º, 7º y 8º básico (13-14 años) corresponden a la enseñanza básica chilena. La enseñanza media está formada por 1º medio (14-15 años), 2º medio, 3º medio y 4º medio (17-18 años) .
2. El concepto de función aparece como tal en este nivel, según el programa de estudio. Se ha considerado este documento como referencia pues, por un lado, es uno de los documentos que regulan la distribución de temas y, por otro lado, es la referencia que Arturo considera para organizar los temas a enseñar. Arturo trata este tema en noveno grado pues este curso no lo estudió el año anterior.

REFERENCIAS

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407

Bardin, L. (1996). *El análisis de contenido*. Madrid: Akal Ediciones.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (2010). Networking of theories: An approach for exploting the diversity of theorical approaches. En B. Sriraman & L. English (Eds.). *Theories of Mathematics Education: Seeking new frontiers* (pp. 483-506). Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp.2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Avila, D., Flores-Medrano, E., & Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berna: Peter Lang.

Espinoza, G. (2015). Identificación de indicadores del conocimiento sobre funciones mediante el análisis didáctico. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, F. Rojas, H. Solar, E. Chandía y M. Parraguez, (Eds.), *Actas XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 389-393). Villarrica, Chile: SOCHIEM.

Flores-Merdano, E. (2015). *Una profundización en la concepción de elementos del modelo de conocimiento especializado del porfesor de matemáticas MTSK* (Tesis doctoral). Disponible en http://hdl.handle.net/10272/11503

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

García, F., Wake, G. C. (2010). Estableciendo diálogos entre diferentes marcos teóricos: de los procesos narrativos a la teoría antropológica de lo didáctico. En M. Moreno, J. Carrillo, Estrada, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 315-326). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2810-2819). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Gómez-Chacón, I., Escribano, J., Kuzniak, A., & Richard, P. (Eds.). (2015). *Actas del ETM 4*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Gómez-Chacón, I., Romero, I., & Carrillo, J. (2015). Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor y las interacciones. En I.M. Gómez-Chacón, J, Escribano, A. Kuzniak & P.R. Richard (Eds.), *Actas del ETM 4* (pp. 399-417). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Henríquez, C., & Montoya, E. (2013). Los Artefactos y la visualización en el ETG del profesor. En F. Rebeca (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1615-1624). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Kilpatrick, J., Blume, G., & Allen, B. (2006). *Theorical framework for secondary mathematical knowledge*. Manuscrito no publicado, University of Georgia and Pensilvania State University.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. *16*, 9-24.

Kuzniak, A., & Richard, P., (2014). Espacios de trabajo matemático: Puntos de vista y perspectivas. *Relime*. *17*(4-1), 5-15.

MINEDUC (2014). Ministerio de Educación Chile. *Programa de estudio de matemática - Octavo Básico*. Decreto Exento 169/2014. disponible en http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983_programa.pdf

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Relime*, *17*(4-1), 181-197. DOI:10.12802/relime.13.1749

Rojas, N., Carrillo, J., & Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). Jaén: SEIEM

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: reflecting on practice with the knowledge quarter*. London: Sage.

Sriraman, B., & English, L. (2005). Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *(ZDM) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *37*(6), 450–456.

Stake, R. E. (2007). Investigación con estudio de casos. Madrid: Morata.

Trigueros, M., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD*. (vol. 10, pp77-116). CRM documents. Bellaterra, Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS PROFESORES EN ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO UTILIZANDO GEOGEBRA CON TRIÁNGULOS

Marleny Hernández Escobar, Gonzalo Zubieta Badillo
Cinvestav-México
marlenylesly@hotmail.com, gzubieta@cinvestav.mx

En este artículo describimos los resultados obtenidos de tres herramientas metodológicas desarrolladas con futuros profesores que cursan en la Escuela Normal Superior de México la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas, la finalidad fue indagar su Conocimiento Especializado a través del Espacio de Trabajo Matemático. Primero se desarrolló una inmersión inicial, con base en los datos adquiridos se diseñó y aplicó un cuestionario de conocimientos de temas matemáticos y por último se implementaron actividades de conocimiento especializado acompañadas del uso de Geogebra para su solución.

Palabras Claves: *Conocimiento Especializado, Espacios de Trabajo Matemático, Futuros Profesores*

INTRODUCION

La investigación que se documenta se realizó en la Escuela Normal Superior de México (ENSM) con futuros profesores de la Licenciatura en Educación Secundaria, Especialidad en Matemáticas, durante tres fases o momentos.

En la primera fase se filmó a los futuros profesores que cursaban el tercer semestre de su carrera, mientras impartían una clase entre pares de un tema contenido en el Plan y Programas de Estudios de Educación Secundaria (la elección del tema fue libre); el propósito era observar si existía interés por dar una clase con algún tema de geometría, además de identificar los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) desarrollados alrededor de las actividades realizadas.

En la segunda fase cuando los futuros profesores cursaban el cuarto semestre en la ENSM se les aplicó un cuestionario con algunos contenidos sobre triángulos, el objetivo de este instrumento era identificar los conocimientos de la disciplina utilizados. La finalidad de las actividades fue indagar cuál era el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)[1] propuesto por Carrillo, Contreras y Flores (2013) en el subdominio Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT)[2] que poseía el futuro profesor.

La tercera fase se llevó a cabo durante el quinto semestre de estudios de los futuros profesores, con base en los resultados del cuestionario de KoT se diseñaron actividades fundamentadas en el MTSK, la finalidad de estas actividades fue identificar el conocimiento del proceso enseñanza-aprendizaje que los futuros profesores poseían y las representaciones que utilizaban para comunicar de manera eficaz ideas matemáticas.

Para el análisis de las herramientas utilizadas se consideró el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) personal, idóneo y de referencia de Kuzniak y Richard (2014) con la finalidad de identificar estas nociones del ETM durante la reflexión del futuro profesor al enfrentarse a un problema determinado con temas básicos de triángulos, para ello resultó importante profundizar en las relaciones entre el conocimiento especializado del futuro profesor de matemáticas y las acciones de enseñanza que permitieron aportar algunas explicaciones de cómo evolucionan los ETM.

MARCO CONCEPTUAL

El uso del Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT) formulado por Carrillo, Contreras, Climent, Escudero, Flores y Montes (2013) nos sirvió para el diseño de los instrumentos metodológicos. Enfatizamos en la apropiación, la implementación y el desarrollo de recursos que fortalecen la relación entre la práctica docente y los conocimientos matemáticos que se usan como base para reorientar e incrementar el Conocimiento Especializado del futuro profesor, al utilizar como apoyo el software de geometría dinámica Geogebra. Los resultados obtenidos de las actividades aplicadas también fueron analizados a través del enfoque del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesto por Kuzniak y Richard (2014).

La creación del ETM ayudó a que los futuros profesores encontraran y generaran condiciones para construir y compartir significados. En este estudio la construcción de un concepto geométrico estuvo dada por la circulación del ETM a través de los niveles epistemológico y cognitivo, pues mediante éstos se fue enriqueciendo el ETM personal, idóneo y referencial de cada uno de los futuros profesores.

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El marco teórico propuesto por Carrillo, Contreras, Climent, et al. (2013) denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) surge como respuesta a las dificultades detectadas en el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME) de Ball (2000), Hill, Ball, y Schilling (2008) tomando en cuenta las potencialidades que se relacionan con la fusión entre el contenido matemático y la pedagogía; estos son dos conocimientos que un profesor en formación requiere para realizar sus prácticas docentes.

El MTSK mantiene las ideas de Shulman (1986) relacionadas con el conocimiento pedagógico del contenido (PCK) ya que éste ofrece la oportunidad de entender cómo los profesores llegan a desarrollar en la docencia los contenidos programáticos.

El diseño de las actividades lo realizamos con base en el dominio del MTSK: Conocimiento matemático (MK).

El MK es un elemento fundamental en el futuro profesor ya que es el conocimiento de la propia disciplina que se enseña, y considera tres componentes, a saber: El Conocimiento de los Temas Matemáticos, El Conocimiento de la Estructura Matemática y El Conocimiento de la Práctica Matemática.

El Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT) consiste en conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada, para integrar y profundizar los contenidos del plan de estudios que se enseñarán a los estudiantes de secundaria.

El Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) tiene sus bases en lo descrito por Ball, Lewis y Thames (2008) como Conocimiento del horizonte matemático, este conocimiento de las matemáticas permitirá al futuro profesor reflexionar sobre el contenido desde una visión prospectiva, donde los tópicos matemáticos están relacionados con otros del currículo.

En el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) destaca la importancia de que el futuro docente conozca las formas de proceder para llegar a resultados y características de un trabajo matemático, con el propósito de saber cómo se explora y cómo se genera conocimiento a través de establecer relaciones, correspondencias, equivalencias, además del cómo se argumentan, se razonan y se generalizan las características de los elementos con los que se hacen matemáticas.

Recursos computacionales (GeoGebra)

Los investigadores que se han enfocado en estudiar cómo el profesor en su formación inicial se apropia de recursos y los utiliza para tratar de mejorar su práctica, (ver, Artigue, 2002; Balacheff, 2000; y Laborde, 2001, entre otros) afirman que el uso de recursos computacionales en el proceso educativo ha ocasionado cambios en la forma de mirar los objetos matemáticos dependiendo de las tareas que sean utilizadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Recientemente, González y Herbst (2009) argumentan que utilizar algún software de Geometría Dinámica tiene sus ventajas (en este ambiente a diferencia de lápiz y papel se pueden observar diversos casos en el mismo escenario), lo cual permite multiplicar las posibilidades del estudiante y del docente sobre los objetos geométricos.

En la problemática relacionada con las dificultades de los futuros profesores en el estudio de la geometría, Contreras y Blanco (2012) mencionan que existen concepciones profundas sobre la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas, heredadas de su propia experiencia en Secundaria, indican que los errores en el Conocimiento Matemático generan un Conocimiento Especializado erróneo.

Los Espacios de Trabajo Matemático (ETM)

La noción de Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) se refiere a la explicación de lo realizado por el estudiante en un marco escolar, este modelo tiene su origen en la teoría de los Paradigmas Geométricos (Houdement y Kuzniak, 2006) y en el Espacio de Trabajo Geométrico (ETG).

Del ETG, se conserva el principio que articula el ETM en dos niveles según Kuzniak (2011): uno de naturaleza *epistemológica* compuesto de tres polos (el representamen, los artefactos y el referencial) que se relacionan con los contenidos matemáticos del ámbito estudiado, y otro de naturaleza *cognitiva* con tres componentes (visualización, construcción y prueba) que tienen que ver con el pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas, la articulación de estos dos planos se lleva a cabo a través de las diferentes génesis (semiótica, instrumental y discursiva) que el modelo propone.

Como señalan Kuzniak y Richard (2014), debe investigarse el desarrollo del trabajo matemático sobre la enseñanza por parte del profesor, pero para este estudio fue importante voltear hacia aspectos relacionados con la formación del futuro profesor.

Las herramientas metodológicas aplicadas en esta investigación indagaron en los futuros profesores el término de los ETM propuesto por Kuzniak y Richard (2014) denominado ETM personal, espacio propio de cada profesor o estudiante, que se observa cuando los alumnos utilizan sus conocimientos matemáticos y sus capacidades cognitivas para resolver una tarea al enfrentar un problema (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014).

También Kuzniak y Richard (2014) mencionan que, si una institución escolar se organiza para permitir a un alumno de manera individual o grupal comprometerse en la resolución de un problema, éste desarrolla un ETM idóneo, que no es fijo ya que debe modificarse dependiendo del ETM personal del profesor (que se va actualizando mientras enseña).

Estos autores además indican que un paradigma se instituye cuando una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones privilegiando ciertas formas de pensamiento y, a este espacio lo denominan ETM de referencia.

Esta investigación se apoyó en los ETM para llevar a cabo un análisis de los datos obtenidos con las herramientas metodológicas utilizadas que sirvieron para mejorar la comprensión de los fenómenos didácticos en torno al trabajo de los futuros profesores con actividades matemáticas en su ambiente escolar. Se consideró el MTSK como elemento que ayudó a organizar una reflexión sobre el conocimiento para enseñar matemáticas haciendo uso de conocimientos prácticos donde el futuro docente fue consciente de los conocimientos que poseía o que le hacían falta.

METODOLOGÍA

Con la intención de indagar el conocimiento del futuro profesor se diseñaron y aplicaron actividades con un tema de geometría del currículo de matemáticas para la educación secundaria relacionado con los temas de los planes y programas de la ENSM.

La investigación se realizó con futuros profesores que oscilaban entre los 19 y 30 años de edad y que al inicio del estudio cursaban el tercer semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas. Es a partir de este semestre que los participantes intervienen en su práctica docente.

Para la obtención de los datos se realizaron tres fases, en la primera se cumplió con lo que algunos especialistas denominan "inmersión inicial al campo" (Hernández, Fernández y Baptista, 2007), en ésta se analizaron videograbaciones de las clases impartidas por futuros profesores que cursaban el tercer semestre en la ENSM dentro de su ambiente escolar (a sus pares) con un tema de geometría.

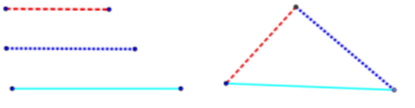
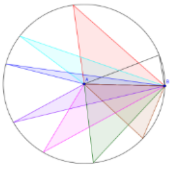
Para analizar el trabajo geométrico del futuro profesor de secundaria, se consideraron los diversos tipos de espacios de trabajo matemático.

Tomando en consideración los resultados de la primera fase, el estudio continuó con los futuros profesores cuando cursaban el cuarto semestre, durante el cual tienen el primer encuentro con una asignatura de geometría, se diseñaron actividades con el uso de Geogebra (ver Tabla 1). En esta fase se aplicó un cuestionario de Conocimiento de Temas Matemáticos (KoT) subdominio del MTSK.

Las actividades del estudio solamente fueron de construcción geométrica, (debido a los resultados observados en la inmersión inicial).

El contenido para las actividades se encuentra ubicado dentro del Plan y Programas de Estudio de la Licenciatura en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas, específicamente en la materia de Figuras y Cuerpos Geométricos; el triángulo, construcciones con regla-y- compás, tema relacionado con el trazo de triángulos mediante el uso del juego de geometría y construcción de triángulos con base en ciertos datos, contenidos del programa de educación secundaria.

A continuación, se muestran las actividades implementadas para identificar el KoT que poseían los futuros profesores que cursaban el cuarto semestre.

Actividades	Soluciones del cuestionario del KoT con regla y compás con el uso de GeoGebra
Traza tres segmentos y con ellos construye un triángulo.	 Proposición de Euclides (I-22, I-20). Construir un triángulo con tres segmentos dados, donde la suma de dos de ellos es mayor que el tercero (Heath, 1956).
Con un segmento que corresponde a uno de los lados iguales de un triángulo isósceles ¿cuántos triángulos distintos se pueden construir?	 Definición de Euclides (I-15). Un círculo es una figura plana comprendida por una sola línea (llamada circunferencia) de tal modo que todas las rectas

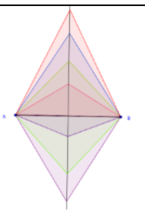
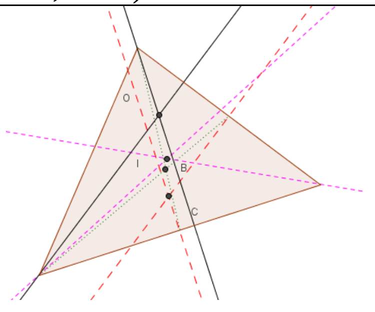
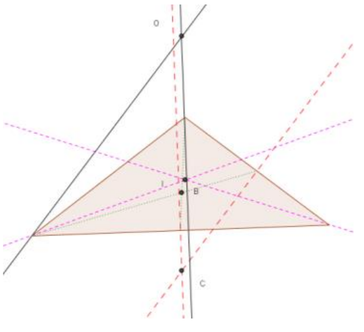
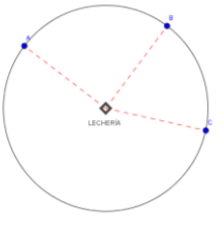
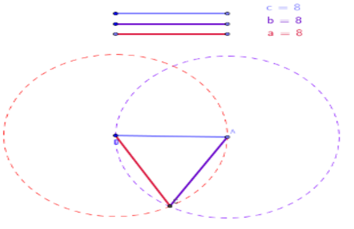
	dibujadas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí (Heath, 1956).
Dado un segmento, construye un triángulo isósceles al saber que el segmento dado es el lado desigual, ¿cuántos triángulos isósceles distintos se podrán construir?	 Definición de Euclides (I-20). De los triángulos, isósceles es el que tiene dos lados iguales y uno desigual (Heath, 1956).
Construye un triángulo cualquiera utilizando Geogebra y encuentra el circuncentro C (mediatrices), el incentro I (bisectrices interiores), el baricentro B (medianas) y el ortocentro O (alturas). Desplaza uno de los vértices del triángulo y menciona qué pasa con los puntos I y B. ¿Qué pasa con los puntos O y C, al ocurrir el desplazamiento del vértice? ¿Al desplazar el vértice qué tipo de triángulos se forman? ¿Qué puedes afirmar con relación de los puntos B, C, I, O y los tipos de triángulos que encontraste? Cuando la mediana del lado de un triángulo, coincide con la mediatriz de dicho lado, ¿de qué tipo de triángulo se trata?	 Trazo de circuncentro C (mediatrices), el incentro I (bisectrices interiores), el baricentro B (medianas) y el ortocentro O (alturas).  Ortocentro y circuncentro puntos exteriores cuando son triángulos obtusángulos.
Liconsa va a colocar una lechería cercana a tres pueblos no colineales de tal forma que la distancia que recorran los habitantes de cada localidad a la lechería sea la misma. ¿Dónde debe ubicar Liconsa su lechería?	 En una misma circunferencia todos los radios son iguales.

Tabla 1: Actividades implementadas para identificar el KoT que poseían los futuros profesores del estudio

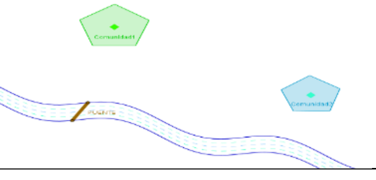
Finalmente, cuando los futuros profesores cursaban el quinto semestre se aplicaron de forma individual actividades de Contenido para la Enseñanza, la estructura de las actividades fue con base en el Conocimiento Matemático (MK) considerando dos de sus componentes: el Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT) y el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM).

A continuación, se muestran las actividades, que se les proporcionaron en el software de GeoGebra:

Actividad 1
Oprime la tecla f9 y clasifica el triángulo obtenido por sus lados y por sus ángulos, repite la actividad 10 veces. ¿Es posible que con los tres segmentos dados siempre se construya un triángulo?



Actividad 2
Se necesita poner un puente para uso de dos comunidades localizadas del mismo lado de un río ¿dónde debe construirse el puente para que la distancia recorrida desde el centro de ambas comunidades al puente sea la misma?



DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS

Primera fase: inmersión inicial al campo

Para recabar la información en esta primera fase se solicitó a los futuros profesores que estaban iniciando su tercer semestre que eligieran algún tema del Plan y Programas de Estudio de Educación Secundaria (2011), para mostrar una clase en su ámbito escolar, esto con la finalidad de observar quiénes se inclinaban por un tema de geometría.

Mencionamos que hasta este tercer semestre los futuros profesores no habían llevado alguna materia relacionada con la práctica docente.

Solamente tres futuros profesores eligieron un tema de geometría donde se usaba regla y compás: (a) construcción de diseños que combinan la simetría axial y central, la rotación y translación de figuras; (b) trazo de círculos; y (c) justificación de las fórmulas de área y perímetros de polígonos regulares, con apoyo de la construcción y transformación de figuras. Para ejemplificar las tres nociones del ETM, en este estudio se analizó el ETM idóneo del futuro profesor en el primer caso, para el segundo el ETM referencial y el ETM personal para el tercero.

Primer caso

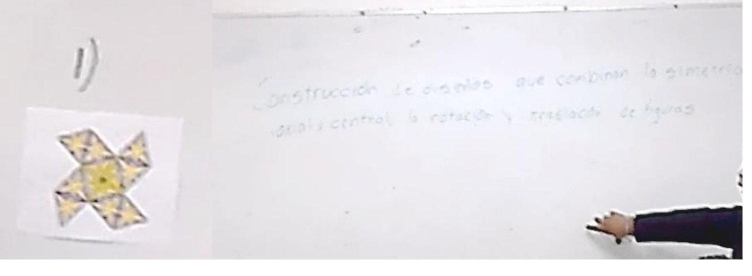


Figura 1: Futuro profesor que modela con la mano el uso del compás para hacer el trazo de la rotación y translación de la imagen que se observa a la izquierda

Tema: construcción de diseños que combinan simetría axial, central, rotación y translación de figuras.

Vemos que el futuro profesor para abordar este tema utiliza un cuadrado y cuatro rombos, integra en equipos a sus compañeros y les solicita que armen la figura que coloca en el pizarrón del lado izquierdo. En ese sentido los recursos que se utilizan no son del todo válidos ya que no se hace uso del juego de geometría sino de la mano simulando el compás en rotación (ver figura 1).

Sin embargo, el ETM idóneo debe cumplir dos condiciones, es decir, por una parte, debe permitir el trabajo en el paradigma correspondiente en este caso con contenidos involucrados para el tema de simetría axial y central; y por otra, algunos componentes como la visualización y la construcción deben estar organizados de manera válida.

Observamos que se reorganizó el ETM idóneo del futuro profesor (el cual se actualizó) para permitir a uno de sus alumnos comprometerse en la resolución del problema, el siguiente fragmento muestra ejemplo de ello: "Su compañera dice que en la simetría axial existe un eje que se llama eje de simetría, en el cual debe existir de un lado una parte de la figura y del otro lado, existe la simetría vertical y horizontal, la vertical es cuando, alguna vez te pusieron el ejemplo del cuerpo humano que te dividían a la mitad", notamos que toma en cuenta las ideas de sus alumnos para estructurar los conceptos de las simetrías, además, usa figuras que traza en hojas de colores para que los estudiantes las peguen en su cuaderno (ver figura 2). De este modo, el ETM idóneo se va modificando con la ayuda del MTSK del futuro profesor y a partir de los ETM de los estudiantes.

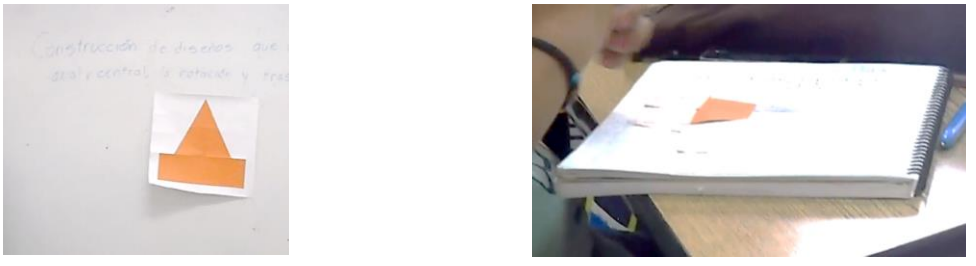


Figura 2: Futura profesora que cursaba el tercer semestre, dando una clase entre sus pares

Segundo caso

Tema: trazo de círculos.

El futuro profesor coloca las definiciones de diversas líneas en el círculo del lado izquierdo y su representación geométrica del lado derecho para que los alumnos relacionen la información (ver figura 3).

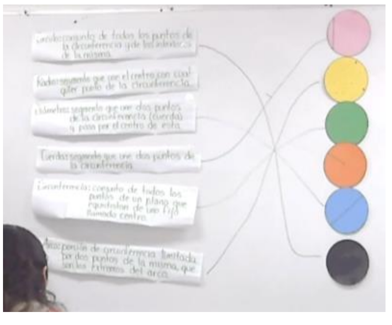


Figura 3: Actividad presentada por un futuro profesor de la correspondencia entre las líneas del círculo y sus definiciones

En relación al diseño de las tareas y su vínculo con el ETM (Kuzniak, 2011: 13) afirma que, “los problemas no son parte del espacio de trabajo, pero son su razón de ser y su activador”, en una aproximación al ETM de referencia notamos que el futuro profesor identifica los temas del currículum escolar sobre los contenidos del eje geometría en el tema que está impartiendo.

Durante la clase impartida éste futuro profesor entrega una hoja a cada uno de los estudiantes y les pide que tracen una circunferencia, indicándoles que el lado que les da es el diámetro, a continuación, se muestra un fragmento de lo sucedido en esta actividad.

> Futuro profesor: Ustedes tienen que ver qué es lo que deben utilizar para poder trazarlo, ¿qué es lo que generalmente usan para trazar la circunferencia?
> Alumno: El compás
> Futuro profesor: Sí ¿pero qué elemento?
> Alumno: El radio
> Futuro profesor: ¿Cómo determinas el radio?
> Alumno: La mitad del diámetro
> Futuro profesor: ¿Qué nos dice nuestra definición?
> Futuro profesor: Lo que necesitan es el centro.

Observamos que cuando el futuro profesor pone a los estudiantes a resolver los ejercicios en el pizarrón estos simulan que usan el compás (sin apoyarlo) en el pizarrón, solamente describen el trazo de una circunferencia pero no realizan la construcción (ver figura 4), Kuzniak y Richard (2014) mencionan que la elección y la organización de las tareas propuestas a los alumnos por los profesores son esenciales en la constitución del ETM idóneo del profesor y que estas elecciones y la gestión de las actividades van a depender, en gran parte, de su ETM personal, ya que él al mostrar las construcciones también hacía trazos en el aire y con la mano.

Figura 4: Movimientos que realizan los futuros profesores con el compás en el pizarrón para el trazado de círculos

Tercer caso

Tema: justificación de las fórmulas de área y perímetros de polígonos regulares, con apoyo de la construcción y transformación de figuras.

Para analizar el ETM personal de esta futura profesora fue necesario observar los elementos básicos de geometría que fueron considerados para el desarrollo de su clase, para lo cual solicitó a los alumnos que calcularan el área de un rectángulo y de un triángulo.

Notamos que el futuro profesor no se apoya en la figura que muestra en el pizarrón para enseñar el cálculo de las áreas, ni para la obtención de la fórmula. También, observamos que el triángulo no representa la mitad del cuadrilátero dado (ver figura 6), además, existe confusión en el uso de unidades al calcular el área del rectángulo (ver figura 5).

Como señalan Kuzniak y Richard (2014), la enseñanza debe favorecer el desarrollo del trabajo matemático del alumno, en este caso, el futuro profesor al darse cuenta del error en la operación lo modifica, consecuentemente debe interrogarse sobre el trabajo desde el punto de vista de la organización de la enseñanza por parte del profesor, modificando cuando sean requeridos los modelos usados.

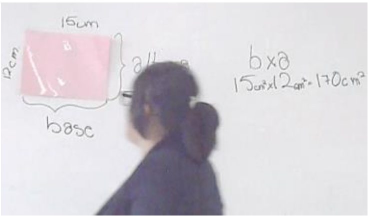


Figura 5: Futura profesora mostrando como calcular el área de un rectángulo

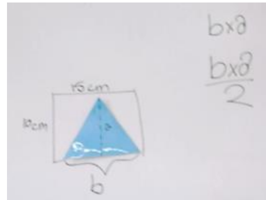


Figura 6: Modelo propuesto para obtener el área de un triángulo a partir de un cuadrilátero

Los ETM brindan la posibilidad de crear un espacio propio fruto de la reflexión entre los conocimientos matemáticos y los conocimientos que el futuro profesor utiliza para resolver una tarea, Kuzniak y Richard (2014) denominan a este espacio ETM personal.

Segunda fase: cuestionario de Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT)

Al considerar los resultados de la fase anterior, el siguiente instrumento de análisis se aplicó a los futuros profesores del estudio cuando cursaban el cuarto semestre, se consideraron temas elementales de triángulos apoyados con el uso de Geogebra. Es importante mencionar que es hasta este cuarto semestre que estudian una asignatura de geometría durante su carrera.

A continuación, se describen solamente los resultados de los ejercicios, que se usaron para el diseño de las actividades de Conocimiento Especializado, dado que en esos ejercicios más del 60% contestó correctamente. Consideramos pertinente establecer ese porcentaje para determinar el conocimiento de los temas matemáticos (KoT) que el futuro profesor posee.

En relación con el primer ejercicio, al cuestionar si siempre era posible construir un triángulo dados tres segmentos cualesquiera, el 73% de los futuros profesores respondieron que no, justificaron (en algunos casos) que la suma de dos lados debía ser mayor al otro lado (Ver figura 7).

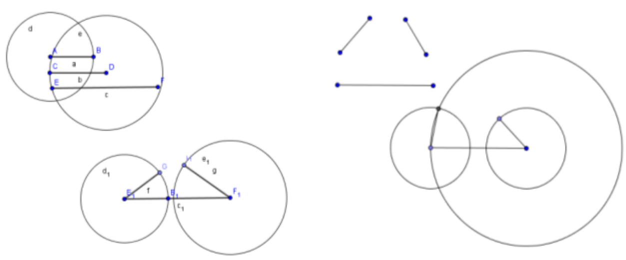


Figura 7: Ejemplo de que no siempre es posible construir un triángulo con tres segmentos dados, solución mostrada por un futuro profesor usando Geogebra

Al darles un segmento y pedirles que construyeran un triángulo isósceles sabiendo que ese segmento era el lado desigual del triángulo, el 100% de los futuros profesores respondieron: infinitos, muchos, varios.

Justificaron en algunos casos que en la mediatriz del lado desigual se localiza el tercer vértice y cuando éste coincide con el punto medio del segmento no se forma triángulo (ver figura 8).

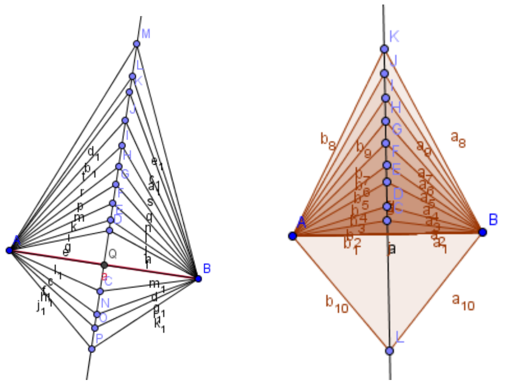


Figura 8: Construcción de triángulos isósceles dado el lado desigual

En el último ejercicio, se les solicitó que ubicaran el punto donde debería construirse una lechería equidistante a tres pueblos no colineales; el 87% de los futuros profesores mostraron la construcción solicitada (ver figura 9).

La manera en la que se desarrolló el ETM personal del futuro profesor unido a su conocimiento de temas matemáticos (KoT) los llevó a modificar su MTSK ya que ampliaron y profundizaron algunos aspectos que se veían reflejados en su forma de trabajar determinadas actividades de construcción geométrica.

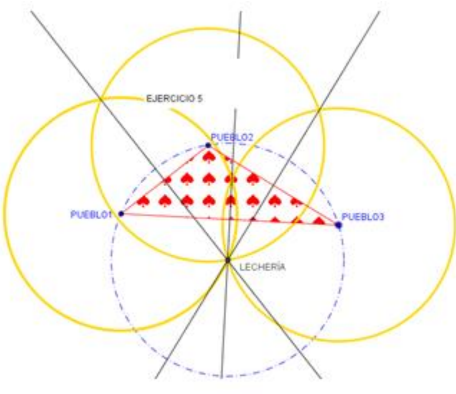


Figura 9: Construcción de una circunferencia por tres puntos dados

A partir de las respuestas identificadas observamos que el KoT que los futuros profesores poseían les permitió utilizar de manera correcta términos y notación matemática. Además, contribuyeron a la construcción de un conocimiento recogido a través de los medios que proporciona el uso de la tecnología, lo que nos llevó a identificar un ETM referencial con la resolución de problemas con apoyo de Geogebra.

Kuzniak y Richard (2014) mencionan que la actividad matemática dentro de una escuela, debe estar representada por la resolución válida de un problema, por tanto, se necesita elaborar un ETM idóneo del futuro profesor que permita la implicación en dicha resolución, para ello en este estudio se utilizaron los ejercicios del cuestionario de KoT, por los datos arrojados, como base para estructurar las actividades del Conocimiento Especializado.

Tercer momento: actividades de Conocimiento Especializado

Actividad 1

El objetivo era que el futuro profesor conociera, explorara y generara conocimiento a través de establecer relaciones y correspondencias de contenidos matemáticos con el uso de GeoGebra, al considerar su ETM personal, logró identificar los elementos que le permitieron la construcción de un triángulo.

Para este ejercicio se proporcionó a los futuros docentes la actividad 1 en GeoGebra donde se observan tres segmentos, con los cuales (si era posible) se construía un triángulo, después, se solicitó que oprimieran la tecla f9 (la cual de manera aleatoria daba tres segmentos) en 10 ocasiones y que escribieran en cada caso si se obtenía un triángulo o no.

En un 100% los futuros profesores indicaron que no siempre era posible construir un triángulo con los tres segmentos que les aparecían, mencionaron que existen segmentos con los cuales no se puede cerrar un triángulo debido a que las circunferencias que contienen a dichos segmentos como sus radios no se intersecan y no forman vértices (ver figura 10).

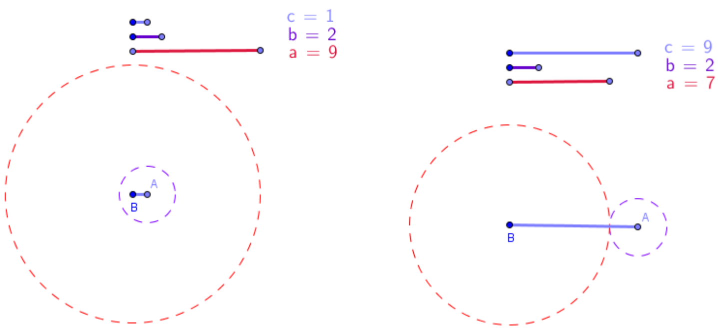


Figura 10: Tres segmentos dados con los cuales no se puede construir un triángulo

Otros futuros profesores hicieron mención de las medidas, indicando que para formar un triángulo la suma de dos cualesquiera de sus lados siempre debía ser mayor que el tercero, o la suma de los lados menores debía ser mayor a la medida del lado más grande, también aludían que uno de los lados siempre debía ser mayor a la diferencia de los otros dos para formar un triángulo a partir de tres segmentos dados (véase figura 11).

Esta actividad nos permitió observar el ETM de referencia desarrollado ya que pudimos notar la relación de la manipulación de artefactos (vistos estos como apoyo para ver si se formaba un triángulo) que dependían de sus conocimientos, bajo sus criterios matemáticos a través de la visualización y la construcción.

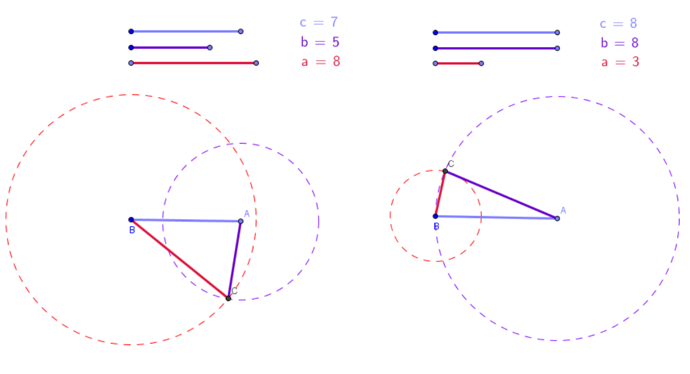


Figura 11: Construcción de triángulos a partir de tres segmentos dados

Los futuros profesores desarrollaron los conocimientos de la propia disciplina que se enseña, además del conocimiento que se relaciona con el conjunto de propiedades que hacen definible un objeto determinado, es decir, las características que permiten que un triángulo se forme o no, mostrando el significado de una condición necesaria y una condición suficiente (Carrillo, Contreras y Flores, 2013).

Esta actividad permitió el desarrollo del ETM personal del futuro profesor cuando a través de sus propios conocimientos y capacidades cognitivas dio solución al problema al cual se enfrentó y utilizó GeoGebra para validar sus respuestas.

Actividad 2

Se le solicitó al futuro profesor que diera solución a la siguiente situación: Se necesita poner un puente para uso de dos comunidades localizadas del mismo lado de un río ¿dónde debe construirse el puente para que la distancia recorrida desde el centro de ambas comunidades al puente sea la misma? El 100% de los futuros profesores dijeron que debían unir el centro de ambas comunidades con un segmento y encontrar el punto medio para trazar una perpendicular que pasara por la mitad del segmento (véase figura 12) y cualquier punto colocado sobre esa mediatriz será equidistante a las comunidades y solamente se debe buscar la intersección con el río.

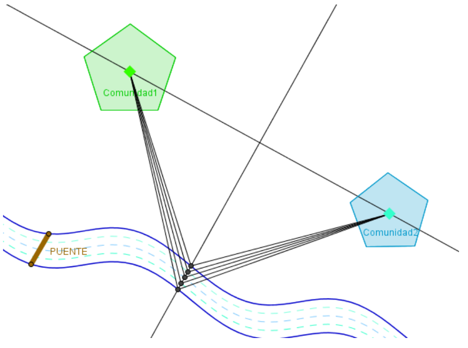


Figura 12: Trazo de la mediatriz de un segmento

Para esta actividad observamos en el futuro profesor el desarrollo del Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) propuesto por Carrillo, Contreras, Climent, et al. (2013), al usar los conocimientos de las actividades anteriores (como la definición de mediatriz) para determinar el punto equidistante y usar GeoGebra como medio de comprobación, ya que, aprovechaban el dinamismo que el software ofrece para validar sus respuestas, esto fomentó que su Conocimiento de los Temas Matemáticos (KoT) cimentara las bases de su Conocimiento Especializado para ajustar y modificar el ETM idóneo que los futuros profesores poseían, observado en la primera fase.

Su Conocimiento referente a la Práctica Matemática (KPM), destaca que el futuro profesor conoce formas de proceder para llegar a resultados y características de un trabajo matemático, sabe cómo se explora y cómo se genera conocimiento a base de establecer relaciones, correspondencias y equivalencias (Carrillo, Contreras, Climent et al., 2013).

El software no solamente facilitó los procesos mentales de los futuros profesores, sino que permitió su interacción, pues implicó que los significados construidos en los ETM personales fueran mediados por la influencia del uso de GeoGebra al resolver las actividades de Conocimiento Especializado.

REFLEXIONES FINALES

La primera fase del estudio nos permitió identificar los intereses que los futuros profesores tenían por contenidos programáticos de geometría, además, al identificar parcialmente sus ETM personal, idóneo y de referencia, observamos que éstos se veían directamente afectados por el dominio matemático.

La aplicación de los ejercicios del KoT diseñados a partir de los resultados obtenidos en la primera fase, permitió establecer y unificar el conocimiento entre los participantes. Identificar el ETM idóneo ayudó a implementar ejercicios para desarrollar su ETM de referencia, y para poder indagar las posibilidades de modificar el ETM personal que poseían los futuros profesores a través de los problemas que enfrentaban al resolver las actividades propuestas. Esta segunda fase del estudio de KoT ayudó a los participantes a modificar su ETM personal ya que refinaban o mejoraban sus ideas a partir de la solución con el uso de GeoGebra.

Pudimos notar lo fundamental que se vuelve el artefacto utilizado (software), debido a que gracias al dinamismo que ofrece GeoGebra se visualizó lo que sucedía al mover algún elemento que formaba parte de la construcción solicitada, esto ayudó a determinar si se seguían cumpliendo las condiciones y características para dar solución a la tarea requerida; también GeoGebra permitió que el futuro profesor pudiera generalizar sus respuestas con mayor precisión, por lo tanto, se contó con una herramienta que promovió una génesis instrumental.

El desarrollo de las nociones del ETM idóneo y personal dependió de la actividad, debido a que observamos que los futuros profesores utilizaban los conocimientos adquiridos en las materias de geometría cursadas en cuarto y quinto semestres de la carrera, pero modificaron su ETM personal a través de la solución de los problemas propuestos apoyados en el software GeoGebra para su solución.

Considerar el ETM de referencia (identificado en la primera fase) y el KoT que los futuros profesores poseían para el diseño de las actividades de conocimiento especializado, permitieron modificaciones en el ETM personal, que a futuro se pretendería ver reflejado en las prácticas docentes con estudiantes de secundaria.

El MTSK sirvió como herramienta para comprender el conocimiento que sustenta las acciones que el futuro profesor pone en juego al dar una clase o al solucionar algún problema relacionado con la construcción de triángulos, el cual es adecuado para explicar parcialmente el ETM idóneo relacionado con la forma de trabajo matemático que se implementa en el aula. Observamos que el KoT (subdominio del MTSK) del futuro profesor incidió en su ETM de referencia y en la transformación de éste en idóneo.

Identificar los ETM (personal, idóneo y de referencia que poseen los futuros profesores de educación secundaria) permitió estudiar el conocimiento relativo a su práctica docente y ver de qué forma la modificación de los ETM ayudó a la construcción de un conocimiento especializado para la enseñanza.

Como se pudo observar, el diseño del ETM dependió del ETM personal del profesor, es decir, el ETM idóneo no es fijo ya que proviene del ETM personal del estudiante más que de la adaptación del ETM personal del profesor y se debe modificar continuamente para ajustarse a las restricciones locales, es por ello que identificar las características que los futuros profesores desarrollan durante su formación al dar clases en secundaria o al resolver situaciones que se les presentan permite hacer cambios importantes durante su proceso formativo, es decir, el ETM se va actualizando mientras se enseña.

Consideramos que los modelos MTSK y ETM, comparten elementos que los hacen complementarios para analizar la actividad en el aula para la comprensión del proceso enseñanza y aprendizaje.

NOTAS

1. MTSK por sus siglas anglófonas (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge).

2. KoT por las siglas en inglés de Knowledge of Topics.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245-274.

Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Colombia, Bogotá: Una empresa docente.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 241-247.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Carrillo, J., Contreras, L.C. y Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina & I. Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática*. Homenaje a Encarnación Castro, (pp. 193-200). Granada: Editorial Comares.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero, D., Flores, E. y Montes, M.A. (2013). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas. Huelva. Universidad de Huelva Publicaciones.

Contreras, L. C. y Blanco, L. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. Unión. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 30, 101-123.

González, G. & Herbst, P. (2009). Students' conceptions of congruency through the use of dynamic geometry software. *International Journal of Computers for Mathematical learning, 14,* 153–182.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements.* Vol. 1, libros I y II. Nueva York, Dover.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2007). *Metodología de la investigación (4ª ed.).* México: Mc Graw-Hill.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. C. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39 (4), 372-400.

Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* vol. 11, pp. 175-193.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. *Puntos de vista y perspectivas. Relime,* México, 17(4) 5-15.

Kuzniak, A. (2011). L’espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, 16, 9-24.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Géomètre. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283-317.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

RELACIONES ENTRE EL CONOCIMIENTO DEL TEMA (MTSK) Y LOS ETM IDÓNEO Y PERSONAL

Diana Zakaryan, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

C. Miguel Ribeiro, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP (Brasil)

Gonzalo Espinoza-Vásquez, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

diana.zakaryan@pucv.cl, cmribas78@gmail.com, gonzalo.espinoza.v@gmail.com

En la presente comunicación se discuten las relaciones entre el conocimiento de los temas (KoT), uno de los subdominios del conocimiento matemático del modelo Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK), revelado por una profesora chilena de 8º grado en el contenido de números racionales, su Espacio de Trabajo Matemático (ETM) idóneo y su ETM personal. La discusión entre los tres elementos teóricos (KoT, ETM idóneo y ETM personal), a partir de la observación de la práctica en las clases de la profesora, de sus producciones y respuestas durante una entrevista, tiene por objetivo ampliar nuestro conocimiento acerca de lo que conforma cada uno de ellos, bien como las interrelaciones entre estos elementos en la práctica docente.

***Palabras Claves**: conocimiento especializado del profesor de matemática, conocimiento de los temas, ETM, números racionales, práctica docente*

INTRODUCCIÓN

El conocimiento del profesor se considera como uno de los aspectos esenciales en la práctica docente (e.g., actuación en las clases, selección y propuesta de las tareas) y relacionados con los aprendizajes (y resultados) de los alumnos. En los últimos años ese conocimiento específico de la actuación docente ha merecido una atención especial, pero sus varios aspectos aun necesitan clarificación y concreción.

En esta línea, se torna esencial obtener una comprensión más amplia y profunda sobre el contenido del dicho conocimiento del profesor (especializado en el sentido del MTSK – Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013). Por otro lado, actualmente se ha desarrollado un amplio trabajo alrededor del denominado Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2011). En ese sentido se propone conjugar, de forma integrada, ambos modelos (MTSK y ETM), analizando y reflexionando en lo que ocurre o en las oportunidades desaprovechadas en la práctica del profesor. Estos análisis y reflexión contribuyen a una comprensión más amplia de cómo se configura el ETM (idóneo) del profesor (e.g., Carrillo, Flores-Medrano, Contreras, & Climent, 2015; Ribeiro, Muñoz-Catalán, & Liñán, 2015) y cuál es el contenido de los distintos subdomínios del MTSK. La articulación de modelos tiene la potencialidad de favorecer a la creación de un ETM idóneo y de ETM personales eficientes (Flores-Medrano, Escudero-Avila, Montes, & Carrillo, 2015; Gómez-Chacón, Romero, & Carrillo, 2015). El profesor en cada paso de génesis y desarrollo de los distintos ETM pone en juego su conocimiento, de ahí que existe una fuerte relación entre el ETM personal del profesor y su conocimiento matemático (Vasco Mora & Climent, 2015). El ETM personal, a su vez, tiene una estrecha relación con el ETM idóneo organizado por el profesor (Kuzniak & Richard, 2014; Carrillo et al., 2015).

En el presente documento discutimos las relaciones entre KoT - uno de los subdominios del conocimiento matemático de una profesora (considerando el modelo MTSK), su ETM idóneo y su ETM personal (en adelante, tres elementos teóricos). Dicha discusión y reflexión tiene por objetivo ampliar nuestra comprensión acerca de lo que conforma cada uno de los tres elementos teóricos, bien como las interrelaciones entre estos elementos en la práctica docente.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Con el fin de dar sentido a los conceptos teóricos esenciales a que se recurre en la investigación, y que posteriormente serán discutidos de forma integrada, presentamos primeramente el modelo MTSK, en particular, uno de sus subdominios y, posteriormente, aspectos del ETM relacionados con el ETM idóneo y el ETM personal**.**

MTSK: Conocimiento especializado del profesor de matemática

Antes de presentar el modelo del Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2013), cabe destacar que los autores se refieren al conocimiento, adaptando la definición de Schoenfeld (2010) del conocimiento como la información que dispone un individuo para usar con el fin de resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. Se entiende aquí que la información que no tenga sentido usar en la actividad que se desempeñe (e.g. en la tarea concreta de la enseñanza de la matemática), no tendrá cabida en esta definición de conocimiento y, se considera que el conocimiento no es necesariamente correcto, destacando con este último la postura del investigador ante todo de comprender el conocimiento del profesor (Carrillo et al., 2014).

En el modelo MTSK (Figura1) se entiende que la especificidad del conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática se refleja en su Conocimiento Matemático (*Mathematical Knowledge* – MK) y en su Conocimiento Didáctico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge* – PCK). Tanto en el MK como en el PCK se consideran tres subdominios. El MK incluye KoT - conocimiento de los temas y sus fundamentos; KSM - conocimiento de estructuras y conexiones entre los temas y KPM - conocimiento de las formas de producir y proceder en matemáticas. En el PCK se contempla KMT - el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (conocimiento de recursos materiales y virtuales, modos de presentar el contenido y el potencial que puede tener para la instrucción, así como el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido), KFLM - el conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido matemático como objeto de aprendizaje, en lugar de poner en el centro el conocimiento sobre el estudiante se pone el proceso de aprendizaje normado por el contenido matemático) y KMLS - el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (conocimiento acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado, sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos). El MTSK considera también un dominio de creencias/concepciones del profesor sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje, íntimamente ligados a los dominios del conocimiento (Carrillo et al., 2013).

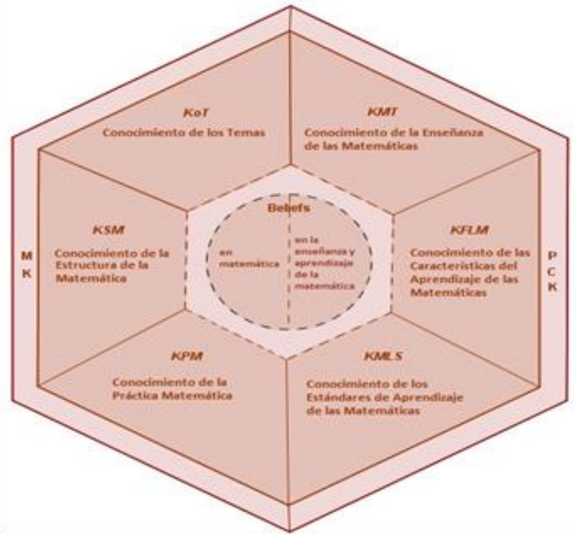


Figura 1: El modelo MTSK (Carrillo et al., 2013)

Debido a que el conocimiento del profesor es un constructo demasiado amplio para ser abordado de forma unitaria, y aun consideremos los distintos subdominios de forma interrelacionada, en este documento nos enfocamos en uno de dichos subdominios, el Conocimiento de los Temas (KoT) – véase, párrafo siguiente.

El KoT se refiere al conocimiento de la matemática como disciplina, incluyendo la matemática escolar, integrando aquí también las relaciones intra-conceptuales (Carrillo et al., 2015). Este subdominio incluye definiciones, procedimientos matemáticos, propiedades y sus fundamentos. El KoT considera los aspectos fenomenológicos de los conceptos (e.g. desde Freudenthal (1983) y Rico (1997)), que permiten relacionarlos con contextos reales o con el propio contenido matemático en forma de ejemplos (Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes, & Climent, 2015) y los distintos registros de representación (e.g. Duval, 1995). Dicho conocimiento permite caracterizar aspectos del tema abordado, además de referirse al contenido disciplinar de la matemática que se presenta en manuales y textos matemáticos, y puede variar de acuerdo al currículo de cada país.

Por ejemplo, saber la definición y fenomenología de los números racionales, su relación con fracción y decimal; conocer distintos algoritmos para las operaciones básicas con fracciones y su fundamentación matemática, forma parte del KoT (Carrillo et al., 2013).

ETM: Espacio de Trabajo Matemático

En el marco de los ETM se distinguen el *ETM de referencia*, un referencial constituido por lo que una comunidad de individuos sustenta y entiende, entre otros, por tarea matemática, sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento; el *ETM idóneo*, corresponde a un espacio organizado en términos de enseñanza en una institución dada, para permitir a un alumno comprometerse con la tarea matemática; y el *ETM personal*, que se encuentra asociado a un espacio donde se lleva a cabo el tratamiento de una tarea matemática por parte del profesor o estudiante, poniendo en juego sus conocimientos y capacidades cognitivas.

Estos tres niveles en los ETM permiten caracterizar el trabajo matemático en un determinado contexto escolar y de un determinado profesor (estudiante): la matemática considerada por la institución que se describe en el ETM de referencia, el profesor que desarrolla el ETM de referencia hasta alcanzar un ETM idóneo que permita una implementación efectiva en clase, donde los estudiantes trabajan en tareas, creando su ETM personal.

En la elaboración del ETM idóneo tiene importancia primordial la elección y la organización de las tareas propuestas a los estudiantes por parte de los profesores. La elección e implementación de las tareas propuestas a los alumnos dependerán, en gran medida, del ETM personal del profesor (Kuzniak, 2011; Kuzniak & Richard, 2014).

CONTEXTO Y MÉTODO

Desde un enfoque cualitativo, realizamos un estudio de caso instrumental (e.g., Stake, 2000) en Chile, con una profesora (Ana) de 8° grado (alumnos de 13-14 años) que cuenta con siete años de experiencia. Con el fin de desarrollar el estudio de caso, centrado en la identificación, análisis y discusión de su ETM idóneo y personal, bien como su KoT, recurrimos a distintos métodos para la recogida de datos: observación *no participante*, grabaciones en video de las siete clases dedicadas al contenido de los números racionales y entrevista semi-estructurada.

Para el análisis, primeramente nos enfocamos en los datos obtenidos en la observación y en las videograbaciones de un conjunto de siete clases dedicadas al tema de los números racionales, buscando identificar evidencias (indicadores) de su KoT y ETM idóneo. Con este fin recurrimos a la modelización de las clases utilizando el instrumento de Ribeiro, Carrillo y Monteiro (2012), donde el objetivo matemático del profesor, en cada momento, es clave para la división de la clase en episodios – en los cuales identificamos los aspectos del KoT y del ETM revelados. En la primera clase, Ana hace introducción a los números racionales, da la definición, presenta distintas representaciones de los números racionales (simbólica, figural, recta numérica), transformaciones de una fracción a número decimal. La segunda clase se dedica a transformar números decimales a fracción, transformar números decimales periódicos y semiperiódicos a fracción. En la tercera clase ven la comparación y orden de los números racionales, en la cuarta definen y calculan los racionales equivalentes. La quinta y sexta clase se dedica a la creación de piezas de dominó y al juego de dominó de números racionales, concluyendo la séptima clase con los procedimientos de adición de números racionales. En total se generaron 25 episodios, según el objetivo matemático de Ana.

En un primer acercamiento a los datos se ha obtenido información sobre el KoT y el ETM idóneo de Ana, pero también nos ha permitido concretar las preguntas de la entrevista a realizar posteriormente. Con el propósito de complementar los aspectos críticos en la práctica de Ana, empezamos la entrevista solicitándola resolver un problema que requiere conocer los procedimientos de transformación de números decimales periódicos y semiperiódicos a su expresión fraccionaria – correspondiendo este a uno de los contenidos explorados en las clases.

La entrevista, basada en dos dimensiones (situaciones críticas identificadas y resolución de un problema), ha permitido clarificar algunos aspectos asociados al KoT revelado – complementando el análisis – así como ampliar la comprensión sobre el contenido de dicho subdominio. El abordaje y el conocimiento del profesor puesto de relieve al resolver el problema y al contestar las preguntas del investigador permiten también indagar y entender mejor los aspectos del ETM idóneo (sobre todo nos fijamos en las tareas propuestas), pero principalmente del ETM personal de Ana (mientras resuelve el problema) y la(s) forma(s) cómo estos se encuentran relacionados con el contenido de su KoT.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado presentamos algunos extractos de episodios de la segunda clase y de la entrevista. Se han elegido estos datos para su discusión dado que nos permiten acercarse al ETM idóneo y ETM personal de Ana, sustentados por su KoT e identificar relaciones entre estos elementos.

Relaciones entre el ETM idóneo y el KoT de Ana

El ETM idóneo se manifiesta cuando el profesor organiza el espacio que permite que los estudiantes trabajen en tareas matemáticas. Mientras su KoT se pone de manifiesto tanto al organizar ese espacio de trabajo, como durante sus distintas intervenciones, no necesariamente relacionadas con el trabajo en tareas matemáticas. En ese sentido nos fijamos en los momentos donde se evidencian ambos elementos (ETM idóneo y KoT).

En la segunda clase, al tener por objetivo transformar los decimales periódicos y semiperiódicos a fracciones, Ana escribe en la pizarra los siguientes ejemplos, y solicita a los estudiantes que busquen una regla:

Ana: $0,\overline{3}=\frac{3}{9}$ $2,\overline{3}=\frac{21}{9}$ Son todos números periódicos, y yo les asocié ya la fracción. Entonces, ahora vamos a buscar la regla, viendo qué es lo que está ocurriendo ahí. Mire bien, primero, mire los números, mire todo y ahí usted podría sacar algunas conclusiones, yo las voy anotando, y después armamos la regla.

De ahí, Ana procura que los estudiantes traten de deducir el patrón para el resto de los decimales:

Ana: Ahora usted tiene que ver las fracciones, ver cómo se relacionan todos los periódicos, y ahí poder decir “yo veo esto, esto otro”.

Alumno: El numerador son las cifras del número sin la coma, y el denominador son tantos 9 como cifras decimales hayan.

Ana: Tú dices que el numerador es el número que está acá sin la coma, pero ¿qué pasó aquí? Y ¿qué pasó ahí? ¿Qué pasó acá? [Alumno pensando]. A todo el número se le restaría la parte entera, lo que no pertenece al período. A ver, veamos ($0,\overline{3}$), a 3 le restamos 0 es 3, ($2,\overline{3}$) a 23 le quité 2 da 21. Ya, estamos. Y rescatamos lo del denominador: se pone un 9 por cada cifra decimal de periodo. Tiene una cifra- un 9, tiene dos cifras- dos 9, tiene tres cifras- tres 9. Ya, leo lo que se concluye. Para transformar de decimal periódico a fracción, se escriben todos los dígitos en el numerador y se le resta lo que no pertenece al período, que sería todo lo que está antes del período, y en el denominador se colocan tantos 9 como cifras decimales haya en el decimal, o en el número decimal.

Ana se conforma con que los estudiantes lleguen parcialmente a una fórmula (aciertan con el denominador, pero no alcanzar a deducir cómo se forma el numerador), mostrándoles los pasos para llegar al patrón, sin provocar cuestionamiento, ni dar o pedir explicaciones del sentido matemático de los procedimientos:

Ana: No le puedo decir, no le puedo decir por qué están estos números, pero son esos, las fracciones asociadas al decimal periódico.

Por sí mismo, buscar un patrón es un buen ejercicio para los estudiantes, sin embargo sin un entendimiento profundo de los porqués asociados a los procedimientos, esa búsqueda se queda a nivel de ejercitación y es difícil que se generalice y se transfiera a otros casos similares (Zakaryan, Ribeiro, & Valenzuela, 2015).

En la entrevista Ana revela una visión de la enseñanza como un producto final, basada en un conjunto de reglas que sus estudiantes tienen que replicar, aunque no las entiendan. A la pregunta, *por qué considera importante que sus estudiantes hicieran esas transformaciones sin entender la fórmula,* Ana da la siguiente explicación:

> Primero lo decidimos así, sin entender la fórmula, porque en el primero medio [curso siguiente] el profesor les explica, suponemos que tendrían mayor madurez para entender el porqué. Aunque tampoco entienden, tampoco se logra entender. Hay una cosa matemática ahí que hay que sumar, luego restar, multiplicar por no sé cuánto y uno no sabe por qué, nadie sabe eso.

Tal como Ana explicó en la entrevista, en el 8 básico no está considerado ver las transformaciones. En relación a los números racionales se establece el siguiente objetivo de aprendizaje:

> *Utilizar las operaciones de multiplicación y división con los números racionales en el contexto de la resolución de problemas* (MINEDUC, 2016, p.27).

La decisión de introducir estas operaciones de transformación fue la del departamento de matemáticas de su institución para que a los alumnos les resulte más fácil en el próximo curso. Este tipo de decisiones no son ajenas a los profesores, de hecho, suelen ser sustentadas en sus teorías implícitas de enseñanza (Pozo, Scheuer, Mateos, & Pérez Echeverría, 2006), en este caso pareciera, basándose en modelos acumulativos de aprendizaje (e.g. estimular el recuerdo de conocimientos previos, presentar el material a aprender, facilitar el recuerdo). Aun así, Ana pone en duda su alcance (*aunque tampoco entienden, tampoco se logra entender*).

Por otra parte, cabe destacar que los objetivos fundamentales relacionados a este tópico para el primero medio en el marco curricular chileno consideran que los estudiantes deben ser capaces de:

> *Representar números racionales en la recta numérica, usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra, aproximar números racionales, aplicar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones con números*

racionales en situaciones diversas y demostrar algunas de sus propiedades (MINEDUC, 2009, p.180).

Podemos ver que explícitamente se espera lograr la capacidad de *usar la representación decimal y de fracción de un racional justificando la transformación de una en otra*.

Si bien, las clases de Ana dedicadas a los números racionales son introductorias para después retomarlos con más profundidad en el siguiente curso, como ella lo menciona en la entrevista, el conocimiento de Ana en cuanto a la realización de transformaciones sigue siendo procedimental, no es consciente de las razones matemáticas que sustentan esos procedimientos (*uno no sabe por qué, nadie sabe eso*) (Zakaryan, Ribeiro, & Valenzuela, 2015). Una de las características que define al KoT es el conocimiento de los procedimientos y los argumentos a las preguntas ¿cómo se hace/utiliza? y ¿por qué se hace/utiliza? En este caso, si bien observamos algunos indicios de su conocimiento respecto a la pregunta *cómo se hace*, se destaca la ausencia de un fundamento matemático a la pregunta *por qué se hace*, hecho que incide en la construcción de su ETM idóneo.

Desde el punto de vista del ETM, como podemos notar, el ETM idóneo de Ana está influenciado por su KoT, particularmente, por su reconocida carencia de los fundamentos de los procedimientos matemáticos. La tarea planteada solicitaba la búsqueda de un patrón lo que permite asumir que pretendía la elaboración de razonamientos de validación para los procedimientos activando la génesis discursiva. Sin embargo la falta del conocimiento mencionado hace que el ETM idóneo no contemple la organización de componentes de validez y, por lo tanto, no se aproveche la tarea en toda su riqueza matemática.

Relaciones entre el ETM personal y el KoT de Ana

Con la tarea que se ha planteado a Ana durante la entrevista, se ha pretendido observar su ETM personal mediante la identificación de uso del conocimiento asociado a las categorías del KoT. Se ha pedido a Ana ordenar de menor a mayor los tres números racionales expresados uno en su forma decimal y otros dos en su forma fraccionaria (Imagen 1).

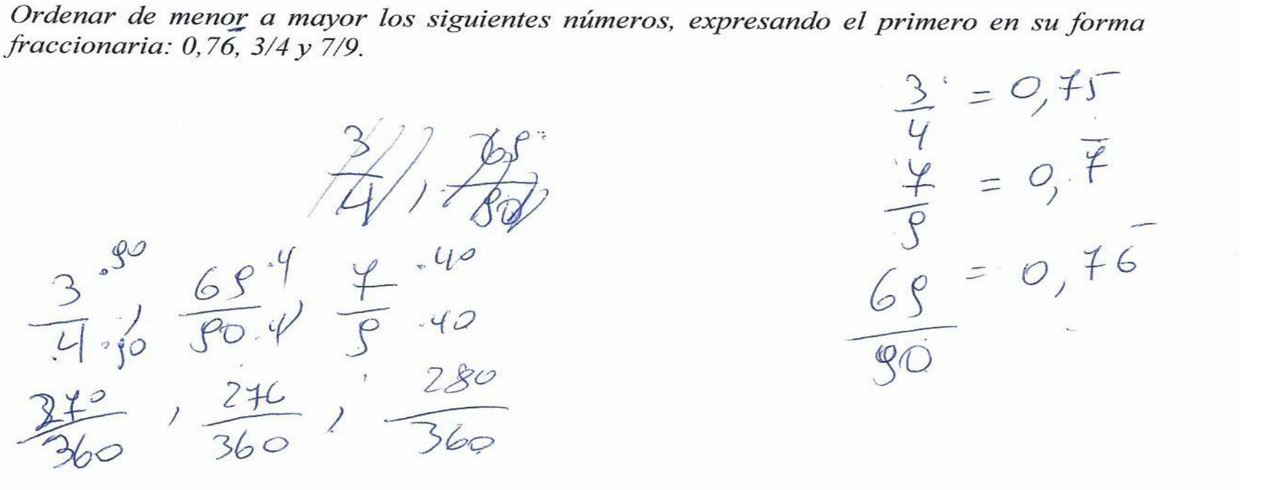

Ordenar de menor a mayor los siguientes números, expresando el primero en su forma fraccionaria: 0,76, 3/4 y 7/9.

Imagen 1: Protocolo de la producción de Ana

Para realizar la tarea, como conocimiento matemático, requiere la ordenación de números racionales próximos (diferenciación a partir de las centésimas si se usa la expresión decimal, o bien ordenación de fracciones equivalentes con el mismo denominador) y la conversión de la expresión decimal a la expresión fraccionaria de un número racional, conocimientos que se inscribirían en el KoT de Ana.

Según la producción de Ana (Imagen 1), ella prefiere transformar las fracciones por el algoritmo y ordenarlos según su expresión decimal. Cuando se le recuerda que en el enunciado se pide expresar el primero en su forma fraccionaria, Ana hace la ordenación tras expresar todas las cantidades como fracciones de igual denominador. En ambos casos aparece indicio de sólo un conocimiento que puede calificarse de elemental[1]. Si bien la tarea no solicita comparar usando fracciones, en la entrevista se le incentivó a realizarla de distintos modos posibles y son los que se presentan. El conocimiento de las fracciones equivalentes de Ana y su uso para ordenar números racionales es básico, cercano al conocimiento de algunos alumnos.

En este caso, observamos el KoT de Ana como componente de su ETM personal. El conocimiento que pone en acción para tratar el problema muestra que la tarea es abordada en el mismo registro semiótico en el que se plantea (numérico), realizando las transformaciones antes descritas entre expresiones fraccionarias y decimales, privilegiando así la génesis semiótica. El razonamiento involucrado para comparar las expresiones decimales puede deberse a ausencia de conocimiento sobre orden en los números racionales o de procedimientos alternativos para realizar la comparación (representación en la recta numérica o figural). Sin embargo, la técnica de generar fracciones equivalentes con igual denominador mediante la amplificación, aunque sin una conexión evidente con la génesis discursiva, parece ser un procedimiento usado con el estatus de herramienta, tomando el lugar de un artefacto simbólico para esta tarea. El signficado que se le atribuye al objeto matemático es parte del KoT y se relaciona directamente con el ETM personal.

Relaciones entre el ETM personal y el ETM idóneo de Ana

De acurdo con lo expuesto, el uso que Ana da al conocimiento del procedimiento para la transformación de un número racional en su forma decimal a su forma fraccionaria (ETM personal), se limita a una técnica de conversión.

Por otra parte, se aprecia una traslación de sus conocimientos a las expectativas de interacción de sus estudiantes con el contenido matemático, lo que supone que su ETM idóneo consista en plantear tareas que requieren procedimientos algorítmicos sin ahondar en los fundamentos matemáticos de estos procedimientos.

COMENTARIOS FINALES

En el aula de matemáticas, las tareas diseñadas por el profesor provocan la intervención e interacción de distintos elementos, entre los cuales hemos querido resaltar aquí los conocimientos del profesor, el principal actor del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Como se ha podido observar, el conocimiento del profesor en relación con el tema que se está trabajando, su modo de proceder frente a una tarea matemática y su propuesta de trabajo para sus estudiantes se relacionan entre sí, viéndose asimismo influenciados por otras dimensiones como las concepciones y creencias del profesor en relación con la matemática, y con su enseñanza y aprendizaje. Ambas teorías, el ETM y el MTSK, poniendo en el centro la matemática, permiten aproximarnos a la comprensión de esas relaciones a partir de las nociones de ETM personal, ETM idóneo y MTSK (particularmente el subdominio KoT).

En este caso particular, se hace notable la incidencia del ETM personal y del KoT del profesor en el ETM idóneo generado. Estos resultados indican algunas consideraciones para la formación inicial de profesores. Es necesario que la formación inicial de profesores, siendo un contexto formativo de construcción de un KoT (y otros subdominios), incluya elementos propios de una actividad matemática genuina (donde se considere, por ejemplo, la relevancia de los procesos de validación y justificación), poniendo atención en cómo están construyendo su ETM personal los futuros profesores y considerar la incidencia de éste en el ETM idóneo.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo financiado por el proyecto Fondecyt 11140092.

NOTAS

1. Distinto sería si se compara 3/4 y 7/9, aplicando razonamientos de la naturaleza de las fracciones, indicando, por ejemplo, que 3/4 = 6/8 y que 6/8 < 7/9 ya que la diferencia entre el numerador y el denominador se mantiene, mientras que el denominador va aumentando en una sucesión que tendería a 1 (n/n+2); así podrían compararse las fracciones 3/4, 23/30 y 7/9. Lo anterior serviría también para justificar que 3/4 = 21/28 < 23/30. Por otra parte, 23/30 = 69/90 < 70/90 = 7/9. (Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán, & Climent, 2013).

REFERENCIAS

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Actas CERME 8* (pp.2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Montes, M., Escudero-Ávila, D. & Flores-Medrano, E. (Eds.). (2014). *Un marco teórico para el conocimiento del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones: Huelva.

Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Contreras, L.C., & Climent, N. (2015). El profesor en el marco de los ETM: el papel del MTSK como modelo de conocimiento. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. Richard (Eds.), *Actas del ETM 4* (pp. 461-471). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Contreras, L.C., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M.C., & Climent, N. (2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestro. *Bolema, 26* (42B), 433-457.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berna: Peter Lang.

Fernández, S., Figueiras, L., Deulofeu, J., & Martínez, M. (2011). Re-defining HCK to approach transition. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Actas CERME 7* (pp. 2640-2649). Rzeszów: ERME.

Flores-Medrano, E., Escudero-Avila, D., Montes, M., & Carrillo, J. (2015). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas con su entendimiento sobre los espacios de trabajo matemático? En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. Richard (Eds.), *Actas del ETM 4* (pp. 461-471). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrech: Reidel Publishing Company.

Gómez-Chacón, I.M., Romero, I., & Carrillo, J. (2015). Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor y las interacciones. En I.M. Gómez-Chacón, J, Escribano, A. Kuzniak & P.R. Richard (Eds.), *Actas del ETM 4* (pp. 399-417). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 16,* 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Troisième symposium Espace de travail mathématique*, 7-12.

Ministerio de Educación (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Enseñanza Básica y Media. Actualización 2009*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación (2016). *Matemática. Programa de Estudio. Octavo básico.* Santiago de Chile: Autor.

Muñoz-Catalán, M.C., Contreras, Luis C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M.Á., & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *18*(3), 589-605.

Pozo, J, I., Scheuer, N., Mateos, M., & Pérez Echeverría, M. (2006). Las concepciones de los profesores de educación primaria sobre la enseñanza y el aprendizaje. En J. Pozo, N. Scheuer, Pérez, M. Echeverría, M. Mateos, E. Martín, & E. de la Cruz (Eds.), *Nuevas formas de pensar la enseñanza y el aprendizaje* (pp. 171-188). Graó: Barcelona.

Ribeiro, C.M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 15*(1), 277-310.

Ribeiro, C.M., Muñoz-Catalán, M.C., & Liñán, M.M. (2015). Discutiendo el conocimiento matemático especializado del profesor de infantil como génesis de aprendizajes futuros. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P.R. Richard (Eds.), *Actas ETM 4,* (pp. 575-589). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Rico, L. (Ed.) (1997). *La educación Matemática en la enseñanza Secundaria*. Barcelona: Editorial Horsori.

Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think*. Nueva York: Routledge.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Vasco Mora, D. & Climent, N. (2015). Espacios de trabajo matemático y conocimiento de un profesor de álgebra lineal. En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak, & P. Richard (Eds.), Actas *ETM 4,* (pp. 461-471). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Zakaryan, D., Ribeiro, C.M., & Valenzuela, P. (2015). Conocimiento matemático especializado de los números racionales – un caso de una profesora chilena. En P. Scott & A. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 2: Formación Inicial para Secundaria.* (137-148). República Dominicana.

UNA APROXIMACIÓN A LAS RELACIONES MTSK-ETM EN EL AULA DE FORMACIÓN DE MAESTROS

Miguel Montes[1]; Francisco Jofré[2]; José Carrillo[1], Luis Carlos Contreras[1]

[1]Universidad de Huelva; [2]Universidad Autónoma de Guerrero

miguel.montes@ddcc.uhu.es, francisco.jofre@usach. cl, carrillo@uhu.es, lcarlos@uhu.es

Esta investigación se centra en mostrar, a través de un estudio de caso, cómo un formador de maestros experto despliega su conocimiento para implementar y gestionar un espacio de trabajo geométrico ligado a las propiedades de los triángulos a través del uso de Geogebra. El uso que haremos de este caso será instrumental, de cara a continuar la profundización iniciada en el Simposio del ETM4 entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), y los espacios de trabajo matemáticos.

Palabras Claves*: Conocimiento del profesor, Espacios de Trabajo matemático, Geometría, Formación Profesional, Formador de Maestros*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el formador de docentes ha comenzado a recibir atención desde la investigación en educación matemática. En particular, Kilpatrick y Spangler (2016) propusieron el uso del modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas -MTSK- (Carrillo, Climent, Contreras, Muñoz-Catalán, 2013) como una conceptualización que puede orientar el tipo de conocimiento que un formador de profesores (formador de maestros, en particular) debe poseer para formar a futuros docentes. MTSK desgrana los diferentes tipos de conocimiento que un profesor pone en juego cuando enseña matemáticas, y se asume que un formador de maestros debe, tanto ser consciente de los diferentes tipos de conocimiento necesarios para impartir matemáticas en primaria, como tener una visión superior que le permita saber gestionar el desarrollo profesional en su etapa inicial.

En este documento, mostraremos cómo, en el aula de formación inicial, se articula la relación entre el MTSK del formador y el MTSK del estudiante para maestro a través de la discusión de determinados conceptos matemáticos ligados a la geometría. Para obtener una visión más clara de la naturaleza de la actividad matemática que se genera, recurriremos a la perspectiva que nos aportan los Espacios de Trabajo Matemáticos (Kuzniak y Richard, 2014), en el caso particular de geometría (Gómez-Chacón, Kuzniak, 2013). Mostraremos cómo el aula de formación inicial es un contexto donde el formador de maestros tiene la oportunidad de discutir elementos que conformarán parte del futuro ETM (idóneo y de referencia) de los estudiantes para maestro, lo que permitirá a estos generar y gestionar los ETM de sus futuros alumnos. Por consiguiente, en lo que sigue pretendemos subrayar las relaciones entre MTSK y ETM, al tiempo que profundizamos en el MTSK del formador de profesores.

PERSPECTIVAS TEÓRICAS

En este estudio se articulan dos propuestas, como son los ETM y el MTSK, siguiendo la línea que iniciamos en Flores-Medrano, Montes, Carrillo, et al. (2016). Pasamos a continuación a describir ambas perspectivas, para posteriormente mostrar nuestra propuesta de Triángulo Didáctico del aula de formación inicial, donde se articulan el profesor (formador de maestros), los estudiantes para maestro (alumnos), y el contenido, desde la perspectiva de las relaciones ETM-MTSK.

Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

El marco del conocimiento especializado del profesor de matemáticas se basa en la propuesta de Shulman (1986), y el posterior refinamiento de Ball, Thames y Phelps (2008), para determinar las diferentes componentes que el conocimiento de un profesor de matemáticas tiene en relación con el contenido que imparte. Así, considera que existen tres dominios, el conocimiento matemático (MK), el conocimiento didáctico del contenido (PCK), y las creencias acerca de la matemática y su enseñanza y aprendizaje (figura 1).

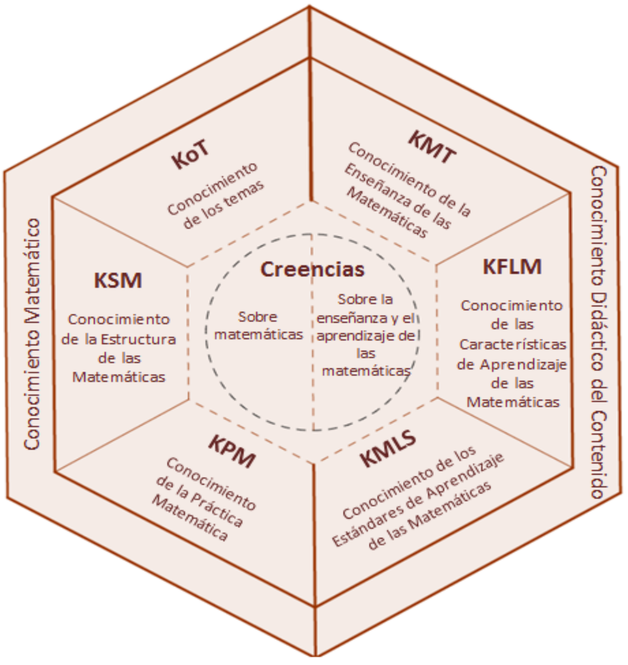


Figura 1: Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, MTSK

Este marco propone, dentro del conocimiento de la matemática, una división en tres subdominios ligada al tipo de conocimiento que el profesor usa y posee sobre el contenido que imparte. Este conocimiento puede estar ligado a tópicos concretos, lo cual se contempla en el subdominio del conocimiento de los temas (KoT), abarcando conocimiento de definiciones, propiedades, fenomenología, etc., ligados a un mismo tema. El profesor también puede tener sensibilidad estructural, acerca de cómo se articulan y conectan entre sí los diferentes temas, lo cual se considera en el subdominio del conocimiento de la estructura matemática (KSM). Finalmente, el profesor debe saber cómo se "hace" matemáticas, esto es, las reglas sintácticas de construcción matemática, recogidas en el subdominio del conocimiento de la práctica matemática (KPM).

En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, se proponen tres subdominios. El primero, centrado en el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), abarca aquello que el profesor conoce acerca de metodologías, teorías y recursos (en cuanto a sus potencialidades y limitaciones) que le permiten trabajar el contenido en el aula. El segundo, denominado conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), contempla el conocimiento que el profesor posee acerca de cómo ciertos contenidos son aprendidos, ya sea desde una perspectiva general, o centrado en alumnos concretos, así como de las dificultades de aprendizaje de estos. El último subdominio que se propone es el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS), el cual incluye el conocimiento de lo que es esperable que puedan aprender los estudiantes de un determinado nivel.

Finalmente, tenemos el dominio de las creencias y concepciones sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Las primeras están ligadas a verdades personales cuya validación o refutación suele depender de valores personales, y que tienen una profunda carga emocional, mientras que las concepciones son más estructuradas y de naturaleza menos afectiva que las creencias (Ponte, 1994). Creencias y concepciones influyen tanto en el “contenido” del conocimiento, como en la forma en que se adquiere y pone en juego el mismo.

Espacios de Trabajo Geométrico

Para realizar tareas matemáticas, son necesarias una serie de concepciones, técnicas y prácticas compartidas, a las que se puede interpretar como un paradigma (Gómez-Chacón, Kuzniak, 2013), y en particular, cuando dichos elementos están ligados a la geometría, pueden considerarse tres paradigmas geométricos: La *Geometría Natural*, en la que los procesos de validación y argumentación están centrados en la interacción con el mundo físico y la experimentación; la *Geometría Natural Axiomática*, en la que se generan dichos axiomas desde la realidad, pero que una vez definidos pasan a constituir el elemento en el que se fundamenta todo el trabajo matemático; y finalmente, la *Geometría Axiomática Formal*, propia del trabajo matemático que se ejerce a un nivel universitario, en la que no existen referencias a elementos perceptivos, y cuyos fundamentos son los propios de la lógica matemática.

Basado en cada uno de los paradigmas, se propone el modelo de los Espacios de Trabajo Matemáticos (ETM), en el que se disponen dos planos de trabajo, uno epistemológico, ligado al significado de los objetos, y otro cognitivo. En el plano epistemológico se identifican representamen, referencial y artefactos como elementos del mismo, mientras que en el cognitivo, ligado a la actividad mental de un individuo particular, se encuentran la visualización, la prueba y la construcción. Basándose en las ideas de Duval (2005), Gómez-Chacón y Kuzniak (2013) proponen los espacios de trabajo matemáticos (y en particular los geométricos), en el que ambos planos se relacionan a través de tres tipos de génesis: semiótica, instrumental y discursiva.

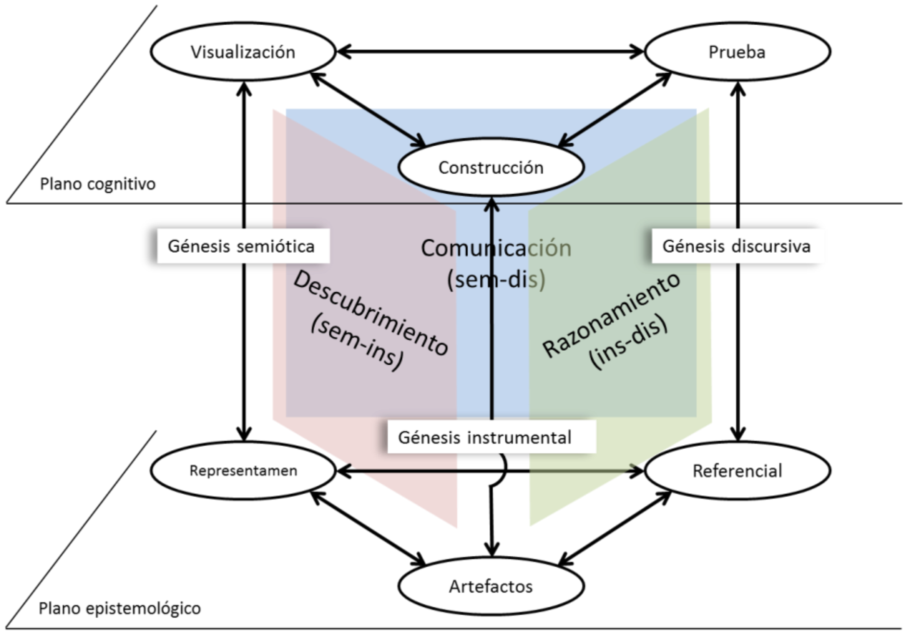


Figura 2: Planos, polos y génesis del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak; Richard, 2014)

La primera de las génesis, la génesis semiótica, se basa en la transición de la percepción del objeto a su conceptualización como objeto simbólico. En la génesis instrumental, se relacionan los artefactos epistemológicos con las configuraciones que cada individuo hace de los mismos. Por último, en la génesis discursiva, asociada a la validación, se ponen en juego los elementos de razonamiento matemático, a través de la articulación de diferentes argumentos, *usando definiciones y* *propiedades, de forma estructurada, del marco de referencia matemático* (Gómez-Chacón, Kuzniak 2015, p.205). Así, se proponen tres planos que corresponden al trabajo en pares de génesis: Descubrimiento (semiótico-instrumental), Razonamiento (instrumental-discursiva), Comunicación (semiótico-instrumental).

En Flores-Medrano, *et al*. (2016), mostramos cómo el conocimiento especializado del profesor de matemáticas se relaciona con los ETM (figura 3).

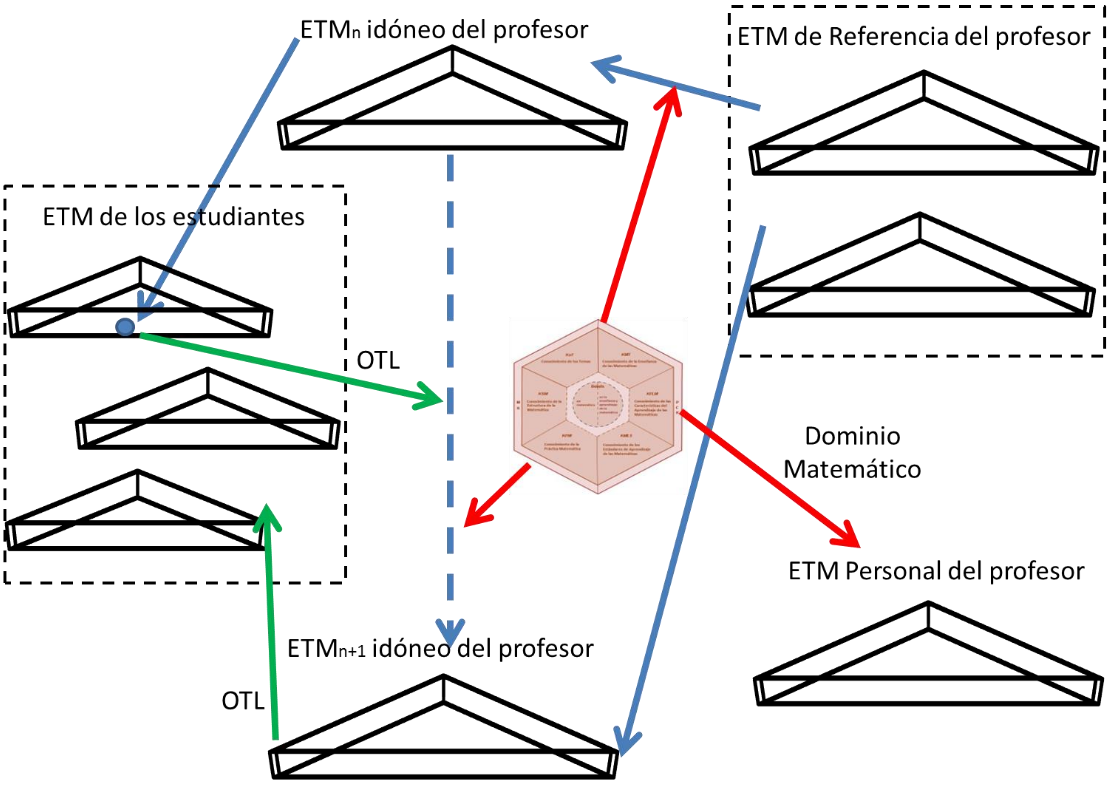


Figura 3: Relaciones ETM-MTSK (Flores-Medrano et al, 2016)

Las relaciones propuestas conciernen a cómo el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, tanto matemático como didáctico, se interrelaciona con los diferentes Espacios de Trabajo Matemáticos (representados por prismas triangulares en el esquema), tanto en cuanto al diseño y rediseño del ETM idóneo del propio profesor, como en las oportunidades de aprendizaje (OTL) que el profesor tiene al observar el aprendizaje de sus alumnos. En el análisis siguiente profundizaremos en estas relaciones.

METODOLOGÍA

En este estudio, como ya se ha señalado, queremos mostrar cómo un formador de maestros experto despliega su conocimiento para implementar y gestionar un espacio de trabajo geométrico ligado a las propiedades de los triángulos a través del uso de Geogebra. Para ello, usaremos un estudio de caso de tipo instrumental (Bassey, 1999), para evidenciar las relaciones que existen entre ETM y MTSK tanto en el caso del alumno, como del profesor, y del contenido.

El profesor informante de nuestro estudio, Leopoldo, lleva más de 30 años como formador de maestros, siendo un profesional de reconocido prestigio, como docente, investigador, dentro de su contexto, tanto por parte de sus compañeros, como de sus estudiantes. Asimismo, posee un gran dominio y comprensión del contenido que imparte, proponiendo situaciones problemáticas de dificultad variada, que aborda con diferentes técnicas de resolución y a través de diversas técnicas de enseñanza, entre las que destaca el uso de las TIC, y en particular de Geogebra. Asimismo, Leopoldo es plenamente consciente de los procesos de cambio en el sistema educativo español, lo cual le lleva a actualizar su propio conocimiento, actitud y forma de actuación en el aula. Todos estos rasgos, siguiendo los criterios propuestos por Rojas, Carrillo y Flores (2012), nos llevan a afirmar que es un profesor experto. Es necesario comentar, además, la implicación de Leopoldo en actividades de investigación, y, especialmente, su conocimiento de modelos de conocimiento profesional, en particular MTSK, y de la conceptualización de los ETM. Esto hace que, como informante para esta investigación, Leopoldo pueda aportarnos, en la entrevista, elementos de análisis sobre su propia práctica y conocimiento.

El curso en el cual nos centramos corresponde al cuarto y último curso del programa de formación de profesores de la Universidad de Huelva, diseñado para dotar a los estudiantes de los conocimientos geométricos, así como de recursos, útiles para la enseñanza de las matemáticas en Educación Primaria. En concreto, las sesiones observadas están centradas en el estudio de las propiedades y la construcción de triángulos rectángulos. Asimismo, dado el bagaje de Leopoldo en el uso de software educativo, especialmente Geogebra, éste es un elemento central en las clases, siendo usado para mostrar representaciones de los objetos matemáticos que se discuten, así como para generar procesos intuitivos de validación.

Para acceder a la información, asistimos a un total de 10 sesiones de clase de Leopoldo, de dos horas cada una, donde, además de realizar una videograbación centrada principalmente en el profesor, se tomaron notas de campo. Asimismo, para comprender en mayor profundidad la organización, gestión y orientación que se daba a las clases, se dispuso de la planificación de las mismas, y se realizó una primera sesión de entrevista, con el fin de indagar en indicios y oportunidades que brindó la observación, una serie de entrevistas intermedias, en la que se exploraron algunos de estos indicios y oportunidades, así como una última entrevista de consenso cuya finalidad fue triangular metodológicamente la información obtenida (Flick, 2006). Ha de tenerse en cuenta que Leopoldo conoce los dos modelos teóricos que sustentan esta investigación, lo que permitió afinar el análisis en las entrevistas intermedias y de consenso (para la investigación que aquí se presenta, es indistinto el origen de la entrevista, por tanto, no se hará diferenciación alguna). Esta aproximación multimetodológica (Baxter, Lederman, 2000) deriva no sólo en una triangulación de la información a través de la multiplicidad de fuentes de la misma, sino también en una compleción de la propia información derivada de las especificidades que aporta cada una de ellas.

ANÁLISIS

En este apartado mostraremos extractos tanto de los episodios de clase observados, como de la primera entrevista que se llevó a cabo para profundizar en su conocimiento. En la sesión que aquí se analizará, Leopoldo propone a sus estudiantes que construyan (con Geogebra) sobre una semicircunferencia el triángulo formado por los extremos del diámetro y un tercer punto de la semicircunferencia (que él mismo dibuja en Geogebra). Vamos a presentar tres extractos consecutivos del mismo episodio de clase, que se inicia con la actividad indicada.
Como se verá a continuación, en el abordaje de la representación de triángulos sobre una semicircunferencia, Leopoldo centrará la atención de la discusión con sus estudiantes en las propiedades de estos triángulos y en la justificación de sus argumentos.

Extracto 1

L. ¿Ya lo han hecho todos? ¿Qué tipo de triángulo es?
A.2 Rectángulo.
L. ¿Tú como sabes que es rectángulo?
A.2 Porque he medido el ángulo del vértice sobre la semicircunferencia con Geogebra.
L. Entonces vamos a darle el valor a los otros ángulos. ¿Para todos es rectángulo?

A.3 No.
L. ¿Por qué no?
A.4 Ahh, no he colocado el punto dentro de la semicircunferencia.
L. El punto debes colocarlo sobre. ¿A todos nos sale rectángulo?
Todos. Sí.

Preguntas como ¿Tú cómo sabes que es rectángulo?, ¿Por qué no [es rectángulo]? son una evidencia del interés de Leopoldo por que la justificación forme parte de sus clases. En su ETM idóneo pretende activar la génesis discursiva en sus estudiantes. Esto muestra, a su vez, un indicio de su conocimiento de la práctica matemática (KPM), siendo la justificación uno de los procedimientos propios de la validación en Matemáticas. Asimismo, el proceso de construcción que se propone con el uso de Geogebra como artefacto sitúa el propósito de Leopoldo de activar el plano de razonamiento, empleando también su conocimiento del propio recurso (conocimiento de la enseñanza de la matemática, KMT). Por otra parte, se activa el proceso de visualización que se realiza sobre el representamen (objeto triángulo, objeto circunferencia) y las génesis semiótica e instrumental, afectando, por tanto, a los otros dos planos verticales del espacio de trabajo matemático.

Extracto 2

L. Vamos a hacer una cosa, una vez construido el triángulo que casualmente es rectángulo, vamos a mover el vértice que hemos creado sobre la semicircunferencia y vamos a fijarnos en el valor de ese ángulo que "casualmente" era recto.
A.5 No cambia.
L. Así que hagamos un enunciado.
A.5 Siempre que un triángulo esté inscrito en una semicircunferencia será recto, será rectángulo.
A.6 ¿Independiente del triángulo?
L. Cualquier triangulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo, A.7 dice que no.
A.7 Uno de los lados debe ser el diámetro.

Estamos ahora ante la promoción, por parte de Leopoldo, de la formulación de un enunciado (una conjetura). Está activando, pues, el plano de descubrimiento en sus estudiantes. Naturalmente, esto es posible porque posee un conocimiento del tema (KoT) que le permite saber las condiciones del enunciado que pretende que sus estudiantes generen.

Extracto 3

L. Enunciémoslo bien, entonces, A.5, segundo intento. A.5 Un triángulo inscrito en una semicircunferencia…
L. Cualquier [triángulo], eso faltó. A.5Cualquiertriangulo inscrito en una semicircunferencia y que uno de sus lados sea el diámetro, siempre es rectángulo. L. Vale, ahora les hago una pregunta. Afirmo una cosa y me dicen si es verdad o mentira. "Cualquier triángulo inscrito en una circunferencia de manera que uno de los lados sea el diámetro, es rectángulo".
Varios A. Sí.
L. Es lo mismo, ¿no? Solo que la semicircunferencia ha sido un pretexto para trabajar esto, así que lo puedo extender a una circunferencia. La condición importante es que ese triángulo inscrito tenga uno de sus lados como…
A.8 Diámetro.

La primera parte de este extracto presenta el objetivo de Leopoldo de obtener una formulación precisa de la conjetura. Así, este profesor muestra su conocimiento de la práctica matemática, donde la precisión cobra gran relevancia. En su ETM idóneo, Leopoldo está activando el plano de comunicación. Posteriormente plantea un proceso de evaluación de una afirmación propia, ligado al plano de descubrimiento, en el que los estudiantes deben interpretar de forma general la información observada en los casos concretos provistos por Geogebra.

Extracto 4

L. Y, ojo, una cosa, no estamos demostrando nada. Estamos conjeturando, estamos enunciando resultados que creemos posibles. Y estamos comprobando que lo que parece que es, [realmente] ocurre. Pero esto no es demostrar, esto yo lo llamaría comprobar, comprobar una conjetura, ver con una herramienta tan potente como Geogebra una conjetura. Pero el hecho de conjeturar es un hecho muy interesante en primaria, la capacidad de que un alumno por sí mismo enuncie un resultado que para él es nuevo y es muy potente. Esto es a lo que nosotros llamamos hacer matemáticas.

Leopoldo nos muestra aquí su KPM, diferenciando demostración de conjetura. Asimismo, da la impresión de que piensa que los alumnos de primaria pueden llegar a formular conjeturas, lo que corresponde al KMLS (conocimiento de los estándares de aprendizaje). Por otra parte, Leopoldo nos muestra un modo de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas cuando expone qué es lo que nosotros llamamos hacer matemáticas.

Estos cuatro episodios muestran el tipo de trabajo que fomenta Leopoldo. Así, el ETM idóneo que este profesor parece querer implementar se basa en la conjeturación sobre las propiedades del triángulo inscrito en la circunferencia. En particular, se basa en un caso particular, que obtiene rasgos de generalización por la naturaleza dinámica de Geogebra, que aporta cierta ilusión de completitud al abarcar (visualmente) de forma continua la situación del vértice del triángulo en todos los puntos de la semicircunferencia.

En esta sesión, Leopoldo fomenta que sus estudiantes trabajen el plano de comunicación, ya que, con base en la representación pictórica de la familia de triángulos que se puede generar sobre la semicircunferencia propuesta, pretende que se desarrolle un razonamiento perceptivo que les permita proponer cierta propiedad. En una de las entrevistas, Leopoldo afirmó:

L: En esta actividad, la construcción matemática [del triángulo inscrito en la semicircunferencia, y sus propiedades] es una herramienta que me permite generar un proceso de reflexión, y de articulación de la propiedad que quería que se comprendiera.

Así, en su ETM idóneo, Leopoldo pretende que la sesión transcurra en el plano de descubrimiento ya que su interés es que, dado el contexto que se propone, los estudiantes interpreten los artefactos matemáticos involucrados en ese contexto, y generen propiedades desde la visualización e interacción (mediada por Geogebra) de dichos artefactos. Desde su perspectiva, los artefactos matemáticos involucrados son meras herramientas que le permiten generar la discusión sobre esta propiedad. Las clases observadas de Leopoldo tienen un sesgo eminentemente matemático, incidiendo de forma escasa en aspectos didácticos. En particular, al preguntar a Leopoldo por el objetivo de la actividad, respondió:

L: Que siempre que vean un triángulo inscrito en una circunferencia, de manera que uno de los lados es el diámetro, lo identifiquen como rectángulo y viceversa. Que si saben que tienen un triángulo inscrito en una circunferencia y ese triángulo es rectángulo, forzosamente uno de los lados es el diámetro. Esa condición es necesaria y suficiente. Ese era mi objetivo. Es un objetivo que está relacionado con otros objetivos que se van viendo también, por ejemplo, para trabajar la inscriptibilidad de los cuadriláteros, y como colateral la identificación del ángulo inscrito y su medida en relación con el arco.

Como podemos ver, Leopoldo hace énfasis en el contenido matemático desde un paradigma natural axiomático, trabajando, desde la visualización, la percepción y formalización de las relaciones entre diferentes elementos geométricos, mostrando una demostración, no desde una perspectiva puramente formal, pero sí basada en los elementos matemáticos (y no puramente visuales, como en el paradigma natural). Por tanto, parte del trabajo matemático parece orientarse al enriquecimiento del plano de razonamiento, ya que hay un enriquecimiento del referencial teórico, sin una prueba formal como tal, basada en las propiedades. Asimismo, podemos ver que Leopoldo tiene una visión de la tarea no sólo a nivel local, sino también desde una perspectiva superior (Kilpatrick, 2008), que le aporta una visión de conjunto sobre la prospectiva de los contenidos que trata. Asimismo, vemos que los objetivos de la sesión son la construcción de conocimiento del tema abordado (KoT), y de ciertos aspectos ligados al conocimiento sintáctico de forma implícita (KPM), al considerar las condiciones necesarias y suficientes (uso de "viceversa"). El conocimiento que Leopoldo tiene acerca de las relaciones entre contenidos tiene su reflejo en la secuenciación de contenidos que hace, que puede generar en algunos estudiantes un cierto grado de consciencia sobre cómo se van articulando los contenidos abordados.

En particular, un elemento central de la sesión es el aprovechamiento de Geogebra, en el que consideramos dos aspectos fundamentales, el carácter dinámico que da el recurso a los contextos geométricos, por una parte, y las limitaciones que tiene dicho recurso, por otra. Al invitar a Leopoldo a reflexionar sobre el aprovechamiento del carácter dinámico, en particular al movimiento del tercer vértice del triángulo, respondió:

L: Al mover el punto sobre la circunferencia lo que conseguimos es generalizar la situación de un triángulo a todos los triángulos posibles, con lo cual vemos o tenemos la posibilidad de ir viendo elementos que permanecen y elementos que se modifican al ser el tercer vértice del triángulo (puesto que dos de ellos han sido fijados por el diámetro) un elemento de la semicircunferencia.

Vemos que la comprensión que Leopoldo tiene del recurso abarca diferentes aspectos. Podemos ver que posee los conocimientos matemáticos que sustentan su funcionamiento (KoT), en particular los elementos centrales que pretende discutir con sus estudiantes, ligados a la naturaleza del ángulo no apoyado en el diámetro. Sin embargo, vemos en su declaración un indicio de que posee conocimiento acerca de cómo generalizar la situación. Esto responde tanto a su KoT, en el sentido de conocer la propiedad que sustenta el hecho de que dicho ángulo sea recto, como a su KPM, por su conocimiento de la validez del proceso de generalización que induce Geogebra. Este proceso de generalización está relacionado con aspectos ligados a la génesis discursiva que puede darse sobre este contenido en la actividad de aula, a través de la reflexión sobre la validez de dicho procedimiento. Leopoldo es consciente de las limitaciones de la validación que propone Geogebra, si bien eligió no abordar dichos aspectos en su aula:

L: Pero sabiendo que las ideas de los alumnos, de muchos alumnos, que con un buen puñado de ejemplos se puede dar por válido un resultado, esto podría estar fortaleciendo esta idea incorrecta de la demostración. Pensando en ello quizá debería haberme parado un poquito más para reflexionar sobre qué es lo que estamos haciendo, si es solo conjeturar, es conjeturar y comprobar, y si es conjeturar y demostrar.

Vemos que este profesor no sólo es consciente de dichas limitaciones, sino que tiene un conocimiento profundo acerca de cómo aprenden sus estudiantes (KFLM), en particular sobre las concepciones erróneas acerca de la demostración que pueden generarse y fomentarse con este tipo de tratamiento de la actividad, en particular de la identificación de la comprobación en una cantidad no exhaustiva de casos como tipo de demostración. Esto podría llevar a una construcción de un KPM no adecuado, y por tanto, a deficiencias en la gestión de los estudiantes de sus futuras clases. De nuevo, con el foco en el formador, es consciente de cómo este recurso requiere cierta formación previa, en cuanto a su uso, para que la dinámica que propone discurra en la forma en que pretende:

L: La idea de inscrito está también en el aire, ellos no siempre tienen claro que, al ser inscrito, cada uno de los vértices debe estar sobre la circunferencia, por eso incido mucho en ello. Por eso la limitación de Geogebra es que el punto que eligen no lo elijan con la herramienta punto en objeto. En ese caso, por poco que esté alejado el punto elegido del objeto en sí, la propiedad que yo pretendo que se conjeture ya no va a poder verse con facilidad y el movimiento será un movimiento libre, no un movimiento vinculado al propio arco de la semicircunferencia. Otra limitación que intento solucionar con la parte final, en el cierre de la actividad, es que ellos circunscriban esa propiedad al objeto por el que se ha comenzado, que es la semicircunferencia. Pero eso lo solvento o lo intento solventar cuando al final de la actividad cierro y les hago ver que la extensión a la circunferencia completa es válida.

Aquí Leopoldo muestra su conocimiento de dos limitaciones del recurso (KMT), una ligada intrínsecamente al manejo del mismo, y otra vinculada a las restricciones que él piensa que los estudiantes considerarán que tiene la propiedad explicada (KFLM). La primera de ellas se basa en que este recurso tiene un funcionamiento basado en las restricciones impuestas a los objetos geométricos dibujados. Leopoldo es consciente de que si al punto no se le impone la condición de pertenecer al arco de circunferencia, dicho punto tendrá un movimiento libre, y por tanto, el triángulo generado no tendrá por qué ser rectángulo. En segundo lugar, dada la actividad planteada, basada en la semicircunferencia, Leopoldo considera la posibilidad de que los estudiantes consideren la propiedad restringida a la semicircunferencia (KFLM), hecho que pretende solventar mostrando la generalización a la circunferencia. Vemos que Leopoldo considera también el potencial del recurso, ligado a su naturaleza dinámica:

L: La posibilidad de moverlo con Geogebra, algo que no vemos con otro tipo de recurso más estático, es que si le damos el valor al ángulo en el vértice, en el vértice que estamos hablando, del que se mueve, ellos van a ver que ese valor del ángulo es siempre de 90°, y eso les va a permitir formular esa conjetura de manera independiente de donde se sitúe el punto sobre la circunferencia.

Así, el conocimiento que este profesor posee del recurso (KMT) le permite comprender las imágenes del concepto (Vinner, 1991), que sus estudiantes tienen el potencial de construir (KFLM), derivadas de la interacción que estos tendrán con Geogebra. Todas las reflexiones que Leopoldo vierte sobre cómo interactuarán sus estudiantes con el contenido durante la sesión y los tipos de reflexión que pretende, nos permiten inferir, en la línea de lo ya planteado por Flores- Medrano, et al., (2016), que su conocimiento especializado le permite gestionar los Espacios de Trabajo Matemático de sus estudiantes, y que la gestión de dichos ETM puede repercutir en su conformación de futuros ETM idóneos. De hecho, dado el conocimiento de Leopoldo de los diferentes modelos, en una de las entrevistas le preguntamos sobre el papel que estos juegan en su práctica docente.

L: MTSK me permite planificar qué quiero que aprendan mis alumnos, tener una visión completa de lo que pretendo durante todo el curso, y ser consciente de la naturaleza del aprendizaje que pretendo… sé que [la noción de ETM] me ayudaría a comprender los diferentes tipos de interacción de los alumnos con la geometría. Podría decirse que el espacio de trabajo matemático idóneo está organizado sobre la base de MTSK.

Esta declaración de Leopoldo nos permite ser conscientes de que, como formador de maestros, su conocimiento de modelos de conocimiento profesional, y en particular de MTSK, así como de modelos que desgranan la interacción de los alumnos con el contenido, como es el caso del ETM, le permite tener un marco de referencia para organizar la instrucción de sus estudiantes.

En suma, los extractos ponen de relieve cómo elementos del MTSK (conocimiento y creencias) sustentan el ETM idóneo de Leopoldo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta investigación es una nueva aproximación a los espacios de trabajo matemático en contextos tecnológicos (Gómez-Chacón, Kuzniak, 2013; Gómez-Chacón, Romero, García, 2016; Santos-Trigo, Moreno-Armella, Camacho, 2016), abundando en cómo el conocimiento del formador de maestros se articula para generar y gestionar el ETM que los futuros maestros abordarán, profundizando también en el trabajo ya iniciado (Flores-Medrano et al., 2016) de relacionar el modelo MTSK con los ETM.

Hemos mostrado cómo el análisis usando ambos modelos permite un acercamiento complejo y rico a la realidad de un aula de formación inicial de maestros, y, de manera particular, a una en la que se usa un sistema de geometría dinámica como Geogebra. La conceptualización de los ETM aporta a este trabajo un análisis pormenorizado tanto de los diferentes tipos de trabajo matemático que pretendía realizar el profesor en el aula (ETM idóneo), como aquellos que realmente tuvieron lugar (ETM de los estudiantes para maestro), haciéndose énfasis en el caso particular de Leopoldo en la génesis discursiva.

Ahora bien, conviene diferenciar, por un lado, el ETM idóneo que los estudiantes para maestro puedan construir teniendo en su mente la etapa de primaria, y, por otro, el ETM idóneo de Leopoldo, que tiene como referencia contextual su clase de formación de maestros. Apoyado en su conocimiento especializado y en sus creencias como formador, así como en relación con su ETM de referencia, este profesor organiza su enseñanza de modo que sus estudiantes activen las génesis semiótica, instrumental y discursiva para, apropiándose de la herramienta tecnológica (Geogebra), consigan formular una conjetura con un lenguaje preciso.

El análisis ha puesto de relieve la complementariedad de ambos modelos cuando se trata de estudiar al (formador de) profesor: el análisis empleando el modelo MTSK se ve beneficiado por el uso de los ETM, ya que estos permiten profundizar en la naturaleza de la actividad matemática del aula (de formación inicial en este caso). Al ser el MTSK un modelo de conocimiento determinado por la naturaleza de la propia matemática, el ETM se adecúa a la caracterización de los subdominios que conforman aquel.

Una futura línea de trabajo en la interrelación de ambos modelos se plantea en torno a la profundización en la comprensión de lo que sucede en las clases de un formador de maestros cuando las analizamos teniendo en cuenta los subdominios del MTSK en relación con los planos de descubrimiento, justificación y comunicación del ETM. Esto nos permitirá desarrollar análisis más precisos donde la interrelación entre ambos modelos aporte una precisión analítica complementaria. Pretendemos también que el profesor objeto del estudio de caso varíe, de manera que podamos observar cómo la posesión de unas creencias diferentes lleva diferencias en la movilización de un MTSK y unos ETM.

Es necesario también aclarar que el conocimiento que posee y muestra Leopoldo es un MTSK especial, ya que no es profesor de matemáticas, sino de una asignatura cuyo propósito es formar a los estudiantes como profesores de matemáticas. Esta diferenciación es importante, aunque en el caso que nos ocupa no se hace patente, ya que no se abordan aspectos didácticos explícitamente.

Finalmente, es necesario reflexionar sobre el potencial de MTSK y ETM para el formador de maestros como marcos de referencia que le permiten estructurar y dar orientación a dicha formación. Coincidimos con Gómez- Chacón y Kuzniak (2013) en la utilidad que puede tener el conocimiento de ETM para un profesor cuyo objetivo sea construir conocimiento matemático. En el caso de un profesor cuyo objetivo sea construir conocimiento profesional de cara a la enseñanza de las matemáticas, como es el caso del formador de profesores, ETM conserva su utilidad, pero el conocimiento de un modelo de conocimiento profesional como MTSK permite a dicho formador dar una orientación al tipo de trabajo matemático que se desarrolla en su aula con el fin de construir conocimiento especializado, tanto matemático como didáctico.

AGRADECIMIENTOS

Investigación desarrollada en el marco del proyecto "Caracterización del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas" (EDU2013- 44047P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España. También está parcialmente financiada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México (CONACYT).

REFERENCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bassey, M. (1999). *Case Study Research in Educational Settings*. Celtic Court: Open University Press.

Baxter, J.A., & Lederman, N.G. (2001). Assesment and measurement of pedagogical content knowledge. En J. Gess-Newsome, N.G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 147-161). Dordrecht: Kluwer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 10,5-54.

Flick, U. (2006). *An introduction to qualitative research*. London: SAGE Publications.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L.C., Muñoz-Catalán, M.C., Liñán, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los Espacios de Trabajo Matemático. *Bolema, 30*(54), 204-221. Doi: 0.1590/1980-4415v30n54a10.

Gómez-Chacón, I. M., & Kuzniak, A. (2013). Geometric Work Spaces: figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *ZDM-International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), 201–226. doi:10.1007/s10763-013-9462-4

Gómez-Chacón, I. M., Romero, I., García, M. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM-International Journal of Science and Mathematics Education, 48*(6), 909-924.

Kilpatrick, J. (2008). A higher standpoint. *In ICMI proceedings: Regular lectures* (pp. 26–43). Recuperado de http://www.mathunion.org/icmi/publications/icmeproc eedings/ materials-from-icme-11-mexico/regular-lectures/

Kilpatrick, J., Spangler, D.A. (2016). Educating future mathematics education professors. En L. English, D. Kirshner (Eds.). *Handbook of International Research in Mathematics Education* (Third Edition), (pp. 297-309), Londres: Rouletdge.

Kuzniak, A., Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *RELIME*,17(4), 5-15.

Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. Ponte, J.F. Matos (Eds.), *Actas del PME 18*, (Vol. 1, pp. 195-210). Lisboa: PME.

Rojas, N., Carrillo, J., Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479 - 485). Jaén: SEIEM

Santos-Trigo, M., Moreno-Armella, L., Camacho-Martín, M. (2016). Problem solving and the use of digital technologies within the Mathematical Working Space framework. *ZDM-International Journal of Science and Mathematics Education*, *48*(6), 827-842.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). New York: Springer.

USO DE RECURSOS EN EL MEJORAMIENTO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA

Clara Mayo, José Guzmán

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, México

cmayo@cinvestav.mx, jguzman@cinvestav.mx

Este artículo reporta cómo la tecnología (Geogebra) –considerado como recurso (Gueudet & Trouche, 2009)– promueven en los estudiantes construcciones de la solución distintas que con sólo usar papel-y-lápiz, cuando resuelven problemas con contenido geométrico y algebraico. El estudio está apoyado de dos marcos conceptuales: La Aproximación Documental de lo Didáctico (Gueudet & Trouche, 2009, 2010, 2012) y el Espacio de Trabajo Geométrico (Kuzniak & Richard, 2014). El estudio es de tipo cualitativo. Los participantes fueron 6 futuros profesores de educación secundaria. Los resultados muestran que al introducir Geogebra en el Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) de los estudiantes y donde el papel-y-lápiz es el único artefacto, surge en ellos nuevas formas de visualizar, construir y argumentar la solución del problema.

Palabras Claves: *Conocimiento matemático para la enseñanza, resolución de problemas, Geogebra, profesores en pre-servicio*

INTRODUCCIÓN

En educación matemática, una de las problemáticas que en años recientes sigue causando interés es el uso de recursos para la enseñanza; en particular, el relacionado con el conocimiento matemático (Chevallard & Cirade, 2010; Ball, Thames & Phelps, 2008; Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano & Montes, 2014). En torno a esta problemática, diversos investigadores han propuesto metodologías –sobre los recursos, en sentido amplio del término– como herramientas que potencian dicho conocimiento en los profesores. En estas propuestas sobresalen las de Gueudet y Trouche (2009, 2010), quienes proponen, entre otras formas de trabajo, el uso de recursos como es la tecnología digital en la actividad del profesor o del profesor en pre-servicio.

Para investigadores como Trouche y Drijvers (2010) es importante mirar a la tecnología digital no sólo como una herramienta que le permita ejecutar procedimientos sofisticados de cálculos simbólicos de forma más rápida que con papel-y-lápiz, sino como recurso que amplíe su razonamiento matemático. Diversas investigaciones (e.g. Koehler, Mishra & Yahya, 2007; Angeli & Valanides, 2009; Moreno, 2002) ya han dado evidencia de los beneficios que brinda el uso de la tecnología en el trabajo de los profesores o de los profesores en pre-servicio. Koehler et al. (2007) señalan que la tecnología digital permite representaciones nuevas y variadas y una mayor flexibilidad en la exploración a través de dichas representaciones. En este mismo sentido Moreno (2002) señala que las herramientas tecnológicas, como instrumentos de mediación, son parte integral de la actividad humana.

Angeli y Valanides (2009) mencionan que la tecnología, por sí misma, no es un mecanismo de transformación o para cambiar algo. Más bien, es una herramienta invocada por el profesor para reconstruir el objeto a partir de su conocimiento del contenido para la instrucción. Moreno (2002) señala que es a través del uso de herramientas tecnológicas que el sujeto complementa su pensamiento, a través de la reorganización cognitiva. De esta manera, esta herramienta (artefacto) se vuelve un instrumento cuando tiene efectos de reorganización conceptual en el individuo producto de una acción instrumentada (Rabardel, 1995).

Tomando en cuenta los beneficios que brinda los recursos tecnológicos digitales, para este estudio se procuró propiciar un ETG entendido éste como un ambiente organizado que favorezca el trabajo matemático de los profesores en pre-servicio (Kuzniak, Vivier & Montoya-Delgadillo, 2015). Estos autores para definir un ETG introducen tres componentes de la actividad geométrica las cuales conforman el plano epistemológico: Un espacio real y local como soporte material; un conjunto de artefactos como instrumentos así como un sistema teórico de referencia basado en definiciones y propiedades. Debido a que la geometría que se enseña es una actividad humana para los autores interesa también tomar en cuenta dentro del ETG el plano cognitivo: visualización, construcción y prueba, con el fin comprender como los individuos se apropian del conocimiento geométrico.

A partir de lo que debemos entender como ETG se procuró entonces, para este estudio, crear un ambiente de este tipo que facilite el trabajo matemático de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos. Kuzniak, et al. (2015) señalan que aunque los problemas matemáticos no son considerados parte del espacio de trabajo, sí son su razón de ser ya que el ETG es un medio para resolver problemas. El ambiente que se propone en este estudio consta de dos fases. La primera, consiste en resolver un problema matemático sólo con papel-y-lápiz y con ayuda de una calculadora. La segunda, consiste en resolver el mismo problema, pero ahora con ayuda del software geogebra. Con este ambiente propuesto y con el fin de favorecer el trabajo matemático se pretende analizar las distintas construcciones que emergen de los estudiantes en los distintos ambientes [papel-y-lápiz y tecnología] cuando resuelven problemas.

En este sentido, el objetivo de este estudio es promover en los estudiantes nuevas formas de visualizar, construir y argumentar la solución del problema cuando es introducida la tecnología (Geogebra) en un ambiente organizado de papel-y-lápiz. De esta manera, se quiere observar el ETG personal que los estudiantes crean cuando se les da un problema a resolver dentro de un espacio real, los artefactos para resolverlo y donde su sistema de referencia es su propio conocimiento. La intención de esta forma de trabajo es que los estudiantes puedan construir la solución al problema a través de procesos de descubrimiento (experimentación, intuición), justificación (demostración matemática) y comunicación (comprender, explicar) (Kuzniak, et al., 2015). De esta manera, la pregunta que guió el estudio fue: ¿Cómo influyen las representaciones dinámicas de problemas planteados en papel-y-lápiz en las construcciones de la solución de los estudiantes cuando los resuelven?

MARCO CONCEPTUAL

La investigación está apoyada de dos enfoques teóricos. El primero, la *Aproximación Documental de lo Didáctico* (Gueudet & Trouche, 2009, 2010, 2012), la cual es una extensión del enfoque Instrumental (Rabardel, 1995). En la Aproximación documental se resaltan dos constructos teóricos: *recursos* y *documentos*, los cuales son importantes para este estudio. El segundo, es *el Espacio de Trabajo Geométrico* propuesto por Kuzniak y Richard (2014) y ampliado por Kuzniak et al. (2015). En esta investigación consideramos los dos marcos, primero, porque de acuerdo a la actividad geométrica propuesta se trató de generar un ambiente organizado que permita el trabajo de los estudiantes; es decir, un ETG donde se trate y se resuelvan problemas geométricos (Kuzniak et al., 2015). Segundo, porque todos los elementos que componen el ETG (e.g., sistema referencial, artefactos, prueba, etc.) serán los recursos (Gueudet & Trouche, 2009) que le permitan a los estudiantes llevar a cabo su trabajo matemático así como la modificación de sus esquemas de uso sobre dichos recursos.

En la Aproximación documental los recursos pueden ser objetos o acciones (Adler, 2000) usados para resolver una tarea o problema matemático. En este sentido, los recursos suelen ser físicos (libros de texto, hojas de trabajo, regla, compás) y no físicos (concepto matemático y su simbolización, las discusiones entre colegas, un software, un símbolo algebraico, figura geométrica, etc.). Los recursos son de origen social con el propósito de apoyar en la resolución de tareas, mientras que el *documento* es construido por los usuarios de los recursos, mediante el proceso dialéctico denominado *génesis documental*. La figura 1 muestra la representación esquemática de esta génesis.

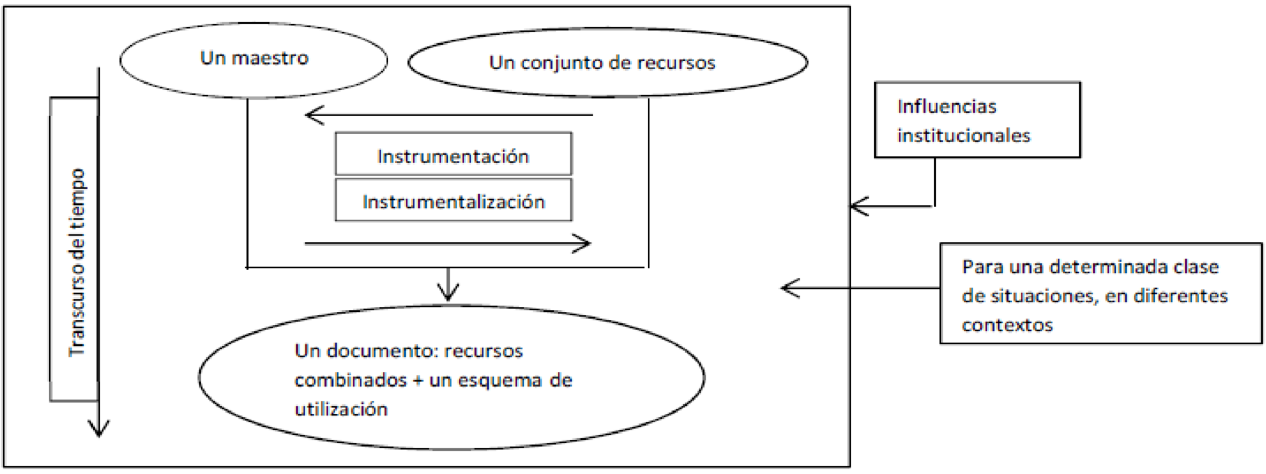


Figura 1: Representación esquemática de la génesis documental (Tomado de Gueudet & Trouche, 2009, p. 206)

Durante este proceso de génesis el usuario de los recursos construye sus propios *esquemas de utilización* (Vergnaud, 1990) cuando interactúa con dichos recursos. Es así que un recurso más el esquema de uso que se le dé a éste da origen a un documento. Un mismo recurso puede dar origen a distintos documentos si los esquemas de uso cambian. Desde el enfoque de Gueudet y Trouche (2009) estos documentos pueden ser vistos por el usuario como nuevos recursos en su actividad, por ejemplo al resolver problemas (véase Figura 2). Sin embargo, mirar los esquemas de utilización en el individuo no es un proceso fácil debido a que están conformados por la estructura cognitiva que guía las acciones de éste, pero, es posible describirlos a través de las acciones efectuadas durante la actividad del usuario (Schön, 1983).

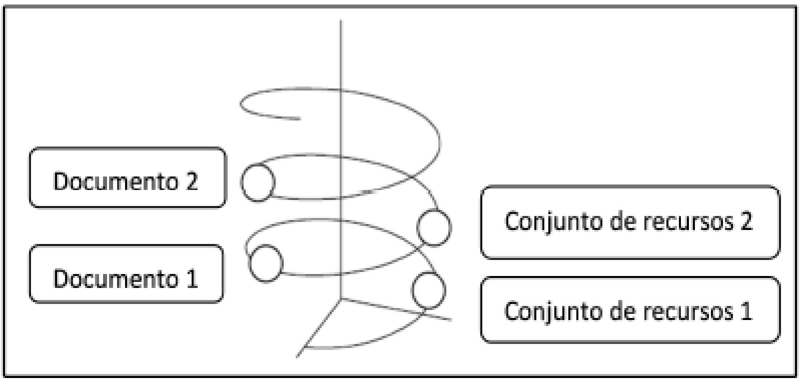


Figura 2: Los recursos/documento, relación dialéctica (Tomado de Gueudet & Trouche, 2009, p. 206)

Visto desde la Aproximación Documental, un ETG se constituye por un conjunto de recursos relacionados entre sí a través de tres génesis: figural, instrumental y discursiva. Dichos recursos se articulan en dos planos, el epistemológico y el cognitivo. Los recursos tanto físicos (artefactos, espacio real) como no físicos (prueba, visualización y referencial) en conjunto conforman el ETG. El primer plano consta de tres recursos: el *espacio real con figuras*, los *artefactos* y el *referencial*), estos son de los que se apoyan los estudiantes para conseguir, a través de las tres génesis, los recursos del plano cognitivo. Estos recursos son: *visualización* (en relación con la representación del espacio y el soporte material), *construcción* (determinado por los instrumentos) y *prueba* (discurso apoyado del sistema de definiciones y propiedades). La Figura 1 muestra la organización de cada plano y los recursos que la conforman.

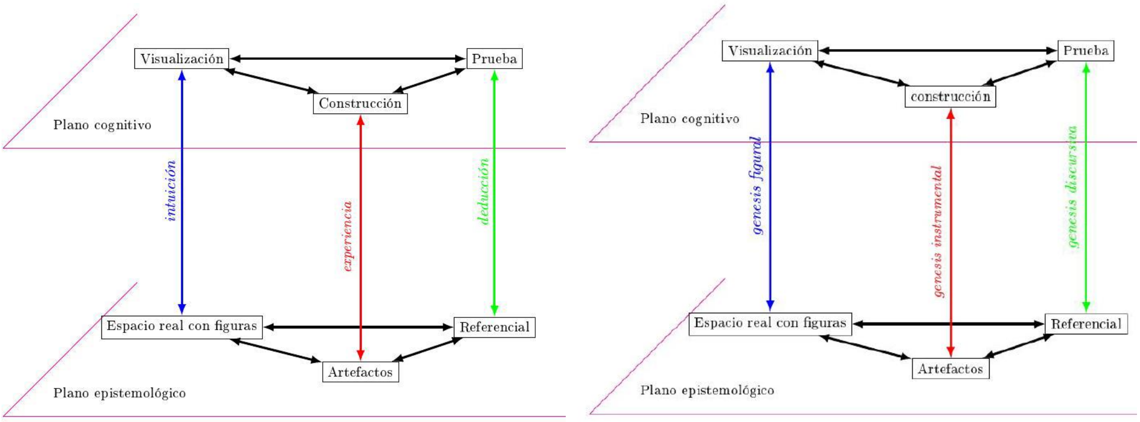


Figura 3: ETG y sus génesis (Tomado de Kuzniak et al., 2015)

Pasar de un plano a otro conlleva transformaciones en los recursos, éstas son identificadas a través de tres génesis: Génesis instrumental, permite hacer operatorios a los artefactos dentro del proceso de construcción; la génesis figural, transforma a los objetos tangibles en objetos matemáticos operatorios. La génesis discursiva da sentido a las propiedades utilizadas dentro del razonamiento matemático.

Visto desde los dos marcos teóricos (Gueudet & Trouche, 2009; Kuzniak & Richard, 2014; Kuzniak et al., 2015) los ETG están conformados por recursos. Desde esta perspectiva, en un ambiente de resolución de problemas podemos ver el plano epistemológico como el conjunto de recursos con los que cuenta un individuo y que usarán, en determinado momento, para dar lugar –mediante distintas génesis– a nuevos recursos, mismos que conformarán el plano cognitivo. El conjunto de recursos, estrechamente relacionados a través de las tres génesis, conforman el ETG. De acuerdo con Kuzniak et al. (2015) hay tres niveles de ETG: institucional, idóneo y personal, para referirse a este último mencionan que "cuando un problema es presentado, no a un experto ideal sino a un individuo real (alumno, estudiante o profesor), el tratamiento del problema se efectuará en lo que hemos llamado un ETG personal" p.7.

En resolución de problemas, el ETG personal, el que cada individuo crea, dependerá de los recursos que conformen el plano epistemológico; es decir, del espacio real con figuras en el que se desarrolle el problema; de los artefactos a utilizar y de los conocimientos a utilizar (referencial) así como de los recursos a los que estos den lugar. Variaciones en los recursos del plano epistemológico, para la misma clase de situaciones (problema o tarea matemática), puede dar lugar a visualizaciones que lleven a construcciones distintas en el plano cognitivo, las cuales, dentro de la resolución de problemas pueden ser complementarias en el desarrollo conceptual de los individuos. De esta manera, los espacios de trabajo geométrico que se crean en ambientes estáticos (papel-y-lápiz) en colaboración con los dinámicos (Software de Geometría Dinámica) para una misma tarea pueden ser esenciales y complementarios en la construcción de la solución.

En este sentido el ETG propuesto para este estudio, visto como un ambiente que favorece la resolución de problemas matemáticos, está conformado de dos fases: La primera, consiste en resolver un problema matemático con ayuda solo de papel-y-lápiz; la segunda, resolver el mismo problema, pero apoyado de la exploración en Geogebra, haciendo notar que estos dos recursos (Geogebra y papel-y-lápiz) son complementarios. Los recursos, físicos y no físicos, que conforman el ETG propuesto son: *artefactos* (papel-y-lápiz y el software Geogebra), *sistema de referencia* (teoremas y conceptos que los estudiantes poseen) y el *espacio real con figuras* (representación mediante formas abstractas: iconos, indicios o signos del problema a resolver) fundamentales en el plano espistemológico, así como los procesos de *visualización*, de *construcción* y de *prueba*, presentes en el plano cognitivo (Kuzniak et al., 2015).

METODOLOGÍA

Participantes

En este estudio la población participante está conformada por seis futuros profesores (entre 22 y 26 años de edad) de educación secundaria [grados 7, 8 y 9]. Los seis estudiantes, que conformaron tres parejas, fueron seleccionados de una población de 20 estudiantes, sin tomar algún criterio en particular, sólo que pertenecieran a una escuela oficial encargada de formar profesores en educación secundaria en México y estuvieran cursando los últimos semestres de su formación.

Diseño e implementación de los instrumentos usados en el acopio de datos

El instrumento utilizado en la recolección de datos fue una Actividad matemática la cual fue implementada a las tres parejas. Dicha Actividad consistió en resolver un problema matemático en dos etapas: Primero, se les pidió resolver el problema con papel-y-lápiz y una calculadora *CASIO fx-82MS*; segundo, resolver el mismo problema, pero ahora apoyados de la exploración del problema con Geogebra. La implementación de la Actividad fue dirigida por uno de los autores de este artículo, mediante entrevistas semi-estructuradas y video-grabadas. La participación del investigador se restringió a esclarecer dudas de la redacción del problema y hacer preguntas que motivaran a los estudiantes a continuar con la resolución del problema. Las implementación de la Actividad duró, aproximadamente, una hora y media para cada pareja.

ANÁLISIS DE DATOS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este estudio se discute sólo los datos surgidos del trabajo de una pareja de estudiantes (Pareja 1). De las tres parejas se eligió sólo una por ser la que proporciona información representativa para este estudio y para no hacer el análisis reiterativo. En adelante, los integrantes de esta pareja serán denominados E1 y E2 mientras que para referirnos al investigador entrevistador se usará IN. Para mostrar el análisis de datos sólo se toman algunos extractos de toda la entrevista, los que se consideraron más relevantes. Estos extractos se ordenaron en episodios para las dos fases del estudio: papel-y-lápiz y para la exploración en Geogebra.

Actividad I. Ambiente de papel-y-lápiz

La Actividad inicia cuando se les pide a los estudiantes que resuelvan el Problema 1 (véase Figura 4) con papel-y-lápiz y apoyados de una calculadora proporcionada por el investigador para fines prácticos. Para verificar que los estudiantes entienden el problema se les pide que lo lean en voz alta.

Problema 1. *Tomado y modificado de:* Mason, J. Burton, L. y Stacey, K., 1989, p. 183.

Ambiente de papel-y-lápiz: el cuadrado y sus triángulos

En el cuadrado de vértices $ABCD$ de lado 1 cm (como se muestra en la Figura 1), la diagonal BD se divide en cuatro partes iguales. ¿Cuál es el área del triángulo CFD? Ahora divide la diagonal BD en cinco partes iguales y luego en 6 partes iguales, ¿cuál es el área del triángulo CFD que se forma con la quinta y sexta parte de la diagonal BD?

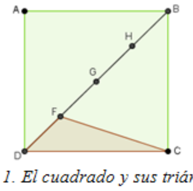


Figura 1. El cuadrado y sus triángulos

Figura 4: Problema 1, ambiente de papel-y-lápiz

Después de que los estudiantes leen el problema, el investigador les pregunta qué se pide en el problema. He aquí la discusión:

Episodio I.

1	IN:	¿Podrían explicar qué se quiere o que están pidiendo en el problema?
2	E1:	Bien, piden que calculemos el área DCF [...] Sabemos que cada lado mide un centímetro [*señala los lados del cuadrado*] y la diagonal entonces mide raíz de dos […] Creo que hay cinco formas de calcular el área de un triángulo, la más común es base por altura sobre dos, pero no tenemos la altura. Sí, la del semi-perímetro […] No recuerdo. Ahora si lo hacemos por ángulos…

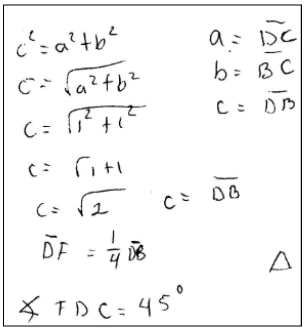


Figura 5: Uso de símbolos para representar el teorema de Pitágoras

En este episodio de la entrevista los estudiantes explican de qué trata el problema. Ellos se apoyan de recursos no físicos como son el enunciado del problema y la figura [representación icónica] relacionada a éste para darle sentido al problema, desde el enfoque teórico estos son parte del espacio real figural. Al respecto, Kuzniak et al. (2015) señalan que “las figuras son los soportes visuales del trabajo geométricos y es a través de la génesis figural que se pueden describir los procesos semióticos asociados al pensamiento visual” (p. 8). En este sentido los estudiantes tratan de dar sentido a las figuras geométricas que observan con el fin de encontrar nuevos recursos matemáticos como es la diagonal DB (véase L2).

Otros de los recursos con los que cuentan son el papel-y-lápiz y la calculadora, es decir, los artefactos tanto digitales como no digitales que hacen presente la génesis instrumental. Para Kuzniak et al. (2015) los artefactos “permiten verificar o ilustrar las propiedades de los objetos estudiados” (p. 8). El sistema referencial que muestra esta pareja; es decir el sistema matemático sobre el que se poyan, se conforma en un principio de ideas intuitivas acerca de cómo calcular el área de un triángulo, pues no conocen un algoritmo directo y justificado matemáticamente para resolverlo. En este estudio entiéndase el término *intuitivo* como una forma inmediata y primitiva del conocimiento que van más allá del conocimiento sensorial como lo señal Kant. La intuición son declaraciones personales que rebasan los hechos observables. Es una teoría la cual implica una extrapolación más allá de la información accesible y donde está presente un conocimiento matemático a priori (Fischbein, 1994).

Es así, que las primeras experimentaciones que efectúan los estudiantes están basadas en sus conocimientos matemáticos previos, su intuición y en la observación de los objetos. A partir de estos recursos los estudiantes hacen uso de representaciones semióticas para darle sentido al teorema de Pitágoras. Estos son los recursos que al inicio empiezan a dar sentido a la solución del problema y los que dan lugar a las primeras visualizaciones, construcciones y argumentaciones de los estudiantes, las cuales forman parte del plano cognitivo del ETG.

Episodio II. Primera construcción

3 E1: ¡Ah¡ Vamos hacer lo siguiente: Si calculamos el área del triángulo ABC [*escribe*] es igual a base por altura sobre dos, entonces, la base sería uno, por la altura que sería uno, entre dos [*escribe*] […] Entonces se supone que éste [*señala el triángulo BCG*] sería dos sobre cuatro que esto es igual a […] ¿No son cuatro?

4 E2: No, sería igual a un cuarto […] Porque sería 1 por 1.

5 E1: ¡Así! uno por uno, perdón. Un cuarto. Entonces se supone que éste [*señala triángulo BCG*] es un cuarto del área total, área del cuadrado ABCD […].

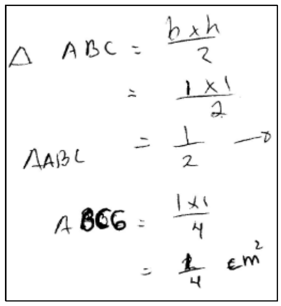


Figura 6: Uso de definiciones para el cálculo del área de triángulos

Debido al fracaso de la búsqueda de ángulos que permitieran resolver el problema, los estudiantes construyen nuevas estrategias haciendo uso de otros recursos. Ahora ellos se apoyan de nuevas representaciones cómo son el triángulo ABC y la fórmula para calcular el área de un triángulo, cuando son conocidas la altura y su base. Esta nueva manera de visualizar el problema y de reorganizar su conocimiento da lugar al cambio en sus esquemas de utilización de los recursos (Gueudet & Trouche, 2009) y por tanto en su conocimiento matemático. A partir de las representaciones figurales ellos efectúan nuevas construcciones pues prueban que el área del triángulo BCG es un cuarto del área del triángulo ABC. Estas figuras (triángulos) son los soportes visuales que facilitan el trabajo matemático pues a través de ellas se intenta poner el problema en términos semióticos de fácil manipulación operatoria (Kuzniak et al., 2015). Por otra parte, la interacción entre los estudiantes les permite discutir y llegar a un acuerdo con los resultados que van encontrando para dar solución al problema.

Episodio III. Construcción de la solución

6 E1: Es que si éste lo vemos así [*voltea la hoja y señala el triángulo DFC*] es un triángulo escaleno y la altura es exactamente este lado [*señala el segmento CG*] y ya tenemos la base que equivale a un cuarto del segmento BD […] Porque si lo vemos como un triángulo escaleno [*se refiere al triángulo DFC*] ésta es la altura […] es una perpendicular al vértice [*señala punto C*] […] Entonces, CG sería igual a un medio de raíz de dos […] Entonces, el área sería ¿un octavo? Y ¿cuánto sería un octavo?

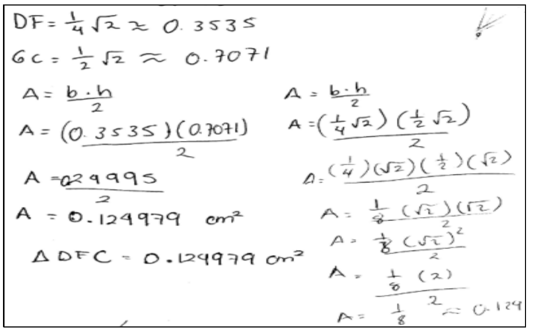


Figura 7: Transformación de una representación icónica a una simbólica

La constate interacción que los estudiantes tienen con la representación figural les permite visualizar una forma de resolver el problema. Los extractos de entrevista muestran como los estudiantes se apoyan de la figura con el fin de intentar poner en términos semióticos operatorios; en particular, en términos de signos algebraicos, lo que ellos lograr ver de dicha figura. Al respecto Kuzniak et al. (2015) señalan que los signos operatorios permiten remitirse a la figura, sintetizando la relación entre ellas. El uso de los artefactos (papel-y-lápiz), la figura y el enunciado del problema así como del sistema referencial [definiciones, propiedades, teoremas] son los recursos del plano epistemológico que les permite visualizar las representaciones semióticas así como construir y argumentar cada una de sus acciones dentro de su trabajo matemático. Para Kuzniak et al. (2015) las imágenes permiten reforzar la certidumbre de un resultado encontrado ya que las figuras y el discurso permiten un razonamiento diagramático. En los diversos extractos de entrevista se puede observar el trabajo que los estudiantes desarrollan con el fin de dar lugar a su espacio de trabajo geométrico personal.

Actividad I. Exploración en Geogebra

La siguiente parte de la actividad consiste en resolver el mismo problema, pero ahora haciendo uso de la exploración en Geogebra.

Nota: Para resolver el Problema 1 abre el archivo Actividad 1.ggb de GeoGebra en el que se ha reproducido la Figura 1.1 precedente. Mueve el deslizador, observa lo que pasa y resuelve el problema.

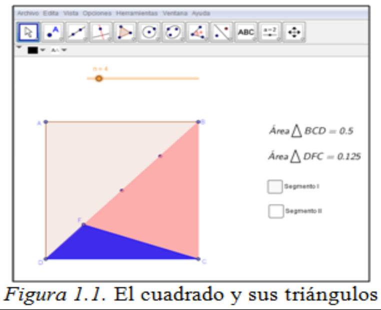


Figura 1.1. El cuadrado y sus triángulos

Figura 8: Actividad I, exploración en Geogebra

Los siguientes episodios de la entrevista muestran el trabajo matemático que los estudiantes efectúan al resolver el problema con ayuda de la exploración en Geogebra. Al inicio de la entrevista el investigador pregunta si lo que observan es lo mismo que lo que encontraron en papel-y-lápiz, he aquí el diálogo:

Episodio IT. Comparación entre Geogebra y papel-y-lápiz

7	E1:	Sí, es básicamente lo mismo, sólo que lo que hicimos con papel-y-lápiz lo basamos todo en torno al cuadrado y ahorita si lo basamos sólo al triángulo sería exactamente lo mismo. Cuando N es dividida en 10 partes, el área del

triángulo que se forma es un décimo del área del triángulo mayor, cuando se divide en 3 es un tercio […].

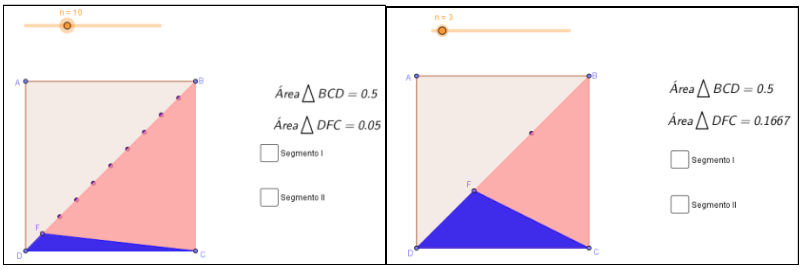


Figura 9: Área del triángulo DFC en relación con las N divisiones del segmento DB

Figura 10: Área generalizada para el triángulo DFC

En este extracto de la entrevista se observa que a partir de la exploración del problema con Geogebra los estudiantes visualizan que la representación que ellos usaron para resolver el problema, en papel-y-lápiz, se basó en torno al cuadrado mientras que la exploración en Geogebra les permite ver que ésta puede ser también en torno al triángulo. De acuerdo con Gueudet y Trouche (2009) la interacción con el recurso dinámico permite a través del proceso de génesis documental un cambio en los esquemas de uso de los recursos por lo tanto también en su conocimiento.

El artefacto dinámico applet permitió a los estudiantes no sólo verificar e ilustrar las propiedades de los objetos estudiados como señala Kuzniak et al. (2015) sino nuevas formas de visualizar y abordar el problema. A partir de la exploración en Geogebra ellos lograron construir una solución generalizada. Ellos argumentan que cuando "N" se divide en 10 el área es un décimo, cuando se divide en 6 un sexto y así sucesivamente (véase L7). Estos argumentos están basados a lo que ellos observan cuando manipulan el software (véase Figura 9), lo que los lleva a escribir, en sus hojas de trabajo, el área en términos de una expresión generalizada (véase Figura 10): DFC es igual a $\acute{A}reaDFC = \frac{1}{2n}$. Aunque su sistema de referencia no está del todo consolidado, en el sentido en que no tienen los recursos matemáticos para justificar lo que hacen, ellos logran visualizar y construir la solución del problema correctamente.

Episodio IIIT. Segmento DG

8	IN:	Ahora, presiona el segmento dos con el cursor.
9	E1:	¡Ah! ¡Ya sé que es esto! Se supone que esto está en razón de esto [*señala los segmentos DG y BE*] y esto está […] DC está en razón de EC y FE está en razón de BC y FC está en razón de BD […].

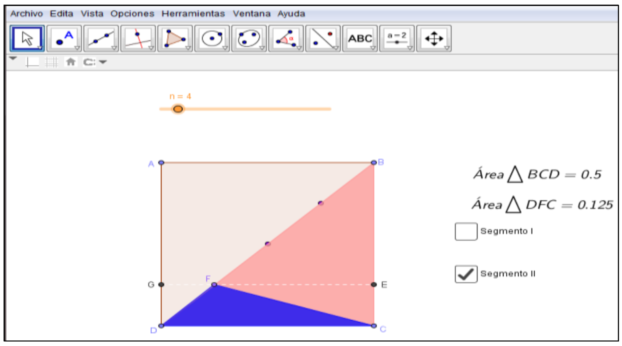


Figura 11: Segmento DG, altura del triángulo DFC

11 E2: […] El área del triángulo DFC es igual a DC, que siempre va a ser esa la base, por la altura que siempre va a ser DG entre dos […] [*lo escribe*].

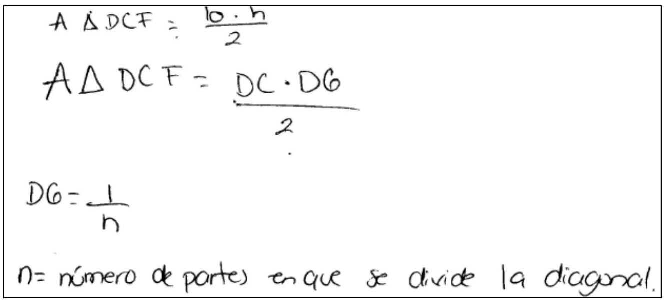


Figura 12: Área del triángulo DCF cuando la altura es DG

A partir del segmento GE, que apareció en el applet al activar el recuadro del Segmento II, los estudiantes visualizaron que existe semejanza entre los triángulos BCD y EFC por lo que comenzaron a manipular el applet y a buscar relaciones entre los lados de los triángulos que pudieran ayudar en la resolución del problema de una manera diferente a la ya encontrada. Al respecto Kuzniak et al. (2015) señalan que las pruebas dinámicas a partir de imágenes animadas ayudan a las pruebas estáticas. A raíz de esta exploración los estudiantes descubrieron que la altura del triángulo DFC es el segmento DG mismo que está relacionado con el número de divisiones del segmento DB. Esta exploración dinámica en Geogebra permitió que los estudiantes consiguieran otra representación algebraica, a partir de la figura geométrica del problema, equivalente a la antes encontrada (véase Figura 10 y 12) y es en momentos como estos donde se hace presente la génesis semiótica.

CONCLUSIONES

Análisis a priori

Se pretende que el trabajo matemático que desarrollan los estudiantes en papel-y-lápiz sea apoyado, modificado y mejorado por la exploración en el applet diseñado Geogebra. Ya que consideramos que al trabajar únicamente con papel-y-lápiz como artefactos en la resolución de problemas genera un espacio de trabajo geométrico distinto al generado cuando se complementa con el apoyo de Geogebra. Las formas de visualizar, construir y argumentar en un ambiente donde el papel-y-lápiz son los únicos artefactos se ven limitadas en comparación a cuando es incorporada la tecnología dinámica como es Geogebra. La geometría dinámica permite nuevas visualizaciones de cómo resolver el problema y por lo tanto otras construcciones que complementan a las construcciones hechas en un ambiente estático como es papel-y-lápiz. Mirar de esta manera distinta el problema permitirá que el estudiante vaya reacomodando y modificando sus esquemas de uso sobre lo que hace y los recursos matemáticos que emplea y así ir fortaleciendo su conocimiento matemático.

Análisis encontrado

El análisis de los datos nos permite dar respuesta parcial a la pregunta ¿Cómo influyen las representaciones dinámicas de problemas planteados en papel-y-lápiz en las construcciones de la solución de los estudiantes cuando los resuelven? En el análisis se observa que tanto en la Actividad estática (papel-y-lápiz) como en la Actividad dinámica (exploración con Geogebra) los estudiantes logran pasar de un modelo geométrico a uno algebraico. Durante el proceso geometrización los estudiantes fueron capaces de asociar las formas geométricas dadas en el problema a los conceptos matemáticos conocidos por ellos (Kuzniak et al., 2015) dándoles nuevas formas de representación semiótica. Dicho logro implicó el uso de un conocimiento matemático previo (teoremas y conceptos), recursos que poseían ya los estudiantes, pero también del descubrimiento de nuevos usos mismo que se dio a través de la interacción con dichos recursos (Gueudet & Trouche, 2009).

Cabe señalar que al inicio de la resolución en papel-y-lápiz las primeras construcciones de la solución no tuvieron mucho éxito, pues la falta de dominio y selección del sistema de referencia fue la limitante que llevó al fracaso de las primeras construcciones y argumentaciones de la solución. Sin embargo, este fracaso llevó a la búsqueda de nuevos planteamientos de resolución y a selección de nuevos recursos. En el trabajo matemático de papel-y-lápiz, la entrevista muestra como los estudiantes hacen uso de los recursos matemáticos que da el problema, por ejemplo, los lados del cuadrado para poder ir descubriendo otros, como es la longitud del segmento DB o el área del triángulo ABC, por mencionar algunos.

Durante este trabajo los estudiantes identifican y relacionan su espacio figural (triángulos, cuadrados, segmentos, etc.) a su sistema de referencia (conceptos matemáticos). Más adelante los recursos encontrados pasaran hacer nuevos recursos para descubrir otros (Gueudet & Trouche, 2009), como es el área del triángulo BCG, por dar un ejemplo. Los nuevos recursos son los que darán lugar a la visualización para abordar el problema la cual será reflejada en la construcción de procedimientos matemáticos y argumentaciones que la respaldan. Procesos como la intuición, la experiencia y la deducción estuvieron presentes en la génesis visual, discursiva y figural respectivamente, pues por medio de la intuición los estudiantes pudieron unir el espacio real a la visualización, los artefactos a la construcción a través de la experiencia y el modelo teórico a la prueba mediante la deducción (Kuzniak et al., 2015).

Cuando los estudiantes lograron dar distintos usos a un mismo recurso, como es el caso del segmento CG el cual primero fue usado como lado del triángulo BCG y luego como altura del triángulo DFC, sus esquemas de uso fueron sujetos a modificaciones. Desde el enfoque de Gueudet y Trouche (2009) es aquí donde el recurso, a través de un proceso de génesis documental, se convierte en documento y donde al mismo tiempo éste último se convierte en nuevo recurso para acciones posteriores. La constate interacción que los estudiantes tuvieron con los recursos matemáticos explícitos e implícitos en el problema geométrico dio lugar a que ellos pudieran llevar a cabo procesos cognitivos como son visualizar distintos usos de los triángulos, segmentos, ángulos, etc., e intentar construcciones procedimentales variadas.

Más adelante, cuando se hace presente el applet en el trabajo matemático, visto éste como un artefacto digital y como recurso dinámico, los estudiantes fueron capaces de visualizar nuevas formas de abordar el problema, esto suelen deberse a que las imágenes dinámicas pueden permitir percepciones distintas que cuando se tienen solamente recursos como son las imágenes estáticas (Kuzniak et al., 2015). Es importante decir que para que los estudiantes pudieran visualizar nuevas formas de resolución, fue necesaria la presencia de su conocimiento matemático, recurso indispensable que forma parte del sistema referencial en su ETG. Este sistema junto con el applet, visto como artefacto, y las figuras geométricas forman parte del plano cognitivo en su ETG y son los recursos que permitieron a los estudiantes visualizaran nuevas formas de abordar el problema.

Las representaciones dinámicas no sólo permitieron complementar el discurso explicativo de lo antes hecho en papel-y-lápiz, como lo señala Kuzniak et al. (2015) sino también ayudaron a los estudiantes dar significado y sentido a lo que antes habían efectuado con papel-y-lápiz. El movimiento dinámico del applet dio lugar para que los estudiantes pudieran probar sus conjeturas antes efectuadas en papel-y-lápiz. Por ejemplo, el decir que el área del triángulo DFC es un octavo del área del cuadrado ABCD o que el segmento CG efectivamente representa una de las alturas del triángulo DFC.

Por otra parte, el applet también ayudó a que los estudiantes plantearan y probaran nuevos juicios como decir que el problema pudo haber sido planteado en torno al triángulo BCD en lugar de hacerlo en torno al cuadrado como lo hicieron en papel-y-lápiz. El uso combinado de artefactos; es decir, primero de papel-y-lápiz y segundo la incorporación del software Geogebra como representación dinámica, influyó dentro del plano epistemológico, tanto en la visualización como en las construcciones y argumentaciones de la solución. El trabajo matemático desarrollado en cada ambiente, estático y dinámico, fue complemento para la construcción de la solución.

REFERENCIAS

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 205-224.

Angeli, C. & Valanides, N. (2009). Epistemological and methodological issues for the conceptualization, development, and assessment of ICT-TPCK: Advances In technological pedagogical content knowledge (TPCK), *Computers & Education*, 52, 154-168.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. Montes, M. A. (2014). Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK*. Ed. Universidad de Huelva, España.

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. G. Gueudet, & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, (pp.41-55), Rennes/Lyon: Presses Universitaire de Rennes-Institut National de Recherche Pédagogique.

Fischbein, E. (1994). *Intuition in science and mathematics:An Educational Approach*. Netherlands: Reidel Publishing Company.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics, 71*, 199-218.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2010). Des resources aux documents travail du professeur et genèses documentaire. En G. Gueudet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 57-74). Rennes/Lyon: Presses Universitaires de Rennes-Institut National de Recherche Pédagogique.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2012). Teachers' Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses. En G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 23-42).

Koehler, M. J., Mishra, P. & Yahya, K. (2007). Tracing the development of teacher knowledge in a design seminar: Integrating content, pedagogy and technology. *Computers & Education 49*, 740–762.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Número Especial).

Kuzniak, A., Vivier, L. & Montoya-Delgadillo, E. (2015). El espacio de trabajo matemático y sus génesis. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM-IACME)*, Chiapas, México.

Moreno, A. L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Eds.). Proyecto Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia (81-86). Colombia.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instrumentscontemporains*. Recuperado de http://ergoserv.psy.univparis8.fr/Site/Groupes/Modele/resource/dpli_r/index_htm_files/InterpretationPiagetConstructivism.pdf. rg/library/jsd/brand191.html.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner. How professional think in action*. New York: Basic Books, Inc.

Trouche, L. & Drijvers, P. (2010). Handheld technology for mathematics education: flashback into the future. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 667-681.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *10* (2, 3), 133–170.

MESURER DES DISTANCES INACCESSIBLES ET L'ETM$_{\text{Géométrie}}$: CONCEVOIR UNE SEQUENCE DIDACTIQUE A PARTIR D'UNE SOURCE HISTORIQUE

Fotis Papadopoulos* & Kostas Nikolantonakis**

*Etudiant & ** Professeur Associé, Université de la Macédoine Ouest

papadopoulosfotis85@yahoo.gr, knikolantonakis@yowm.gr

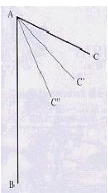
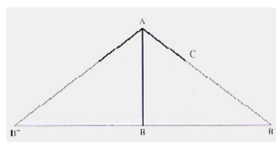
« *Une figure géométrique peut avoir au moins deux statuts […] représentation d'éléments d'une réalité construite […] représentation des concepts idéaux d'une théorie. Le premier statut, celui de schéma, est souvent négligé dans l'enseignement et, en tous cas, le passage d'un statut à l'autre est ignoré. Or, ce passage, qui correspond au clivage entre enseignement primaire et secondaire, désigne une étape importante dans la construction du sens de la figure géométrique. L'absence de cette étape conduit, à l'une des principales difficultés auxquelles se heurte l'enseignement de la géométrie au collège. Un apprentissage de la démonstration sur des objets dont le sens n'est pas construit ne peut que produire un non-sens chez la plupart des élèves* » (Barbin, E., dans Cerquetti & al., 1997).

La description du travail géométrique fait par les étudiants dans une institution est le but de l'ETM$_{\text{Géométrie}}$. Pour la géométrie à l'école nous avons trois paradigmes géométriques, nommé Géométrie I, II et III. La Géométrie I se réfère à un domaine qui a le monde réel et sensible comme source de validation. Dans cette géométrie, une assertion est supportée par des arguments basés sur l'expérience et la déduction. Les preuves peuvent reposer sur les dessins, ou sur les observations qui se font avec des outils - instruments historiques. Le développement de cette géométrie a été historiquement motivé par des problèmes pratiques. Le deuxième paradigme de la Géométrie II, qui est un archétype de la géométrie Euclidienne, est construit sur un modèle qui approche la réalité. Une fois que les axiomes sont établis, seulement les preuves qui se sont développées dans ce système d'axiomes sont validées. Ces deux géométries sont en relation avec le monde réel mais par des manières différentes et ont les fonctions et buts différents : pratique et technologique pour la Géométrie I, orientée vers la modélisation et l'axiomatisation pour la Géométrie II. Dans le modèle ETM, entre autres éléments, nous avons la genèse globale de l'ETM qui suppose un ensemble de genèses qui sont interdépendantes et qui concernent toutes les composantes épistémologiques et les processus cognitifs : 1) « *La genèse instrumentale qui permet de rendre opératoire les artéfacts dans le processus de construction* », 2) *« la genèse sémiotique qui donne un sens aux objets de l'ETM et leur confère leur statut d'objets mathématiques opératoires* » et 3) « *la genèse discursive de la preuve qui donne un sens aux propriétés* » (Kuzniak & Richard, 2015).

Ensuite nous allons décrire un exemple d'activité, d'une manipulation évoquée et pas réalisée[1], (issue des extraits d'Errard le Bar le Duc) dans lequel la géométrie retrouve une conception proche de celle de la première époque historique (GI) et du passage de la première à la deuxième (GII) (passage où l'être géométrique abstrait naît progressivement du réel sensible). Dans ce cadre nous allons décrire la place aux genèses du modèle de l'ETM pour donner du sens à l'apprentissage de la démonstration géométrique chez les élèves de la sixième (âge 11-12 ans) classe de l'école primaire en Grèce.

L'INSTRUMENT D'ERRARD ET L'ACTIVITE GEOMETRIQUE

L'instrument est constitue de deux bâtons "*articulés*" avec un frottement suffisant pour qu'ils gardent un angle choisi (Figure 1[2]) et sert à mesurer une distance horizontale dont une extrémité est inaccessible. Apres avoir fabriqué l'instrument on commence en posant la situation-problème : « *Nous sommes au bord d'un terrain (rivière) impossible à traverser et dont nous voudrions* *connaitre la largeur. Comment procéder ?* ». On met les réflexions en commun et on organise une discussion dans les petits groupes qui sont sur le terrain qui ont tous un instrument déjà fabriqué. On fait observer l'instrument en l'associant au problème posé. Les élèves, après avoir discuté et échangé des idées peuvent découvrir qu'il faut placer l'instrument verticalement au bord du terrain (rivière) et le bâton articulé doit viser l'autre bord (expérience). On peut poser la question : « *Que faire de cet angle que garde l'instrument ?* ». Les élèves sont en possession d'un triangle virtuel rectangle dont un côté (l'instrument) est connu, ainsi qu'un angle. L'idée de tourner l'appareil vers la terre ferme est à trouver. En conservant cette idée bien qu'il ne soit pas nécessaire que l'instrument fasse un exact demi-tour elle permettra aux dessins exécutés par les élèves de faire apparaitre certaines propriétés des triangles isocèles et de les exploiter. L'observateur placé au bord du terrain, positionne la branche AB de façon à viser l'autre bord B'. On fait pivoter l'ensemble autour de AB (vertical) et on détermine B'' sur la terre ferme. La distance inaccessible BB' est égale à la distance mesurable BB''. On les fait observer que les propriétés de la figure (angles en A égaux et angles droits en B) confèrent à AB un statut d'axe de symétrie et de hauteur, même si Errard démontre que les triangles ABB' et ABB'' sont égaux ce qui permet à AB'B'' d'être perçu comme isocèle (Figure 2).

Figure 1	**Figure 2**
	

Après l'expérimentation sur le terrain on met les élèves à dessiner la situation et ensuite on passe du dessin à la figure géométrique et à l'argumentation (modélisation) sur la question-problème (Johan, 1996).

LES GENèSES : INSTRUMENTALE, SéMIOTIQUE ET DISCURSIVE

Au bord du terrain, il est possible de faire une visée vers l'autre bord en orientant la partie flexible de l'instrument. Ensuite, il faut se retourner en gardant la même inclinaison et viser un point sur le sol (la terre ferme). Deux nouveaux gestes pour résoudre le problème : une visée et un retournement qui balaie l'espace. Le problème est résolu parce que le sujet élève-géomètre a remplacé le « *schème primitif* », celui du report de l'arpentage, par un processus d'instrumentation au sens de Rabardel (Barbin, 2016 ; Rabardel, 1995). Un nouveau schème est formé, qui englobe non seulement des mesures de distances mais des visées, qui relie des visées et des distances. La géométrie consiste à voir et à faire voir ce que l'on pense. Il faut ensuite représenter la situation. En détachant du réel les éléments essentiels à sa compréhension, on réalisera un schéma (comme la Figure 3), puis *une mise en figure* composée de droites et ensuite par les lettres posées (A, B, B', B'') permettra de connecter ces éléments essentiels (Figure 4) (genèse sémiotique). Sur cette figure, certaines droites représentent des distances concrètes, mais pas celles qui correspondent aux rayons visuels. Pour tenir un discours qui explique la solution à un autre, il faut dire ce qui est maintenant représenté par un espace entre deux droites et qui correspond à ce qui est une « *visée* » dans le contexte instrumental. Cet espace a une signification dans le contexte du problème et il est relié à une distance, un angle. Le schème consiste en une connaissance sur la figure : l'égalité des angles implique l'égalité des distances. Pour démontrer que l'égalité des angles implique l'égalité des distances, il faudrait encore introduire les notions de triangle, d'égalité de triangles, et des lettres pour désigner les éléments de la figure (genèse sémiotique). La géométrie qui s'édifie ainsi est une science qui raisonne sur des grandeurs pour les comparer. Avec l'instrument examiné, nous avons abordé le rôle de « *l'autre* », qui questionne (genèse discursive).

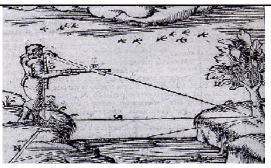
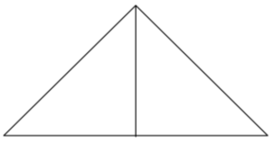
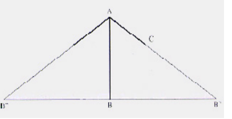
		

Figure 3 : La largeur d'un terrain (rivière) : schéma de la réalité	**Figure 4 : La largeur d'un terrain : figure géométrique incomplète**	**Figure 4 : La largeur d'un terrain : figure géométrique complète**

Cette conception de l'activité géométrique présente l'avantage d'utiliser à la fois des éléments matériels, réels et concrets (les instruments, les objets qu'on mesure) et des éléments abstraits et idéaux (les rayons visuels). Elle permet également de s'intéresser tout particulièrement à l'articulation entre les deux types d'éléments, lorsque le dessin de la réalité devient la figure géométrique. Le schéma, représentation de la réalité, devient figure abstraite, nécessaire à l'élaboration de la pensée. Ces activités peuvent être un bon support pour motiver les étudiants à tracer des figures géométriques en leur donnant du sens : les rayons visuels (élément pas concret) devenant des droites (élément concret sur le papier), les positions devenant des points, et à leur tour engendrent des triangles dont l'étude des propriétés est nécessaire. Son usage se fonde sur les propriétés des triangles isocèles et rectangles (Cerquetti & al., 1997).

Dans la GI quelques artefacts (instrument d'Errard le Bar-le-Duc, corde etc.) sont utilisés pour des constructions, pour des mesures et pour la représentation de la procédure qui est liée à la façon de l'arpenteur (Duval, 2005). Cette façon de regarder est l'entrée historique à la géométrie et contient la visée et la mesure avec l'instrument – outil approprié à des espaces réels et des représentations sur le papier. Les propriétés mathématiques sont mobilisées s'ils ont le rôle des critères de sélection de la façon de mesurer. Les mesures sont en relation avec les artefacts via la genèse instrumentale.

Rabardel (1995) confirme notre analyse en écrivant que : « *un processus de genèse et d'élaboration instrumentale, porté par le sujet et qui, parce qu'il concerne les deux pôles de l'entité instrumentale, l'artefact et les schèmes d'utilisation, a lui aussi deux dimensions, deux orientations à la fois distinguables et souvent conjointes : l'instrumentalisation dirigée vers l'artefact et l'instrumentation relative au sujet lui-même* ». Il caractérise le premier processus comme « *un processus d'enrichissement des propriétés de l'artefact par le sujet* » ou encore comme « *une transformation de l'artefact par le sujet* ». Tandis qu'il caractérise le processus d'instrumentation en constatant que « *la découverte progressive des propriétés (intrinsèques) de l'artefact par les sujets s'accompagne de l'accommodation de leurs schèmes, mais aussi de changements de signification de l'instrument résultant de l'association de l'artefact à de nouveaux schèmes* ». Le schéma indique que les deux processus sont effectivement « *portés par le sujet* » et orientés vers le sujet ou l'artefact, « *dans un même processus de genèse et d'élaboration instrumentale* » (Barbin, 2016).

À la place d'une Conclusion

Le choix de la situation-problème évoquée permet (éventuellement) d'étudier le travail géométrique en lien avec l'apprentissage de la démonstration. Cela permet d'observer le rôle de la genèse instrumentale dans le développement du discours de la preuve. La mise en œuvre de la situation-problème proposée dans un $\text{ETM}_{\text{Géométrie}}$ fait appel, entre autres, aux deux notions importantes liées au travail de la genèse instrumentale qui sont : l'expérience et la modélisation.

NOTES

1. Nous sommes en train de faire cette manipulation dans le cadre d'un mémoire de Master cette année.

2. On peut mettre, pour faire l'instrument plus accessible aux élèves de l'école primaire, un fil à plomb afin de s'assurer de son positionnement vertical et un tube de petit diamètre facilitant la visée. En plus, une corde d'une vingtaine de mètres, graduée pour mesurer les distances au sol est nécessaire.

REFERENCES

Barbin, E,. (2016), L'instrument mathématique comme invention et connaissance-en-action. In Nikolantonakis, K., (ed.), The Use of History of Mathematics in Mathematics Education, *Menon, Thematic Issue 2*, 9-30, University of Western Macedonia.

Cerqueti–Aberkane, Fr., Rodriguez, A., Johan, P., (1997). *Les maths ont une histoire, activités pour le cycle 3*, Hachette.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Johan, P., (1996). Pratiquer en CM une géométrie 'de terrain' inspirée des méthodes de l'Antiquité et du Moyen-Age. *Repères – IREM*, No 23, 31-42.

Kuzniak, A. (2015). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. In S. J. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 1-15). Cham: Springer.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas, *RELIME*, 17(4-I), 5-15.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

ETM5

Symposium/Symposium/Simposio

FACULTY OF EDUCATION

UNIVERSITY OF WESTERN MACEDONIA

2017

université PARIS DIDEROT PARIS 7

University of Cyprus

Université de Montréal

ISBN 978-618-81047-5-4