2015

Espacio de Trabajo Matemático
Mathematical Working Space
Espace de Travail Mathématique

Actas *Cuarto Simposio Internacional ETM*
Proceedings *Fourth ETM Symposium*
Actes *Quatrième Symposium ETM*

Del 30 de junio al 4 de julio de 2014
San Lorenzo de El Escorial, Madrid, España

Inés Mª Gómez-Chacón
Jesús Escribano
Alain Kuzniak
Philippe R. Richard
(Eds.)

Instituto de Matemática Interdisciplinar

Espacio de trabajo matemático
Mathematical working space
Espace de travail mathematique

Cuarto Simposio Internacional ETM
Fourth ETM Symposium
Quatriéme Symposium ETM

Del 30 de Junio al 4 de Julio de 2014

San Lorenzo de El Escorial, Madrid, España

Instituto de
Matemática
Interdisciplinar

Publicaciones del Instituto de Matemática Interdisciplinar (I.M.I.)

Espacio de trabajo matemático
Mathematical working space
Espace de travail mathematique

Cuarto Simposio Internacional ETM
Fourth ETM Symposium
Quatriéme Symposium ETM

Del 30 de Junio al 4 de Julio de 2014

San Lorenzo de El Escorial, Madrid, España

Editores :

Inés Mª Gómez-Chacón

Jesús Escribano

Alain Kuzniak

Philippe R. Richard

Edita: Universidad Complutense de Madrid

Instituto de Matemática Interdisciplinar (I.M.I.)
Ciudad Universitaria
Plaza de las Ciencias, 3
Despacho 250A
28040 Madrid
Tel. / Fax 34 91 394 4385
http://www.mat.ucm.es/imi/

Editores:
Inés Mª Gómez-Chacón
Jesús Escribano
Alain Kuzniak
Philippe R. Richard

Diseño y maquetación:
Inés Mª Gómez-Chacón
David Gómez-Castro

ISBN: 978-84-606-9475-5
Depósito Legal: M-22937-2015

Impreso en Madrid

INTRODUCCIÓN

Los Encuentros de ETM son simposios organizados bajo la metodología de grupos de trabajo a partir de las comunicaciones propuestas por los participantes. El formato Simposio favorece el intercambio fructífero entre los participantes y posibilita la constitución de una comunidad de investigadores con intereses comunes. Las reuniones de ETM tienen una dimensión internacional: Canadá, Chile, Chipre, España, Francia, Grecia, México, Suiza, etc.

El primer encuentro tuvo lugar el 24 y 25 de Octubre del 2009 en Nicosia (Chipre), las comunicaciones están publicadas en el libro: Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E. & Vivier, L. (eds). (2009). Cyprus and France, Research in Mathematics Education, Lefkosia.

El segundo encuentro se realizó en París el 22 y 23 de Octubre del 2010 bajo la forma de un Simposio Franco-Chipriote "Espacios de Trabajo Matemático". Algunas de las comunicaciones de ese simposio fueron seleccionadas y publicadas en la revista Annales de Didactique et de Sciences Cognitives (2011, en el número 16).

La tercera edición de ETM se desarrolló en Montreal del 22 al 24 de Octubre de 2012. Los artículos generados en el Simposio están en proceso editorial para una monografía en la revista RELIME (2014, Kuzniak & Richard (eds)).

Lo encuentros primeros estuvieron dedicados al estudio de la noción de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en Educación Matemática. De hecho, el objetivo fundamental es el estudio del trabajo matemático. La evolución temática durante los diversos encuentros nos ha permitido profundizar en la diversidad de enfoques. De forma específica la investigación que se desarrolla integra las dimensiones semióticas, cognitivas e instrumentales que conforman la definición de los temas constitutivos de ETM. Durante la conferencia de ETM3, se tuvo también en cuenta la dimensión social e institucional contribuyendo a la ampliación de puntos de vista sobre la naturaleza del trabajo matemático.

Los dos objetivos principales de esta cuarta edición son fortalecer la comunidad de investigadores de la educación interesados en el tema de la ETM y ampliar a otras perspectivas de investigación.

Estamos muy contentos por el gran interés despertado en este Simposio. El número de participantes (55 personas) muestra la dinámica actual sobre estudios que se realizan en el mundo sobre el concepto Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y la diversidad de los temas trabajados. Estamos satisfechos de haber logrado en el programa 36 artículos de investigación evaluados por revisores y 6 posters repartidos a través de los tres temas que propone el coloquio. También me complace ver una gran comunidad de investigadores procedentes de distintas universidades de diversos países, de Europa: Inglaterra, Chipre, Francia, España; Italia; de América Latina: Argentina, Chile, Ecuador, México y Canadá.

Este evento no hubiera sido posible sin el apoyo de la Facultad de Ciencias Matemáticas, en particular de la Cátedra UCM Miguel de Guzmán la Facultad, el Instituto de Matemática Interdisciplinar y la Fundación General de la Universidad Complutense.

Nuestra gratitud se extiende al comité científico para evaluar las múltiples propuestas en un tiempo muy corto y a todos los autores por sus puntos de vista relevantes, y estamos en deuda con los revisores que amablemente contribuyeron realizando una buena revisión y propuestas de mejora. Todo esto ha contribuido a la calidad de los artículos que se publican en estas Actas del Simposio.

Inés Mª Gómez-Chacón
Presidenta del Simposium

INTRODUCTION

ETM meetings are organized into working groups based on the contributions proposed by participants. The form of the Symposium allows an interesting exchange of ideas amongst participants and encourages the development of a scientific community with common interests. ETM meetings have an international dimension (Canada, Chile, Cyprus, France, Greece, Mexico, Switzerland, etc.) and a multilingual participation (English, Spanish, French).

The first ETM meeting took place in October 24-25, 2009 in Nicosia (Cyprus). Communications of this first meeting were published in the book: Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E., & Vivier, L. (eds, 2009). Cyprus and France, Research in Mathematics Education, Lefkosia. The second meeting was held in October 22-23, 2010 in Paris, for the first time in the form of a symposium. The papers presented in this symposium were published after being reviewed in the journal 'Annals of Teaching and Cognitive Sciences' (Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, in French, 2011). The third edition of ETM was held in Montreal in October 22-23-24, 2012. The papers in this symposium were published in a special issue of the journal RELIME (2014, Kuzniak & Richard (eds.)).

ETM meetings were initially dedicated to the study, development and possible uses of the concept of Mathematical Working Spaces (ETM, Espace de Travail Mathématique, in french) in mathematics education. In fact, the main objective is the study of the nature of mathematical work. This evolution has deepened and diversified the approaches to the subject. In particular, the research in this field integrates the semiotic, cognitive and instrumental dimensions of mathematical work that have contributed to the definition of constituent issues of ETM. During the ETM3 colloquium, the institutional and social dimension of mathematical work was also considered, opening the idea to researching new points of view.

The main objectives of the fourth meeting are to strengthen the community of education researchers interested in ETM, and to open the issue of ETM to other areas of research.

I'm delighted by the high degree of interest in this Symposium. The number of participants (55 people) reflects the dynamic nature of studies in the notion of Space for Mathematical Work abroad and we can see the diversity of the topics presented at the conference. It is our pleasure to have a program with 36 peer-reviewed research papers and 6 posters, distributed across the three topics of the symposium. I am also pleased to see a large community of researchers coming from several universities in different European countries: England, Cyprus, France, Spain; Italy; from Latin America: Argentina, Chile, Ecuador, Mexico and from Canada.

This event would not have been possible without the support from la Facultad de Ciencias Matemáticas, particularly of Cátedra UCM Miguel de Guzmán la

Facultad, el Instituto de Matemática Interdisciplinar and la Fundación General de la Universidad Complutense.

We extend our gratitude to the scientific committee for evaluating the many proposals in a very short time and to the authors for their relevant perspectives. We are also indebted to all the reviewers who kindly and thoroughly collaborated in revising and improving the proposals. All this contributed to the high quality of the final papers published in this Symposium Proceedings.

Inés Mª Gómez-Chacón
Symposium Chair

INTRODUCTION

Les rencontres ETM sont des symposiums organisés sous forme de groupes de travail à partir des communications proposées par les participants. La formule symposium a permis des échanges fructueux entre les participants et a encouragé la constitution d'une communauté de chercheurs aux intérêts communs. Les rencontres ETM profitent d'une dimension internationale (Canada, Chili, Chypre, Espagne, France, Grèce, Mexique, Suisse, etc.) et d'une participation multilingue (anglais, espagnol, français).La première rencontre ETM a eu lieu les 24 et 25 octobre 2009 à Nicosie (Chypre). Les communications de ce Symposium ont été publiées dans l'ouvrage : Gagatsis, A., Kuzniak, A., Deliyianni, E., & Vivier, L. (eds, 2009).

Cyprus and France, Research in Mathematics Education, Lefkosia. La deuxième rencontre a eu lieu les 22 et 23 octobre 2010 à Paris, pour la première fois, sous la forme d'un symposium. Les articles issus des communications de ce Symposium ont été publiés après relecture dans la revue Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. La troisième édition d'ETM s'est déroulée à Montréal les 22, 23 et 24 octobre 2012. Les articles issus des communications de ce symposium sont entrés dans un processus éditorial pour une publication dans un numéro spécial de la revue RELIME (Kuzniak, A. & Richard. R. (eds, 2014))

Les rencontres ETM étaient initialement consacrées à l'étude, au développement et aux usages possibles de la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) en didactique des mathématiques. De fait, leur objet actuel vise, plus largement, à étudier ce qui est l'élément fondateur de ces rencontres : le travail mathématique. Cette évolution thématique a permis un approfondissement des pistes développées et une plus grande diversification des approches. En particulier, les recherches intégrant les dimensions sémiotiques, cognitives et instrumentales ont permis de mieux définir les enjeux constitutifs des ETM. Lors du colloque ETM3, la prise en compte de la dimension institutionnelle et sociale a permis l'ouverture du travail mathématique vers d'autres problématiques.

Cette quatrième édition vise prioritairement, la consolidation de l'ouverture de la question des ETM et du travail mathématique à d'autres sphères de recherche.

Je suis enchantée du grand intérêt porté à ce Symposium. Le nombre des participants (55 personnes) montre l'abondance des études sur la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) partout dans le monde et la diversité des thématiques présentes à ce colloque. Cela me fait plaisir d'avoir réuni dans le programme 36 articles de recherche évalués par des pairs-évaluateurs et 6 affiches, réparties entre les trois thèmes du colloque. Je suis aussi heureuse de voir une vaste communauté de chercheurs venue de différentes universités de différents pays d'Europe: Angleterre, Chypre, France, Espagne; Italie; d'Amérique Latine et Centrale : Argentine, Chili, Équateur, Mexique et d'Amérique du Nord : Canada.

Cet événement n’aurait pu être possible sans le soutien de la Facultad de Ciencias Matemáticas, en particulier de la Cátedra UCM Miguel de Guzmán, la Facultad, el Instituto de Matemática Interdisciplinar y la Fundación General de la Universidad Complutense.

Notre gratitude s’étend au comité scientifique pour avoir évalué les nombreuses propositions dans des délais très courts et à tous les auteurs pour leurs points de vue pertinents, et nous sommes redevables à tous les évaluateurs qui ont bien voulu collaborer à la révision et l'amélioration des propositions. Tout cela a contribué à la qualité des articles publiés sur ces Actes du Symposium.

Inés Mª Gómez-Chacón
Présidente du Symposium

ÍNDICE / INDEX / INDEX

PRESIDENTE/CHAIR/PRÉSIDENTE:

Inés Mª GÓMEZ-CHACÓN. Cátedra UCM Miguel de Guzmán, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.

CO-PRESIDENTE/CO-CHAIR/CO-PRÉSIDENTE:

Alain KUZNIAK Université Paris Diderot, Francia, Philippe R. RICHARD Université de Montréal, Canada.

SECRETARIO/SECRETARY/SECRÉTAIRE:

Jesús ESCRIBANO, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid.

COMITE CIENTIFICO / SCIENTIFIC COMMITTEE / COMITE SCIENTIFIQUE

Iliada ELIA, Universidad de Chipre, Chipre. Josep Mª FORTUNY, Universidad Autónoma de Barcelona, España. Athanasios GAGATSIS, Universidad de Chipre, Chipre. Inés Mª GÓMEZ-CHACÓN, Universidad Complutense de Madrid, España. Alain KUZNIAK (Co-Presidente), Université Paris Diderot, Francia. Asuman OKTAC, Cinvestav, México. François PLUVINAGE, Cinvestav, México. Luis RADFORD, Université Laurentienne, Canadá. Tomás RECIO, Universidad de Cantabria, España. Philippe R. RICHARD (Co-Presidente), Université de Montréal, Canadá. Denis TANGUAY, Université du Québec, Canadá. Laurent VIVIER, Université Paris Diderot, Francia.

COMITE DE ORGANIZACION / ORGANIZING COMMITTEE / COMITE D'ORGANISATION

Jesús Ildefonso DÍAZ, Instituto de Matemática Interdisciplinar (IMI), Universidad Complutense de Madrid. Antonio DÍAZ-CANO, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. Jesús ESCRIBANO, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. Inés Mª GÓMEZ-CHACÓN (Presidenta), Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid. Victoria LÓPEZ, Facultad de Informática, Universidad Complutense de Madrid.

ENTIDAD ORGANIZADORA / ORGANIZING INSTITUTION / INSTITUTION ORGANISATRICE

Cátedra UCM Miguel de Guzmán, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid en colaboración con el Instituto de Matemática Interdisciplinar (IMI).

CON LA COLABORACION INTERNACIONAL DE/ WITH INTERNATIONAL COLLABORATION / AVEC LA COLLABORATION INTERNATIONALE DE

University of Cyprus, Université de Montréal y Université Paris Diderot

ORGANIZACIÓN POR TEMAS/ ORGANIZATION BY TOPICS/ ORGANISATION THÉMATIQUE

El encuentro se organizará alrededor de tres temas. The meeting will be organized around three main topics. La rencontre sera organisée autour de trois thèmes.

TEMA 1

EL TRABAJO MATEMÁTICO Y LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

Denis Tanguay, Université du Québec à Montréal

Alain Kuzniak, Université Paris Diderot

Athanasios Gagatsis, University of Cyprus

1. DESCRIPCIÓN INICIAL DEL TEMA 1

En este tema, el objetivo es por un lado profundizar el modelo teórico que los Espacios de Trabajo Matemático definen y por otro lado mostrar sus usos posibles como herramienta de análisis en estudios específicos. Se abordarán las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los conocimientos de referencia y conocimientos utilizados en el ETM? El trabajo matemático permite cristalizar formas de hacer y rutas de pensamiento que se dan en la resolución de problemas matemáticos en el ámbito de la enseñanza o proceden de la investigación matemática. ¿Cómo tiene lugar esta identificación con el trabajo matemático en los profesores, en los formadores y en los alumnos? ¿Cómo los ETM tienen en cuenta la cuestión de saberes y actividades que lo soportan? Las respuestas a estas preguntas en general se basan no sólo en estudios de casos tomados en el contexto educativo de las áreas específicas (geometría, análisis, probabilidad, etc.) sino también en las actividades de modelado utilizando la interacción del mundo real y los modelos matemáticos. Asimismo se pueden basar en los estudios históricos o epistemológicos.

2. CONTRIBUCIONES

Autores / Título	Tema	Especificidades
Bernard Parzysz L’évolution du travail mathématique dans l’enseignement des probabilités en France	Probabilidad	ETM de referencia e idóneo
Assia Nechache Comparaison de la démarche de la validation dans les espaces de travail idoines en Géométrie et en Probabilité	Probabilidad y geometría	Validación en el ETM
Denis Tanguay Circulation et coordination dans les espaces de travail, pour une activité articulant géométrie et arithmétique	Geometría y aritmética	Circulación del conocimiento en el ETM

Carolina Henríquez-Rivas, Elizabeth Montoya-Delgadillo *El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la Geometría sintética a la analítica en el liceo*	Geometría analítica y sintética	Articulación en el marco de los ETM
Romina Menares Espinoza, Elizabeth Montoya Delgadillo *El trabajo matemático de profesores en su formación inicial: un estudio en torno a las funciones continuas.*	Análisis	Paradigmas y ETM
Athanassios Raftopoulos and Demetris Portides *The types of change that underlie the transitions among the different types of representations of functions and the ETM*	Análisis	Perspectiva cognitiva
Dominique Laval *L'activité Algorithmique comme objet d'apprentissage du concept de preuve en théorie élémentaire des nombres : algorithme de kaprekar*	Algorítmica	Uso de ETM
Schlosser Fabien *Pragmatique de la construction et du fonctionnement des espaces de travail géométriques. Etude de cas en Geometrie dans l'Espace synthetique au lycee.*	Geometría	Perspectiva semiótica
Melissa Rodd *Space for geometric work: points of affect*	Geometría	Afectos en ETM
Athanasios Gagatsis, Eleni Deliyianni and Iliada Elia *Representational flexibility profiles in fraction and decimal number addition*	Números	Flexibilidad y representación
A. Gagatsis, S. Özel, I. Elia, A. Panaoura and Z. Ebrar Y. Özel *A unified frame of reference for the study of students' errors and obstacles within the discursive genesis of the mathematical work space on the concept of absolute value*	Análisis y números	Obstáculos. Perspectiva cognitiva
Rafael Arancibia-Rojas, Carolina Henríquez-Rivas *Los espacios de trabajo geométrico personal de estudiantes de liceo: un estudio de casos (Poster 1)*	Geometría	ETM personal
Blanca Souto e Inés Mª Gómez-Chacón *Representaciones y visualización en Algebra Lineal, conectando diferentes marcos teóricos (Poster 2)*	Álgebra	Visualización y comparación de marcos
S. Estrella, A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo and L. Vivier *El trabajo matemático en el análisis: una aproximación a los ETM en Francia y Chile (Poster 3)*	Álgebra	Estudios comparativos usando ETM

3. PLANTEAMIENTO DE TRABAJO Y TEMAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTOS

3.1. Horizontes Compartidos

En las presentaciones se abordan gran diversidad de temas matemáticos: probabilidad, geometría sintética y analítica (coordenadas), geometría plana y sólida, funciones, algorítmica, números vía su representación (fraccional o decimal), el valor absoluto, aritmética y teoría de números. Esta diversidad confirma la necesidad de tener que considerar espacios de trabajo matemático específicos para diversos campos matemáticos, por ejemplo

$$ETM_{\text{Probabilidad}}, ETM_{\text{Aritmética}}, ETM_{\text{Análisis}}$$

Pero estos campos pueden convertirse en demasiado extensos cuando el propósito es los estudios didácticos. Especialmente cuando el contexto institucional favorece el trabajo en un área limitada dentro del campo. Por tanto parece conveniente considerar espacios de trabajo diferenciados como: el $ETM_{\text{Funciones}}$ o ETM_{Matrices} o en el caso de la geometría $ETM_{\text{sintética}}$ o $ETM_{\text{Analítica}}$. A la vez que estos Espacios de Trabajo Matemático globales (ETM) podría ser interesante especificar algunas estructuras ETM locales en torno a una notación, un teorema… También hay necesidad de hacer hincapié en cómo los campos interdisciplinares, como la aritmética o la modelización, pueden ser integrados en ETM.

El tema se planteó en ETM3 y volvió a surgir de nuevo en el grupo de trabajo del Tema 1 bajo diferentes cuestiones como por ejemplo, cómo se describe si es a través de un modelo. Si la tarea que se plantea es un cambio de campo como, por ejemplo, una tarea geométrica que requiere una gran cantidad de medidas y un giro hacia los cálculos numéricos. ¿Cómo tener en cuenta la circulación entre dos espacios de trabajos paralelos que involucran objetos compartidos por dos espacios de trabajo, cada uno perteneciente a un campo específico, y entre planos epistemológicos que involucran objetos compartidos por dos campos pero donde los registros de presentación, artefactos, teoremas y definiciones (del marco de referencia teóricos) se favorecen en alguno de los campos o, simétricamente, no son efectivos en otro.

Este problema conecta con la necesidad, claramente identificada por el grupo, de considerar el modelo de ETM como un modelo dinámico, en lugar de estático. Para una tarea determinada el modelo debe permitir la identificación de circulaciones, de caminos dentro del ETM o entre dos ETM. Debe permitir encontrar el ajuste de los tres polos: semiótico, instrumental y discursivo. El trabajo en cada plano vertical (Sem-Ins, Sem-Dis, Ins-Dis) sería considerado si ofrece (o no) la la oportunidad de ‘salir’ de un plano y permitir el acceso al tercer polo (por ejemplo, dando acceso al polo discursivo de la génesis de una demostración, de un trabajo a priori en el plano Sem-Ins) generando así una actividad matemática completa e integrada.

El modelo de espacios de trabajo matemático, concebido como la circulación de espacios entre polos en los planos epistemológico y cognitivo, debería ser una herramienta del análisis (a priori tanto como a posteriori). Una herramienta de tareas de interpretación y descripción. Debe permitir la implementación de un ajuste fino de las tareas ya construidas pero también debe la elaboración y ‘calibración’ de nuevas situaciones educativas, o de situaciones que aún deben ser experimentadas. Finalmente, también puede apoyar la observación y dar tener en cuenta los experimentos ya realizados haciendo el examen más fácil, por ejemplo ayudando a la descripción del progreso de los alumnos en su trabajo matemático, considerando a los alumnos aislados o en grupos.

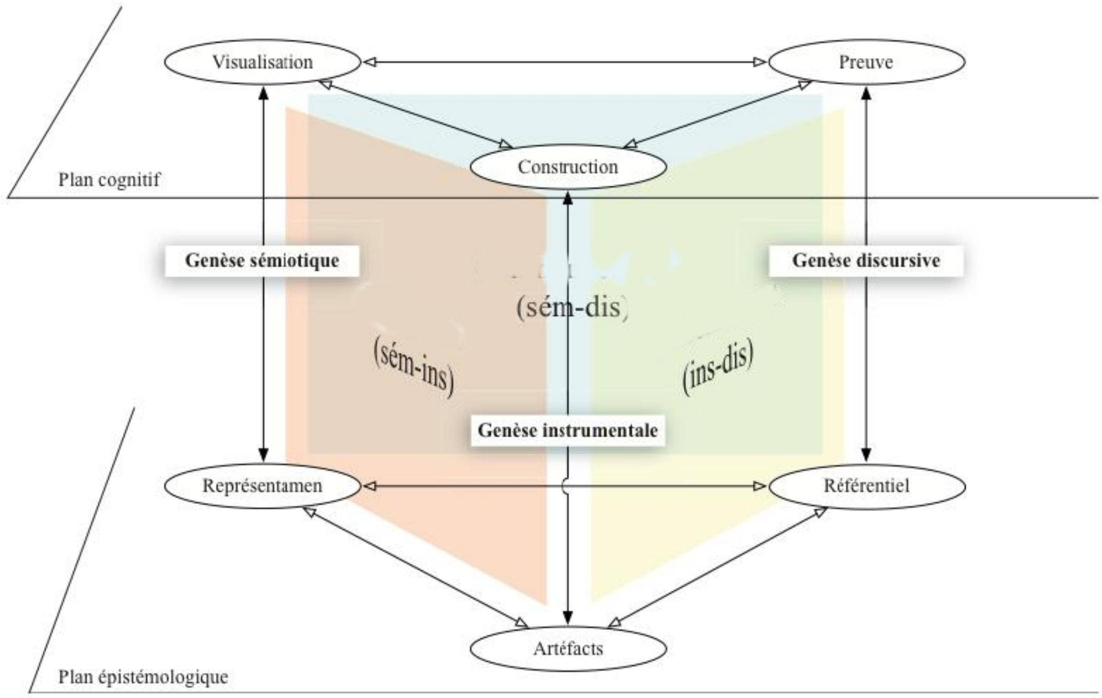


Figura 1: Los polos o ejes verticales de los ETM

4. ALGUNOS TEMAS TRANSVERSALES:

4.1. El entrelazado de los tres génesis

La interdependencia fuerte entre los tres génesis se tiene en cuenta en el modelo a través de la importancia dada a tres planos verticales. El entrelazado de las tres génesis se ha debatido durante las presentaciones, lo que ha llevado a algunas preguntas y perspectivas:

- El tipo de validaciones que da norma a *la génesis discursiva de la demostración*. Cabe entonces preguntarse dónde empieza y dónde acaba esta génesis. ¿Cómo se debe considerar en un modelo o enuna justificación clara? ¿Puede un marco teórico de referencia o una teoría o incluso un paradigma, ser considerado como una base que garantice consistencia, validez y verdad y también permita el reconocimiento del grado de generalidad de las afirmaciones?
- La 'discursividad' está involucrada en la génesis semiótica, entre otras, por las definiciones basadas en la caracterización de propiedades y "representamen" con una carga fuerte teorica o considerada los dibujos geométricos, 'en detalle' como ejemplos del modelo teórico del plano geométrico. ¿Cómo, entonces, ocurre el paso de la génesis semiótica a la génesis discursiva? El lenguaje asociado a los sistemas de signos debe, probablemente, ser considerado de manera diferente al lenguaje natural, usado en el eje discursivo para construir un marco de referencia para la teoría, estando los dos integrados

en un paradigma.

- ¿Cómo tener en cuenta las génesis enlazadas con las herramientas matemáticas en todo su complejidad? Herramientas cargadas de teoría como los árboles de probabilidad también son artefactos, con su propia génesis instrumental asociada a lo discursivo. Del mismo modo, las representaciones semióticas están impregnadas por el uso de las herramientas técnicas, como por el ejemplo el dibujo de un círculo está ligado con medidor de ángulos o con el compás, y el uso de estas herramientas ciertamente tiene un importante impacto en la génesis semiótica y en su conceptualización (por ejemplo en el objeto 'círculo'). Lo que opera en el plano cognitivo.

El trabajo matemático resulta de interconexión entre las tres génesis. Entonces es pertinente considerar los tres ejes y los tres planos verticales (combinación de dos ejes) como una herramienta analítica para una mejor identificación y descripción de los caminos en el espacio de trabajo. Esta herramienta debe permitir detectarlas rupturas y localizar posibles encierros y bloqueos dentro de una o dos génesis. Por ejemplo, para tareas de carácter constructivista, como por ejemplo 'situaciones adidácticas', cómo evitar un trabajo en el plano Sem-Ins que se convierta inútil .¿Cómo dirigir el trabajo hacia la génesis discursiva de la demostración?

Modelizar con el modelo ETM puede facilitar el análisis de estas interdependencias, y el término *fibración* se ha sugerido como etiqueta para estos movimientos y transiciones entre diferentes elementos del modelo. De este modo tendríamos *fibraciones internas* (entre planos, entre polos, entre registros de representación…) y *fibraciones externas* (entre ETMs de diferentes campos). Estas fibraciones darían cuenta de la constitución del trabajo matemático pero, por el contrario, sugerirían procesos deconstructivos cuando los polos resultasen ser, de modo erróneo, amalgamientos en la comprensión del aprendiz (por ejemplo, en la comprensión de un estudiante que distinguiese pobremente entre un discurso descriptivo, perteneciente a la génesis semiótica, y un discurso demostrativo, perteneciente a la génesis de la demostración)

4.2 Algunos temas específicos

Para concluir, mencionamos algunas cuestiones y reflexiones específicas que surgieron en las presentaciones, y que podrían ofrecernos nuevos campos de investigación.

- ¿Cómo evidenciar mejor el carácter dinámico del modelo ETM? La idea sería ofrecer una visualización más operativa usando el diagrama de ETM. En particular, haciéndola más operativa para la descripción de las tareas o situaciones matemáticas. A la vez esto permitiría una comprensión mayor de la flexibilidad representativa que ofrece.
- Para describir de forma más completa el trabajo del profesor, sería conveniente distinguir lo que será ETM 'idóneo, "potencial"' o 'genérico' (dado por una institución) de un ETM idóneo considerado *a priori* por el

profesor quien planea su docencia, o un ETM actualizado por *ese* profesor en *su* aula mientras enseña.

- ¿Puede el estudio del ETM Idóneo de los profesores, y de las prácticas escolares -'praxeologías inducidas-' ayudar a explicar algunos obstáculos didácticos, por ejemplo los que se encuentran en la enseñanza de nociones como el valor absoluto?
- ¿Cuál podría ser la contribución de los estudios semióticos como son los trabajos de Peirce a una investigación detallada de las génesis en los tres planos de ETM: sintáctico, semántico y pragmático? Hacemos notar que un modelo así puede volverse y cabría preguntarse si aún sería productivo desde el punto de vista didáctico.
- ¿Cómo tener en cuenta las características distintivas de los signos y la representaciones en geométrica sólida? ¿Cómo considerar la génesis semiótica en la geometría sólida?
- ¿Deberíamos considerar la geometría sintética y analítica como dos ETM localeso como dos ETM globales? Y ¿qué pasa con las geometrías plana y sólida? En ambos casos, ¿cómo podemos incrementar la circulación entre las dos ETM en juego?
- ¿Cómo promover la visualización analítica en geometría, en lugar de la visualización icónica? ¿Qué tipo de coordinación entre génesis semiótica y génesis discursiva debería fijarse para ello?
- ¿Hay lugar en el ETM para el análisis de las respuestas emocionales y dimensiones de afecto y sus repercusiones en el trabajo matemático del estudiante?

TOPIC 1

THE MATHEMATICAL WORK AND MATHEMATICAL WORKING SPACES

Denis Tanguay, Université du Québec à Montréal

Alain Kuzniak, Université Paris Diderot

Athanasios Gagatsis, University of Cyprus

1. INITIAL DESCRIPTION OF TOPIC 1.

The purpose of this topic is, firstly, to elaborate on the theoretical model defined by the areas of mathematical working space and, secondly, to demonstrate its possible application as an analytical tool in particular studies. The following questions could be addressed: What is the reference knowledge and the understanding used in the MWS? The mathematical work can crystallize ways of doing and paths of thinking that appear in solving mathematical problems proposed in teaching or derived from research in mathematics. How do the identification processes of mathematical work associated with knowledge take place among teachers and learners? How does the MWS explain the knowledge and activities on which it is based? The answers to these general questions could depend upon the case studies from specific areas (geometry, analysis, probability, etc.), but also on modelling activities using the interaction between real world and mathematical models. They may also rely on historical or epistemological studies.

2. CONTRIBUTIONS

Author / Title	Topic	Specifities
Bernard Parzysz *L'évolution du travail mathématique dans l'enseignement des probabilités en France*	Probability	Reference and Appropriate MWS
Assia Nechache *Comparaison de la démarche de la validation dans les espaces de travail idoines en Géométrie et en Probabilité*	Probability and Geometry	Validation in MWS
Denis Tanguay *Circulation et coordination dans les espaces de travail, pour une activité articulant géométrie et arithmétique*	Geometry and arithmetics	Circulation of knowledge in MWS
Carolina Henríquez-Rivas, Elizabeth Montoya-Delgadillo *El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la Geometría sintética a la analítica en el liceo*	Analytic and sinthetic geometry	Articulation within MWS Framework

Romina Menares Espinoza, Elizabeth Montoya Delgadillo *El trabajo matemático de profesores en su formación inicial: un estudio en torno a las funciones continuas.*	Analysis	Paradigm and MWS
Athanassios Raftopoulos and Demetris Portides *The types of change that underlie the transitions among the different types of representations of functions and the ETM*	Analysis	Cognitive perspective.
Dominique Laval *L'activité Algorithmique comme objet d'apprentissage du concept de preuve en théorie élémentaire des nombres : algorithme de kaprekar*	Algorythmics	Use of MWS
Schlosser Fabien *Pragmatique de la construction et du fonctionnement des espaces de travail géométriques. Etude de cas en Geometrie dans l'Espace synthetique au lycee.*	Geometry	Perspective semiotic
Melissa Rodd Space for geometric work: points of affect	Geometry	Affects in MWS
Athanasios Gagatsis*, Eleni Deliyianni** and Iliada Elia* *Representational flexibility profiles in fraction and decimal number addition*	Numbers	Flexibility and representation
A. Gagatsis, S. Özel, I. Elia, A. Panaoura and Z. Ebrar Y. Özel *A unified frame of reference for the study of students' errors and obstacles within the discursive genesis of the mathematical work space on the concept of absolute value*	Analysis and numbers	Obstacles. Epistemologic al perspective
Rafael Arancibia-Rojas, Carolina Henríquez-Rivas *Los espacios de trabajo geométrico personal de estudiantes de liceo : un estudio de casos (Poster 1)*	Geometry	Personal MWS
Blanca Souto e Inés Mª Gómez-Chacón *Representaciones y visualización en Algebra Lineal, conectando diferentes marcos teóricos (Poster 2)*	Algebra	Visualization and frameworks.
S. Estrella, A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo and L. Vivier *El trabajo matemático en el análisis: una aproximación a los ETM en Francia y Chile (Poster 3)*	Analysis	Comparative studies using MWS

3. FRAMEWORK AND OPEN RESEARCH QUESTIONS

3.1 Shared Horizons

From the assessment of the presentations emerges the diversity of the tackled mathematical themes: probability, synthetic and analytic (coordinate) geometries, plane and solid geometries, functions, algorithmic, numbers with their representations (fractional, decimal), the absolute value, arithmetic and elementary number theory. This diversity confirms the necessity of having to consider mathematical working space specific to particular mathematical fields, e. g.

$MWS_{Probability}$, $MWS_{Arithmetic}$, $MWS_{Analysis}$.

But these fields may turn out to be too broad for the purpose of some didactical studies, especially when the institutional context favors the work in a limited area inside the field. We may thus envisage a $MWS_{Function}$, or a $MWS_{Matrices}$, or else in the case of geometry a $GWS_{synthetic}$, a $GWS_{analytic}$, a GWS_{plane}, a GWS_{solid}. Alongside these global MWS, it could be interesting to specify some local MWS structured around a notion, a theorem... Also, there is a need to reflect on the way cross-field themes, such as algorithmic or modelling, could be integrated to MWS.

The issue had aroused in ETM3 and came up again in the working group on Topic 1: how to describe, through the model, a mathematical task that prompts a change of field such as, typically, geometrical tasks requiring an important work with measurements and a shift towards numerical computations. How to account for the circulation between two parallel working spaces each pertaining to a specific field, and between epistemological planes involving objects shared by two fields but where registers of representation, artefacts, theorems or definitions (from the theoretical frame of references) are favored in one of the fields or symmetrically, are ineffective in the other one.

This issue is linked to the necessity, clearly identified by the group, for considering the MWS model as a dynamic, rather than static, model. For a given task, the model should allow the identification of circulations, of paths inside the MWS or between two MWS, it must enable tracking down the possible tuning of the three poles: semiotic, instrumental and discursive. The work in each of the vertical plane (Sem-Ins, Sem-Dis, Ins-Dis) would then be considered for enabling, or not, the opportunity of 'getting out' of a given plane and of gaining access to the third pole — for instance gaining access to the discursive pole of proof genesis, from a work *a priori* in the [Sem-Ins] plane —, thus giving rise to a complete and integrative mathematical activity.

The model of Mathematical Working Space, conceived as a circulation space between poles in the epistemological and cognitive planes, must be a tool of analysis (*a priori* as much as *a posteriori*), a tool of tasks interpretation and description. It must enable the implementation and the fine tuning of already constructed tasks but must also enable the elaboration and 'calibration' of new teaching situations, or of situations still to be experimented. Finally, it may support the observation and account for experimentations already conducted by making the examination easier, for example in helping the description of students' progress in their mathematical work, students being considered in isolation or in group.

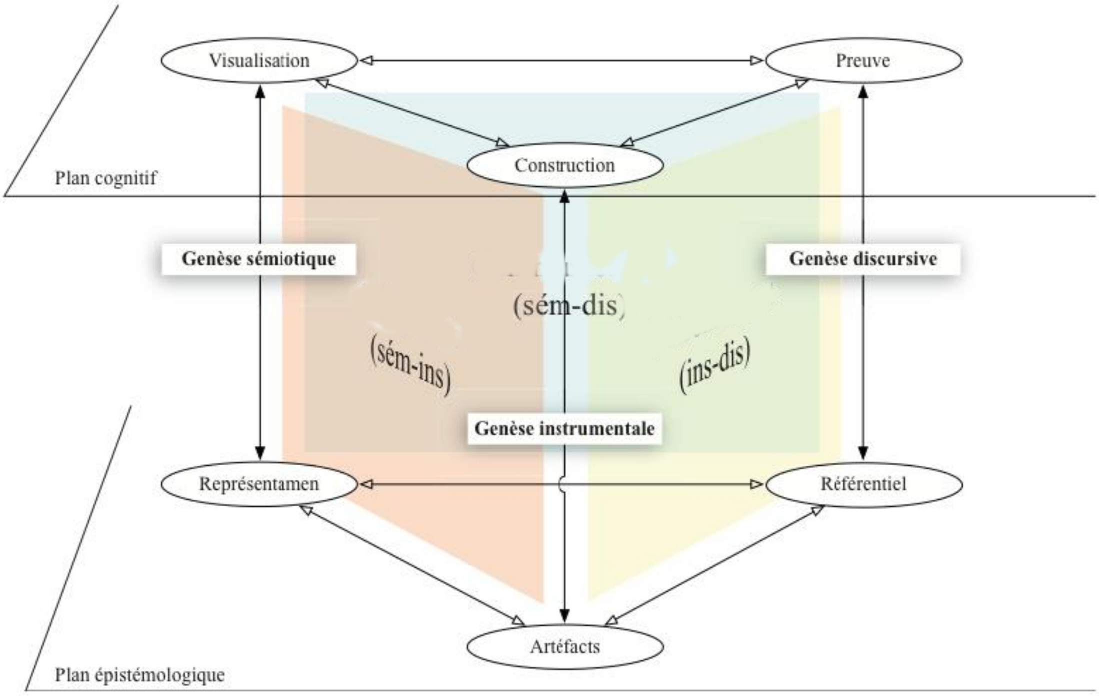


Figure 1: The poles or vertical axes of MWS

4. SOME TRANSVERSE ISSUES

4.1 The interweaving of the three geneses

The problem of the strong interdependency between the three geneses is taken into account in the model by the importance imparted to the three vertical planes in outlining the mathematical work. The interweaving of the three geneses has been discussed during the presentations, and some questions and perspectives have been drawn.

- The expected type of validation shapes the *discursive genesis of proof,* and one may then wonder where does this genesis begin and where does it end. How should be considered, in the model, a plain justification? Could a frame of references, and eventually a theory or even a paradigm, be thought about as an underpinning that warrant consistency, validity and truth, and also allow the acknowledgement of the generality degree to be allotted to statements.
- 'Discursivity' is involved in the semiotic genesis, with among other things definitions based on characterizing properties and representamen loaded with theory, such as geometrical drawings, to be considered *in fine* as specimen samples in a set-theoretic model of the geometrical plane. How then does the shift from the semiotic genesis to the discursive genesis occur? The languages associated to systems of signs must probably be considered differently from natural languages, used in the discursive pole to construct the frame of references and the theory, the two being integrated into a paradigm.
- How to account for geneses linked to mathematical tools in all their complexity? Tools loaded with theory such as the tree in probability are also

artefacts, with their own instrumental genesis in which discursivity has a role to play. In the same way, semiotic representations are pervaded by the usage of technical tools, as for instance the drawing of a circle is linked to the protractor or the compass, and the usage of these tools has certainly an important impact on the semiotic genesis and on the conceptualization (for instance of the object 'circle') thus sparked off in the cognitive plane.

The mathematical work follows from the interweaving of the three geneses, and one must then regard the three axes and the three vertical planes (combination of two axes) as an analytical tool for better identifying and describing the paths in the working space. This tool must also enable to detect breaches, to track down the possible confinements and blockages inside one or two geneses. For example, for tasks of a strong constructivist quality such as 'adidactic situations', how to avoid a work in the [Sem-Ins] plane that runs idle in it. How then to inflect the work towards the discursive genesis of proof?

Modelling with the MWS model may facilitate the analysis of all of these interdependencies, and the term *fibration* has been suggested to label these moves and transitions between the different elements of the model. In this way, we would have *internal fibrations* (between planes, between poles, between registers of representation…) and *external fibrations* (between the MWS of different fields). These fibrations would account for the constitution of the mathematical work but conversely, they would suggest deconstruction processes when the poles come out to be, in a muddled and erroneous way, amalgamated in the learner understanding; as, for instance, in the understanding of a student who would poorly distinguish between a description discourse, pertaining to the semiotic genesis, and a proving discourse, pertaining to the discursive genesis of proof.

4.2 Some more specific issues

To conclude, let us mention some specific questions and reflections raised in the course of the presentations, and which could constitute interesting openings for research.

- How to better emphasize the dynamic aspect and quality of the MWS model? The idea would be to make the visualization more operational using the MWS diagram, in particular by making it more workable for the description of mathematical tasks or situations. At the same time, it may allow an easier detection and understanding of representational flexibility.
- To describe more completely the work of the teacher, we may want to distinguish what would be a 'potential' or 'generic' appropriate MWS ('ETM idoine') in a given schooling institution, from an appropriate MWS considered *a priori* by the teacher who is planning her or his teaching, or else from the MWS as it is actualized by *this* teacher in *her* or *his* classroom when she or he teach.
- Does the study of appropriate MWS for teachers, and of the resulting school

practices or even of the resulting ‘praxeologies’ may help in explaining some didactical obstacles, for instance those encountered in the teaching of a notion such as the absolute value?

- What could be the contribution of semiotic studies in a detailed investigation of the geneses with the consideration of, why not, a MWS in three planes, syntactic, semiotic and pragmatic, as in Peirce’s work? But at the same time, and this would be true for other refinements, with the model thus becoming more complex would it still be productive from a didactic standpoint?
- How taking into account the distinctive characteristics of signs and representations in solid geometry? How to think of semiotic genesis in solid geometry?
- Should we consider synthetic geometry and analytic geometry as two local GWS or as two global GWS? And what about plane and solid geometries? In the two instances, how to help and increase the circulation between the two GWS at stake?
- How to promote an analytic visualization in geometry, rather than an iconic visualization? What type of coordination between the semiotic genesis and the discursive genesis should be set up for this?
- Is there some place to be made in MWS for proprioception, emotional responses, ‘points of affect’ and their influence on students’ mathematical work?

THEME 1

LE TRAVAIL MATHEMATIQUE ET LES ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE

Denis Tanguay, Université du Québec à Montréal

Alain Kuzniak, Université Paris Diderot

Athanasios Gagatsis, University of Cyprus

1. DESCRIPTION INITIAL DU THEME 1.

L'objet de ce thème est, d'une part, d'approfondir le modèle théorique défini par les Espaces de Travail Mathématique et, d'autre part, d'en montrer les utilisations possibles comme outil d'analyse dans des études particulières. Les questions suivantes pourront notamment être abordées : quels sont les savoirs de référence et les connaissances mobilisées dans les ETM. Le travail mathématique permet de cristalliser des manières de faire et des cheminements de penser qui apparaissent dans la résolution des problèmes de mathématiques proposés dans l'enseignement ou qui sont issues de la recherche en mathématiques? Comment s'opère, chez les enseignants, les formateurs et chez les élèves, ce processus d'identification du travail mathématique associé à des savoirs et des connaissances? Comment les ETM prennent-ils en charge la question des savoirs et d'activités qui en sont les supports ? Les réponses à ces questions générales pourront s'appuyer sur des études de cas prises dans le cadre d'enseignement de domaines spécifiques (géométrie, analyse, probabilités, etc.) mais aussi sur des activités de modélisation mettant en interaction monde réel et modèles mathématiques. Elles peuvent aussi s'appuyer sur des études historiques ou épistémologiques.

2. CONTRIBUTIONS

Auteur / Titre	Theme	Specifities
Bernard Parzysz *L'évolution du travail mathématique dans l'enseignement des probabilités en France*	Probabilités	ETM de référence et idoine a priori
Assia Nechache *Comparaison de la démarche de la validation dans les espaces de travail idoines en Géométrie et en Probabilité*	Probabilités et géométrie	Validation dans les ETM
Denis Tanguay *Circulation et coordination dans les espaces de travail, pour une activité articulant géométrie et arithmétique*	Géométrie et arithmétique	Circulation du savoir dans les ETM
Carolina Henríquez-Rivas, Elizabeth Montoya-Delgadillo *El trabajo matemático de profesores en el tránsito de la Geometría sintética a la analítica en el liceo*	Géométrie analytique et synthetique	Articulation dans le cadre des ETM

Romina Menares Espinoza, Elizabeth Montoya Delgadillo *El trabajo matemático de profesores en su formación inicial: un estudio en torno a las funciones continuas.*	Analyse	Paradigmes et ETM
Athanassios Raftopoulos and Demetris Portides *The types of change that underlie the transitions among the different types of representations of functions and the ETM*	Analyse	Perspective cognitive.
Dominique Laval *L'activité Algorithmique comme objet d'apprentissage du concept de preuve en théorie élémentaire des nombres : algorithme de kaprekar*	Algorithmiqu e	Usage des ETM
Schlosser Fabien *Pragmatique de la construction et du fonctionnement des espaces de travail géométriques. Etude de cas en Geometrie dans l'Espace synthetique au lycee.*	Géométrie	Perspective sémiotique
Melissa Rodd *Space for geometric work: points of affect*	Géométrie	Les affects en ETM
Athanasios Gagatsis*, Eleni Deliyianni** and Iliada Elia* *Representational flexibility profiles in fraction and decimal number addition*	Nombre	Flexibilité et representation
A. Gagatsis, S. Özel, I. Elia, A. Panaoura and Z. Ebrar Y. Özel *A unified frame of reference for the study of students' errors and obstacles within the discursive genesis of the mathematical work space on the concept of absolute value*	Analyse et nombre	Obstacles. Perspective épistémologiq ue
Rafael Arancibia-Rojas, Carolina Henríquez-Rivas *Los espacios de trabajo geométrico personal de estudiantes de liceo : un estudio de casos (Poster 1)*	Géométrie	ETM personal
Blanca Souto e Inés Mª Gómez-Chacón *Representaciones y visualización en Algebra Lineal, conectando diferentes marcos teóricos (Poster 2)*	Algebra	Visualization par rapport des cadres.
S. Estrella, A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo and L. Vivier *El trabajo matemático en el análisis: una aproximación a los ETM en Francia y Chile (Poster 3)*	Analyse	Études comparative utilisant les ETM

3. CADRE DE TRAVAIL ET QUESTIONS DE RECHERCE OUVERTES

3.1 Des horizons communs

Le bilan des présentations du thème 1 a fait ressortir la diversité des thèmes mathématiques abordés : probabilités, géométries synthétique et analytique (en coordonnées), géométries plane et spatiale, les fonctions, l'algorithmique, les nombres, avec des considérations sur leurs représentations (fractionnaires et décimales), sur la valeur absolue, sur l'arithmétique et la théorie élémentaire des nombres. Cette diversité a confirmé la nécessité de considérer des espaces de travail mathématique propres à des domaines mathématiques spécifiques :

$ETM_{Probabilités}$, $ETM_{Arithmétique}$, $ETM_{Analyse}$.

Mais ces domaines peuvent s'avérer trop étendus pour certaines études didactiques notamment quand le contexte institutionnel prévoit ou favorise un travail bien circonscrit à certains sous-domaines. On peut ainsi penser à un $ETM_{Fonctions}$, à un $ETM_{Matrices}$, ou encore dans le cas de la géométrie à des $ETG_{synthétique}$, $ETG_{analytique}$, ETG_{plane}, $ETG_{spatiale}$.

A côté de ces ETM globaux, il peut être intéressant de préciser des ETM locaux structurés autour d'une notion, d'un théorème. A l'inverse, il y a lieu aussi de voir comment s'intègrent dans les ETM des thèmes nouveaux ou plus transversaux comme l'algorithmique, la modélisation...

La question s'était posée à ETM3 et a refait surface dans le groupe de travail sur le Thème 1 : comment décrire, grâce au modèle, une tâche mathématique qui donne lieu à des changements de domaines, comme peuvent l'être typiquement ces tâches de géométrie où un important travail (numérique) sur les mesures est requis ? Comment rendre compte de la circulation entre des espaces de travail parallèles, entre des plans épistémologiques où vivent des objets communs à deux domaines mais où des registres de représentations, des artefacts, des théorèmes ou définitions du référentiel théorique sont privilégiés par un des domaines en cause ou à l'inverse, sont inopérants dans un des domaines.

Cette question est liée à la nécessité, clairement affirmée dans le groupe, d'envisager le modèle des ETM comme un modèle dynamique et non statique. Pour une tâche donnée, le modèle doit permettre d'identifier les circulations, les parcours à l'intérieur d'un ETM ou entre deux ETM, il doit permettre de repérer les mises en résonance possibles des trois pôles, sémiotique, instrumental et discursif. Le travail dans chacun des plans verticaux (Sém-Ins, Sém-Dis et Ins-Dis) serait donc à envisager pour les possibilités qu'il offre ou non de « sortir » d'un plan donné, et d'accéder au troisième pôle — par exemple celui de la genèse discursive de la preuve à partir d'un travail a priori dans Sém-Ins — et ainsi de mobiliser une activité mathématique complète et intégrative.

Le modèle de l'ETM, conçu comme un espace de circulation entre les pôles dans les plans épistémologique et cognitif, doit pouvoir être un outil d'analyse (tant a priori qu'a posteriori), d'interprétation et de description de tâches. Il peut ainsi servir à la mise en place et à l'ajustement de tâches déjà construites mais aussi permettre l'élaboration ou le calibrage de situations d'enseignement nouvelles et encore à expérimenter. Enfin, il peut étoffer l'observation et le compte rendu d'expérimentations pour en faciliter l'examen, en décrivant notamment le cheminement d'élèves pris isolément ou en groupe dans leur travail mathématique.

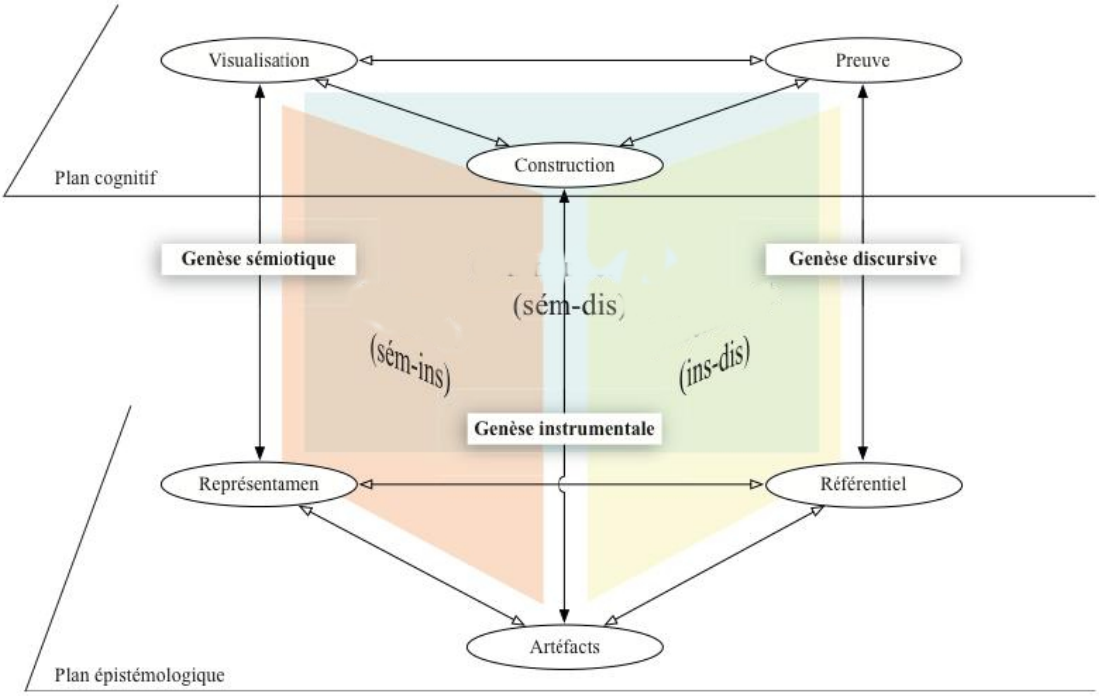


Figure 1: Les pôles ou axes verticaux dans l'ETM

4. DES QUESTIONS TRANSVERSALES

4.1 Le tissage des trois genèses

Le problème de la forte interdépendance entre les trois genèses est pris en charge dans le modèle à travers l'importance accordée aux plans verticaux dans l'élaboration du travail mathématique. L'imbrication de ces genèses a été discutée lors des présentations qui ont dégagé certaines questions et perspectives.

- Le type de validation demandé influe sur la *genèse discursive de la preuve* dont on doit alors se demander où elle commence et finit. Comment considérer, dans le modèle, la simple justification ? Un référentiel, et à terme une théorie ou même un paradigme, peuvent-ils être considérés comme le point d'appui à identifier pour assurer la cohérence, la validité et la vérité, ainsi que la reconnaissance de la généralité des énoncés ?
- Le « discursif » est impliqué dans la genèse sémiotique, avec entre autres les définitions basées sur des propriétés caractéristiques et des representamen chargés de théorie tels les dessins géométriques, considérés *in fine* comme représentants génériques dans un modèle ensembliste du plan. Comment s'opère alors le passage de la genèse sémiotique à la genèse discursive ? Les langages associés aux systèmes de signes doivent sans doute être envisagés différemment du langage (naturel) utilisé dans l'axe discursif (de la genèse discursive) pour l'élaboration du référentiel et la construction de la théorie, les deux pilotés au sein d'un paradigme.
- Comment rendre compte des genèses liées aux outils mathématique dans toute leur complexité ? Des outils chargés de théorie comme l'arbre en probabilités

sont également des artefacts, avec leur propre genèse instrumentale associée à du discursif. De même, des représentations sémiotiques sont imprégnées par l'usage d'outils techniques, comme le dessin du « cercle » est lié au rapporteur et au compas, et l'usage de ces outils a certainement un impact important sur la genèse sémiotique et la conceptualisation (par exemple de l'objet « cercle ») qui s'opère alors dans le plan cognitif.

Le travail mathématique résulte du tissage des trois genèses, et il convient alors de considérer les trois axes et les trois plans verticaux (combinaison de deux axes) comme un outil d'analyse pour mieux discerner et décrire les parcours dans l'espace de travail. Cet outil doit aussi permettre d'identifier des ruptures, de repérer des enfermements et des blocages à l'intérieur d'une ou de deux genèses. Par exemple, pour des tâches au caractère constructiviste très prononcé comme des situations adidactiques, comment éviter un travail dans le plan [Sém-Ins] qui y tourne à vide. Comment infléchir alors ce travail vers l'axe de la genèse discursive de la preuve ?

La modélisation par les ETM pourrait faciliter l'analyse de toutes ces interdépendances et le terme de *fibration* a été suggéré pour désigner ces échanges et transitions entre les différents éléments du modèle. Ainsi, il existe des *fibrations internes* (entre les plans, entre les pôles, entre les registres de représentation…) et des *fibrations externes* (entre les ETM de différents domaines). Ces fibrations doivent décrire la constitution du travail mathématique mais réciproquement, elles doivent aussi permettre un travail de déconstruction lorsque tous ces pôles apparaissent, confusément et de manière erronée, amalgamés chez les apprenants. Comme, par exemple, chez un élève qui distinguerait mal un discours de description, relevant de la genèse sémiotique, d'un discours de preuve.

4.2 Quelques questions plus spécifiques

Pour finir, nous retenons quelques questions ou réflexions plus pointues soulevées au fil des présentations et qui pourraient ouvrir d'intéressantes pistes de recherche dans l'avenir.

- Comment mieux mettre en évidence les aspects et caractère dynamiques du modèle des ETM ? L'idée serait de rendre plus opérationnelle la visualisation du travail grâce au diagramme des ETM, notamment en facilitant son emploi pour décrire les tâches ou les situations mathématiques. Dans le même temps, cela permettrait peut-être un repérage plus facile et une compréhension accrue de la flexibilité représentationnelle ?
- Pour décrire plus complètement le travail du professeur, distinguer ce qui serait un ETM idoine « potentiel » ou « générique » (pour une institution scolaire donnée), d'un ETM idoine envisagé a priori par l'enseignant qui planifie son enseignement, ou encore d'un ETM idoine tel qu'il est actualisé par *cet* enseignant dans *sa* classe.
- Est-ce que l'étude des ETM idoines des enseignants et des pratiques scolaires, voire des praxéologies induites, peuvent aider à expliquer certains obstacles

didactiques, par exemple ceux rencontrés dans l'enseignement d'une notion comme la valeur absolue?

- Quel pourrait être l'apport des études sémiotiques sur une étude détaillée des genèses avec, pourquoi pas, un ETM en trois plans, syntactique, sémantique et pragmatique, adoptant un point de vue sémiotique « à la Peirce » ? Dans le même temps, et c'est vrai d'autres raffinements du modèle, cette complexification du modèle reste-t-elle productive d'un point de vue didactique ?
- Comment prendre en compte les particularités des signes et des représentations en géométrie spatiale ? Comment envisager la genèse sémiotique en géométrie spatiale ?
- Doit-on considérer la géométrie synthétique et la géométrie analytique comme deux ETG locaux ou globaux ? De même, pour la géométrie plane et la géométrie spatiale ? Dans les deux cas, comment favoriser la circulation entre les deux ?
- Comment promouvoir une visualisation plus analytique qu'iconique en géométrie ? Quel type de coordination entre la genèse sémiotique et la genèse discursive serait à mettre en place pour cela?
- Y a-t-il une place dans le modèle pour les réponses émotionnelles, les affects et leurs influences sur le travail mathématique des élèves?

EVOLUTION DU TRAVAIL MATHEMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES EN FRANCE DEPUIS 1980

Bernard Parzysz

Université d'Orléans & LDAR (université Paris-Diderot)

L'enseignement des probabilités a considérablement évolué depuis la fin du siècle dernier, notamment en raison du développement des moyens de traitement d'information et de communication. En France, comme dans bien d'autres pays, on est passé d'une approche purement cardinaliste à une approche intégrant le point de vue fréquentiste, ce qui a notamment permis de prendre en compte de nouveaux types d'expériences aléatoires. De nouveaux artefacts ont fait leur apparition et, de façon concomitante, le point de vue de la modélisation a été privilégié en raison de son lien avec la simulation informatique. Cet article a pour objet d'analyser les modifications subies par les divers espaces de travail au cours de cette évolution, en mettant en évidence les continuités et les ruptures qui ont pu apparaître.

Mots-clés. *Probabilités. Enseignement secondaire français. Espace de travail mathématique. Étude diachronique.*

INTRODUCTION

Il y a une dizaine d'années j'avais brossé un panorama de l'évolution de l'enseignement de la statistique et des probabilités dans le secondaire en France (Parzysz 2003). Depuis, cet enseignement a encore fait l'objet de transformations non négligeables, tant en ce qui concerne les points de vue adoptés que les savoirs et savoir-faire en jeu. Je vais ici étendre cette évolution jusqu'à aujourd'hui, en me plaçant du point de vue des espaces de travail mathématique, afin d'étudier les continuités et les ruptures qu'ils ont subies du fait des modifications importantes intervenues dans les curricula.

J'ai précédemment proposé une adaptation du cadre théorique des espaces de travail géométrique (Kuzniak 2011) au domaine des probabilités et de la statistique (Parzysz 2011, 2014), qui articule trois paradigmes :

- un paradigme probabiliste « pseudo-concret » (P1) constituant une première théorisation, relativement peu formalisée, de la situation réelle (Henry 2001) ;
- un paradigme probabiliste plus formel (P2) fondé sur la notion d'espace probabilisé fini, dont l'horizon théorique est une axiomatique de type Kolmogorov (paradigme P3) ;
- un paradigme statistique (SD), lié à la statistique descriptive, basé sur la notion de série statistique et incluant les principaux paramètres de position et de dispersion.

LE POINT DE VUE CARDINALISTE

L'enseignement des probabilités a commencé à se généraliser dans l'enseignement secondaire français dans les années 1970, dans la foulée de la réforme dite des « mathématiques modernes ». Le point de vue adopté s'intégrait bien dans la « théorie des ensembles » car les probabilités y apparaissaient comme un terrain d'application privilégié de la combinatoire lorsqu'on les considérait du point de vue « cardinaliste » : étant donné une expérience aléatoire, on lui associe un espace (fini) constitué d'un ensemble Ω, sur l'ensemble des parties duquel on définit une application *p* dans [0 ; 1] possédant certaines propriétés. Ici sont seules prises en compte les applications *p* prenant la même valeur sur les singletons de Ω ; la probabilité d'un événement A (partie de Ω) est alors le quotient du cardinal de A par celui de Ω (formule dite « de Laplace »). L'espace théorique de référence est de type axiomatique – en l'occurrence un paradigme P2 assumé – pouvant même aller jusqu'à un P3 subreptice (notion de tribu), l'horizon P3 étant la théorie élaborée par Andrei Kolmogorov en 1933.

Ce qui est alors premier pour les auteurs des programmes, c'est la combinatoire et non les probabilités : ainsi, dans les programmes de 1982, les probabilités n'apparaissent qu'en terminale, en application des dénombrements.

L'expérience aléatoire étant décrite et l'événement dont il s'agit de trouver la probabilité étant donné, la tâche incombant à l'élève consiste à :

1° lui associer un « bon » univers, c'est-à-dire déterminer un ensemble Ω dont on peut à juste raison penser que tous les éléments ont la même probabilité de se produire ;

2° identifier l'événement en question à une partie E de Ω ;

3° calculer les cardinaux de Ω et de E, puis en faire le quotient.

L'espace de travail idoine fait donc intervenir tour à tour trois domaines :

- les opérations sur les ensembles
- la combinatoire
- les probabilités.

Ce dernier domaine n'est en réalité que le faire-valoir des deux autres, l'essentiel des difficultés se situant dans les calculs de dénombrement, et le calcul de probabilités se bornant le plus souvent à effectuer un quotient.

Un autre indice de cette subordination des probabilités à d'autres domaines mathématiques est la fréquence des « glissements » que l'on peut observer dans les exercices des manuels. Mais progressivement les probabilités prennent une place plus importante dans les programmes et s'étendent à toutes les sections, tout en conservant le même point de vue cardinaliste. La statistique descriptive, quant à elle, constitue un autre chapitre du programme, sans aucun lien avec les probabilités.

LE POINT DE VUE FREQUENTISTE

Dans les programmes de 1991 apparaît en première un nouveau point de vue, ainsi présenté :

> Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois.
> (BOEN 1991 p. 39)

Ce point de vue « fréquentiste » établit un lien entre la statistique et les probabilités, et met en place une approche expérimentale de la notion de probabilité, puisqu'il conduit à mettre en place une expérience aléatoire et à la répéter « un grand nombre de fois » dans les mêmes conditions. Une raison de son introduction est sans doute qu'il présente l'avantage de permettre la prise en compte d'expériences aléatoires qui étaient jusque-là hors du champ des anciens programmes, à savoir celles pour lesquelles on n'arrive pas à exhiber un espace probabilisé muni de l'équiprobabilité. Un exemple du type « Bernoulli » va alors devenir emblématique et très populaire : celui du lancer d'une punaise de bureau, qui peut retomber pointe en haut ou pointe en bas et pour laquelle on n'a *a priori* aucune raison de présupposer l'équiprobabilité des deux issues, ni même un modèle quelconque.

La diffusion des technologies dans l'enseignement, avec l'incorporation d'un générateur aléatoire dans les calculatrices de poche et les ordinateurs, n'est sans doute pas étrangère à cette évolution. Mais ce type d'approche présente néanmoins une difficulté fondamentale. En effet, dans l'approche cardinaliste des précédents programmes la distribution de probabilité était justifiée par des considérations de symétrie ou par une hypothèse « raisonnable » (pièce *équilibrée*, dé *non pipé*, tirage *au hasard*, etc.) [1], mais on pouvait en déduire la valeur de la probabilité, ce qui n'est pas le cas ici car on ne peut en avoir que des approximations. Il s'agit maintenant pour l'enseignant de faire entreprendre aux élèves une démarche de type expérimental relevant de la statistique descriptive : observation des répétitions de l'expérience, calcul de la fréquence de la modalité observée, conjecture sur l'évolution de cette fréquence. Il s'agit ensuite d'effectuer un saut conceptuel, consistant à accepter le postulat de l'existence d'une limite (la probabilité) et à décider de sa valeur. On sera alors dans le domaine théorique des probabilités.

Dans cette démarche, l'espace de travail idoine se situe d'abord dans le paradigme probabiliste P1 pour identifier un modèle « pseudo-concret » de l'expérience (mise au point d'un protocole, détermination des issues), puis il passe dans la statistique descriptive (SD) pour travailler sur les fréquences, et enfin dans le paradigme probabiliste P2 pour définir une probabilité et éventuellement travailler dans le modèle ainsi défini. L'horizon théorique sous-jacent à cette démarche expérimentale est la théorie axiomatique P3, et plus précisément la loi faible des grands nombres (BOEN 2000).

Le point de vue cardinaliste n'est pas abandonné pour autant, tant s'en faut. Il s'agit alors de concilier les deux points de vue et de montrer leur cohérence, ce qui peut être réalisé en s'intéressant à une expérience à laquelle on peut associer un modèle canonique équiprobable et en comparant l'évolution de la fréquence à la probabilité prévue par le modèle. La quasi-totalité des exercices proposés dans les manuels se réfèrent en fait à des univers avec équiprobabilité et ne diffèrent guère de ceux qui étaient proposés auparavant, si ce n'est qu'ils font appel à moins de technicité combinatoire. La démarche fréquentiste privilégiée par les programmes se présente donc comme une approche *en amont* de la définition cardinaliste de la probabilité.

DES OUTILS GRAPHIQUES

L'enseignement de l'aléatoire va accompagner l'évolution générale de la société vers la composante visuelle des connaissances en prenant explicitement en compte les outils graphiques. Plusieurs d'entre eux vont être mentionnés dans les programmes de probabilités et enrichir l'axe instrumental de l'espace de travail idoine : le diagramme ensembliste, le tableau à double entrée et l'arbre pondéré, types de représentations couramment utilisés dans d'autres disciplines comme la biologie, la géographie, l'économie… En 1991, les programmes de première citent les arbres et tableaux comme outils « *pour organiser et dénombrer des données* » (BOEN 1991) : il ne s'agit donc pas de tableaux et d'arbres de probabilités mais de tableaux et d'arbres d'effectifs.

Tableau à double entrée et arbre de probabilités sont pourtant associés assez naturellement à la probabilité conditionnelle, qui depuis 1982 figure au programme de terminale D (maths-sciences) et s'étend à toutes les sections en 1991. Il ne s'agit pas seulement d'outils de visualisation, mais bien de registres de représentation sémiotique au sens de Duval (1995), possédant leurs règles spécifiques de traitement et de conversion (Dupuis & Rousset-Bert 1996). Mais il faut attendre 1998 pour que l'arbre de probabilités fasse officiellement son entrée dans les programmes de terminale, bientôt accompagné d'autres registres : « *On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes, etc., efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités* » (BOEN 2001). Cette formulation un peu vague est alors assortie du commentaire suivant : « *Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve* » (*ibid*.). Ainsi, cet artefact jouit désormais d'une existence officielle et se voit doté d'un statut incluant des règles de construction (Parzysz 1997, Grangé 2003) ainsi qu'une fonction : celle d'outil de preuve

Cet outil va intégrer l'espace de travail idoine potentiel, car les manuels vont en général jouer le jeu, et à partir de l'édition 1998 vont intégrer les arbres de probabilités à des degrés divers :

- soit comme simple illustration d'un exemple,
- soit en en précisant les règles de construction et d'utilisation.

On les trouvera aussi dans les exercices, où on demandera :

- de construire ou de compléter un arbre (exercices d'écriture) :
- de déterminer certaines probabilités à partir d'un arbre (exercices de lecture).

Les règles de traitement du registre des arbres font ainsi leur apparition dans l'espace de travail probabiliste idoine, mais les règles de conversion d'arbre vers tableau et inversement sont très exceptionnelles, en dépit du fait que ces deux outils peuvent être amenés à jouer des rôles complémentaires dans la détermination des probabilités conditionnelles. L'arbre de probabilités – et plus encore le tableau – va néanmoins avoir quelque peine à être intégré dans l'espace de travail idoine, en raison d'un préjugé tenace des enseignants vis-à-vis du domaine visuel, peut-être hérité de l'enseignement de la géométrie. Malgré tout, petit à petit, cet outil va finir par se faire une place dans l'enseignement des probabilités en France.

Du côté des élèves, les règles de fonctionnement et les utilisations de ces nouveaux artefacts vont désormais s'inscrire dans leur espace de travail personnel, leur appropriation posant la question de leur passage du statut d'outil à celui d'instrument (Rabardel 1995).

SIMULATION ET MODELISATION

Ayant récemment étudié ailleurs comment s'articulaient les divers paradigmes dans les activités de simulation introduites dans les programmes de l'enseignement secondaire français (Parzysz 2014), je me contenterai ici d'en rappeler les grandes lignes.

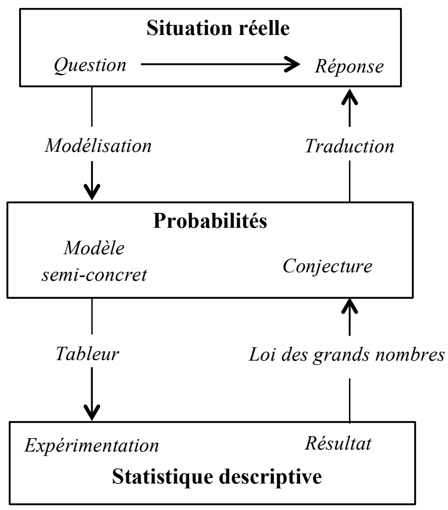


Figure 1

Dans les années 1990 les limites de la répétition « manuelle » d'une expérience aléatoire apparaissaient vite, car la convergence de la fréquence est très lente. Bien sûr, on pouvait toujours, comme le faisaient certains enseignants, fournir aux élèves des feuilles de relevés, mais alors l'expérimentation disparaissait *de facto*. Les progrès de la technologie vont permettre de simuler les expériences aléatoires, grâce au générateur aléatoire de la calculatrice et de l'ordinateur. La simulation est introduite officiellement dans les programmes de première et de terminale de 2001. Le mot « simulation » sert ici à désigner une simulation obtenue à l'aide d'une technologie – calculatrice ou tableur de l'ordinateur – faisant usage d'un générateur aléatoire. Si les élèves ne se posent guère de questions au sujet du générateur

(Produit-il réellement du hasard ? Est-il fiable ? Etc.), il n'en va pas de même pour sa mise en œuvre dans la réalisation d'une simulation. La démarche fait intervenir alternativement les deux paradigmes P2 et SD, comme le montre le schéma de la figure 1.

Les élèves sont désormais habitués à utiliser les technologies en mathématiques, que ce soit en géométrie, en algèbre ou en analyse, et à leur accorder une confiance sans limite (parfois à tort). Le danger qui en résulte est un risque de confusion entre les résultats donnés par la théorie et ceux fournis par la machine. C'est également le cas en probabilités, où l'espace de travail va inclure la programmation et l'interprétation des résultats fournis. Résultats qui, dans le domaine statistique, seront des *données*, mais qui, dans le domaine des probabilités, ne pourront être que des *conjectures*.

La confiance des élèves en la machine, renforcée par l'analogie que présentent les notions des deux domaines, les conduit souvent à estomper la distinction entre fréquence et probabilité. Il apparaît donc indispensable de leur faire prendre conscience des limites de la technologie, de façon à leur permettre de distinguer nettement l'expérimental et le théorique. Voici un exemple dans lequel la machine se révèle incapable de fournir la réponse attendue.

Exemple. La simulation d'une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ a été programmée sur le tableur, répétée 10000 fois et on demande à quelqu'un qui ignore la valeur de p de trouver cette valeur. Il fait alors afficher la moyenne de succès, puis recommence alors dix fois l'épreuve et note les résultats :
0,7081 0,7094 0,7096 0,7072 0,7127 0,7120 0,7053 0,7133 0,7110 0,7081

On ne peut bien sûr pas en tirer la valeur de p ; on peut seulement dire qu'elle est de l'ordre de 0,7. La seule façon de la connaître est d'accéder au programme, et on s'aperçoit alors que la simulation serait de toute façon incapable de la fournir, même en augmentant indéfiniment le nombre d'itérations, pour la raison qu'il s'agit d'un nombre irrationnel (en l'occurrence il s'agit de $1/\sqrt{2}$).

Deux paradigmes interviennent ici, qui entrent en contradiction : le modèle bernoullien programmé, qui relève du paradigme P2, ne peut être atteint par l'expérimentation, laquelle fait intervenir le paradigme SD (simulation), marqué par la limitation du nombre d'itérations.

On l'a vu, la simulation, telle qu'elle est comprise dans les programmes, nécessite la programmation d'une machine. Ceci ne peut être réalisé qu'en élaborant un modèle de type probabiliste de l'expérience, comme l'indique d'ailleurs le programme : « *On indiquera que simuler une expérience consiste à simuler un modèle de cette expérience*. » (BOEN 2000 p. 35)

DU DISCRET AU CONTINU

Au tournant de l'année 2000 est apparue une rupture dans l'enseignement des probabilités, qui s'est traduite par l'introduction dans les programmes d'éléments de statistique inférentielle (voir plus loin) et de lois de probabilité continues à densité (dont la loi normale).

Depuis lors, plusieurs lois de probabilité à densité sont au programme de terminale, et celui de 2011 stipule d'aborder la « *notion de loi à densité à partir d'exemples* » (BOEN 2011 p. 12). L'annexe au document d'accompagnement des programmes de 2002 suggère de partir de l'histogramme de fréquences d'une série statistique correspondant à une variable continue (taille d'hommes adultes) et de chercher « *une fonction f dont la courbe* épouse *l'histogramme, l'aire sous cette courbe devant être égale à 1* » (GEPS 2002 p. 143), en précisant toutefois que « *déterminer une telle fonction est un problème délicat* » (*ibid*.).

Le document ressource de 2012 préconise de partir d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;\,p)$, de la centrer et de la réduire (loi de $Z = (X - np)/\sqrt{np(1-p)}$) et de visualiser le théorème de Moivre-Laplace. Le diagramme en bâtons de cette dernière loi est transformé en histogramme, dont « *les bords supérieurs des rectangles font apparaître une courbe régulière et symétrique* » (MEN 2012b p. 6), ladite courbe étant celle de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)e^{-x^2/2}$ (admis). Cette présentation présente l'inconvénient de ne pas donner de sens au mot « densité », même si le texte fait une – très discrète – allusion à une variable (statistique) continue pour introduire l'histogramme, laquelle n'est pas justifiée. Utiliser l'analogie avec le domaine statistique –où les élèves ont déjà rencontré des variables continues – comme le préconise le document de 2002, semble effectivement une piste intéressante, mais il faudrait sans doute l'exploiter davantage, en se basant sur l'étude d'histogrammes à classes d'amplitudes inégales, ce qui conduirait à interpréter la hauteur des rectangles de l'histogramme des effectifs (resp. des fréquences) comme la *densité* de population (resp. de fréquence) sur l'intervalle correspondant (fig. 2).

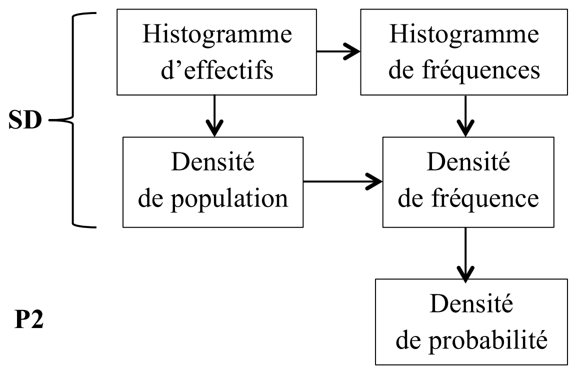


Figure 2

Le paradigme probabiliste qui est ici en jeu intègre – certes en les admettant – des éléments de la théorie enseignée au niveau universitaire (loi faible des grands nombres, théorème de Moivre-Laplace), et la statistique ne se contente plus de décrire, mais permet la prise de décision. On peut par conséquent considérer qu'en terminale interviennent :

- un paradigme probabiliste P2 « augmenté » (P2+),

- un nouveau paradigme statistique (SI) faisant usage de SD mais ne s'y réduisant pas, en raison de la problématique nouvelle qui est introduite.

D'autre part, cette partie du programme met en parallèle les deux paradigmes SD et P2+ pour continuer à exploiter les analogies que présentent certaines notions des deux domaines ; cette « symbiose » entre l'un et l'autre apparaît maintenant comme un élément important dans l'apprentissage des probabilités.

ESTIMATION

Le programme de seconde de 2001 introduisait la notion de fluctuation d'échantillonnage, présentée en liaison avec la simulation d'expérience aléatoire ; le programme de 2009 va plus loin en introduisant l'intervalle de fluctuation, même s'il le restreint au seuil de 95 % et à un intervalle centré sur la proportion p du caractère dans la population. Notons qu'il convient d'interpréter cette « proportion » en termes de probabilités, en considérant p comme la probabilité d'obtenir un individu présentant le caractère considéré à l'issue du tirage aléatoire équiprobable d'un individu dans la population (épreuve de Bernoulli).

Le programme de 2009 précise que « *cet intervalle peut être obtenu, de façon approchée, par simulation* », et que le professeur peut indiquer aux élèves l'intervalle $\left[p - 1/\sqrt{n}\,; p + 1/\sqrt{n}\right]$, où n est la taille de l'échantillon (BOEN 2009 p. 8). L'intervalle de fluctuation évolue au cours des trois années de lycée : en première il devient moins général (limité à la loi binomiale) mais aussi plus précis ; sa définition fait intervenir des inégalités larges et strictes. On conçoit donc qu'elle puisse être cause de difficultés chez les élèves et conduire l'enseignant à opérer des glissements vers les techniques de calcul, et en particulier de manipulation des inégalités.

En terminale, nous l'avons vu, la loi normale centrée réduite est introduite comme loi de la limite d'une variable liée à une variable binomiale. On en déduit un troisième intervalle de fluctuation, « asymptotique » de celui de première, à savoir $\left[p - 1{,}96\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n}\,;\ p + 1{,}96\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n}\right]$, permettant également de retrouver celui de seconde par majoration. Certains se posent la question de l'intérêt de cet intervalle, dans la mesure où calculatrice et ordinateur peuvent travailler directement sur la loi binomiale, sans nécessité d'une approximation normale [2] – d'autant plus qu'aucune correction de continuité n'est envisagée par le programme. Il faut sans doute en chercher la raison dans la grande place que tient la loi normale dans les applications professionnelles (industrie, économie, recherche…)

Enfin, le programme de terminale S introduit également l'intervalle de confiance, mais en se limitant à $\left[f - 1/\sqrt{n}\,; f + 1/\sqrt{n}\right]$, où f est la fréquence observée.

Remarquons que les problématiques de l'intervalle de fluctuation et de l'intervalle de confiance sont différentes. Dans le cas de l'intervalle de confiance, il s'agit d'estimer un paramètre (proportion d'un caractère dans la population) sur la base de l'observation d'un échantillon ; cet intervalle est donc la réalisation d'un intervalle aléatoire. Au contraire, un intervalle de fluctuation est « *un intervalle où* *l'on « s'attend » à trouver la fréquence observée* f*, si l'hypothèse que la proportion est* p *est la bonne* [sic] » (MEN 2012a p. 33). Ici encore, les domaines de la statistique et des probabilités interviennent tous deux, mais de façon différente, sinon opposée, dans l'espace de travail : avec l'intervalle de confiance c'est la statistique qui est première et qui est utilisée pour estimer une probabilité (proportion dans la population) sur la base d'un échantillon, tandis qu'avec l'intervalle de fluctuation on part de la théorie probabiliste pour savoir si une fréquence observée dans un échantillon est vraisemblable.

Cette différence de point de vue est visualisée dans les abaques traditionnellement utilisés dans l'industrie et la recherche ; sous une forme simplifiée, ils peuvent être intégrés à l'espace de travail idoine en terminale (fig. 3).

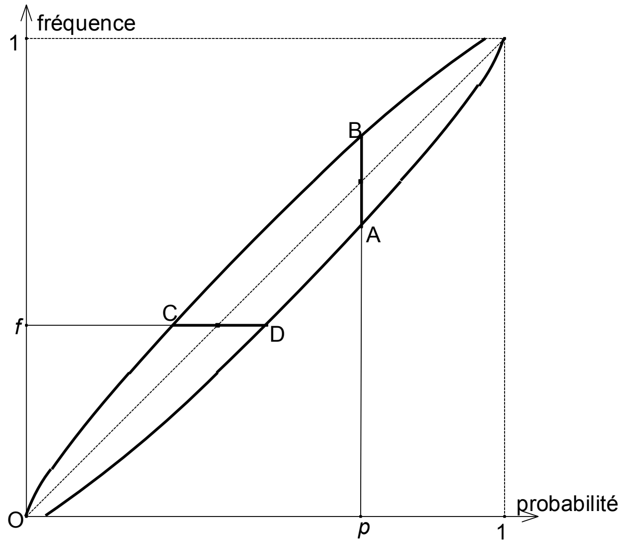


Figure 3

Sur cet abaque, pour un échantillon d'effectif donné, les ordonnées des points A et B sont les bornes de l'intervalle de fluctuation à 95 % de la probabilité *p*, tandis que les abscisses des points C et D sont les bornes de l'intervalle de confiance à 95 % de la fréquence *f*.

D'autre part, la formulation du résultat pose – aux professeurs comme aux élèves – de redoutables problèmes selon l'axe discursif de l'espace de travail. Ces difficultés ne se situent pas seulement au niveau de la terminologie, mais également dans les conversions entre le registre algébrique et celui de la langue naturelle.

Enfin, le manque de formation des enseignants dans le domaine de la statistique inférentielle n'est pas sans poser problème ; comme le remarquait récemment une formatrice d'enseignants, « *l'intervalle de fluctuation asymptotique est une notion difficile à appréhender par les professeurs qui manquent de formation théorique* », « *les confusions sont fréquentes entre intervalle de fluctuation* (…) *et intervalle de confiance. Ici aussi, les professeurs sont en demande d'une formation.* » (Dutarte & *al*. 2013 p. 31).

CONCLUSION

Comme on l'a vu, l'enseignement des probabilités a considérablement évolué au cours des quinze dernières années, sous l'effet d'une double volonté institutionnelle de réduire la distance entre la discipline qu'on enseigne et les méthodes de l'aléatoire utilisées dans le domaine professionnel, et de profiter des possibilités offertes par les nouvelles technologies. De nouveaux savoirs et savoir-faire ont ainsi été intégrés dans les programmes du lycée, comme la simulation informatique d'expériences aléatoires, les lois de probabilité à densité, l'estimation, les intervalles de fluctuation et de confiance. Les aspects calculatoires se sont notablement réduits, confiés aux machines, tandis que de nouveaux outils graphiques, qui font maintenant partie du quotidien des élèves, ont été pris en compte, modifiant et enrichissant considérablement leur espace de travail ; enfin, de nouvelles démarches de pensée (simulation, modélisation) sont apparues. Un autre point saillant de l'évolution entreprise est l'articulation entre statistique et probabilités. D'abord sans aucun lien entre eux jusqu'en 1990, les deux domaines se sont progressivement rapprochés, d'abord sur la base de l'analogie entre certaines notions de ces deux domaines, puis – dans la dernière décennie, avec l'introduction de nouvelles problématiques – de façon plus fonctionnelle, avec l'utilisation d'outils probabilistes pour la résolution de problèmes statistiques. Les paradigmes se sont également enrichis, permettant de percevoir la continuité de l'enseignement sur l'ensemble du lycée.

Bien sûr, je n'ai pu ici qu'esquisser les principales difficultés que peuvent rencontrer les uns et les autres lors de la mise en œuvre de ces programmes, et montrer comment paradigmes et espaces de travail pouvaient permettre de les mettre en évidence et d'éclairer la façon dont ces changements se sont traduits dans les classes, à la fois du côté des enseignants (ETM idoine) que des élèves (ETM personnel). La didactique n'a pas encore beaucoup investi ce secteur de la recherche, et il reste beaucoup à faire dans cette direction, d'autant que les stages de formation continue font apparaître de gros besoins chez les enseignants.

NOTES

[1] Le caractère « raisonnable » de l'hypothèse n'est toutefois pas questionné.

[2] Historiquement cette approximation s'avérait indispensable, faute d'outil numérique puissant pour travailler avec les lois binomiales.

REFERENCES

BOEN (1991) Bulletin Officiel de l'Education nationale. N° spécial (2 mai).

BOEN (2000) Bulletin Officiel de l'Education nationale. HS 7 (31 août).

BOEN (2001) Bulletin Officiel de l'Education nationale. HS 4 (30 août).

BOEN (2009) Bulletin Officiel de l'Education nationale. N° 30 (23 juillet).

BOEN (2010) *Bulletin Officiel de l'Education nationale*. Spécial n° 9 (30 septembre).

BOEN (2011) Bulletin Officiel de l'Education nationale. Spécial n° 8 (13 octobre).

Carranza, P. (2004) Glissements dans l'enseignement de la statistique en classe de seconde. Mémoire de DEA. Université Paris-7.

Dupuis, C. & Rousset-Bert, S. (1996) Arbres et tableaux de probabilité. Analyse en termes de registres de représentation. *Repères-IREM* 22, 51-72.

Dutarte, P., Henry, M., Lample, H., Piednoir, J.-L., Raoult, J.-P. (2013) Apport pour les futurs étudiants de l'enseignement de la statistique et des probabilités au lycée. *Actes du colloque inter-IREM « La réforme des programmes du lycée, et alors ? »* IREM Université Paris-Diderot.

Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Ed. Peter Lang, Berne.

GEPS (2001) *Document d'accompagnement du programme de première S*. Ed. Ministère de l'Éducation Nationale, Paris.

Grangé, J.-P. (2003) Arbres et tableaux en probabilités conditionnelles. *Probabilités au lycée*, brochure APMEP 143, 91-124.

Henry, M. (2001) Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. *Autour de la modélisation en probabilités,* Presses Universitaires de Franche-Comté, 149-160.

Kuzniak, A. (2010) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 15, 75-95.

Kuzniak, A. (2011) L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 16, 9-24.

MEN (2012a) Ressources pour la classe de première générale et technologique. Probabilités et statistique. Ed. Ministère de l'Education Nationale, Paris.

MEN (2012b) Ressources pour la classe terminale générale et technologique. Probabilités et statistique. Ed. Ministère de l'Education Nationale, Paris.

Parzysz B. (1997) L'articulation des cadres et des registres en probabilités: le cas des arbres et des tableaux. *Enseigner les probabilités au lycée*, publication collective de la commission inter-IREM de Probabilités et Statistique, Ed. IREM de Reims, 225-238.

Parzysz, B. (2003) L'enseignement de la Statistique et des probabilités en France : évolution au cours d'une carrière d'enseignant (période 1965-2002). *Probabilités au lycée*. Ed. ADIREM / APMEP, 9-34.

Parzysz, B. (2011) Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 11, 127-147.

Parzysz, B. (2014) Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. *RELIME* (à paraître).

Rabardel, p. (1995) Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains. Ed. Armand Colin, Paris.

COMPARAISON DE LA DEMARCHE DE LA VALIDATION DANS LES ESPACES DE TRAVAIL IDOINES EN GEOMETRIE ET EN PROBABILITE

Assia Nechache

Université Paris Diderot, LDAR, Paris, France

Dans le cadre des espaces de travail mathématique, la différenciation des entrées dans le travail mathématique s'appuie sur la notion de paradigmes. Ces derniers permettent de préciser les différences épistémologiques dans la démarche de la validation. Par ailleurs, l'enseignement de la validation s'appuie essentiellement sur les divers registres de représentation sémiotiques comme support d'aide à la construction d'une preuve provoquant ainsi l'utilisation du référentiel théorique. Il convient donc de s'interroger sur la place des signes dans l'espace de travail mathématique idoine comme élément non seulement déclencheur d'usage du référentiel théorique mais également comme élément qui oriente le discours de la preuve. D'autre part, nous allons analyser le rôle du professeur dans la mise en place de cette dialectique entre le sémiotique et le discursif, en particulier la manière dont il utilise la dimension sémiotique dans la démarche de la validation.

Mots clés *: Espace de travail, géométrie, probabilités, validation, signes.*

INTRODUCTION

Dans l'enseignement des mathématiques au niveau du secondaire, l'enseignement et l'apprentissage du mode de validation (raisonnement, argumentation, preuve et démonstration) représentent une problématique centrale spécifique à cette discipline. Cet enseignement et cet apprentissage sont initiés dès le début du collège, en particulier dans le domaine de la géométrie plane.

L'enseignement du mode de validation en géométrie, s'appuie essentiellement sur des représentations figurales comme aide à la recherche de propriétés ou de conjectures, qui sont par la suite validées par une élaboration de démonstrations fondées sur des propriétés et théorèmes institutionnalisés. En probabilités, l'enseignement du mode de validation s'appuie sur l'utilisation de divers registres de représentation (arbre, tableau à double entrée,...) permettant de valider des propriétés ou des conjectures, qui sont formulées à partir des résultats obtenus par les expériences réelles ou des simulations informatiques.

Notre recherche a donc pour objectif d'étudier le statut et le rôle de la validation, dans deux domaines enseignés: la géométrie et les probabilités, à la fin de la scolarité obligatoire. Cette étude du rôle et du statut de la validation dans ces deux domaines mathématiques s'appuie sur le cadre théorique espace de travail mathématique (Kuzniak, 2011), avec les notions de paradigmes géométriques (Houdement & Kuzniak, 2006) et de paradigmes probabilistes (Parzysz, 2011). Ce cadre permettra notamment d'interroger les modes de validation en les articulant avec les approches sémiotiques et instrumentales.

Dans cette contribution, nous proposons d'analyser de manière fine la place des signes dans l'espace de travail idoine comme élément non seulement déclencheur d'usage du référentiel théorique mais également comme élément qui oriente le discours de la preuve. D'autre part, nous allons étudier le rôle du professeur dans la mise en place de cette dialectique entre le sémiotique et le discours, en particulier la manière dont il utilise la dimension sémiotique dans la démarche de la validation.

POURQUOI COMPARER CES DEUX DOMAINES?

La comparaison de la démarche de la validation entre les domaines : géométrie et probabilités, est motivée par deux raisons. La première est liée à l'enseignement et l'apprentissage de ces deux domaines, qui sont à première vue, comparables. Ce sont deux domaines qui sont bâtis sur une perception de la réalité et jouissant d'un statut de modèle abstrait. L'enseignement et l'apprentissage de ces deux domaines, consistent dans un premier temps, à placer les élèves dans des situations d'expérimentation afin d'affiner la perception du monde réel. L'apprentissage dans ces deux domaines est donc basé sur une perception expérimentale de la réalité en situation d'expérimentation avec caractérisation des objectifs expérimentaux, actions sur les objets étudiés et réaction du milieu, conception et mise en œuvre d'un programme expérimental, description des phénomènes observés et précision du vocabulaire et enfin recueil des données. Ainsi, la perception du monde géométrique est basée sur la pratique du dessin géométrique, actions de constructions, les expérimentations avec différents environnements (papier/crayon, informatique) afin de dégager des invariants, par exemple : l'observation *d'une rosace placée au-dessus du porche d'une cathédrale en vue de sa reproduction. Repérage des arcs de cercles et hypothèses sur les emplacements de leurs centres. Egalités et différences entre les rayons des arcs de cercles*. En probabilités, on familiarise avec l'aléatoire et la perception du hasard, actions sur les jeux de hasard, puis expérimentations et simulations, recueil des données statistiques, afin de dégager les stabilités. De plus un autre type d'analogie entre ces deux domaines portant sur la démarche de modélisation est souligné par M.Henry (1999) et B.Parsyzs (2011).

La deuxième raison est liée à l'existence de divers travaux didactique relatifs à la validation en géométrie, comme ceux de Balacheff (1982, 1987) et de Duval (1993). Ces travaux mettent en évidence les différentes caractéristiques de la validation dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie dans le secondaire.

C'est pourquoi, une étude comparative de la démarche de validation dans les deux domaines cités ci-dessus nous semble intéressante. L'objectif de cette étude serait alors de repérer les caractéristiques de la démarche de validation dans le domaine des probabilités.

CADRE THEORIQUE

Notre cadre théorique de référence comprend la notion des espaces de travail mathématiques (Kuzniak, 2011), notés dans la suite ETM.

Tel qu'ils ont été définis, les ETM ont pour objectif de décrire et d'analyser la nature du travail mathématique attendu par les élèves (ou utilisateurs de ce dernier) assujettis à une institution scolaire donnée. Or, la nature du travail mathématique dépend du domaine mathématique où il est situé. Dans notre étude, nous allons nous intéresser en particulier aux deux ETM correspondants aux domaines : géométrie et probabilité.

Les ETM sont organisés sous forme de deux niveaux : plan épistémologique et plan cognitif. Le passage d'un plan à un autre est assuré par un ensemble de genèses liées aux pôles (Figure 1)

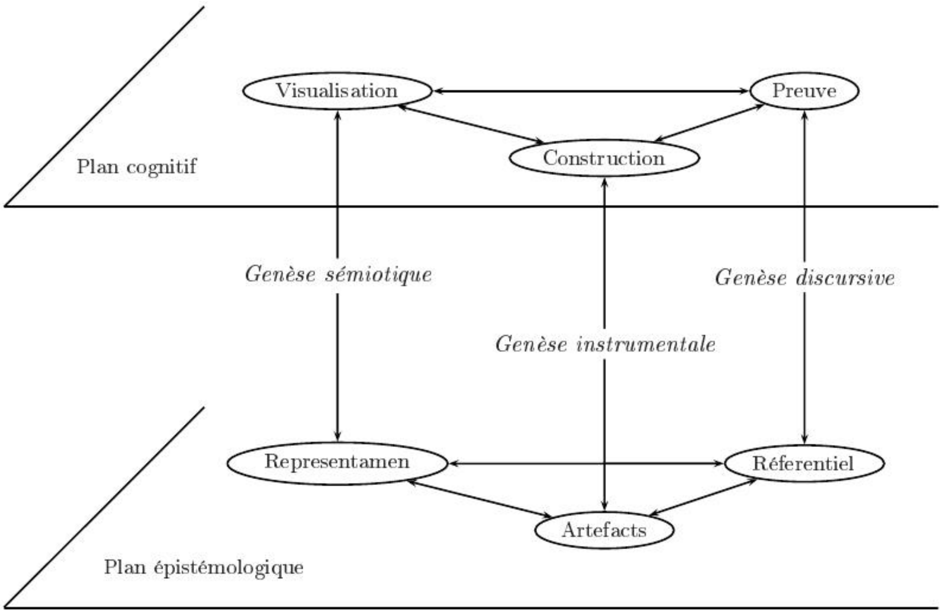


Fig.1. Espace de travail mathématique et ses genèses (Kuzniak, 2011)

Pour donner tout son sens au travail mathématique, ces différentes genèses fonctionnent de manière conjointe. L'interaction de ces différentes genèses se produit au sein de trois plans verticaux (Kuzniak, 2012) :

- **Plan (Sem-Dis)** : où les deux genèses **sémiotique** et **discursive** sont articulées. L'entrée dans ce plan peut se faire selon l'axe sémiotique ou l'axe discursif. Dans le premier cas, il s'agit de décrire *des transformations et décompositions qui seront opérées perceptivement sur les diagrammes et les ensembles signes*. Et dans le second cas, il s'agit *d'une interprétation du problème* 'appuyant sur un discours de preuve où *les diagrammes et la visualisation jouent un rôle heuristique*.

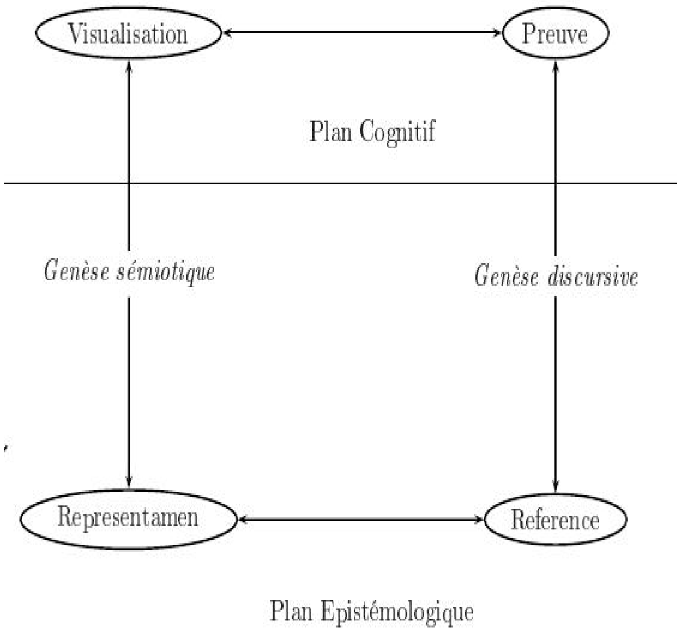


Fig. 2. Plan Sem-Dis

- **Plan (Ins-Dis)** : où les deux genèses **instrumentale** et **discursive** sont articulées.

L'entrée par l'axe instrumental permet d'aboutir à un discours de validation s'appuyant sur l'expérience. Alors que l'entrée par l'axe discursif définit une démarche de validation de type discursif basé sur le référentiel théorique, justifiant ainsi les techniques de construction, permettant par la suite de déterminer l'usage des artefacts (au sens de Rabardel)

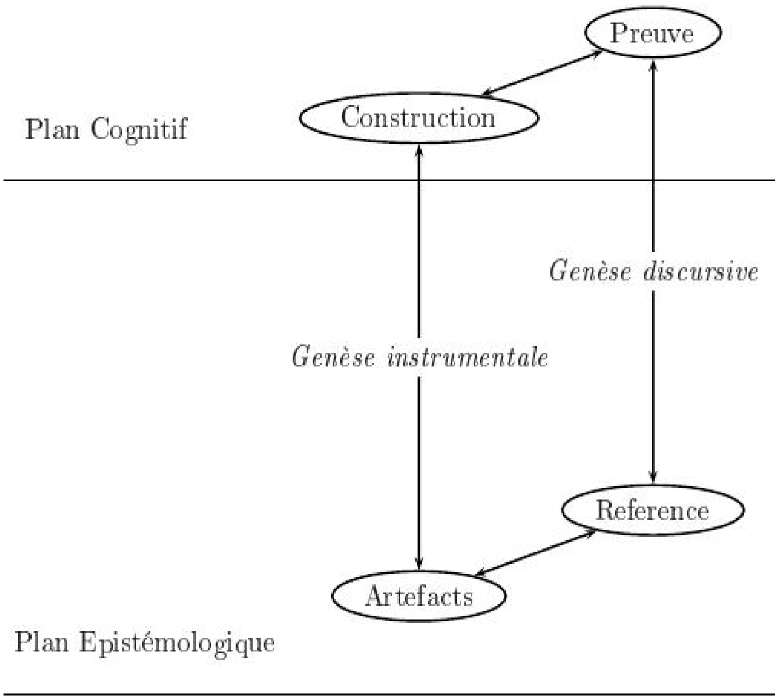


Fig. 3. Plan Ins-Dis

- **Plan (Sem-Ins)** : où les deux genèses **sémiotique** et **instrumentale** sont articulées.

Ce plan met en évidence la manière dont les signes et les outils interagissent dans la phase de découverte et d'exploration. Ce plan est orienté selon deux sens : de la gauche vers la droite, privilégiant la construction des objets et respectant certaines conditions imposées par les signes mathématiques, et le sens inverse qui lui fait appel à l'exploitation visuelle et sémiotique des données

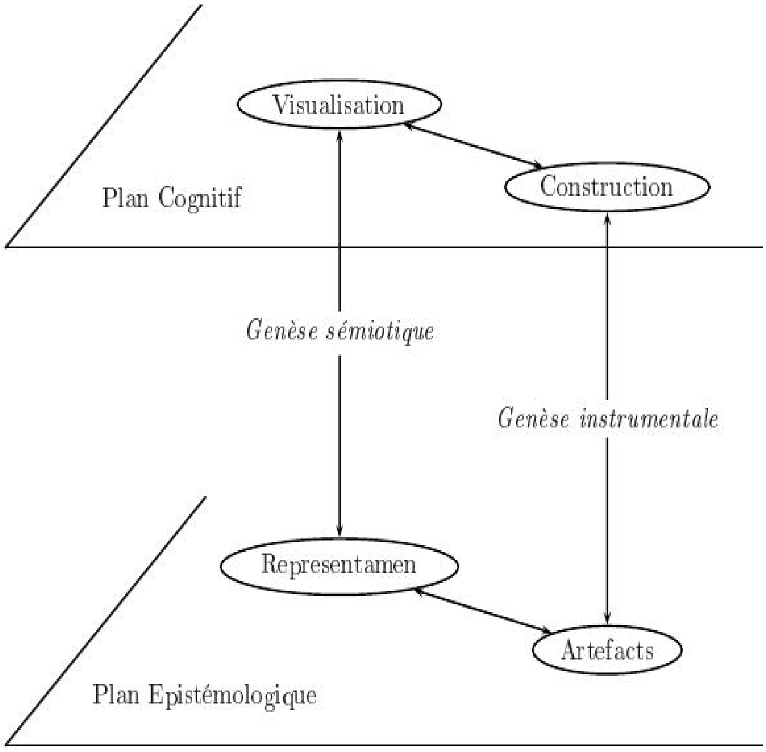


Fig. 4. Plan Sem-Ins

On se réfère également à la notion de paradigmes inspirée de Kühn, appliquée au domaine de la géométrie (Houdement & Kuzniak, 2006) et au domaine des probabilités (Parzysz, 2011). Ces différents paradigmes sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Domaines	**Géométrie**	**Probabilité**
1^{er} paradigme	***GI.*** Elle s'exerce sur des objets issus de la réalité. Elle a pour source de validation le monde sensible.	***P1***. Il s'agit d'associer une liste des issues et un protocole expérimental précis à l'expérience concrète, assurant ainsi la reproductibilité de l'expérience dans les mêmes conditions.
2^{nd} paradigme	***GII***. La validation s'appuie sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique. La relation avec la réalité est maintenue.	***P2***. Il s'agit d'étudier la notion de probabilité en utilisant les outils : la démonstration mathématique, les techniques de calcul usuelles et divers registres de représentation (tableau à double entrée, l'arbre pondéré,...)

LA PLACE DES SIGNES DANS L'ETM IDOINE : UN PARALLELE ENTRE LA GEOMETRIE ET LES PROBABILITES

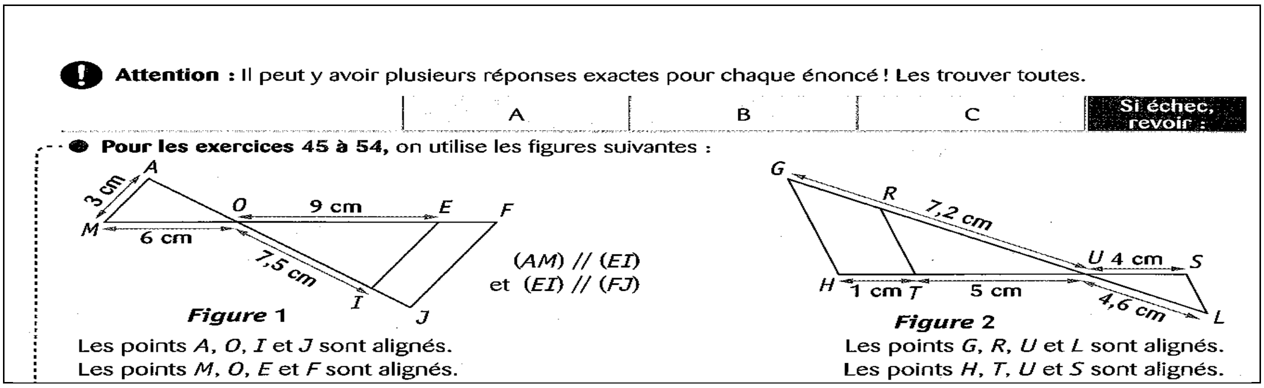
Nous nous sommes questionnés sur la place que pourrait avoir les signes dans l'espace mathématique idoine, et le rôle de la dimension sémiotique dans la démarche de validation. Nous supposons que la place et le rôle des signes diffèrent selon le domaine mathématique pris en compte dans l'ETM idoine.

Nous allons analyser ci-après deux séances observées dans deux classes, avec deux professeurs différents que l'on appellera professeur T (classe de 3e) et professeur S (classe de 2nde).

La première séance observée concerne le domaine de la géométrie en classe de 3e et l'autre concerne le domaine des probabilités en classe de seconde.

Partie 1. Séance de géométrie en classe de troisième.

Cette séance porte sur la notion du théorème de Thalès. L'enseignant propose aux élèves un exercice extrait du manuel phare 3e (p. 231) à chercher pendant cette séance. Ce dernier est un QCM (questions à choix multiples) à neuf questions. Les élèves sont invités à répondre en choisissant une ou plusieurs des trois réponses proposées sans justifier. Le texte de l'énoncé tel qu'il est proposé comporte deux figures correspondant à l'une des configurations de Thalès. Les informations nécessaires pour la résolution de l'exercice sont fournies sous forme numérique correspondant aux mesures des longueurs des segments, et sous forme de langage mathématique (symbolique ou non). Par conséquent, deux registres sont utilisés : registre numérique et registre du langage.



Les cinq premières questions portent sur l'utilisation du théorème dans le sens direct. La tâche est donc de reconnaître la configuration de Thalès (figure 1) et d'appliquer ce dernier afin :

- de déterminer le coefficient de réduction,

45 Sur la *figure* 1, le triangle *AOM* est une réduction du triangle *IOE* de rapport :	$\frac{3}{9}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{2}{3}$	**p. 206**

- de vérifier l'égalité des rapports,

47 Sur la *figure* **1**, d'après le théorème de Thalès, on a :	$\frac{OE}{EF}=\frac{OI}{IJ}=\frac{EI}{FJ}$	$\frac{OF}{OE}=\frac{OJ}{OI}=\frac{FJ}{EI}$	$\frac{OE}{OF}=\frac{OI}{OJ}=\frac{FJ}{EI}$	**p. 206**
48 Sur la *figure* **1**, d'après le théorème de Thalès, on a :	$\frac{AO}{AI}=\frac{MO}{ME}=\frac{AM}{EI}$	$\frac{AO}{OE}=\frac{MO}{OI}=\frac{AM}{EI}$	$\frac{OA}{OI}=\frac{OM}{OE}=\frac{AM}{EI}$	**p. 206**

- de calculer les longueurs des côtés des triangles,

49 Sur la *figure* **1**, la longueur OA est égale à :	$\frac{2}{3}\times 7{,}5$ cm	$\frac{9\times 7{,}5}{6}$ cm	5 cm	**p. 209**
50 Sur la *figure* **1**, la longueur EI (en centimètres) est égale à :	$\sqrt{9^2-7{,}5^2}$	4,5	$\frac{6}{9}FJ$	**p. 209**

En ce qui concerne les quatre dernières questions, il s'agit d'appliquer la réciproque ou la contraposée du théorème de Thalès en se référant cette fois-ci à la figure 2, afin d'identifier le parallélisme des droites.

51 Sur la *figure* **2**, les droites (GH) et (SL)	sont parallèles	ne sont pas parallèles	sont peut-être parallèles	**p. 207** **p. 210**
52 Sur la *figure* **2**, les droites (GH) et (RT)	sont parallèles	ne sont pas parallèles	sont peut-être parallèles	**p. 207**
53 Sur la *figure* **2**, si $UR = 5{,}75$ cm, les droites (RT) et (SL)	sont parallèles	ne sont pas parallèles	sont peut-être parallèles	**p. 207** **p. 210**
54 Sur la *figure* **2**, si $UR = 6$ cm, les droites (GH) et (RT)	sont parallèles	ne sont pas parallèles	sont peut-être parallèles	**p. 207** **p. 210**

Les différentes tâches proposées dans cet exercice sont simples et nécessitent comme connaissances préalables : la reconnaissance des configurations de Thalès, l'utilisation de la réciproque ou de la contraposée selon les cas étudiés. Il mélange deux cadres : géométrique et numérique.

Cet exercice tel qu'il est conçu par les auteurs du manuel a pour objectif de faire appliquer la propriété de Thalès pour s'entrainer aux mécanismes de son utilisation. Ils privilégient ainsi le travail de la reconnaissance des figures clés de Thalès et de son application immédiate. Ce travail « de la technique » (au sens de Chevallard) s'appuie essentiellement sur l'exploitation visuelle et sémiotique des données fournies par la figure. Cependant, l'interprétation du problème sous forme discursive n'est pas attendue.

L'ETM idoine construit par les auteurs du manuel utilisé dans cette classe, est un ETM que l'on qualifiera de potentiel. Mais le professeur en fait une autre adaptation et construit son propre ETM idoine. L'ETM idoine potentiel place le travail mathématique dans l'axe sémiotique visant l'utilisation de Thalès en tant qu'outil sémiotique. Le travail mathématique est donc clôt sur l'axe sémiotique, ce qui rend difficile l'identification du paradigme en jeu dans cet espace de travail. De plus, cette complexité d'identification du paradigme semble être accentuée par le statut ambigu des nombres fournis par l'exercice. Faut-il les considérer comme des données exactes, autrement dit des données de GII, ou comme des mesures, et donc des données de GI ?

Déroulement de la correction de cet exercice.

Le professeur T réalise (sans instrument) la première figure sur le tableau. Quelques minutes ont été laissées aux élèves afin de chercher l'exercice. Puis il fait un rappel sur les différentes méthodes « d'application du théorème de Thalès » vues dans la leçon.

Il invite un élève à lire la question 45, puis à répondre à celle-ci. Ce dernier donne une réponse correcte. Le professeur T demande alors à l'élève de justifier cette dernière, ce qui lui a été impossible et même pour les autres élèves de la classe. Le professeur T reprend alors l'énoncé de la question en s'adressant à l'ensemble de la classe :

Professeur T : Quand on vous dit qu'un triangle est une réduction d'un autre cela ne vous rappelle aucune propriété ? Aucun théorème ? Et ça c'est dommage on vient d'en parler il y a 5 minutes. Alors quel théorème doit s'appliquer lorsque l'on a une configuration comme celle-ci ?

Face au silence des élèves, il reprend la figure tracée au tableau en la commentant, puis il procède à la vérification de chacune des conditions de l'application du théorème de Thalès.

La condition 1: l'alignement des points et les droites sécantes.

Professeur T : Vous êtes sûrs ? Vous avez ce qu'il faut ? Il nous faut des points comment ?
Élève S : Alignés
Professeur T : Donc il nous faut des droites sé…
Élèves : Sécantes
Professeur T : Comment s'appellent-elles ?
Élèves : (ME) et (AI)
Professeur T : (ME) et (AI) sont sécantes en O. On a les 5 points qui interviennent.

La condition 2 : le parallélisme de droites

Professeur T : De plus, que nous faut-il d'autre ?
Élèves : Des droites parallèles
Professeur T : Il me faut des droites parallèles qui s'appellent (AM) et …
Élève H : (EI) et (FJ)
Professeur T : Est-ce que tu en as besoin ? Regarde l'exercice.
Élèves : Euh..., non.
Professeur T : (AM) et (IE)

La conclusion : application du théorème et l'égalité des rapports

Professeur T : Et dans ce cas, vous pouvez appliquer le théorème de..
Élèves : Thalès
Professeur T : Et cela vous permet d'écrire quoi ?
Élèves : Des quotients
Professeur T : Et lesquels ?
Élèves : OE sur …
Professeur T : Commencez plutôt par OM
Élèves : OM sur OE est égal à OA sur OI
Professeur T : OM sur OE est égal à OA sur OI, vous êtes d'accord ?
Élèves : Oui
Professeur T : Bon d'accord, on va retenir ce quotient là (en indiquant OM/OE), qui est le coefficient de réduction. C'est ce que vous avez appris en 4^{e}. La longueur OM mesure 6 cm et la longueur OE mesure 9 cm. Est-ce que cette réponse est proposée ?
Élèves : Non
Professeur T : Non mais, 6 et 9 sont tous les deux des multiples de 3, et on obtient la réponse qui a été donnée, qui est 2 sur 3.
Professeur T : Le truc, c'est qu'il faut que l'on soit capable d'expliquer.

Le professeur T a donc fait le choix d'adapter l'ETM idoine du manuel en modifiant la nature du travail mathématique. Cette modification concerne la justification du résultat obtenu qui s'appuie sur le référentiel théorique (propriété de Thalès), mais elle concerne également le statut de la figure dans cet espace, qui joue un rôle heuristique.

Afin d'installer cet espace, le professeur T prend en charge le travail mathématique et mène un dialogue sous forme de questions fermées guidant les réponses des élèves. Il a donc recours à des effets Topaze (Brousseau, 1998) pour faire avancer la situation. Ce questionnement très étroit, est accompagné des commentaires relatifs à la figure, et suit un contrat de type maïeutique.

Dans la suite de la correction de l'exercice, il est proposé aux élèves de corriger directement la question 51. Aucun temps de recherche individuelle n'est laissé.

Le professeur T se contente une nouvelle fois de tracer la figure au tableau tout en la commentant. Il sollicite un élève et entame un dialogue suivant un contrat de type maïeutique avec celui-ci

Le choix de la propriété.

Professeur T : Dans ce cas, tu as deux droites sécantes et deux droites parallèles, ce sont tes hypothèses ? C'est ton point de départ ? La question est : est-ce que les droites sont parallèles ? Elles le sont ou elles ne le sont pas ? Toi tu me dis qu'elles le sont ou qu'elles ne le sont pas. C'est une conclusion, pas un point de départ, c'est l'arrivée. Bon une chose est certaine, on n'applique pas le théorème de Thalès. Et les autres (les élèves), qu'est-ce que l'on doit appliquer ? Et dans ce cas, vous pouvez appliquer le théorème de...

Élèves : La réciproque, la contraposée.

Professeur T : Oui, la réciproque pour conclure qu'elles sont parallèles, la contraposée pour conclure qu'elles ne sont pas parallèles.

L'application de la propriété de la contraposée de Thalès.

Professeur T : Pour appliquer ces deux propriétés, que faites-vous ?

Élève H : Des quotients

Professeur T : Lesquels ?

Élève M : UG sur UL et UH sur US

Professeur T : Revenons à nos quotients. Alors, ils sont comment ?

Élève M : Presque pareils.

Professeur T : Presque pareils, alors ce presque là, il m'embête. Ils sont différents. Alors comment ils sont mes quotients ?

Élève M : Ils ne sont pas égaux.

Professeur T : Et pourtant, j'avais bien des droites sécantes en U, j'avais tout ce qu'il fallait au départ, donc quel est le raisonnement ? Quelle est la conclusion ?

Élèves : La contraposée

Conclusion

Professeur T : M tu m'aides. Si les droites (GH) et (SL) étaient parallèles alors j'appliquerai le théorème de Thalès pour conclure que j'ai des quotients égaux, mais vu qu'ils ne le sont pas, alors les droites ne peuvent pas être parallèles. C'est la réponse b. On a donc appliqué un raisonnement par l'absurde, c'est la contraposée du théorème de Thalès.

Dans cet ETM idoine adapté, le travail mathématique est placé dans le plan (Sem-Dis) orienté vers l'axe discursif. Le type de validation attendu dans cet espace adapté pour cet exercice privilégie l'usage du théorème de Thalès en tant qu'outil discursif. Ce qui suppose que cet espace est dirigé par le paradigme GII. Par conséquent, le travail mathématique se situe, dans un premier temps dans le plan (Sem-Dis), pour produire le résultat. Dans un second temps, ce travail mathématique est placé sur l'axe discursif, qui permet d'obtenir une validation du résultat sous forme discursive associée à une preuve.

L'observation de cette séance de géométrie permet de constater que les élèves travaillent exclusivement sur l'axe sémiotique, qui est privilégié par l'ETM idoine potentiel et non pas par l'ETM idoine adapté par le professeur. On assiste à une sorte de glissement au sens de Carranza (2004), partant du travail géométrique vers un travail de logique (contraposée, raisonnement par l'absurde) et faisant perdre de vue l'objectif de l'exercice. D'où un malentendu entre le travail effectué par les élèves et celui attendu par le professeur. Ce malentendu porte sur la forme de validation du résultat produit. En effet, dans l'ETM idoine potentiel, la validation est de la forme sémiotique sans recours au discours de preuve, alors que dans l'ETM idoine adapté, la validation est de la forme discursive associée à la preuve.

Ce malentendu de la forme de validation met clairement en évidence l'existence d'une contradiction entre la nature du travail de l'ETM idoine potentiel et celle de l'ETM idoine adapté qui est probablement la source du malentendu constaté. L'adaptation de l'ETM idoine potentiel par le professeur entraine alors la modification de la nature du travail mathématique, qui utilise la dimension sémiotique dans la démarche de validation de manière heuristique pour produire le résultat. Celui-ci est validé par la suite par un discours de preuve.

Partie 2. Séance de probabilité en classe de seconde.

Cette séance de probabilité proposée aux élèves porte sur la correction d'un exercice qui a été cherché à la maison, extrait du manuel Odyssée 2nde (page 308).

Les élèves doivent répondre à deux questions concernant la détermination de la probabilité d'un évènement. L'énoncé de cet exercice est rédigé comme suit:

On dispose de deux porte-monnaie identiques. Le premier contient 3 billets de 10 € et 5 billets de 20 €. Le second contient 2 billets de 10 € et 4 billets de 20 €. On choisit au hasard un porte-monnaie et on tire à l'aveugle un billet de ce porte-monnaie. Quelle est la probabilité de choisir un billet de 10 € ? un billet de 20 € ?

L'espace de travail est constitué des objets matériels (les billets et les porte-monnaie), des actions sur les objets (choix des porte-monnaie et le tirage des billets). Le travail mathématique est de déterminer la probabilité d'un événement. Le paradigme qui pilote cet espace de travail est P1, et il est donc constitué de l'ensemble des issues et de la probabilité associée à chacune d'elles.

Dans cet espace de travail, l'expérience aléatoire est caractérisée par le protocole suivant : choix du porte-monnaie « au hasard » puis tirage « à l'aveugle » dans chacun des deux porte-monnaie.

Le modèle probabiliste utilisé ici est celui de l'équiprobabilité. Ce modèle n'est pas explicité mais on fait référence à celui-ci avec les termes : *identiques, au hasard, à l'aveugle*.

On travaille dans un registre de langage naturel, un registre numérique en particulier dans le cadre des rationnels.

Par ailleurs, cet exercice met en jeu une expérience aléatoire comprenant deux épreuves successives qui ne sont pas indépendantes. Par conséquent, l'utilisation d'un arbre pondéré comme outil de résolution serait l'outil le plus efficace. Cependant, ce type d'arbre n'apparait officiellement qu'en classe de terminale, ce qui peut alors entrainer une difficulté concernant la résolution de cet exercice par les élèves.

Déroulement de la correction de cet exercice.

Un élève est invité à écrire sa réponse au tableau. Il construit un arbre non pondéré qui permet d'illustrer la situation puis donne la réponse sous forme de fraction.

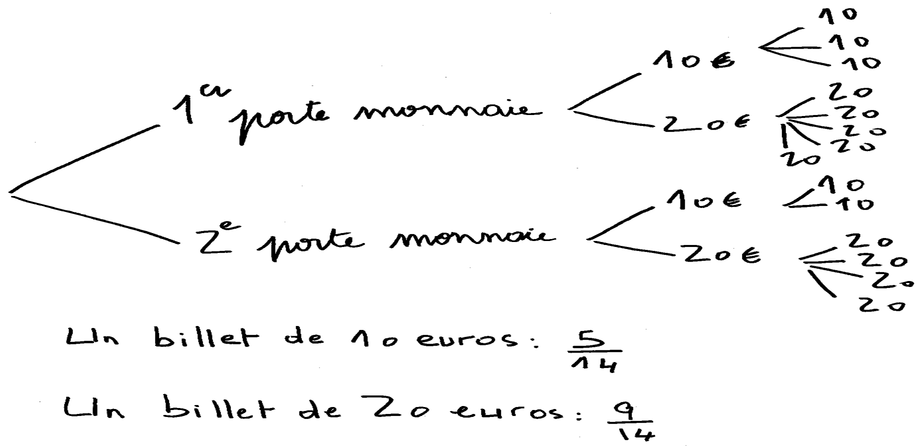


Fig. 5. La réponse d'un élève

L'élève M donne des résultats numériques sans justification, qui supposent l'utilisation de l'arbre comme outil non seulement de traitement de la situation mais également comme instrument de preuve. L'analyse de la réponse de cet élève laisse penser que le travail mathématique s'est effectué dans le plan (Sem-Ins). L'entrée dans la tâche de résolution se fait alors par l'axe sémiotique permettant de traduire le problème sous forme d'un arbre, puis il est utilisé comme un instrument pour construire la solution du problème donné.

Ensuite, le professeur S demande à l'élève M d'expliquer sa démarche pour répondre à l'exercice, et en particulier d'expliquer les deux résultats écrits au tableau :

Professeur S : Peux-tu expliquer à tes camarades comment tu as fait ?

Pour répondre à la demande du professeur S, l'élève M se contente de lire l'arbre sans donner la moindre justification.

Élève M : Eh ! J'ai pris les deux porte-monnaie comme ça. Puis dans le premier porte- monnaie il y a 3 billets de 10 et 4 billets de 20 euros…

Or la question du professeur S porte sur la justification des réponses écrites au tableau, à savoir : 5/14 et 9/14. Alors que l'élève M explique la manière dont il a construit l'arbre. N'ayant pas obtenue satisfaction, le professeur S instaure un dialogue sous forme de questions/réponses avec l'élève.

Professeur S: Alors pourquoi 5 sur 14 ? Pourquoi 14 ?

Élève M : Car il y a 8 billets dans le premier porte-monnaie et 6 billets dans le deuxième, donc 14 billets au total.

Dans le reste du dialogue, le professeur S cherche à expliciter l'univers de l'expérience aléatoires, les issues et la probabilité.

Les issues.

Professeur S: Avec le vocabulaire de probabilité, à quoi correspond ce 14 ?

Élève M : 4 issues

Le modèle d'équiprobabilité.

Professeur S : D'accord. Et est-ce qu'il y a des chances supérieures d'attraper un billet de 20 ou un billet de 10 ? »

Élève M : Il y a plus de billets de 20 que de billets de 10.

Professeur S : Oui effectivement. Mais lorsqu'on fait un tirage ici, on dit que le tirage est comment ?

Élève M : Aléatoire

Professeur S : Oui. Et les issues entre elles, elles sont comment ?

Élève M : Elles sont aléatoires aussi.

Professeur S : Oui, quand une issue n'a pas plus de chance d'apparaitre qu'une autre comment dit-on ? Vous vous rappelez du mot ?

Professeur S : Comment on dit quand les issues ont la même chance de sortir ?

Élèves : On dit qu'elles sont équiprobables

L'univers.

Le professeur S tente de justifier auprès des élèves la nécessité de définir l'univers de l'expérience.

Professeur S : cet exercice qui est un de nos premiers exercices on va lui donner un cadre, d'où vient le 14, ce 5... Alors, le mot univers il faudrait qu'il apparaisse. Pourriez- vous me dire ce que c'est l'univers ? »

Élèves : L'ensemble des issues

Professeur S : Oui, en l'occurrence ici c'est quoi l'univers ?

Élève M : C'est l'ensemble des billets

Professeur S : D'accord, vous prenez la correction

Le professeur S se centre tout au long de la correction de l'exercice sur la justification des deux résultats (5/14 et 9/14) et en particulier sur l'explicitation des éléments constituant l'espace probabiliste et le modèle probabiliste, au point de ne pas constater la non-validité des résultats fournis par l'élève M. En effet, l'univers de l'expérience est constitué de 14 issues n'ayant pas la même probabilité, puisque la proportion des billets de 10 euros n'est pas la même dans les deux porte-monnaie. De ce fait, la probabilité de l'événement « obtenir un billet de 10 euros » (respectivement « obtenir un billet de 20 euros ») est de 17/48 (respectivement 31/48).

La solution proposée par l'élève M consiste à dénombrer les occurrences, en « vidant » les deux porte-monnaie, ensuite à regrouper l'ensemble des billets qu'ils contiennent. Les probabilités sont alors données par la formule : le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles. On peut penser que cet élève considère que l'équiprobabilité porte sur les 14 billets. Mais cela ne peut être confirmé, car habituellement les situations de dénombrement sont modélisées implicitement par l'équiprobabilité. L'élève M produit alors un arbre de choix et d'occurrence (Kuzniak & Drouhard, 2014) et non un arbre pondéré. Cette erreur est donc liée à une utilisation insuffisante de l'outil arbre. Le professeur aurait dû focaliser le travail mathématique sur cette erreur au lieu de porter toute son attention sur la définition de l'espace probabiliste.

Plus précisément cette erreur est due à une mauvaise identification du modèle puisque celui qui a été choisi est celui du dénombrement et non celui d'équiprobabilité. Ici, l'équiprobabilité porte d'abord sur le choix du porte-monnaie, ensuite sur le choix du billet dans chacun des porte-monnaie. Cette erreur est également due à une mauvaise identification de l'expérience aléatoire, puisque l'élève remplace l'expérience décrite par une autre, consistant à rassembler tous les billets des deux porte-monnaie puis à tirer un billet au hasard. La différence entre les deux expériences serait plus visible si l'un des porte-monnaie contenait par exemple 2 billets et l'autre 20 billets. Cependant, un travail portant sur une analyse plus fine de la situation aléatoire proposée serait plus judicieux. Par exemple, le recours à une expérimentation réelle, puis à une simulation par ordinateur, pourrait permettre de choisir le modèle adéquat à l'expérience aléatoire de l'ETM, et donc d'éviter ou de repérer l'erreur produite.

Par ailleurs, le raisonnement de l'élève M s'appuie exclusivement sur le traitement de l'arbre. Il l'utilise à la fois comme un ensemble de signes modélisant le problème posé et comme instrument de preuve. Alors que le raisonnement du professeur s'appuie sur le référentiel théorique justifiant les résultats obtenus par le calcul numérique.

Professeur S : Je pense qu'un exercice de probabilité n'est pas un exercice où il n'y a que des chiffres, et peut-être que l'idée est de justifier ce que vous faites. Alors ici on commence par bien repérer l'expérience aléatoire, et dire quel est l'univers. Un des critères pour arriver à savoir si son exercice de probabilité est correctement rédigé c'est de voir si on a bien répertorié l'univers, si on fait un arbre pour comprendre ce qu'est l'univers, et puis voir si les issues sont équiprobables, et enfin on rédige comme ça :

L'<u>univers</u> est constitué de 14 billets

Chacune des issues ont la même chance d'apparaître, on est dans le cas d'<u>équiprobabilité</u>

Il y a 5 possibilités d'obtenir un billet de 10 euros donc la probabilité est de 5/14 et 9 possibilités d'obtenir un billet de 20 euros donc 9/14.

Dans cette séance observée, le professeur S a donc bien insisté sur les justifications à fournir sur les probabilités obtenues et sur la manière de rédiger la solution d'un exercice de probabilité. C'est pourquoi, il présente aux élèves un style de discours écrit qu'ils doivent appliquer, car celui-ci est valable pour la plupart des exercices de probabilité. Ce style de discours se résume à:

l'explicitation de l'univers avec la description (si possible) des issues le constituant

dénombrer les issues réalisant l'événement

conclure en utilisant la formule dans le cas d'équiprobabilité : le nombre de cas favorables sur le nombre total d'issues.

Le travail mathématique de l'ETM idoine tel qu'il est construit par le professeur S consiste à déterminer l'espace probabiliste. Puis à effectuer les calculs en utilisant la définition Laplacienne des probabilités. Cela diffère de l'ETM idoine potentiel du manuel. Ce dernier suppose un travail de modélisation et de traitement de la situation par l'usage d'un arbre probabiliste, pour ensuite effectuer les calculs de probabilités. Or ce type d'arbre n'est pas disponible dans l'ETM personnel de l'élève, qui ne connaît que l'arbre de choix et des occurrences.

L'analyse de la réponse telle qu'elle est fournie par l'élève interrogé permet d'avancer que celle-ci résulte de l'interaction entre deux genèses : sémiotique et instrumentale. Autrement dit, le travail mathématique tel qu'il est perçu par l'élève se situe dans le plan (Sem-Ins). Le traitement du problème commence par la modélisation de la situation : la conversion de l'énoncé donné dans le registre de langage naturel à celui du registre arbre, privilégiant l'entrée par l'axe sémiotique. Puis la construction de la réponse se fait par l'exploitation visuelle et sémiotique des données mises en évidence par l'artefact arbre produisant ainsi une validation (dans l'axe instrumental) qui n'est pas adéquate à celle attendue par l'ETM idoine mis en place par le professeur. On constate alors un malentendu portant la place du travail mathématique, puisque pour l'élève le travail est situé uniquement dans le plan (Sem-Ins) alors que pour le professeur le travail mathématique est clôt sur l'axe discursif.

CONCLUSION

Notre étude porte sur deux exemples de fonctionnement de la démarche de validation au sein de deux espaces de travail idoines dans deux niveaux de classes. On constate l'existence de deux degrés de malentendus relatifs au travail mathématique.

Le premier se situe au niveau de l'adaptation de l'ETM idoine potentiel. Chez les deux professeurs observés, le travail mathématique de l'ETM idoine adapté est placé principalement sur l'axe discursif et peut éventuellement s'appuyer sur l'axe sémiotique. Alors que l'ETM idoine potentiel place le travail mathématique soit sur l'axe sémiotique avec l'usage des figures (dans le cas de la géométrie), soit sur le plan (Sem-Ins) orienté vers le discursif (dans le cas des probabilités), avec usage de l'outil arbre comme instrument de validation. Donc l'ETM idoine adapté n'est pas en adéquation avec l'ETM idoine potentiel car le travail mathématique, en particulier celui de la validation attendu est différent. Cette différence du travail attendu entraine des malentendus et des blocages chez les élèves.

Le second niveau, se situe au niveau de l'ETM personnel de l'élève, qui semble être en adéquation avec l'ETM idoine potentiel et non avec l'ETM idoine adapté. Effectivement, dans les deux séances analysées, le travail de l'élève consiste d'abord à réagir à des signes, le faisant entrer par la suite dans une forme de travail en lien avec l'interprétation des signes. Cette forme de travail met en évidence que l'ETM personnel de l'élève est en adéquation avec l'ETM idoine potentiel, dans lequel l'usage de la dimension sémiotique est privilégié.

Par ailleurs, le statut des signes dans les deux fonctionnements de la démarche de validation observés sont distincts. Dans le cas de la géométrie, la démarche de validation attendue dans l'ETM idoine prend appuie sur la dimension sémiotique et suit un contrat de type maïeutique. Dans le cas des probabilités, la démarche de validation attendue dans l'ETM idoine s'appuie exclusivement sur la dimension discursive et occulte la dimension sémiotique. On suppose que cette différence de la place de la dimension sémiotique dans la démarche de validation provient du statut du signe (la figure et l'arbre) dans les deux ETM idoines considérés. Notre hypothèse est que dans le travail géométrique, la figure a un statut stable dans l'ETM idoine, puisqu'elle est considérée comme un outil heuristique dans la démarche de validation. Tandis qu'en probabilités, le statut de l'arbre dans l'ETM idoine n'est pas clairement déterminé, car certains professeurs le considèrent comme un outil heuristique au même titre que la figure en géométrie dans la démarche de validation. En revanche, pour d'autres professeurs, l'arbre est considéré comme élément de preuve.

A travers l'étude de deux exemples de fonctionnement de la démarche de validation, on en déduit une caractérisation d'une démarche de validation dans le cas de la géométrie et des probabilités. Cette caractérisation dépend elle du domaine dans lequel se situe le travail mathématique ? Est-elle une caractérisation propre à un professeur donné ? Il est évident qu'une généralisation de ces deux types de démarche de validation serait complexe. L'analyse de la démarche de validation d'autres professeurs (de 3^{e} et de 2^{nde}) sur un certain nombre de tâches géométriques et probabilistes, pourrait être intéressante afin de repérer des similarités ou des différences dans la démarche de la validation dans les deux domaines considérés dans cette étude.

REFERENCES

Balacheff, N. (1982) : Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3.3, 261-304.

Balacheff, N. (1987) : Processus de preuve et situation de validation. *Educationnal Studies in Mathematics* 18, 147-176.

Brousseau, G. (1997). Intégration des savoirs de formation-La régulation didactique. Actes du XXIV ème colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, St Etienne.

Brousseau, G. (1998). La Théorie des Situations Didactiques. *La pensée Sauvage*.

Coutat, S. & Richard, P.(2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 16, 97-126.

Carranza, P. (2004). Glissements dans l'enseignement de la statistique en classe de seconde. *Mémoire de DEA de didactique des mathématiques*. Université Paris VII

Duval, R. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?. *Petit x* 31, 37-61.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 11, 175-193.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 16, 9-22.

Kuzniak, A. (2012). Travail mathématique et domaines mathématiques. *Acte du troisième symposium ETM, Montréal.*

Kuzniak, A & Drouhard, JP. (2014). Un point de vue multidimensionnel sur les outils et les instruments dans les espaces de travail mathématique. *Communication au colloque ETM4. Madrid*

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 16, 127-147

Parzysz, B. (2012). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée :

CIRCULATION ET COORDINATION DANS LES ESPACES DE TRAVAIL, POUR UNE ACTIVITE ARTICULANT GEOMETRIE ET ARITHMETIQUE

Denis Tanguay, Université du Québec à Montréal (UQAM)

L'article, une étude de cas, s'attache à la description et à l'analyse du travail d'un binôme d'élèves dans la première phase de l'activité décrite dans Tanguay et al. (2014). Les élèves (12-13 ans) doivent y construire le plus de polygones réguliers possible. Ils ajustent pour cela, via deux curseurs d'un fichier GeoGebra préalablement instrumentalisé, le nombre n de triangles isocèles induit par le découpage standard du n-gone régulier en n triangles, et la mesure 360/n de l'angle au centre. La première phase de l'activité vise la recension des diviseurs de 360 via la construction effective du n-gone pour chaque diviseur n. L'analyse du travail des deux élèves porte sur la façon dont, dans cette tâche, ils coordonnent les espaces de travail géométrique et arithmétique et les registres figural et numérique. Nous nous intéressons également à la façon dont y interviennent les conceptions et représentations de l'angle et de sa mesure en degrés.

Mots clés : *angle, mesure d'angle, polygone régulier, cercle, registres de représentation, coordination, espace de travail géométrique, espace de travail arithmétique, diviseur, faisceau sémiotique.*

INTRODUCTION

Dans le texte de cadrage (Kuzniak et Richard, 2014) et le texte de Kuzniak (2014) du numéro spécial de la revue RELIME, à paraître à la suite du symposium ETM 3, ces auteurs soulèvent la question de l'organisation de l'espace de travail mathématique quand on considère l'articulation de plusieurs domaines en interaction : comment la modélisation que le cadre des ETM propose peut-elle rendre compte de la circulation entre les différents plans, épistémologiques et cognitifs, quand une tâche provoque des changements de domaine ou suscite un travail à partir d'objets et de représentations issus de différents domaines, et qui sont à combiner, à coordonner?

Nous chercherons des éléments de réponses à ces questions dans une étude de cas, à travers l'analyse détaillée de la première phase d'une expérimentation menée auprès de deux binômes d'élèves. L'expérimentation s'est déroulée hors classe, un samedi, sur deux périodes de près d'une heure et demi chacune, séparées par une pause d'une demi-heure. La première phase a occupé la première période. Nous nous attacherons au travail et aux échanges, particulièrement riches, d'un des binômes. Il est constitué de deux élèves, E1 et E2, de 2^{e} secondaire (12-13 ans), E1 étant considéré dans sa classe comme « fort » en mathématiques et E2 comme « moyen ». L'activité consiste à demander aux élèves, par équipes de deux aux ordinateurs, de construire le plus de polygones réguliers possibles à partir d'un fichier GeoGebra instrumentalisé comme suit : à l'écran apparaît un triangle isocèle ΔACB, avec $AC = CB$, et deux curseurs α et n. Le curseur α varie entre 0 et 180 et permet de changer la mesure en degrés de $\angle ACB$. Le curseur n varie entre 1 et 360 et permet de déployer n triangles en éventail : le premier est ΔACB, les autres sont ses images par des rotations de centre C et d'angles α, 2α, 3α, … $(n-1)\alpha$.

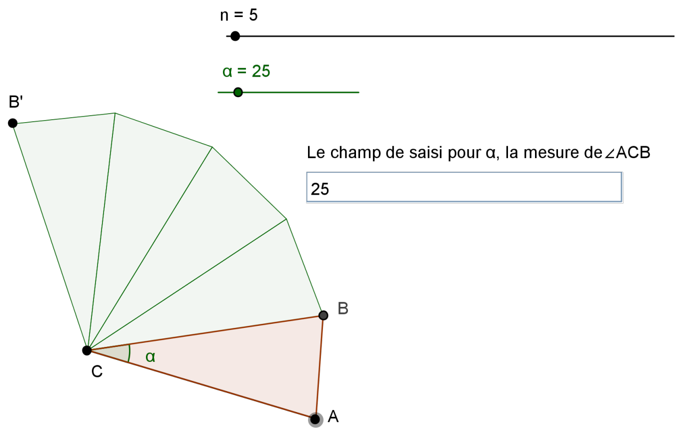


Figure 1 : l'écran GeoGebra proposé aux élèves

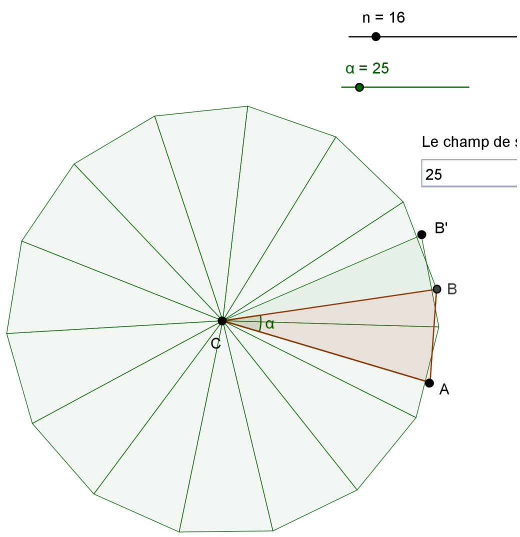


Figure 2 : le curseur *n* est déplacé

Une analyse *a priori* de l'activité est proposée dans Tanguay et al. (2014). Elle a pour cadre le paradigme du géomètre-physicien (Tanguay et Geeraerts, 2012, 2013), où les enjeux relatifs à la mesure occupent une place centrale. L'article de 2014 inscrit l'activité dans ce cadre en faisant valoir qu'elle problématise, via un travail sur les mesures d'angle impliquées, les rapports entre exactitude et approximations, ceux-ci étant intégrés aux processus de validation des figures géométriques construites. Un travail sur les nombres est sollicité en parallèle et mis en correspondance avec le travail géométrique : d'abord sur les entiers et leurs diviseurs, nous y reviendrons, ensuite sur les rationnels et leurs développements décimaux.

Contentons-nous pour l'instant de reprendre ici les grandes lignes de l'analyse *a priori*. La situation peut facilement occuper deux périodes d'enseignement. Dans la première, d'abord par un jeu d'essais-erreurs avec les curseurs, les élèves tentent d'obtenir des polygones « bien refermés ». Il s'agit bien sûr que ΔABC, le « premier » triangle de l'éventail, et son image par rotation d'angle $(n-1)\alpha$, le « dernier » triangle, soient bien jointifs, mais sans chevauchement. On s'attend à ce que les élèves lient la possibilité de fermer adéquatement la figure, numériquement à la divisibilité de 360 par α, et géométriquement à la décomposition standard du n-gone régulier en n triangles isocèles. Dans la phase d'institutionnalisation prévue pour conclure la première période, l'enseignant construit avec la classe la liste des diviseurs de 360, soit selon une liste descendante en considérant les valeurs possibles pour α commençant avec $\alpha = 120$, soit selon une liste ascendante selon les valeurs de n, à partir de $n = 3$. Pour chaque couple (α, n) possible dans lN×lN, le polygone régulier correspondant est produit et exhibé à l'écran pour la classe. Une discussion spécifique peut être menée pour traiter des couples impliquant les valeurs 1, 2, 180, 360.

La seconde période cible, à travers la production de l'heptagone et l'utilisation de la fonction *zoom* de GeoGebra, un travail sur le développement décimal de 360/7 et les dualités exactitude-approximation, tant d'un point de vue numérique que graphique. Les deux périodes de l'expérimentation dont nous rendons compte ici se sont de fait organisées selon ce découpage.

ELEMENTS D'ENCADREMENT PREALABLES

Géométrie et mesure

Dans Kuzniak (2014), l'auteur soulève la question de l'articulation entre les changements de registre de représentation et les changements de domaine, quand ces changements sont nécessaires pour résoudre un problème ou accomplir une tâche donnée. En géométrie, cette question refait surface pratiquement à chaque fois qu'un travail sur des mesures est demandé.

Janvier (1997) insiste pour qu'en mathématiques, l'enseignement aborde les diverses mesures — longueur, aire, volume, mesure d'angle… — par un travail initial sur les *grandeurs* correspondantes, c'est-à-dire sur la *caractéristique-à-quantifier*, qu'il distingue de la *caractéristique-quantifiée*. On peut en effet identifier, décrire « qualitativement » et traiter via des tâches de comparaison des caractéristiques telles la longueur (d'un segment), la surface (d'une figure plane), l'espace occupé (par un solide) avant même l'introduction de quelque unité de mesure (de longueur, d'aire, de volume) que ce soit. On peut penser que l'ETM en cause reste alors strictement géométrique puisque le « numérique » est tenu à l'écart et que le développement de l'intuition est visé à travers une genèse qui est essentiellement figurale.

La notion théorique de *congruence* permet en principe elle aussi un travail sur des grandeurs où les nombres n'interviennent pas, et une telle mise à l'écart du numérique est recherchée par Hilbert (1949) quand, dans ses *Grundlagen*, il consacre un groupe d'axiomes à une définition de la congruence des segments et des angles qui soit indépendante de toute référence à des mesures (op. cit., groupe IV, axiomes IV-1 à IV-6). Si une telle approche est envisageable dans un ETG de référence qui vise la GII ou la GIII, elle l'est difficilement au primaire et au secondaire puisque dans les ETG idoines ou les ETG personnels des élèves, la mesure est omniprésente. Il y a bien, comme le préconise Janvier, des activités de comparaison, d'estimation, de mesurage à partir d'unités non conventionnelles, mais elles constituent des *introductions*, menées principalement au primaire, et généralement assez vite délaissées au profit des mesurages standard, avec unités standard.

C'est donc dire que de nombreuses tâches et activités conduites en GI ou dans des cadres intermédiaires entre la GI et la GII feront appel à des mesures exprimées numériquement. Celles-ci solliciteront alors des traitements qui relèvent du « numérique », c'est-à-dire des passages au domaine de l'arithmétique et parfois même à celui de l'algèbre ; avec, selon les tâches en cause, des degrés très variables de difficulté pour les traitements et de sophistication pour les représentations et propriétés numériques à faire intervenir : par exemple rationnels sous formes fractionnaires ou décimales (périodiques ou arrondies) pour des problèmes mettant en jeu le Théorème de Thalès, irrationnels sous forme exacte (avec le symbole de la racine) ou sous forme décimale approchée pour des problèmes mettant en jeu le Théorème de Pythagore [1], etc.

Dans la seconde phase de l'activité dont il est ici question, les élèves doivent de fait coordonner deux genèses sémiotiques dans deux espaces de travail parallèles, un $\text{ETM}_{\text{Géométrie}}$ et un $\text{ETM}_{\text{Arithmétique}}$. Ils sont en effet amenés à réfléchir, à travers l'investigation de la mesure des angles au centre de l'heptagone régulier, aux développements décimaux approchés et exacts de 360/7, et à faire le lien avec l'idéalité de la figure à construire pour représenter « exactement » l'heptagone. L'analyse du travail des deux équipes dans cette deuxième phase a déjà fait l'objet d'un article : voir Tanguay et al. (2013). Dans le présent article, c'est au travail d'une des équipes durant la *première phase* que nous allons principalement nous attacher.

Mesurage, genèses et théorisation

Dans Tanguay et al. (2014, §3), nous avons fait valoir que l'activité de l'élève qui mesure des segments participe à la fois des genèses *figurale* et *instrumentale*, tout en faisant intervenir des éléments discursifs qui relèvent du référentiel théorique. La genèse instrumentale y est bien sûr relative à la manipulation des instruments de mesure. L'incidence sur la genèse figurale tient à ce qu'en posant la règle graduée sur le segment à mesurer, l'élève repère et isole ce segment comme frontière (un des « côtés ») de la zone 2D (le plus souvent un polygone) dont il amorce alors la *déconstruction dimensionnelle* (Duval, 2005), pour repérer aussi ses « coins » comme extrémités des côtés, points qu'il met en correspondance avec les graduations de la règle. Cette déconstruction dimensionnelle relève certes d'une forme de visualisation, mais renvoie également à une certaine idéalité des objets en cause — des points sans longueur, des segments sans épaisseur —, idéalité qui à terme suggère à (l'entendement de) l'élève qu'il y a du « théorique » sous-jacent. Dans l'ETG de référence, la théorisation visée est de fait celle de la modélisation ensembliste du plan, avec les points comme éléments (atomiques) et les côtés comme sous-ensembles des points constituant la figure. Une telle théorisation-modélisation ne peut guère se faire sans solliciter une forme ou une autre de genèse sémiotico-discursive, puisque la visualisation qui porte sur les figures mesurées s'accompagne d'une sémiose où interviennent des éléments théoriques de la GII, qui « vivent » dans le référentiel théorique du plan épistémologique (cf. par ex. Figure 1 dans Gómez-Chacón et Kuzniak, 2011).

L'angle, sa mesure et leurs définitions

On peut sans doute en dire autant d'une activité de mesurage qui se rapporte à des angles, avec cependant deux différences majeures. D'une part, alors qu'il n'y a aucun segment particulier (ou aucune classe d'isométrie particulière pour les segments) qui puisse faire office d'*unité de mesure* autrement que de façon arbitraire, conventionnelle, l'angle plat ou l'angle droit peuvent être définis intrinsèquement, de façon purement géométrique, et constituent ainsi des unités privilégiées pour mesurer les angles. D'autre part, l'objet « angle », à mesurer, est beaucoup plus difficile à appréhender, entre autres parce qu'il s'agit d'une partie (d'un sous-ensemble) non bornée du plan dont les représentations graphiques sont, elles, forcément circonscrites à la feuille de papier (ou à l'écran de l'ordinateur) ; et cela malgré que sa mesure soit la seule, parmi celles des objets de la géométrie scolaire, à être bornée [2]. On le voit, la mesure d'angle en tant que grandeur (comme chez Janvier, 1997) est nettement la plus contre-intuitive parmi celles que l'apprenti-géomètre est appelé à considérer.

De fait, de tous les objets de la géométrie du primaire et du début du secondaire, l'angle est sans doute le plus difficile à conceptualiser. Les fausses conceptions sur l'angle ont depuis un moment déjà été portées à l'attention des didacticiens (par ex. Berthelot et Salin, 1996) : l'angle – pointe de tarte, l'angle – paire de segments, etc. Quand on demande à des élèves de comparer les deux angles de chacune des paires ci-dessous, nombreux sont ceux qui diront que l'angle de gauche est plus grand que l'angle de droite (Berthelot et Salin, 1996).

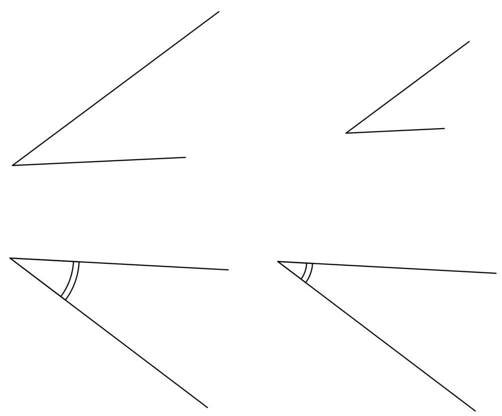


Figure 3 : deux paires d'angles isométriques

Or, la conceptualisation de l'angle est promue par l'enseignement en grande partie à travers des activités de mesurage, sans que le statut de l'objet lui-même, notamment en tant que sous-ensemble (de points) du plan, soit clairement établi : quel objet est mesuré au juste quand on mesure un angle et de quoi cette mesure rend-elle compte exactement, par rapport à cet objet ? Au Québec, les définitions données par les manuels entretiennent ce flou (Tanguay, 2012). Par exemple, dans le glossaire de *Perspectives mathématiques* :

> Lorsque deux lignes droites sont issues d'un même point, l'écartement entre ces deux lignes détermine un angle. Plus les lignes sont écartées, plus l'angle est grand. Le point de rencontre de ces deux lignes est appelé le « sommet de l'angle » et chacune des parties de ligne déterminant l'écartement est appelée le « côté de l'angle ». Le degré est l'unité de base pour mesurer les angles.

La collection *À vos maths !* et le « Calepin des savoirs » de *Panoram@th* donnent à peu de chose près la même définition pour l'angle, à savoir « une figure géométrique formée par deux demi-droites de même origine » [3], sans qu'on sache exactement à quel sous-ensemble du plan correspond cette « figure » (ou cet « écartement » dans *Perspectives*). Ce flou se révèle clairement ensuite par l'incohérence du traitement réservé à ces pseudos-définitions : dans chacune des trois collections, l'on considère par la suite ***deux angles*** formés par ***la même figure*** (par la même paire de demi-droites ou le même 'écartement'), en l'occurrence l'angle saillant et l'angle rentrant (de plus de 180°).

Objectifs de l'étude de cas

La première phase de l'activité qui nous occupe cherche à faire passer l'élève d'un $\text{ETM}_{\text{Géométrie}}$ à un $\text{ETM}_{\text{Arithmétique}}$, à partir d'une mise en correspondance entre la possibilité géométrique de juxtaposer n copies de l'angle ACB pour couvrir 360 degrés d'angle et « bien refermer » la figure, et la relation de divisibilité induite entre la mesure de $\angle ACB$ et 360. Il s'agit de voir si cette mise en correspondance peut amener un travail de recension des diviseurs de 360, avec notamment la prise de conscience de l'appariement des diviseurs et de la symétrie dans la liste. Nous nous intéressons aux représentations et conceptualisations de l'angle et de la grandeur associée à sa mesure induites par la première phase de l'activité, à la façon dont elles influent sur la coordination entre les registres graphique et numérique, entre la visualisation et les calculs, et par suite à la façon dont s'articule le travail dans l'$\text{ETM}_{\text{Géométrie}}$ et dans l'$\text{ETM}_{\text{Arithmétique}}$ pour cette première phase.

DESCRIPTION ET ANALYSE DU DEROULEMENT

LES DEUX ELEVES EXPLORENT

Le chercheur explique très succinctement le fonctionnement des deux curseurs en les déplaçant : d'abord le curseur n qui produit « des copies du triangle *ABC* obtenues par des rotations de cet angle » (il pointe $\angle ACB$ avec la flèche de la souris), ensuite le curseur α. Il explique que la valeur de α peut aussi être saisie directement en la tapant dans la boîte. Il tape 25 pour illustrer en disant « 25 degrés », et c'est la valeur qui restera au moment où les deux élèves, E1 et E2, entament la première phase de leur travail. Elle est de nature exploratoire, l'appropriation quasi-immédiate du fonctionnement des deux curseurs se faisant conjointement avec une visualisation des figures produites.

E1 augmente la valeur de n avec le curseur, jusqu'à 16-17. Les chevauchements sont bien visibles. Il recule à 9, avance jusqu'à $n = 14$, la position la plus proche de la fermeture sans chevauchement. Après un très bref arrêt, il avance et recule encore et déclare à E2 : « Regarde, 25 c'est trop petit. » Le tout en à peine 15 à 20 secondes. Il hésite un peu, déplace maintenant le curseur α mais constate qu'il est difficile à contrôler avec précision. « Attends, on va essayer…, … 30. » Et il tape 30 dans la zone de saisie de α. Il y a chevauchement, E1 déplace le curseur n, recule à 11, avance à 12, en 2 à 3 secondes. Ça y est, pour les deux il n'y a pas l'ombre d'une hésitation, le polygone est fermé et « valable ». E2 se met aussitôt à compter du doigt les triangles à l'écran et inscrit 30 et 12 dans la première ligne du tableau. On leur a en effet donné un tableau à remplir, dont les 3 colonnes ont pour en-tête :

Mesure α de l'angle *ACB*	Nombre de triangles	Nom du polygone obtenu

E2 : Le nom du polygone ?
E1 : [hésite un peu] on le fera pas [c'est-à-dire qu'on s'en occupe pas]. On va essayer d'en faire plus [d'autres polygones] avec, …attends, 50. [Il tape 50 dans le champ de saisie pour α ; n est resté à 12, les chevauchements apparaissent aussitôt.]
E2 : [surpris] oh là là…
E1 : [recule le curseur n à 3-4, avance à 7, … puis à 8, à 9, recule encore, le tout en 3-4 secondes.]
E2 : [catégorique] Non, ça ne marche pas.

Si l'on analyse cette première phase à l'aide des ETM, on peut de prime abord avancer que le travail se situe dans le plan Sem-Ins (Kuzniak, 2014, §1.3), encore que l'aspect « construction » soit pris en charge pratiquement dans sa totalité par le logiciel, l'action des élèves relevant plus ici de l'expérimentation (sur des objets qu'on pourrait presque dire « déjà construits »), à partir du constat d'une figure adéquatement refermée ou non.

Ce constat, les deux élèves l'appuient sur les représentations internes qu'ils ont des polygones réguliers, celles-ci étant bien sûr modelées par le travail scolaire fait antérieurement : on retrouve ici la dialectique entre le vu et le su, que Parzysz (1988) a bien mise en évidence en géométrie spatiale. Incidemment, on peut présumer que ces élèves connaissaient déjà le découpage usuel des n-gones en n triangles isocèles isométriques, ce découpage étant abordé dès le primaire. Ce qui nous semble plus révélateur, mais aussi plus difficile à analyser, c'est la rapidité des jugements, par ailleurs parfaitement en phase chez E1 et E2, par lesquels ceux-ci retiennent le couple $\alpha = 30$, $n = 12$, mais disqualifient les valeurs $\alpha = 25$ et $\alpha = 50$. Quelle sorte de coordination entre le géométrique et le numérique ces jugements impliquent-ils ?

Même si en théorie, on peut penser qu'une exploration en fixant n et ajustant α ensuite est possible, on constate que d'entrée de jeu les deux élèves font l'inverse. Ça n'est au fond pas très étonnant. La possibilité de fermer la figure avec le curseur n donne lieu à un test que les élèves appréhendent spontanément comme étant binaire. Si k est la partie entière de $360/\alpha$, avec des valeurs de α comme 25, 30 ou 50, les élèves perçoivent immédiatement, en passant de k à $k+1$, s'il y a chevauchement ou si les premier et k-ième triangles sont bien jointifs : « 25 est trop petit », avec 50 « non, ça ne marche pas », avec 30 la question de la validité du dodécagone produit n'est même pas effleurée. Un test analogue en variant α pour un n fixé ne fournirait pas une rétroaction aussi immédiate. D'abord le curseur α, incrémenté aux centièmes, est plus difficile à manipuler. D'ailleurs, dès le premier essai, E1 le laisse et va directement taper la valeur 30 dans la boîte α. Mais on peut aussi penser que l'aménagement instrumental de l'activité dans l'ETG induit chez les élèves une prise de conscience spontanée que la variation de α est continue — quelque puisse être la signification de cette notion pour eux —, alors que n varie clairement dans les entiers. Ici, donc, le « vu » vient conforter ce que le « su » a pu initialement suggérer : que chaque augmentation unitaire de n fait apparaître une nouvelle copie de ΔABC ; que l'accroissement, à l'aide du curseur, de α, une mesure d'angle, avec ce que cela implique comme domaine numérique de variation, donne l'illusion visuelle d'un écartement entre CA et CB qui croît continûment.

Mais on peut alors se poser la question du rôle joué par le contrôle numérique dans les essais et de la nature de ce contrôle : y a-t-il eu véritablement incursion dans l'$\text{ETM}_{\text{Arithmétique}}$, ou est-ce que ce sont les conversions entre registres de représentation qui « provoquent implicitement un changement de domaine » (Kuzniak, 2014) ? La suite du déroulement de la séance montre que les deux élèves n'ont pas encore clairement pris conscience de la relation $n \times \alpha = 360$ (ou encore $n = 360/\alpha$). Si plusieurs remarques de E1 laissent croire qu'il en développe relativement tôt une (vague) intuition, la relation mettra cependant du temps avant d'être explicitement énoncée. C'est E2 qui l'énoncera, non sans un questionnement dirigé (et insistant) des deux chercheurs alors présents, après que 15 polygones et couples (α ; n) aient été produits et notés par les deux élèves.

POLYGONE OU CERCLE ?

On peut donc penser que la nature du travail se situe essentiellement du côté de la géométrie et de fait, pour les 14 autres polygones produits par E1 et E2 après le dodécagone, la validation se fera sur une base visuelle. Tout se passe donc comme si l'activité des deux élèves tournait dans le plan Sem-Ins (Kuzniak, 2014, §1.3), y restant en quelque sorte « enfermée », sans qu'une validation relevant d'un discours de preuve ne soit ressentie comme une nécessité, le passage au plan Sem-Dis (ibid.) étant tributaire du passage à l'ETM$_{\text{Arithmétique}}$, qui ne se fait pas franchement.

Pour discuter du rôle du « numérique » du point de vue des registres de représentation, il faudrait en principe identifier un objet mathématique donnant lieu à des representamen selon des registres distincts dans l'espace réel et local, notamment ici à l'écran de l'ordinateur. Des objets représentés, c'est principalement sur l'angle *ACB* que porte le contrôle des élèves puisqu'en ce qui a trait au polygone produit ensuite, ce contrôle est à peu près immédiat. On objectera que ce à quoi le registre numérique donne accès, ce sont d'autres objets, les *mesures* des angles, qui sont des *prédicats* associés aux objets *angles* mais dont les representamen n'induisent pas nécessairement des représentations de l'objet lui-même. Or, cette objection présume que la conceptualisation de l'angle chez l'élève lui permet de faire une telle distinction, entre l'angle et sa mesure. L'épisode suivant montre que la question est sans doute plus complexe.

[Les deux élèves viennent de conclure qu'avec $\alpha = 50$, « ça ne marche pas. »]

E1 :	OK là, on [mots marmonnés, peut-être « en veut » « en met »] le plus possible, fait qu'on va mettre 1 [il tape 1 dans la boîte α et déplace le curseur *n*]
E2 :	[est surpris devant l'image obtenue] pourquoi qu'on fait ça ?
E1 :	regarde, *nombre* [il pointe du nez vers le curseur *n* qu'il déplace]
E2 :	[comprend ce qui se passe] « Aahhh »
E1 :	[le curseur *n* est maintenant environ à 300, E1 ralentit, il arrive lentement à 360]
E2 :	[marmonne] encore un peu … [plus clairement] e-xac-tement [Il a rapproché sa tête de l'écran], OK recule, avance, encore un peu… [les deux s'assurent d'avoir la bonne valeur, suspectant que d'éventuels chevauchements n'apparaîtront pas clairement avec des triangles si étroits ; ils ne savent pas que 360 est la limite du curseur *n*.]
E1 :	trois cent soixante.
E2 :	ouai, c'est ça…
Chercheur 1	[arrive, voit la « rosace » à l'écran] OK, pouvez-vous m'expliquer ce que vous avez fait ?
E2 :	on a pris 1 degré, et ça fait 360 triangles [il pointe la figure avec son crayon]
CH 1 :	Ohh, extrêmement intéressant.
E1 :	[sous le coup d'une illumination] : Ah ouuiii, ça donne **un cercle** !
CH 1 :	[surpris] : Un cercle ou un po…
E1 :	un cercle c'est 360 degrés !
CH 1 :	… lygone régulier à 360 côtés ?
E1 :	**non**, on a un **cer**cle.

Le chercheur montre alors l'usage du zoom et même après grossissement, E2 réitère que « ouai, ct'un cercle ». Après une interruption due à un problème technique, E1 et E2, laissés à eux-mêmes, reprennent le travail et produisent, après les couples $\alpha = 30$, $n = 12$ et $\alpha = 1$, $n = 360$ notés sur la feuille, les polygones et couples (36 ; 10), (3 ; 120), (5 ; 72) et (10 ; 36), dans cet ordre. Ch 1 revient alors avec une deuxième chercheuse et il relance la discussion sur le cercle. Le polygone (1 ; 360) est rapidement refait. E2 soupçonne que quelque chose ne va pas et corrige, dubitatif : « c'est… un **rond**, pas un cercle, c'est un rond… » Un zoom très prononcé montre maintenant tout juste quatre sommets du polygone.

CH 1 : alors, de proche, regardez, aux points *A* et *B* [les montre à l'écran, passe de *A* à *B* en suivant le segment *AB* du doigt], est-ce que c'est des… est-ce que c'est des bouts de cercle ?

E1 : moi je pense que oui…

E2 : [maintenant éclairé et convaincu] : non, non, c'est pas un cercle, pas un cercle du tout Jonathan, regarde c'est plein de petits carrés !

La confusion manifestée ici est révélatrice. Nous l'avons observée ailleurs, par exemple chez des étudiants (adultes) d'un programme de formation des maîtres à qui nous avions demandé de faire une analyse *a priori* de l'activité et d'y planifier les diverses phases d'institutionnalisation. Une des équipes de deux écrira dans son rapport :

> Durant cette phase, les élèves vont découvrir que plus ils augmentent le nombre de triangles, plus la forme du polygone se rapproche d'un cercle. Effectivement, lorsqu'ils décident de construire 360 triangles possédant chacun un angle alpha de 1 degré, ils obtiennent un cercle.

L'OBJET *ANGLE* ET SES REPRESENTATIONS

Selon notre analyse, au regard des considérations sur l'angle dont nous avons discuté précédemment, cet épisode des deux élèves et du cercle, « un cercle c'est 360 degrés », montre bien la confusion entretenue par eux entre l'angle et sa mesure. Sont ainsi complètement amalgamés le degré d'angle et le secteur circulaire correspondant (la « pointe de tarte ») ou plus vaguement encore, 360 degrés et « un rond » ; amalgames que l'image du rapporteur et son usage systématique en classe de géométrie contribuent très probablement à cimenter. La visualisation que font E1 et E2 du 'cercle' (1 ; 360) est très certainement iconique (au sens par exemple de Duval, 2005 ou de Mithalal, 2010) mais toute iconique qu'elle soit, elle est imprégnée d'éléments techniques, technologiques et théoriques apportés par les contextes scolaires où ont été vus, nommés et travaillés les objets géométriques en cause : « dans nos sociétés modernes, le didactique est en quelque sorte 'partout dense' dans le cognitif » (Chevallard, 1992, p. 104).

Du point de vue de la modélisation dans les ETM, il apparaît donc que la métaphore des plans verticaux suggère un cloisonnement qui rend mal compte du caractère fortement imbriqué des pôles sémiotique, instrumental et théorique et des trois genèses correspondantes. Les objets et concepts *polygone*, *cercle*, 360, *angle*, *degré* ont certainement dans le passé scolaire des élèves donné lieu à des institutionnalisations discursives — ne serait-ce que les définitions proposées par les manuels — qui les intégraient au référentiel théorique, même celui, pas toujours clairement délimité, des ETM personnels des élèves. Ils ont également été au centre d’un travail instrumenté — avec le papier ou carton plié, les ciseaux, la règle, le rapporteur, le compas, divers logiciels, etc. — qui a contribué à fonder ces institutionnalisations dans le plan In-Dis. Or, ces éléments théoriques et techniques refont surface même à travers la visualisation, ce qui suggère une genèse sémiotique fortement imprégnée d’éléments instrumentaux et discursifs. Au plan cognitif, il y a donc interpénétration des trois pôles, avec des circulations continues d’une genèse à l’autre et des ruptures qui, quand on peut les repérer, suggèrent plutôt métaphoriquement des passages par des singularités dans des variétés à bord — des *erreurs* provoquées par de *fausses conceptions* — comme c’est d’ailleurs souvent le cas dans les modélisations mathématiques de phénomènes psychologiques.

GEOMETRIE ET ARITHMETIQUE

De façon analogue, les déplacements des $\text{ETM}_{\text{Géométrie}}$ aux $\text{ETM}_{\text{Arithmétique}}$ personnels des deux élèves au cours de l’activité apparaissent souterrains, progressifs et continus, avec parfois des sauts qui se manifestent soudainement. Le rôle du nombre 360 est certes vite reconnu, associé qu’il est à la nécessité que les images du triangle initial couvrent un tour complet. Comme mentionné précédemment, E1 donne tôt des signes qu’il a l’intuition de la relation de divisibilité de 360 par α. Il est difficile de statuer sur son essai avec $\alpha = 36$, $n = 10$ après la production (1 ; 360) parce qu’entre les deux, il y a eu des problèmes avec l’appareil et $\alpha = 36$ est la valeur qui est apparue par défaut au redémarrage. On entendra éventuellement E1 marmonner « 360 divisé par… » et plus loin, déclarer : « dans le fond on a juste à faire… c’parce que… il faut quasiment toujours que ça donne 360. » Mais les production et validation du polygone pour une valeur de α choisie resteront tributaires du jeu avec le curseur n, comme si la traduction géométrique de la relation arithmétique de divisibilité n’allait pas de soi, avec deux registres qui mettent du temps à se coordonner.

Le choix des valeurs de α, lui non plus, ne suggère pas ce qui pourrait être une recherche systématique des diviseurs de 360 conduite dans un $\text{ETM}_{\text{Arithmétique}}$. Aux six couples (30 ; 12), (1 ; 360), (36 ; 10), (3 ; 120), (5 ; 72), (10 ; 36), E1 et E2 ajouteront sur la 1re feuille les couples (15 ; 24) et (20 ; 18). Au moment où ils remettent cette feuille au chercheur, celui-ci demande « Est-ce que vous avez eu le carré ? Les polygones réguliers que vous avez vus au primaire… comme le carré… Est-ce qu’il y a moyen de les obtenir avec ça ? » [Il montre l’écran]. D’où les quatre premières lignes du tableau (reproduit ci-dessous) sur la 2e feuille remplie ensuite par E1 et E2. Il semble que la prise de conscience de la symétrie, manifeste dans les 3 dernières lignes du tableau, ait été déclenchée lorsque E2 a repéré, avec la production du triangle équilatéral, le retour « inversé » de la paire (3 ; 120). Cette prise de conscience n’a relevé que de la « combinatoire » impliquée, sans libérer E1 et E2 du besoin d’expérimenter une à une les valeurs 4, 6 et 8 pour α, ce qu’ils feront de fait. Ce n’est que plus tard, dans la phase d’institutionnalisation à la fin de la première période, que le lien explicite et expliqué avec la divisibilité sera mis en avant et discuté.

Mesure α de l'angle $\angle ACB$	Nombre de triangles	Nom du polygone obtenu
90	$n = 4$	carré
60	$n = 6$	hexagone
45	$n = 8$	Hoctogone [sic]
120	$n = 3$	Triangle équilatéral
4	$n = 90$	Polygone
6	$n = 60$	Polygone
8	$n = 45$	Polygone

DISCUSSION : REPRÉSENTATIONS ET COORDINATION

On a beaucoup invoqué les travaux de Duval (1995, 1993…) pour faire valoir l'importance de la coordination de différents registres de représentation sémiotique dans la conceptualisation :

> Pour ne pas confondre un objet de sa représentation, […] il est nécessaire de disposer de plusieurs représentations sémiotiquement hétérogènes de cet objet et [de] les coordonner. […] Toute représentation est cognitivement partielle par rapport à ce qu'elle représente et […] des représentations de registres différents ne présentent pas les mêmes aspects d'un même contenu conceptuel (1995, p. 69).

Plus loin dans le même texte, Duval s'attache plus particulièrement à l'enseignement des mathématiques et à ce qu'il appelle la *compréhension monoregistre* :

> Et même lorsque [dans l'enseignement] plusieurs registres ont été mobilisés, simultanément ou successivement, cela n'entraîne pas leur coordination. Leurs apprentissages restent toujours monoregistres. […] Une compréhension monoregistre est une compréhension qui ne permet aucun transfert. Seule une **compréhension intégrative**, c'est-à-dire une compréhension fondée sur une coordination de registres, donne ces possibilités de transfert (op. cit., pp. 75-76, caractères gras dans le texte).

On peut penser qu'effectivement, les transferts entre les domaines géométrique et arithmétique ne sont pas pleinement mis en œuvre par E1 et E2. Le fait que ne soit pas reconnu l'avantage d'un passage net et tranché à l'arithmétique pour un traitement (numérique) efficace dans ce domaine et un retour au « géométrique » ensuite, est le signe d'une coordination entre registres numérique et figural qui est en train de se faire, sans être achevée. La coordination entre registres est ici relative au concept d'*angle*. Or, l'enseignement de celui-ci, dès le primaire, nous en avons discuté, mobilise les registres figural et numérique concurremment. On peut donc soutenir que les problèmes d'apprentissage ne résultent vraisemblablement pas d'une compréhension monoregistre. Il en a déjà été question, même si sa mesure n'est pas à proprement parler une représentation de l'angle mais n'en ai qu'un attribut, une propriété, il n'est pas clair que l'élève du primaire et du début du secondaire la conçoive ainsi.

C'est justement ce que les analyses précédentes mettent en évidence selon nous : pour qu'une coordination puisse s'amorcer, il faut au préalable que soit démêlé, dans l'entendement de l'élève, ce qui constitue initialement un agglomérat aux contours indistincts, imprécis, où se sont agglutinés images, figures, routines scolaires (de tracé, de mesurage…), nombres et labels langagiers. À l'instar de ce que Vygotski (1934/1997) a argumenté à propos de l'évolution du langage chez l'enfant, l'enseignement doit chercher à faire passer la conceptualisation de l'angle d'un tout syncrétique, où les unités de significations sont condensées, englobantes et indifférenciées, à un concept articulant diverses unités de signification, plus précises et spécialisées, dont certaines seront comprises en tant qu'attributs ou propriétés et par là-même, distinguées de l'objet et de ses représentations.

> À la question : peut-on remplacer le nom d'un objet par un autre, par exemple appeler la vache « encre » et l'encre « vache », les enfants répondent que c'est tout à fait impossible parce qu'avec l'encre on écrit et que la vache donne du lait. Le transfert du nom signifierait aussi en quelque sorte le transfert des propriétés d'une chose à l'autre tellement est étroite et indissoluble la liaison entre le nom et les propriétés de la chose (op. cit., p. 436).

Il nous apparaît donc que dans la genèse psychologique d'un concept comme celui d'*angle*, la coordination entre registres est tributaire d'une '*désagglutination*' préalable par laquelle l'élève détache progressivement de l'objet les propriétés qui y adhèrent, et sans laquelle il pourrait ne rien y avoir à coordonner. Ce processus psycho-cognitif ne trouve pas là sa seule manifestation, il s'agit bien à notre avis de la même condition que celle identifiée par van Hiele (dans le passage du niveau 2 au niveau 3, cf. Tanguay et Geeraerts, 2012, §2.1 [4]) pour que l'élève ne conçoive plus telle ou telle figure géométrique à travers la *litanie* de ses propriétés. Il s'agit bien en fait de distinguer l'objet de ses propriétés, de désengluer ces propriétés pour être à même de les envisager séparément, d'en appréhender un à un les liens structuraux, de cause à effet, une condition essentielle pour être ensuite capable de conduire des démonstrations sur et à partir de ces propriétés (Tanguay, 2007, §1.2). Les conditions didactiques, les caractéristiques des situations d'enseignement favorisant cette désagglutination demandent à être étudiées.

CONCLUSION

La phase d'institutionnalisation à la fin de la première période a permis de revenir, avec les chercheurs et l'autre équipe de deux élèves, sur la relation $\alpha \times n = 360$, sur la liste des diviseurs de 360 et sa symétrie comme conséquence des appariements de ces diviseurs, ainsi que sur les « interprétations » géométriques particulières à considérer quand les diviseurs 1, 2, 180 et 360 sont en jeu. En particulier, l'autre équipe a suscité le débat quand elle a avancé qu'avec les valeurs $\alpha = 180$ et $n = 2$, on obtenait bien un polygone dont les deux côtés étaient chacun réduits à un point. On peut penser que cet élargissement audacieux de la classe des figures reconnues comme « polygones », proposé par les deux élèves, a été rendu possible par l'aménagement particulier de la tâche, dans lequel l'outil technologique a permis notamment de ramener l'exploration à une suite de cas à traiter systématiquement, et menant d'une façon relativement naturelle à l'examen des cas

« dégénérés ».

Ici, comme pour l'épisode du « cercle » obtenu avec les valeurs $\alpha = 1$ et $n = 360$, l'intervention des chercheurs a été cruciale, « … tant au niveau cognitif que méta-cognitif, pour à la fois favoriser l'évolution des significations et amener les élèves à prendre conscience de leurs statuts mathématiques » (Bartolini Bussi et Mariotti, 2002, p. 754 ; notre traduction). Dans le cas du polygone dégénéré à deux côtés, cette intervention s'est principalement située à un niveau méta. Elle a consisté à mettre en évidence que la validité des affirmations en cause dépendait en dernière analyse des définitions choisies. Elle a mis en avant d'une part le caractère conventionnel de ces définitions, d'autre part la nécessité, ces conventions adoptées, de s'assurer de leurs compatibilité et cohérence à l'intérieur de la théorie.

Dans le cas du polygone/cercle à 360 côtés, l'intervention a pu être efficace grâce aux fonctionnalités des outils technologiques à disposition, principalement ici la fonction zoom de GeoGebra. Mais on peut penser que le geste du chercheur suivant du doigt à l'écran le segment joignant deux sommets consécutifs (voir infra, *Polygone ou cercle ?*) a eu un rôle important comme élément déclencheur dans le reconnaissance que la figure était celle d'un véritable polygone et non d'un cercle.

Dans les deux cas, ce qui ressort une fois de plus, c'est la forte imbrication des pôles sémiotique, instrumental et discursif dans la genèse conceptuelle (de l'angle, de sa mesure, du polygone, du cercle…). Cela suggère que la notion de *faisceau sémiotique* (semiotic bundle), due à Arzarello (2006), pourrait être un cadre de modélisation et d'analyse approprié pour rendre compte des ressources sémiotiques qui entrent en jeu dans les conceptualisations en cause. Nous ne décrirons pas en détail cette notion, conglomérat unifié de *systèmes sémiotiques* (organisés) et *d'ensembles sémiotiques* (non structurés) qui se construit, selon Arzarello, en un processus essentiellement multimodal.

Nous voulons plutôt revenir ici sur l'analyse de ce processus que l'auteur conduit à partir de la caractérisation faite par Vygotski (1997) du langage intérieur, autour de la distinction entre *sens* et *signification*.

> In inner language the sense is always overwhelming the meaning. This prevailing aspect of the sense has two structural effects on inner language: the agglutination and the influence. The former consists in gluing different meanings (concepts) into one expression ; the latter happens when the different senses 'flow' together into one unity (Arzarello, 2006).

À la lumière de la présente étude, il y aurait lieu selon nous de préciser cette analyse d'Arzarello. Il faudrait selon nous rendre compte, dans le processus de conceptualisation (ou d'*internalisation*, pour paraphraser Vygotski), de **deux mouvements** [5], qui vont en quelque sorte en sens inverse, avec le *signe* initialement vu comme point d'ancrage. Le premier mouvement est de l'ordre de l'*analytique*, il part du signe comme d'un tout indifférencié (dans l'entendement de l'apprenant), relevant d'une pensée qui est fondamentalement syncrétique au départ, et il va — à travers le processus de désagglutination que nous avons cherché à mettre en évidence dans le présent texte — vers un enrichissement du signe de ses diverses significations possibles, vers une pensée articulant diverses unités de significations qui se précisent, se distinguent et se spécialisent progressivement ; toutes conditions essentielles pour que le signe puisse intervenir efficacement dans des processus de pensée sophistiqués, des processus qui relèvent de formes syntaxiques de pensée, comme par exemple le raisonnement déductif.

Le second mouvement est essentiellement *synthétique*, et c'est celui que décrit Arzarello. Il consiste à amalgamer différentes significations autour d'un même *sens*, à élargir le spectre des liaisons possibles, à tisser des réseaux d'analogies, à unifier les concepts spécialisés en unités plus englobantes et par là plus polyvalentes, polymorphes, adaptables, et donc plus immédiatement mobilisables par l'intuition ; toutes conditions essentielles pour que les concepts puissent intervenir efficacement, entre autres, dans les processus de recherche ou d'exploration, processus plus ouverts, divergents, qui demandent une pensée souple et inventive. La coordination entre registres de représentation de Duval relèverait de ce mouvement.

Dans quel ordre ces deux mouvements/processus interviennent-ils ? Quelles sont leurs importances relatives, comment s'articulent-ils ? Il nous apparaît que les deux sont continuellement et concurremment en développement dans l'apprentissage des mathématiques, mais que le premier des deux est nécessaire pour mettre en branle une genèse sémiotique minimalement riche. Bien sûr, ces questions restent à clarifier, à explorer, à développer…

NOTES

1. Typiquement, le problème des droites « presque parallèles » dans Houdement et Kuzniak (2006).
2. Du moins tant que la définition de l'angle n'a pas été étendue pour inclure les angles de « plus d'un tour », ce qui ne se fait généralement pas avant l'étude de la trigonométrie dans le cercle et des fonctions trigonométriques, plus tardive dans le cursus.
3. Dans les *Grundlagen* de Hilbert, l'angle est effectivement défini comme la réunion de deux demi-droites de même extrémité, mais ces demi-droites ne sont pas portées par une même droite : pas d'angle nul, d'angle rentrant, pas même d'angle plat chez Hilbert ! Le développement géométrique qui en résulte est bien entendu parfaitement rigoureux, mais n'est probablement pas bien adapté au travail visé par le secondaire.
4. Ces niveaux correspondraient en fait aux niveaux 1 et 2 dans la thèse originale de van Hiele (voir par ex. van Hiele 1959, p. 201). La littérature sur le sujet a maintenant tendance à décaler les niveaux pour considérer que le niveau 0 est celui de l'enfant en bas âge qui ne connaît encore rien des figures géométriques.
5. Dans la citation précédente, Arzarello parle de deux effets structuraux (sur le langage intérieur) mais selon notre angle d'analyse, ce sont deux aspects du même mouvement synthétique, que nous décrivons par la suite.

REFERENCES

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (RELIME), vol. 9, nº extraordinario 1, pp. 267-299.

Bartolini Bussi, M. G. & Mariotti, M. A. (2002). Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education,* 2nd edition, 746-783. Routledge : New-York (USA) et Abingdon (UK).

Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1996). L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d'un obstacle didactique. *Revue des Sciences de l'Éducation*, vol. XXII, n°2, pp. 417-442.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol. 12, n°1, pp. 73-112.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°10, pp. 5-53.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang, Berne, Suisse.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°5, pp. 37-65.

Gómez-Chacón, I. et Kuzniak, A. (2011). Les Espaces de Travail Géométrique de futurs professeurs en contexte de connaissances technologiques et professionnelles. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°16, pp. 187-216.

Hilbert, D. (1947). *The Foundations of Geometry*. Trad. E. J. Towsend. The Open Court Publishing Company. Lasalle, Illinois, É.-U.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°11, pp. 175-195.

Janvier, C. (1997). Grandeur et mesure : la place des formules à partir de l'exemple du volume. Bulletin AMQ, Vol. XXXVII, n°3, pp. 28-41.

Kuzniak, A. (2014). Travail mathématique et domaines mathématiques. À paraître dans *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (RELIME), vol. 17, nº extraordinario 1.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Espaces de travail mathématique. Points de vue et perspectives. À paraître dans *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* (RELIME), vol. 17, nº extraordinario 1.

Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. Thèse, Université de Grenoble.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "Seeing". Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures. *Educational Studies in Mathematics*, n°19, pp. 79-92.

Tanguay, D., Geeraerts, L., Saboya, M., Venant, F., Guerrero, L. et Morales, C. (2014). An activity entailing exactness and approximation of angle measurement in a DGS. À paraître dans les *Proceedings of the Eight Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME 8), Antalya, Turquie.

Tanguay, D., Venant, F., Saboya, M. et Geeraerts, L. (2013). An activity involving geometry, arithmetic and numerical representations. In A. Ramírez & Y. Morales (éds.), Actes de *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (I CEMACYC), pp. 376-385, Santo Domingo, République Dominicaine.

Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. Petit x, n°88, pp. 5-24.

Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2013). Conjectures, postulats et vérifications expérimentales dans le paradigme du géomètre-physicien : comment intégrer le travail avec les LGD ? À paraître dans Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa (RELIME), vol. 17, n° extraordinario 1.

Tanguay, D. (2012). La notion d'angle au début du secondaire. *Envol*. Première partie dans le n°158, pp. 33-37. Deuxième partie dans le n°159, pp. 31-35.

Tanguay, D. (2007). Learning Proof: from Truth towards Validity. Proceedings of the Xth *Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (RUME, Février 2007), San Diego State University, San Diego, Californie. Sur le Web, 15 pages. http://www.rume.org/crume2007/eproc.html

Van Hiele, P.-H. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'APMEP*, n°198, pp. 199-205.

Vygotski, L. (1997). *Pensée et langage*. Trad. par F. Sève de l'édition de 1934. Éd. La Dispute, Paris

EL TRABAJO MATEMÁTICO DE PROFESORES EN EL TRÁNSITO DE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA A LA ANALÍTICA EN EL LICEO

Carolina Henríquez-Rivas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso – Chile

Elizabeth Montoya-Delgadillo, , Pontificia Universidad Católica de Valparaíso – Chile

En este trabajo mostramos parte de los resultados de una investigación doctoral sobre el trabajo geométrico de profesores de liceo en Chile cuando las temáticas involucran los enfoques de geometría euclidiana sintéticos y analíticos. La investigación se sustenta en la teoría Espacio de Trabajo Matemático. Se presentan análisis relativos al diseño y experimentación de situaciones de referencia en el espacio de trabajo geométrico personal y considerando el caso de un profesor de matemática. El tema se presenta como una nueva dimensión de estudio para el ETM.

Palabras clave: *espacio de trabajo geométrico, enfoque sintético, enfoque analítico, profesor.*

INTRODUCCIÓN

El propósito del presente trabajo es mostrar parte de los resultados de una investigación doctoral sobre el trabajo geométrico de profesores de liceo en Chile, cuando las temáticas están insertas en el dominio de la geometría (euclidiana), abarcando los enfoques con y sin coordenadas cartesianas –usamos la denominación geometría analítica y geometría sintética–. Especialmente, se presentan resultados relativos al diseño y experimentación de situaciones de referencia, particularmente, el *espacio de trabajo geométrico personal* de un profesor de secundaria. Este trabajo se sustenta en la teoría *Espacio de Trabajo Matemático, ETM* (Kuzniak, 2011), y que en sus orígenes fue conocida como teoría de *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico*, *ETM$_G$*, (Houdement & Kuzniak, 1996, 2006).

Para distinguir entre geometría analítica y geometría sintética, se ha considerado la distinción que ofrece Klein (1908), quien sostiene "Geometría sintética, aquella en la cual se estudian las figuras en sí mismas sin intervención alguna de fórmulas, mientras que en la analítica, estas se aplican constantemente mediante el uso de los sistemas de coordenadas" (p. 73). A lo anterior, Klein prosigue:

"En realidad, la diferencia entre ambas especies de Geometría es puramente cuantitativa: según predominen las fórmulas o las figuras, se tiene una u otra Geometría, ya que una Geometría analítica no puede, sin perder su nombre, prescindir en absoluto de la representación geométrica, ni, por el contrario, la Geometría sintética puede ir más lejos sin expresar de un modo preciso, con fórmulas adecuadas sus resultados." (p. 74)

Específicamente, es en el célebre "*Programa de Erlangen*" (1872) donde Klein preconiza el cese a las disputas entre las geometrías sintética y analítica, pues bajo este punto de vista, una "geometría" vendría a ser el conjunto de propiedades invariantes mediante las transformaciones del grupo correspondiente (Bourbaki, 1969).

Un estudio sobre la enseñanza de la geometría actual desarrollado por Gascón (2002), entre otros aspectos, da cuenta de la falta de tránsito y complementariedad entre la geometría sintética y la analítica. Para Gascón, estas viven en «*mundos separados*».

El presente trabajo, se suscribe al punto de vista de Gascón, sustentando los análisis en evidencia empírica [1] y una propuesta sobre la necesidad que se influencien mutuamente. Para lograr dicho propósito, se proponen situaciones de referencia que buscan favorecer la creación de un ETM_G *personal* eficiente en términos del tránsito y complementariedad de un enfoque geométrico a otro. En este artículo, se presentan los resultados relativos al diseño y experimentación, específicamente, se muestra el caso de un estudiante-profesor, en último año de formación inicial.

MARCO TEÓRICO

Este estudio se sustenta en el enfoque de los *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* (ETM_G) desarrollado inicialmente por de Houdement y Kuzniak (1996, 1999, 2006). En la actualidad es la llamada *Espacio de Trabajo Matemático* (ETM) que surge con la necesidad de profundizar en otros dominios de la matemática (Kuzniak, 2011).

Espacios de trabajo matemático

El ETM se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas y se constituye por dos planos, cognitivo y epistemológico, en relación directa con los contenidos matemáticos del dominio en juego. En cada plano hay tres componentes; en el cognitivo están presentes los procesos de *visualización*, *construcción* y *prueba* y, en el epistemológico, el *representante*, *artefactos* y *referencial*. Las componentes de los planos, se articulan mediante tres génesis: *semiótica, instrumental y discursiva*. La génesis semiótica, asociada a las representaciones de los objetos matemáticos. La génesis instrumental, permite hacer operatorios los artefactos en el proceso constructivo. La génesis discursiva que da sentido al referencial teórico (definiciones, propiedades) para ponerlo al servicio del razonamiento matemático (Kuzniak, 2011).

La idea del *representante* está relacionada a la noción signo de Peirce (1978), y tiene que ver con el objeto matemático bajo formas más o menos abstractas: íconos, índices y símbolos. Un signo remite a su objeto de alguna de estas tres formas, según un proceso semiótico –llamado aquí *visualización*– involucrado en función de las significaciones de su utilizador. La articulación entre ambas componentes se produce con la génesis semiótica.

En relación a los *artefactos*, la concepción de Rabardel (1995) es complementaria para comprender el uso de artefactos en el ETM. Rabardel distingue que un artefacto puede ser material o un sistema simbólico, empleado como un medio para la acción. En este sentido, el instrumento es considerado como una entidad mediadora, entre el sujeto y el objeto sobre el cual se dirige la acción y, además, una entidad mixta, que comprende el artefacto y componentes cognitivos relacionados con los esquemas de uso. En la concepción del ETM el proceso de *construcción* está determinado por los instrumentos utilizados. La articulación entre ambas componentes se produce con la *génesis instrumental*.

La componente *referencial* remite a los elementos de índole teórico matemático del dominio en juego (geometría, álgebra, análisis, etc.). Aquí se encuentran las propiedades y definiciones involucradas en un razonamiento y cómo estas son utilizadas en un discurso para argumentar y convencer –llamado *prueba*–. La articulación entre ambas componentes se produce con la *génesis discursiva*.

En los distintos ETM es posible identificar tres tipos, dependiendo de la función de la reflexión del sujeto cuando se enfrenta a un problema determinado: un referencial definido de manera ideal sobre criterios matemáticos (ETM de referencia), un espacio definido en términos de enseñanza en una institución dada con una función definida (ETM idóneo) y, un espacio propio de cada utilizador fruto de la reflexión entre sus conocimientos matemáticos y los que utiliza para resolver una tarea (ETM personal). En esta investigación, los análisis están referidos al *ETM idóneo* del profesor.

Paradigmas geométricos y espacio de trabajo geométrico

Al considerar las particularidades del dominio geométrico en el ETM, la *génesis semiótica* se denomina *génesis figural*, la cual permite describir el proceso semiótico que está asociado al pensamiento visual que opera en geometría (Kuzniak, 2011). El *espacio real y local* se presenta como componente particular del $\mathrm{ETM_G}$ en el plano epistemológico (el representante del ETM); es el soporte material con un conjunto de objetos concretos y tangibles.

Para analizar las componentes de los planos del $\mathrm{ETM_G}$, se han incluido enfoques que lo complementan. Sobre la *visualización,* para Duval (1999) está basada en la producción de una representación semiótica (figuras geométricas, gráficos cartesianos) de un objeto. Duval (2005) distingue dos modos de visualizar que pueden funcionar según el tipo de operación con las figuras y cómo se movilizan sus propiedades; un modo *icónico* y uno *no-icónico*.

Sobre la componente *artefactos*, se considera la concepción (ya citada) de Rabardel (1995), este puede ser *material*, como una regla, un compás o un software, los cuales permiten trabajar sobre una figura. También estos pueden ser *simbólicos,* que permite producir un resultado en un registro semiótico distinto al figural. Además, el enfoque instrumental (Artigue, 2002; Trouche, 2002) permite estudiar una tarea dada a los alumnos en contextos tecnológicos y comprender el desarrollo del trabajo geométrico y sus dificultades específicas asociadas al uso de las tecnologías. En este sentido, el trabajo de Gómez-Chacón y Kuzniak (2011) ofrece un estudio del trabajo geométrico de futuros profesores cuando utilizan un software geométrico (Geogebra) y cómo este influye en la construcción del ETM_G.

En la concepción de Balacheff (1987) sobre el proceso de *prueba*, distingue entre las *pragmáticas* y las *intelectuales* y, una tipología propia para cada una de estas pruebas, que se diferencian por el estatus de los conocimientos en cuestión y la naturaleza de la justificación subyacente.

Sobre la formulación de los *paradigmas geométricos*, Houdement y Kuzniak (1996, 1999, 2006) identifican tres tipos paradigmas que coexisten en la enseñanza de la geometría, los que organizan la interacción entre la intuición, la experiencia y el razonamiento. Desde esta perspectiva, podemos observar cómo un sujeto reflexiona de acuerdo a las creencias, técnicas y el conocimiento de distintos modelos geométricos cuando desarrolla una tarea específica, es decir, que el ETM_G puede variar dependiendo del *paradigma geométrico* dominante.

En el paradigma *Geometría Natural* (GI), la geometría es sobre objetos reales. El trabajo se realiza sobre objetos materiales, con ayuda de la percepción y la manipulación de instrumentos y, por tanto, la importancia en la aproximación y la medida. La construcción y la percepción están en el centro de esta geometría de tipo experimental.

En el paradigma *Geometría Axiomática Natural* (GII), la geometría se construye sobre un modelo próximo a la realidad e intuición espacial. El razonamiento de validación se funda sobre las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático en juego, que puede ser incompleto, y donde los objetos geométricos son descritos por una propiedad, su definición.

En *Geometría Axiomática Formal* (GIII), se caracteriza por la separación entre la axiomática y la realidad. Los axiomas no están basados en lo sensible, el razonamiento de validación está basado en la coherencia lógica y formal, a través del sistema de axiomas del modelo subyacente. Los objetos provienen de una axiomática con toda la rigurosidad y formalismo del modelo geométrico elegido.

Esta idea de *paradigma geométrico* ha sido inspirada por la noción de paradigma según Kuhn en su trabajo sobre las estructuras de las revoluciones científicas. En este sentido, un paradigma designa el conjunto de las creencias, técnicas y valores que comparte un grupo científico y, el acceso al paradigma pasará por la resolución de un cierto número de problemas característicos (Kuzniak, 2011).

Finalmente, es posible analizar diferentes *circulaciones* entre las componentes de los planos cognitivo y epistemológico en el ETM_G, es decir, cómo se articulan los planos mediante las génesis, especificando las componentes puestas en juego. En este estudio, se muestran resultados relativos al diseño y experimentación de situaciones de referencia y, particularmente, el *espacio de trabajo geométrico personal* de un profesor de matemática, a través del estudio sobre la *circulación* entre las componentes de los planos en el ETM_G. Se considera como tema central, el tránsito y complementariedad entre los enfoques geométricos euclidianos sintético y analítico (cartesiano). Las situaciones de referencia que han sido implementadas en una fase experimental, tienen la intención de integrar las tres génesis, lo cual implica, coordinar aspectos semióticos con procesos de construcción y, razonamientos argumentativos y deductivos, además, favorecer un trabajo que privilegia el paradigma GII. Luego, se dan a conocer perspectivas desde el ETM con el propósito favorecer el trabajo del profesor en geometría.

En la sección siguiente, se muestra un extracto sobre el estudio al ETM_G *de referencia* e *idóneo* del profesor de secundaria. Estos análisis han significado una parte relevante e influyente en el diseño de las situaciones de referencia, así como también, han proporcionado evidencia empírica sobre el tema.

ELEMENTOS DE CONTEXTUALIZACIÓN: ETM_G DEL PROFESOR

Para analizar el trabajo geométrico del profesor de secundaria, se han estudiado los diversos tipos de espacios de trabajo (referencial, idóneo, personal) considerando distintos mecanismos para la obtención de la información, a fin de comprender de manera global qué elementos caracterizan su trabajo e identificar cuál es el paradigma geométrico privilegiado en el ETM_G del profesor cuando su trabajo contempla los enfoques geométricos sintético y analítico.

En una aproximación al ETM_G *de referencia* del profesor de secundaria, se analiza el currículum escolar sobre los contenidos del eje geometría y cómo estos efectivamente no relacionan los enfoques geométricos euclidianos con y sin coordenadas cartesianas. En relación al ETM_G *idóneo* del profesor, se presentan resultados de un estudio sobre la práctica en el aula de profesores cuando las temáticas se desarrollaron en uno u otro enfoque. En este caso, el interés fue estudiar las transposiciones realizadas por profesores de secundaria para la enseñanza de la geometría, las tareas que propone durante la clase y el ETM_G desarrollado en torno a estas.

El caso del currículum escolar

En el currículum escolar vigente (Ministerio de Educación [Mineduc], 2009), específicamente en el eje geometría, el documento señala ampliar "la base epistemológica de la geometría, mediante las trasformaciones rígidas en el plano, los vectores y la geometría cartesiana" (p. 146). Esto se manifestaría, según señala, en el esfuerzo por incluir diferentes enfoques para el tratamiento de los problemas, al relacionar este eje con el de números, álgebra y datos y azar. De modo general, hasta Octavo Básico (13 años), el trabajo geométrico se efectúa sin el uso de coordenadas, donde predominan temas referidos a elementos básicos de la geometría euclidiana, tales como punto, recta, trazos, ángulos; los tratamientos figurales, el estudio de algunas propiedades, construcciones, realización de transformaciones de figuras planas utilizando regla y compás (o un software) y sobre cuerpos geométricos. Posteriormente, en Primero Medio (14 años) comienza el estudio en el plano cartesiano para representar puntos, figuras, vectores y las transformaciones isométricas. Además, se incluye la congruencia de figuras planas, pero no se explicita en qué enfoque geométrico trabajar. En Segundo Medio (15 años) el trabajo no considera el uso de las coordenadas, se basa en la semejanza de figuras planas, ángulos en la circunferencia y la demostración de algunos teoremas. Hasta este nivel el tema de la geometría sintética, analítica, su complementariedad y el paso de un enfoque a otro es invisible para el docente. Es en Tercero Medio (16 años) que el tema de la geometría analítica aparece explícitamente en uno de los Objetivos Fundamentales “Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas” (p. 188). Sin embargo, no se entrega información que oriente el trabajo del docente, pues el énfasis según lo declarado, está en los tratamientos algebraicos dejando de igual forma, aspectos que no son considerados ni cuestionados [2].

El profesor y su práctica en el aula

En una aproximación al ETM idóneo del profesor de secundaria, se han estudiado prácticas en aula de profesores, en temáticas de geometría. A continuación, se presenta un caso representativo sobre el trabajo geométrico *idóneo* de profesores chilenos.

La sesión analizada que se presenta, se llevó a cabo el año 2011, el nivel corresponde a Segundo Medio. El trabajo se desarrolló en contexto geométrico euclidiano sin coordenadas (ETM_{GS}) [3], específicamente, el tema declarado el profesor es sobre *Teorema de Thales*. Se analizaron las tareas dadas por el profesor (P1) durante la clase y se distinguió una de ellas que denominamos *clave*, pues se trata de la tarea propuesta en el episodio donde el docente focaliza la atención en el tema central de la clase. En este caso, la tarea seleccionada fue “*calcular la medida del cateto de un triángulo semejante a otro triángulo dado*”.

En relación a la circulación entre las componentes de los planos del ETM_{GS} según la tarea seleccionada, esto se describe como sigue: el trabajo se activa por la *génesis figural*, específicamente la visualización de un tipo de configuración 2D/2D [4] (Figura 1: imagen 1). El trabajo sobre figuras (triángulos rectángulos) es relacionar atributos para afirmar que se trata de figuras semejantes (ángulo recto y los catetos horizontal/vertical). El proceso de visualización se relaciona a lo que Duval (2005) llama una visualización *icónica* y, específicamente del tipo *botaniste*. Luego, asigna números a los catetos de los triángulos (que se asumieron rectángulos) e interpreta una proporción, privilegiando la *génesis instrumental* donde una propiedad de proporciones es usada como artefacto simbólico que permite calcular un valor desconocido mediante tratamientos en los registros numérico y algebraico. Este espacio de trabajo que, inicialmente fue declarado por P1 en geometría, cambia a un trabajo *aritmético/algebraico*, esto luego de interpretadas las proporciones y, donde el trabajo se basa principalmente en calcular ecuaciones (Figura 1: imagen 2). En lo que sigue, el trabajo consiste en el uso del artefacto simbólico a partir de la visualización de ciertos *ejemplos prototípicos,* en referencia a Hershkowitz (como se cita en Scaglia & Moriena, 2005), y que promueven los tratamientos algebraicos y producción de resultados numéricos.

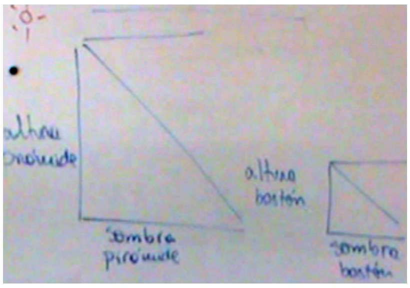


Imagen 1: triángulos semejantes

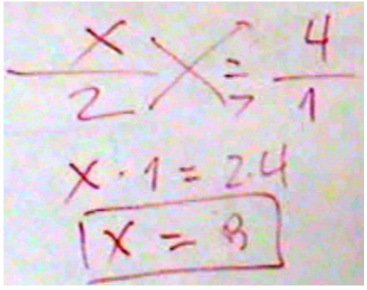


Imagen 2: calcular *x*

Figura 1: Imágenes del trabajo realizado por P1.

En este caso, el trabajo está basado en resolver una ecuación, los signos empleados (las equis) no son interpretadas desde el dominio geométrico, lo que reduce a que se desarrolle una “geometría algebrizada”. Desde este punto de vista, el rol del profesor es fundamental para que potencie el ETM que se desea desarrollar y no uno que se reduzca a “algebrización” (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca & Mena-Lorca, 2014).

Por otro lado, consideramos que para coordinar el enfoque sintético con el analítico, el uso de signos y la semiótica intencionada favorecería el tránsito, especialmente, aquellos sobre tratamientos y conversiones entre los registros numérico y algebraico. No obstante lo anterior, se debe prestar atención, pues si bien el trabajo podría contribuir, se debe tener en cuenta sobre los riesgos de caer en los *cálculos ciegos* al resolver ecuaciones, perdiendo el sentido del trabajo geométrico en sí y provocando un cambio de dominio (de geométrico a aritmético/algebraico) sin retorno al dominio inicial (Montoya-Delgadillo & Vivier, 2014).

En general, relativo al ETM_G de profesores de secundaria, los análisis han proporcionado información y evidencias respecto a la discontinuidad entre los enfoques sintético y analítico. En este sentido, se estudian como si se tratara de *mundos separados* –en alusión a Gascón–. Además, existe un privilegio por el trabajo en GI, donde la génesis discursiva, la componente referencial, el proceso de visualización y el uso de instrumentos, son desplazados por un trabajo que privilegia los tratamientos algebraicos y los artefactos simbólicos en el trabajo geométrico.

En lo que sigue, se presentan elementos de la metodología empleada en el diseño y aplicación de situaciones de referencia.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Características generales y selección de casos

Con el propósito de favorecer el tránsito y la complementariedad entre los enfoques sintético y analítico, se han diseñado y aplicado situaciones que denominamos *de referencia* para profesores de nivel secundario. En términos del ETM, la intención es integrar las tres génesis, en particular, favorecer el proceso de visualización *no-icónica* en coordinación con razonamientos discursivos (Duval, 1995, 1999, 2005), privilegiando el trabajo en el paradigma GII (o bien, el paso de GI a GII).

Para este estudio se escogieron métodos cualitativos de investigación, como la grabación y transcripción de audio de los diálogos entre profesores durante las sesiones, observación de sesiones *no participante*, el estudio al hábitat del problema en enseñanza media y la revisión de antecedentes sobre el tema.

En relación al diseño de las tareas y su vínculo con el ETM, Kuzniak (2011) afirma que, “Los problemas no son parte del espacio de trabajo pero son su razón de ser y su activador” (p. 13), es por esta razón que, para analizar el ETM_G *personal* del docente en situaciones que provocan el tránsito entre los enfoques geométricos, resultó fundamental, el diseño de las situaciones que provocan dicho trabajo. Sobre las temáticas involucradas, fueron considerados elementos básicos de la Geometría Euclidiana en el plano tales como puntos, rectas, trazos; figuras planas tales como polígonos y circunferencias y, además propiedades y definiciones sobre dichos elementos primarios. El criterio utilizado para esta selección, obedece a que las tareas propuestas pueden ser resueltas en ambos enfoques y se trata (a priori) de temáticas que pueden ser abordadas por un profesor de enseñanza de secundaria en Chile, aún si son tratadas de manera discontinua, pues corresponden a tópicos de geometría que están presentes en la enseñanza obligatoria.

En el diseño y selección de las tareas, en una etapa *pre-experimental*, fueron aplicadas distintas situaciones a un grupo de 3 estudiantes en último año de pedagogía en matemática de una universidad chilena, en noviembre de 2013. Lo cual permitió determinar qué situaciones entregan información relevante para esta investigación y, posteriormente, refinar aquellas que se usaron en la experimentación. Por ejemplo, fue relevante considerar el grado de dificultad, las temáticas involucradas, el tiempo que tardaban en resolver una secuencia y el uso de artefactos materiales –dada su extensión, no serán presentados dichos resultados–.

La experimentación se desarrolló en diciembre de 2013 y enero de 2014. Las sesiones fueron desarrolladas en la universidad de los participantes, o bien, en su lugar de trabajo. La duración fue de 120 minutos –aproximadamente 60 minutos por situación–, no se les indicó previamente qué tópicos estaban involucrados. Los participantes, fueron clasificados según su experiencia en los siguientes tres grupos:

Futuro profesor (FP): estudiantes de formación inicial en último año de pedagogía en matemática, que poseen experiencia como profesor de secundaria.

Profesor debutante (PD): profesor de matemática de secundaria con hasta 3 años de ejercicio profesional.

Profesor experimentado (PE): profesor de matemática de secundaria con más de 7 años de ejercicio profesional.

La formación inicial de los profesores se desarrolló en universidades chilenas públicas y una institución privada. La información general de los profesores participantes se presenta en la Tabla I.

Profesor	Universidad privada	Universidad estatal	Total
FP	6	9	15
PD	0	2	2
PE	0	2	2

Tabla I: Población de profesores participantes.

Del total (19) de la población participante, 11 utilizaron regla y compás y, 8 utilizó el software Geogebra. La elección del tipo de artefacto, fue consultada y acordada con los docentes y de forma voluntaria se inclinaron por uno u otro. En lo que sigue, se presenta el caso de un FP perteneciente a una universidad estatal, el cual es representativo de uno de los grupos participantes.

Presentación de las situaciones de investigación

Para favorecer el tránsito y la complementariedad entre los enfoques sintético y cartesiano, fueron diseñadas dos situaciones de referencia que coordinan las génesis del ETM$_G$, en particular, favorecer el proceso de visualización *no-icónica* (*constructeur* e *inventeur-bricoleur*) en coordinación con razonamientos discursivos (Duval, 1995, 1999, 2005) y uso de artefactos, privilegiando el trabajo en el paradigma geométrico GII (o bien, el paso de GI a GII).

Cada secuencia fue diseñada como un *protocolo de acción*, en donde los participantes debían desarrollan un plan de trabajo detallado. En este escrito, presentamos la primera situación de referencia, en la modalidad con uso de software Geogebra, la cual consta de tres partes. La segunda situación no se presenta dada su extensión.

Primera situación: "Un lugar geométrico".

La primera parte corresponde a la tarea formulada en versión sintética.

Dados dos puntos A y B en el plano, construir el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de A y B.
Para ello use un software dinámico y solo utilizando las herramientas "Intersección de dos objetos" , "Recta que pasa por dos puntos"  y "Circunferencia dado su centro y uno de sus puntos" . Marca con rojo el lugar geométrico y verifica la construcción moviendo los puntos A y B.
Describa paso a paso la construcción realizada.
¿Cómo justifica que la construcción realizada es la correcta? ¿Qué definiciones y/o propiedades aparecen involucradas?
Si se movieran los puntos A y B ¿la solución sigue teniendo validez? Justifique su respuesta.

En este caso, se pretende al construir la recta que da solución a la tarea, favorecer una visualización que, según Duval (2005), tiene elementos de *constructeur*. Al restringir las herramientas del software, las mediciones y el trabajo en GI, quedan limitados. Las preguntas 1 y 2, tienen la intención de ayudar a que efectivamente se coordine el trabajo figural e instrumental, con el discursivo, pues es preciso recurrir a elementos del referencial para justificar la construcción. La pregunta 3, tiene por objetivo aprovechar el potencial dinámico del software en la validación de la construcción.

En la segunda parte, se presenta la siguiente tarea formulada en versión analítica.

Dados dos puntos A(0,0) y B(2,2) en el plano, determinar algebraicamente el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B. ¿Cómo justifica que la expresión algebraica es la correcta? ¿Qué definiciones y/o propiedades aparecen involucradas?

En este caso, se trata de una versión analítica particular de la versión sintética anterior, que favorece la continuidad entre los enfoques.

La última parte de esta secuencia, pretende situar al profesor desde la perspectiva de la enseñanza, es decir desde su ETM_G-idóneo, a través dos preguntas abiertas. En ambas preguntas, la intensión es provocar la comparación entre ambos enfoques geométricos y que pueda concluir respecto a la posibilidad realizar ambos trabajos en continuidad y complementariedad en la enseñanza.

De la pregunta 1 (versión sintética) y la pregunta 2 (versión analítica), responda: ¿Qué consecuencias o qué características se pueden extraer del lugar geométrico que ha determinado?, ¿cómo lo justifica en ambos casos? En su rol de profesor, y considerando a sus (futuros) estudiantes de Enseñanza Media ¿le parece que un procedimiento es más apropiado que el otro?, ¿por qué? Explicite su respuesta.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación, se muestran los análisis relativos al ETM_G *personal* de un futuro profesor (FP1). Presentamos la *circulación* entre las componentes de los planos cognitivo y epistemológico de los ETM_G sintético y analítico, especialmente, cómo se desarrolla el trabajo en torno a las génesis. Parte relevante del estudio, es analizar cómo el docente se enfrenta a la posibilidad de trabajar los enfoques geométricos considerando tránsito y complementariedad entre estos y sobre el paradigma geométrico que privilegia en cada caso.

Estudio del ETM_G personal de FP1

Primera parte: versión sintética

El trabajo de FP1 se caracteriza por privilegiar (inicialmente) la articulación entre las génesis figural e instrumental. El trabajo consiste en trazar una recta que pasa por A y B dados, luego dos circunferencias de centro A y B, respectivamente –sin aludir a sus radios–. En seguida, FP1 usa la herramienta de intersección de dos objetos para marcar los puntos C y D (Figura 2: imagen 3). Luego, traza la recta que pasa por C y D, e indica:

FP1: Visualmente puedo presumir que la recta b es el posible lugar geométrico, por lo que debo *demostrarlo* a continuación.

Finalmente, al validar (y para dar respuesta a las preguntas 2 y 3), FP1 coordina la génesis discursiva y el proceso de visualización, apoyado en la construcción de un paralelogramo y las propiedades de sus diagonales (Figura 2: imagen 4). En este caso, aprovecha el potencial dinámico del software para deslizar puntos de la construcción. Finalmente, concluye, que la recta CD es simetral (mediatriz) de la recta AB.

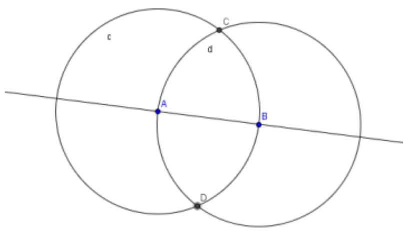


Imagen 3: circunferencias con centro A y B.

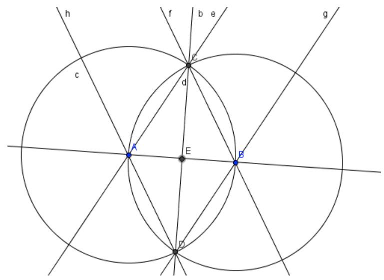


Imagen 4: paralelogramo ADBC

Figura 2: Imágenes del trabajo sintético realizado por FP1.

Para justificar su construcción, alude a que ADBC es un paralelogramo y, por tanto, que la mediatriz del segmento AB es perpendicular al trazo y lo biseca, además, señala que la construcción siempre tiene validez, pues depende del segmento AB, lo cual solo varía el radio de las circunferencias.

En el caso del trabajo sintético de FP1, privilegia GII, donde propiedades de figuras y definiciones justifican la construcción realizada. En este sentido, el trabajo es realizado en concordancia con el propósito de la situación planteada, es decir, favorecer la visualización no-icónica (constructeur) en coordinación con razonamientos discursivos para validar el trabajo. La utilización del programa para la construcción, permite afirmar que FP1 ha instrumentalizado el artefacto y, con esto, la génesis instrumental se activa y conecta las génesis figural y discursiva.

Segunda parte: versión analítica

En este caso, FP1 inicialmente grafica (en una hoja) los puntos dados A, B y un punto C ubicado en el punto medio del segmento AB (Figura 3: imagen 5). La versión sintética ayuda a *ver* que el lugar geométrico pasa por C. Además, FP1 señala que se trata de una recta. El trabajo se desarrolla a partir de la visualización de los puntos, que luego coordina con un trabajo semiótico y, proponemos el uso de “distancia entre dos puntos” como artefacto simbólico, en el desarrollo de tratamientos algebraicos (Figura 3: imagen 6). Así, el trabajo que inicialmente es *ver*, continúa favoreciendo la génesis semiótica y ciertos elementos de la componente referencial. En este sentido, hay una conversión entre la representación gráfica y el lenguaje algebraico.

En este caso, que involucra una versión particular (y un trabajo sintético que ayudó inicialmente a graficar), presenta elementos del paradigma GI. Sin embargo, hay un tipo de trabajo semiótico (conversión y tratamiento) desarrollado por FP1 que, además, se justifica con un teorema; el trabajo presenta características del paradigma GII. En este sentido, se considera que el ETM en versión cartesiana privilegia un paso de GI a GII.

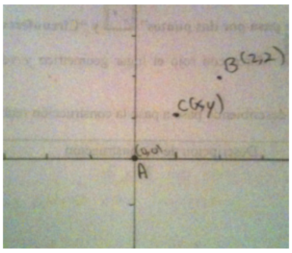
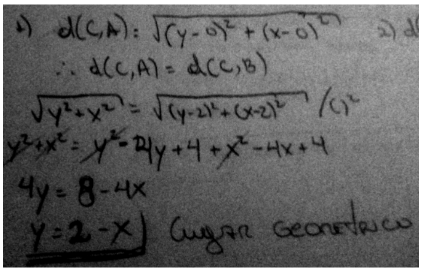
 Imagen 5: puntos A, B y C en el plano cartesiano.	 Imagen 6: trabajo algebraico en GC.

Figura 3: Imágenes del trabajo cartesiano realizado por FP1.

Tercera parte: preguntas al profesor

FP1 diferencia entre el primer caso sintético y el segundo analítico, al respecto declara:

P1: En la versión sintética se *demuestra* el lugar geométrico en general para cualquier punto A, B […]. Para la versión analítica se *demuestra* el lugar geométrico para los puntos A y B particulares.

FP1 destaca que en ambos casos, el lugar geométrico es una recta. Al responder sobre la pertinencia de uno u otro procedimiento en la enseñanza, señala que depende del nivel de los estudiantes, pues declara, la versión sintética se puede abordar desde 6º básico (11 años), la otra requiere más conocimientos algebraicos que en ese nivel no poseen.

CONCLUSIÓN

En estudios anteriores [3], se ha evidenciado sobre el predominio del trabajo aritmético/algebraico, la visualización icónica y poco énfasis en los razonamientos discursivos, son parte del trabajo geométrico en secundaria en Chile. A lo anterior, se suma la falta de orientaciones didácticas para el profesor, sobre qué transposiciones puede realizar, qué tareas proponer para favorecer un mejor ETM_G *personal* de los estudiantes. En este trabajo, proponemos una forma de complementar los enfoques sintético y cartesiano, a través de un trabajo que coordine las tres génesis del ETM.

Respecto a los resultados del trabajo de FP1, la situación de referencia logra que coordine ambos enfoques; el trabajo sintético ayudó en el desarrollo del trabajo cartesiano. El restringir las herramientas del software fue otro aspecto a destacar en la propuesta como variable didáctica, pues obligó a realizar una construcción y favorecer la visualización que a priori se pretendía. En la tercera parte de la situación, cuando se pregunta por la posibilidad de llevar este tipo de trabajo a la enseñanza, FP1 se refiere al nivel de los estudiantes términos del currículum y, el cual se ha constatado que se abordan de forma discontinua.

Por otro lado, se evidencia que FP1 no distingue tipologías de prueba. Este asunto, según trabajos anteriores, no ha sido resuelto en la formación de profesores en Chile (Montoya, 2010). Se debe trabajar en propuestas donde la génesis discursiva sea privilegiada a nivel de transposición en coordinación con las otras génesis del ETM.

En otros casos que no fueron presentados en este trabajo, particularmente de PE, ellos manifestaron que el trabajo geométrico (idóneo) lo desarrollan sin considerar la complementariedad entre enfoques. Declaran que es factible realizar el trabajo para cursos de enseñanza media electivo [5], y es posible retomar contenidos de niveles anteriores para comparar los enfoques.

La evidencia empírica en el enfoque cartesiano, ha mostrado elementos que contribuyen en caracterizar los paradigmas en este sub-dominio geométrico. Además, las situaciones de referencia se proponen como rutas de trabajo que articulan los componentes del ETM de una forma intencionada.

Por último, consideramos que es posible extender la investigación, abarcar otras temáticas y otro tipo de tareas. Por ejemplo, mirar la geometría desde el punto de vista del *grupo de transformaciones geométricas,* en alusión al punto de vista de Klein, es una oportunidad para continuar en esta línea de investigación. Asimismo, considerar cómo influir en el ETM_G idóneo de un profesor de liceo para coordinar los enfoques y la posibilidad de llevarlo a su práctica en el aula.

NOTAS

1. Dada su extensión, se presentan extractos de los estudios realizados.

2. En el último nivel de la enseñanza obligatoria chilena, Cuarto Medio, se estudian las primeras nociones de geometría analítica del espacio. El paso del plano al espacio, no será abordado.

3. Artículo titulado *"Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula"*, desarrollado por Henríquez y Montoya (2014) –en revisión–.

4. Considerando la idea de configuración según Duval (2005), para quien una configuración nD/2D corresponde a objetos representados en el plano.

5. En Chile, en los últimos dos niveles de enseñanza obligatoria de establecimientos *científico-humanista*, los alumnos pueden escoger mas horas y especialización en matemática, entre otras áreas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of computer for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics, 18*(2), 147-176.

Bourbaki, N. (1969). Formas cuadráticas. Geometría elemental. En J. Hernández (Ed.), *Elementos de historia de las matemáticas* (pp. 173-191). Madrid, España: Alianza Editorial.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st North American PME Conference, 1, 3-26.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10,* 5-53.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma, 39*, 13-25.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 16*(3), 289-321.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. Educational *Studies in Mathematics, 40*, 283–312.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11,* 175-193.

Klein, F. (1908). Matemática elemental: Desde un punto de vista superior. Volumen II. Geometría. Traducción de R. Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9-24.

Ministerio de Educación. (2009). Matemática: Formación general. En Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media (pp. 145-194). Santiago, Chile: Autor.

Montoya, E. (2010). Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au. Thèse pour obtenir le titre de Docteur. Paris: Université Denis Diderot-Paris 7.

Montoya-Delgadillo, E. Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(4-I), 191-210.

Montoya-Delgadillo, E. & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine de travaildans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de SciencesCognitives* (aceptada).

Scaglia, S. & Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática, 17*(3), 105-120.

Trouche, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin & L. Trouche (Eds.), Calculatrices Symboliques. Transformer un outil du travail informatique: un problème didactique (pp.187-214). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

L'ALGORITHMIQUE COMME OBJET D'APPRENTISSAGE DE LA DEMARCHE DE PREUVE EN THEORIE ELEMENTAIRE DES NOMBRES : ALGORITHME DE KAPREKAR

Dominique Laval, L.D.A.R. – Université Paris 7

L'hypothèse sous-jacente des programmes français mis en place depuis 2010 dans les cours de mathématiques du lycée est que le travail sur des algorithmes peut aider l'élève à accéder à de nouvelles notions mathématiques ou développer des démarches, des compétences. Nous définissons d'abord des cadres théoriques permettant d'analyser des situations d'enseignement d'algorithmes au lycée, puis nous étudions l'algorithme en tant qu'objet d'apprentissages de la démarche de preuve dans un champ particulier des mathématiques : la théorie élémentaire des nombres. Notre méthodologie, adaptée de l'ingénierie didactique, consiste en une série de séances, dans une classe de Terminale (Grade 12) sur un algorithme complexe, présentant plusieurs étapes de traitement : l'algorithme de Kaprekar [1].

Mots clés : *Algorithme de Kaprekar, Espace de Travail Algorithmique, Espace de travail Mathématique, Sémiotique, Adidacticité.*

1. INTRODUCTION

Les enseignements de l'algorithmique et de l'informatique sont fortement liés sans pour autant être confondus. La programmation de l'ordinateur en tant qu'outil éducatif est un aspect du travail personnel et collectif des enseignants et des élèves qui permet de développer des compétences algorithmiques, organisationnelles et procédurales.

Le curriculum mathématique des lycées français met l'accent sur la *place naturelle dans tous les champs des mathématiques* [2] de l'algorithmique. Un des objectifs est d'amener les élèves, au cours des années du lycée, à utiliser des algorithmes *en relation avec les autres parties du programme* [2] (arithmétique, analyse, probabilités, démarche de preuve,…).

L'enseignement de l'algorithmique a changé depuis l'avènement de l'informatique. Aujourd'hui, le curriculum français en mathématiques définit l'informatique comme un moyen apportant aux élèves une meilleure compréhension des différents langages (naturel, pseudo-code,…) et des algorithmes, outils liés en particulier à la programmation.

Nous supposons que l'élève ne peut comprendre les concepts de l'algorithmique et des langages associés qu'en ayant construit quelques petits algorithmes et que les algorithmes peuvent l'aider pour les notions mathématiques.

Cet article présente la conception et l'analyse, pour l'essentiel à partir des *Espaces de Travail Mathématique*, d'une expérimentation en classe d'une démarche de preuve dans une situation issue de la théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar (cas des nombres entiers compris entre 0 et 999), le processus de calcul étant le suivant :

1. Choisir un nombre entier de trois chiffres. **2.** Former un nouvel entier obtenu en rangeant les chiffres du nombre choisi à l'instruction 1. dans l'ordre croissant. **3.** Former un nouvel entier obtenu en rangeant les chiffres du nombre choisi à l'instruction 1. dans l'ordre décroissant. **4.** Calculer la différence des nombres obtenus aux instructions 2. et 3. **5.** Recommencer le processus (à partir de l'instruction 2.) avec le nombre obtenu à l'instruction 4. jusqu'à obtenir un nombre déjà obtenu.

L'ingénierie didactique mise en place comporte des phases de constructions d'algorithmes (décomposition d'un nombre entier, tri des chiffres, reconstructions d'entiers,…), de conjectures et de preuves.

2. NOTRE CADRE THEORIQUE ET SA DESCRIPTION

Les outils théoriques que nous mettons en pratique sont essentiellement empruntés aux *Espaces de Travail Algorithmique* (Laval, 2013) (F1) et aux *Espaces de Travail Mathématique Algébrique* ($\text{ETM}_{\text{algèbre}}$ [3]) (F2).

Le concept de *situation didactique* suppose un certain potentiel d'adidacticité de la situation. Ainsi la *Théorie des Situations* (TSD) (F3) (Brousseau, 1998) nous permet d'observer l'élève confronté à un problème nouveau.

Les connaissances mathématiques et algorithmiques des élèves étant représentées par différents systèmes sémiotiques, nous prendrons en compte les travaux de Duval (2006) sur les registres d'écriture mathématique (F4), mais aussi sur des registres associés à des environnements algorithmiques spécifiques.

2.1 *Espaces de Travail Algorithmique* (ETA) et *Paradigmes* (F1) et leur intégration

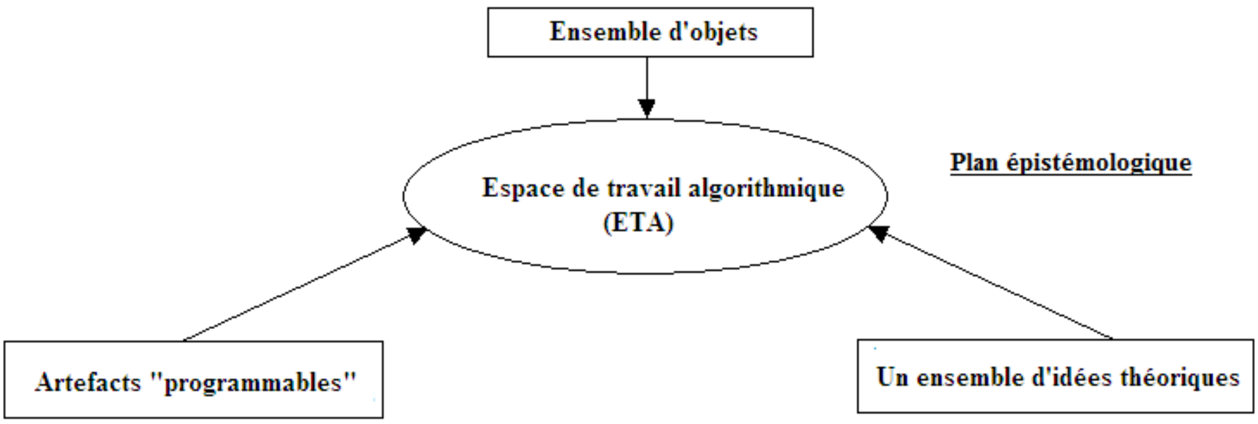


Fig. 1

En reprenant la structure des *Espaces de Travail Géométrique* (ETG) (Houdement et Kuzniak, 2003, 2006) en objets, artefacts et référentiel théorique, nous proposons de structurer les ETA à l'intérieur d'un réseau composé d'ensembles d'objets, d'artefacts programmables, et d'un ensemble d'idées théoriques permettant de créer et de justifier les algorithmes comme objets pour l'exécution par des artefacts programmables. Cette transposition des ETG aux ETA peut être utile pour analyser les tâches proposées aux élèves. Elle aide aussi à analyser les positions respectives des élèves et des enseignants, sous l'influence du curriculum. En effet, l'ETA *idoine* prévu par l'enseignant n'est pas nécessairement celui de l'élève.

Une première organisation des ETA est schématisée ainsi (Fig. 1)

Les artefacts *programmables* sont la calculatrice, le tableur, les objets programmables, le langage naturel, le pseudo-code, les langages algorithmiques et les logiciels de programmation.

La construction d'algorithmes passe par un langage. Plusieurs types de langages peuvent être employés pour exprimer des algorithmes. Il ne faut pas prendre le mot *langage* au sens technique de programmation. Au contraire, les langages utilisés pour écrire un algorithme doivent définir des façons générales de s'exprimer. Les langages de programmation, qui servent effectivement à communiquer avec l'ordinateur, obéissent à des contraintes plus strictes.

L'ensemble d'idées théoriques est constitué de concepts de modélisation mathématique et d'algorithmes, de l'étude de la complexité, de l'effectivité et de la preuve de l'algorithme, de la représentation d'un nombre dans le cas de l'algorithme de Kaprekar.

Une première vérification consiste souvent en quelques essais. On exécute l'algorithme (*à la main* ou après l'avoir programmé sur l'ordinateur) avec quelques données dont on connaît le résultat. Si le résultat n'est pas conforme à l'attente, on a prouvé que l'algorithme est incorrect. L'élève de Terminale sait que quelques exemples ne remplacent par la preuve.

Un ensemble d'objets où un algorithme est un traitement sur des objets qui peuvent être des objets mathématiques (ex. : *Algorithme d'Euclide*) ou des objets du monde, notamment lorsqu'il s'agit de résoudre un problème (ex. : *Algorithme de Dijkstra* pour déterminer un chemin optimal dans un graphe).

Comme dans les ETG, les objets sont ceux sur lesquels porte le problème et sert à distinguer des artefacts qui servent à les manipuler.

Pour l'algorithme de Kaprekar, le graphique précédent peut se présenter ainsi :

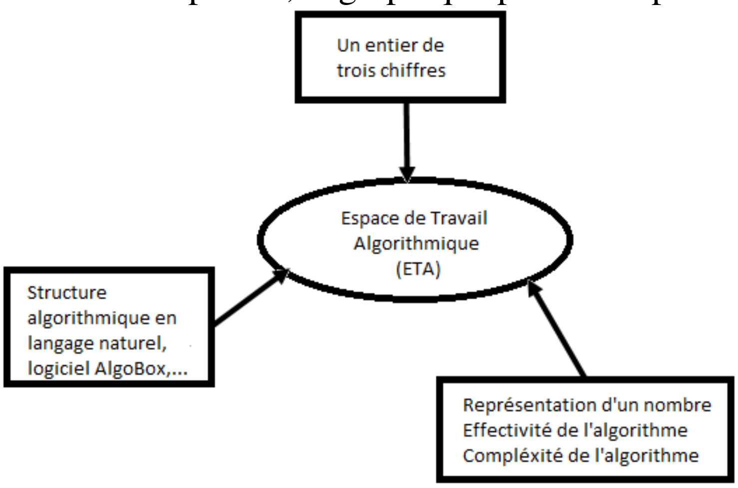


Fig. 2

La seconde organisation des ETA est due au fait que l'ouverture sur le champ cognitif des ETA va se faire en interaction avec le niveau épistémologique et les composantes que nous y avons introduites. Pour cela, comme pour les ETG (Kuzniak, 2011), nous pensons nous appuyer sur les travaux (F4) de Duval (2006). En accord avec Kuzniak et Richard (2014), nous centrons ce second niveau des ETA sur le sujet considéré comme un sujet cognitif. Cette introduction au domaine cognitif est en relation étroite avec les composantes du niveau épistémologique et, afin de rester dans le cadre didactique, il est possible d'adapter l'approche sémiotique (F4) de Duval (2006).

De Duval, nous adaptons l'idée de trois processus cognitifs impliqués dans l'activité ici algorithmique :

- *un processus de visualisation* en relation avec la représentation de l'algorithme et le support matériel (Kuzniak & Richard, 2014) ;
- *un processus de construction* (Ibid.) déterminé par les langages et les instruments utilisés (organigrammes, langage naturel, pseudo-code, langage de programmation, ordinateur, logiciels algorithmiques, calculatrice,…) ;
- *un processus discursif qui produit des argumentations et des preuves* (Ibid.).

Une représentation de la seconde organisation pour les ETA est la suivante :

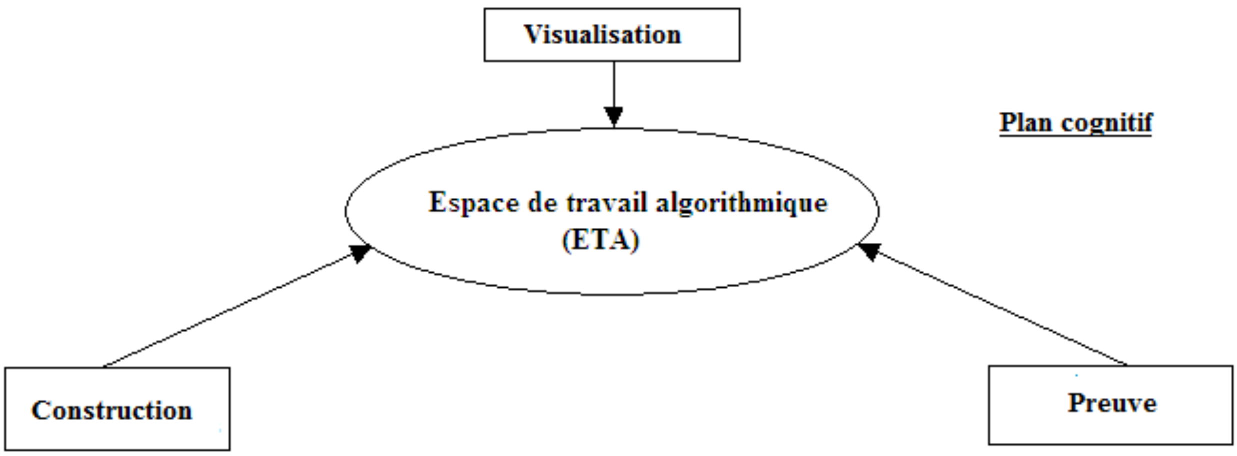


Fig. 3

Une transposition des paradigmes de la géométrie à ceux de l'algorithmique permet de définir **trois niveaux de paradigmes algorithmiques** :

Niveau I : approche intuitive des algorithmes issus de situations de la vie réelle. A ce niveau, par exemple, l'efficacité de l'algorithme suit naturellement sa description.

Niveau II : axiomatique *naturel* des algorithmes. L'efficacité de l'algorithme est utilisée, son efficacité et sa complexité sont interrogées. L'algorithme peut devenir un objet d'un travail mathématique.

Niveau III : traitement formel des algorithmes (ex. les machines de Turing).

Nous avons le tableau de comparaison suivant :

Niveaux impliqués	Résoudre un problème géométrique	Etude d'un algorithme
Niveau I Approche intuitive des algorithmes issus de situations de la vie réelle	Preuve spatiale	**Preuve de l'efficacité** de l'exécution de l'algorithme ou raisonnement intuitif
Niveau II Axiomatique *naturelle* des algorithmes	Déduction de postulats implicites Exemple : Les axiomes de base de la géométrie euclidienne	Preuve mathématique de l'efficacité Exemple : La preuve de l'algorithme d'Euclide repose sur des propriétés du PGCD et des suites positives d'entiers strictement décroissantes jusqu'à atteindre zéro
Niveau III Axiomatique formelle	Différentes géométries Quelles propriétés initiales sont nécessaires ? Axiome des parallèles	Calculabilité Définition équivalente d'une *fonction calculable* Exemple : Machine de Turing

Tableau 1 : Les différents niveaux de paradigmes

2.2 Espaces de Travail Mathématique Algébrique (F2)

Notre travail didactique étudie l'interaction entre ETA et $\text{ETM}_{\text{algèbre}}$, de telle sorte que l'élève établisse un lien entre une preuve empirique issue de la programmation sur machine de l'algorithme de Kaprekar pour tous les entiers de 0 et 999 et une preuve algébrique du résultat conjecturé.

L'apport des $\text{ETM}_{\text{algèbre}}$ est résumé ci-dessous :

Paradigme	Un algorithme *qui tourne*	Des réponses *sûres* à des questions
Espace d'objets	Structures algorithmiques, modularité, conversion, représentation des nombres, répétition, tri	Numération décimale (nombre, unité, dizaine, centaine)
Artefacts	Dispositif, langage	Formes algébriques
Référentiel théorique	Contraintes du langage	Théorie élémentaire des nombres

Tableau 2 : Apport des $\text{ETM}_{\text{algèbre}}$

2.3 Théorie des Situations (Brousseau) (F3)

La trame des séances (Bronner, 2003), élaborée dans le cadre de notre ingénierie didactique, fait apparaître des découpages de séances selon des unités rendant intelligibles chaque élément retenu relativement à un projet d'enseignement (Ibid.). Elle se compose de deux séances ayant pour objectif l'étude de l'algorithme de Kaprekar. Le problème proposé à l'élève sur l'algorithme de Kaprekar peut être présenté en ne donnant que l'énoncé de l'algorithme et en laissant les élèves réagir individuellement. Dans ce contexte, la dévolution laissée à l'élève est alors délicate.

Il est préférable de laisser travailler les élèves en petits groupes afin que leur curiosité soit stimulée par le fait que tout le monde obtienne le même résultat après quelques itérations. Le contrat didactique présent dans les classes de lycée habituées à travailler l'algorithmique, permet aux élèves de penser à programmer l'algorithme afin de le tester sur un ordinateur. Ce programme joue alors le rôle de milieu (Brousseau, 2004) en interagissant avec l'élève. Ceci peut conduire l'élève vers une situation de formulation de la conjecture, voire même vers une preuve empirique s'ils testent tous les entiers de 0 à 999. Il est possible que cette preuve empirique, faite à l'aide de la machine, ne satisfasse pas certains élèves et les conduise vers une situation de validation durant laquelle ils émettraient des jugements sur les formulations précédentes. Le recours au calcul algébrique peut alors être une solution à l'établissement d'une preuve mathématique formelle. Le but de notre ingénierie est de laisser le plus d'initiatives possibles à la charge de l'élève.

2.4 Registres d'écriture mathématique (Duval) (F4)

La situation didactique de notre ingénierie est en partie basée sur des changements de représentation sémiotique des nombres. L'exécution même du programme de calcul de l'algorithme de Kaprekar nécessite le passage d'une représentation dans le registre discursif (étape 1 de l'algorithme : choisir un entier entre 0 et 999), à une représentation numérique (par ex. le nombre huit centre quarante-deux, s'écrit 842) afin de pouvoir accéder aux chiffres qui composent ce nombre. Cette compréhension du système numérique décimal est donc basée sur l'articulation de ces deux registres de représentation sémiotique : le registre discursif et le registre numérique. De plus, dans l'étape 1, le nombre $\overline{abc}$ est considéré comme un élément de l'ensemble des entiers de 0 à 999, mais pour construire les nombres des étapes 2 et 3 de l'algorithme, il est nécessaire de se représenter le nombre comme un triplé de chiffres de l'ensemble $[0 ; 9]^3$, avant de revenir dans l'ensemble des entiers de 0 à 999.

L'utilisation, dans la preuve comme dans l'algorithme, de lettres pour représenter les chiffres du nombre choisi, donne une représentation du nombre dans le registre algébrique. Cette combinaison des registres numérique et algébrique permet l'introduction du calcul algébrique dans notre situation.

Chaque connaissance conceptuelle est liée à un signe significatif (l'écriture, les chiffres, le langage naturel, le pseudo-code, la spécificité du langage de programmation, l'emploi de test d'arrêt, ...). Nous pensons que ce concept est utile pour les trois niveaux algorithmiques (Tableau 1). Les représentations des algorithmes impliquent des registres spécifiques avec conversions et traitements.

En accord avec l'approche de Duval, nous construisons notre hypothèse. Les connaissances mathématiques et algorithmiques des élèves sont représentées par différents systèmes sémiotiques. Les élèves doivent les confronter à ceux de leurs camarades pour accepter de nouvelles représentations. Cette grande difficulté d'apprentissage conceptuel crée des obstacles que seule la coordination des différents registres sémiotiques aide à surmonter. Nous essayons de montrer la place centrale qu'offre la possibilité de modifier le registre de chaque représentation sémiotique dans l'apprentissage des mathématiques et des algorithmes. Certaines difficultés rencontrées par les élèves peuvent être décrites et expliquées comme un manque de registres de représentation et de leur coordination.

3 NOS OBJECTIFS – NOTRE METHODOLOGIE

3.1 Nos objectifs

La méthode consiste à mettre en place des ingénieries didactiques (Artigue, 1992) pour tester l'hypothèse que le travail sur des algorithmes peut aider les élèves à accéder aux notions mathématiques ou développer des démarches et des compétences. Notre choix ici, se porte sur la théorie élémentaire des nombres et le concept de preuve, que nous expérimentons dans une classe de Terminale Scientifique, afin d'étudier les questions suivantes :

(Q1) Quelle situation mettre en place qui permette un travail de construction en adidacticité d'un algorithme qui motive le repérage de conjectures et une preuve ?

(Q2) Comment dans une telle situation le travail de preuve s'articule-t-il pour les élèves avec le travail sur un algorithme ?

Nous choisissons ici d'interpréter le travail évoqué en **(Q2)** à l'aide des ETA.

Nous aborderons aussi la question suivante **(Q2b)** : « quelle est la productivité de ce choix ? », *question particulière de la question générale pour la mise en réseau des diverses fibres que constituent les* ETM_d [3] *La question se pose alors de savoir comment s'organisent la fibration entre les divers* ETM. (Kuzniak & Richard, 2014).

3.2 Notre méthodologie

Notre approche et notre méthode sont les suivantes :

- Mettre en œuvre et évaluer une unité d'enseignement dans une classe de Terminale Scientifique, sur de nouvelles démarches de preuve qu'un travail sur des algorithmes permettrait d'aborder dans le domaine de la théorie élémentaire des nombres, afin d'étudier **(Q1)** ;
- Construire et analyser des algorithmes permettant de modéliser l'observation faite *à la main* et nécessitant l'utilisation de raisonnements algébrique et arithmétique ;
- Valider et organiser une preuve empirique d'une conjecture faite lors d'échanges entre élèves et l'expérimenter à l'aide de l'ordinateur, afin de répondre à **(Q2)** ;
- Élaborer un contrat didactique avec l'enseignant responsable de la classe : les élèves analysent et expérimentent *à la main* un programme de calcul afin d'émettre une conjecture, puis écrivent l'algorithme correspondant au programme de calcul et le programment avec le logiciel *AlgoBox*. Ensuite, les élèves organisent une preuve empirique de cette conjecture et modifient

l'algorithme en s'aidant d'un raisonnement algébrique pour optimiser le nombre de cas réellement nécessaire pour prouver à l'aide de la machine la validation de la conjecture.

Les élèves travaillent dans plusieurs environnements algorithmiques : langage naturel, pseudo-code et langage machine. Ils utilisent le logiciel *AlgoBox*, car un texte écrit en *AlgoBox* peut être vu soit comme un algorithme si on s'intéresse à sa logique et à ses performances, soit comme un programme si on s'intéresse à son implémentation.

4. CONSTRUCTION D'UNE INGENIERIE

Pour aider les élèves, nous anticipons certaines difficultés lors de l'élaboration du scénario. Ainsi, nous devons :

- construire d'abord les étapes intermédiaires entre l'observation de la conjecture et la construction de la preuve ;
- puis, organiser la transition de la conjecture faite *à la main*, à la rédaction d'un ou plusieurs algorithmes en langage naturel du modèle proposé ;
- enfin, passer au langage de programmation. Il est nécessaire de savoir comment faire une interprétation significative des résultats obtenus.

Notre scénario

Le scénario est proposé dans une classe de Terminale Scientifique, enseignement de spécialité, d'un lycée français. L'ingénierie didactique, mise en œuvre, amène les élèves à s'approprier un processus de preuve utilisant plusieurs registres de la théorie élémentaire des nombres. Nous souhaitons étudier le passage d'un ETM à l'autre, et nous nous intéressons dans les choix instrumentaux et des registres sémiotiques.

Ce scénario nécessite deux séances où les élèves travaillent par groupes de trois. Les périodes de travail en groupe et de mise en commun au niveau de la classe s'alternent durant les séances. Le travail demandé aux élèves pendant la première séance consiste à élaborer l'algorithme, le programmer sur *AlgoBox* puis le tester. Pendant la seconde séance, les élèves travaillent sur la preuve de l'algorithme. Les nombres d'entrées possibles (1000) étant finis, une preuve empirique par examen de toutes les suites produites par l'algorithme est possible, une fois qu'il est implémenté sur ordinateur. La preuve de la conjecture (si l'entier de trois chiffres choisi comporte au moins deux chiffres distincts alors le résultat obtenu est 495, sinon, on obtient 0) nous permet de remarquer qu'elle présente deux objectifs distincts. Les élèves peuvent choisir de démontrer la conjecture en examinant tous les cas à l'aide de l'ordinateur (les 1000 cas sont traités rapidement par une machine), ce qui introduit une preuve non explicative. Mais, ils peuvent également résoudre le problème de manière algébrique, en énonçant une preuve basée sur des propriétés arithmétiques utilisant un formalisme algébrique qui sont accessibles aux élèves et pouvant paraître plus explicatives. Il est possible aussi de *mixer* les deux approches. Un raisonnement algébrique permet de diminuer le nombre de suites à faire produire et examiner par l'ordinateur. Nous souhaitons étudier comment les élèves se situent relativement à ces possibilités.

Analyse *a priori*

Une série d'ETM avec des composants spécifiques sont organisés.

Nous espérons que les élèves proposent une conjecture et prouvent empiriquement cette conjecture en utilisant un algorithme qu'ils font tourner sur l'ordinateur. Puis en utilisant une preuve algébrique de cette conjecture, ils modifient l'algorithme initial pour réduire le *coût* de vérification. Un des objectifs des séances est de mettre les élèves en mesure de discuter de la validité des méthodes pour prouver la conjecture.

Lors de la première séance, les élèves planifient l'algorithme afin qu'ils puissent identifier les étapes de traitement nécessaires pour son exécution, et qu'ils planifient ensuite ces étapes afin de les intégrer comme des schémas de programmes (Guy, 2013). Ensuite, ils programment l'algorithme complexe étudié en utilisant les schémas de programmes.

Lors de la deuxième séance, les élèves ont maîtrisé l'algorithme associé au programme de calcul. Nous attendons alors que les élèves utilisent les conjectures émises au cours de la première séance.

Dans le cadre d'un ETA, les élèves peuvent constater qu'après avoir implémenté l'algorithme dans l'ordinateur, et l'avoir fait *exécuter* pour tous les nombres entiers compris entre 0 et 999, l'algorithme permet de prouver empiriquement que la conjecture émise est vrai.

Se pose alors le problème de la réduction du nombre de cas réellement nécessaire pour démontrer cette conjecture. Pour cela, les élèves doivent utiliser un $\text{ETM}_{\text{algèbre}}$. Avec un raisonnement algébrique nécessitant des concepts arithmétiques, les élèves prouvent que l'algorithme doit contrôler seulement cinq entiers : 99, 198, 297, 396 et 495.

L'*efficacité* des algorithmes est étudiée implicitement par les élèves quand ils terminent ou modifient les algorithmes. Mais nous restons au niveau algorithmique I.

La combinaison d'un ETA et d'un $\text{ETM}_{\text{algèbre}}$ nécessite un réel changement dans la stratégie de résolution parce que les élèves doivent comprendre qu'ils doivent combiner plusieurs registres. Nous sommes au niveau algorithmique II.

Analyse a posteriori

Lors de la première séance, les élèves sont répartis en huit groupes de trois élèves. À l'issue du travail en groupe, deux représentants de deux groupes exposent leurs résultats, qui sont ensuite commentés et complétés par les autres groupes.

Au niveau des résultats, le fait qu'on obtienne toujours 495 ou 0 est rapidement mis en évidence. Certains élèves vont plus loin au niveau des conjectures en affirmant qu'après le premier passage dans la boucle, on se retrouve dans la suite

297, 396, 594, 495 et que la somme des chiffres de chaque élément de cette suite est toujours 18, de plus *le chiffre du milieu* est toujours 9.

Le cas de l'apparition du chiffre 0 est traité de manière unanime sur l'exemple : « Le nombre formé des chiffres de 503 rangés dans l'ordre croissant est 35 ».

Deux tests d'arrêts sont proposés :

- On s'arrête lorsque la différence de deux nombres obtenus consécutivement est 0.
- On s'arrête quand on obtient 0 ou 495.

Lors de l'écriture de l'algorithme (langage naturel puis pseudo-code) associé au programme de calcul, les variables proposées sont d'abord un entier A pour stocker le nombre de départ et la différence obtenue à l'instruction 4, un entier B pour stocker le nombre obtenu en arrangeant les chiffres dans l'ordre croissant, et un entier C pour stocker le nombre obtenu en arrangeant les chiffres dans l'ordre décroissant. Un élève intervient pour proposer des variables c, d, u pour stocker les chiffres des centaines, dizaines et unités de A. Un autre se demande alors si l'on pourrait entrer directement ces trois chiffres plutôt que le nombre A. Un de ses camarades lui rétorque qu'il faudrait alors programmer la soustraction avant qu'un autre s'oppose à cela en affirmant qu'il suffirait de construire les nombres B et C à partir de ces chiffres. L'enseignant fait alors remarquer que l'énoncé précise : *Choisir un nombre à trois chiffres*.

Dans un second temps, les différentes étapes (décomposition, tris des chiffres, reconstruction, soustraction) du programme de calcul sont établies en classe entière. Le travail fait auparavant sur les variables les rend plus facile aux élèves. Ils les mettent seul en place.

Ensuite l'enseignant demande aux élèves de composer un algorithme correspondant à une étape et de le programmer comme un programme autonome, c'est-à-dire déconnecté des autres étapes. Il y a une prise en compte de l'algorithme comme objet. En effet, l'élève doit ensuite les recomposer comme des briques. Certains élèves posent alors la question de savoir si le premier algorithme (passage du nombre aux chiffres) devrait renvoyer les chiffres dans l'ordre. L'enseignant répond que non.

Chaque groupe d'élèves travaille alors à l'écriture des algorithmes. De nombreux groupes ont le temps de traiter plusieurs étapes (parfois même toutes). Un groupe ne réussit pas à programmer un algorithme qui fonctionne ; ceci étant dû au fait qu'*AlgoBox* ne comprend pas les tests de la forme « $a < b < c$ », mais seulement ceux du type « $a < b$ ET $b < c$ ». Ce problème d'ordre syntaxique n'a pas été pris en compte lors de l'analyse *a priori*.

La plupart des questions des élèves portent sur ce qu'*AlgoBox* est capable de faire ou non (gérer des tableaux, des listes, trouver un maximum, calculer un modulo...).

Les algorithmes proposés sont mis en commun en classe entière.

Pour les deux premières étapes plusieurs types d'algorithmes sont proposés utilisant entre autre les fonctions pré-intégrées d'*AlgoBox*. Pour la reconstruction, un seul type d'algorithme est proposé du type « 100 c + 10 d + u ».

Pour conclure sur cette séance, la programmation de l'algorithme nécessite que l'élève comprenne chaque procédé utilisé, notamment le passage du nombre à la suite de ses chiffres par l'utilisation de la division euclidienne. L'utilisation d'un algorithme de tri simplifié, car les nombres sont constitués de trois chiffres, s'avère nécessaire. Ici, se posent également des problèmes d'ordre syntaxique liés au passage d'une procédure manuelle à un programme effectué par une machine.

Pendant la deuxième séance, suite à l'établissement de la conjecture, deux objectifs distincts se cristallisent. Certains élèves choisissent de démontrer la conjecture en examinant tous les cas (nombres entiers de 0 à 999) à l'aide de l'outil informatique, ce qui introduit la notion de preuve non explicative. Mais, deux groupes d'élèves se posent la question, si l'on ne pourrait pas réduire le nombre de cas à vérifier par la machine. Ils résolvent alors le problème de manière algébrique nécessitant une utilisation de lettres.

En notant a, b et c les chiffres de l'entier N, où $a < b < c$, on a $G = \overline{cba}$ et $g = \overline{abc}$. La difficulté pour l'élève est de calculer $D = G - g$. Ensuite, en étudiant les différents cas, l'élève obtient les différentes valeurs envisageables pour D. Il reste alors à traiter ces différents cas. Au cours de la deuxième séance, les élèves finalisent la démonstration (empirique ou algébrique).

A posteriori nous observons que les élèves ont tendance à opérer une vérification exhaustive des cas possibles à l'étape 2 mais ne s'en contentent pas et s'engagent dans les étapes 3 et 4. Ainsi, deux espaces de travail coexistent un ETA et un $\text{ETM}_{\text{algèbre}}$, chacun associé à un paradigme, preuve par observation et preuve par déduction.

Les conjectures émises par les élèves au cours de la première séance sont allées au-delà de nos attentes, car ils ont identifié la suite 297, 396, 594, 495. Ils ont remarqué qu'après une itération de l'algorithme, ils obtiennent un élément de cette suite. Ils se sont ainsi beaucoup rapprochés de la preuve algébrique basée sur le fait qu'après une itération, on obtient un multiple de 99. Par ailleurs, ils ont identifié des particularités aux nombres de cette suite : le chiffre du milieu est toujours 9 et la somme des chiffres est toujours 18. On est ainsi très proche du critère de divisibilité attendu.

5. CONCLUSION

Le but de notre expérimentation était d'observer le travail des élèves lors de la *planification* d'un algorithme complexe afin d'énoncer une conjecture en l'implémentant dans un ordinateur, puis de prouver cette conjecture par deux types de preuves : une preuve non explicative en travaillant dans un ETA associé à *AlgoBox* et une preuve explicative relevant d'un $\text{ETM}_{\text{algèbre}}$.

Dans l'ETA, nous avons pu observer une grande autonomie chez une majorité d'élèves. Malgré que le travail d'observation dans l'ETA ait aidé l'élève à aborder la preuve dans l'$ETM_{algèbre}$, l'autonomie fut plus relative dans l'$ETM_{algèbre}$, en particulier pour prouver que la vérification par l'algorithme implémenté dans l'ordinateur ne nécessitait qu'un nombre restreint d'entiers à vérifier.

Le fonctionnement de la TSD est probablement dû à une situation prévue pour donner plus de responsabilités aux élèves grâce à une approche par *planification*. L'analyse *a priori* de cette situation nous a mené à établir un découpage précis en phases de travail, afin de distinguer clairement les responsabilités de l'élève de celles de l'enseignant. Cette analyse nous permet de dévoluer la situation aux élèves. Dès que l'enseignant suggère une décomposition de l'algorithme en étapes, les élèves travaillent en quasi-autonomie.

L'étude dans notre analyse *a priori* nous a permis d'identifier les différentes étapes pour la construction de l'algorithme et d'étudier l'adidacticité des élèves dans chacune des phases de travail nécessaires à la mise en place de ces étapes. Le *mixage* de preuves algorithmiques et algébriques est assez bien géré par les élèves à cette période du cursus scolaire (mars de l'année de Terminale Scientifique).

Nous observons que chez une majorité d'élèves, la notion d'algorithme se situe à la limite des niveaux I et II des paradigmes algorithmiques. Ils comprennent rapidement le programme de calcul, puis écrivent facilement l'algorithme en langage naturel. La traduction de l'algorithme en langage de programmation pose chez certains élèves des difficultés d'ordre syntaxique.

6. NOTES

1. D.R. Kaprekar (1905 - 1986), mathématicien indien
2. BO spécial n° 8 du 13 octobre 2011
3. *Espaces de travail spécifiques*, associés à des domaines *d* particuliers (ETM_d) (A. Kuzniak & P. R. Richard)

7. REFERENCES

Artigue M. (1992). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9-3, pp. 281-308.

Bronner, A. (2006). Installation et régulation par l'enseignant de l'espace « parole-pensée-actions-Relations ». Gestes d'étude, gestes professionnels, événements et ajustements. Presses Universitaires de Franche-Comté, pp. 115-116.

Brousseau G. (Réimpression 2004). *Théorie des situations didactiques : didactiques des mathématiques 1970-1990*. Recherche en didactique des mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1998.

Duval R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques ? *Relime, Numero Especial*, pp. 45-81.

Guy M.N. (2013). *Utilisation du cadre théorique de la planification pour la conception d'algorithmes complexes par des élèves de lycée,* Mémoire de M2.

Houdement C. & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 11, pp. 175-193.

Kuzniak A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques, Notes d'habilitation. Paris : IREM Université de Paris VII.

Kuzniak A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 16, pp. 9 – 24 : IREM de Strasbourg.

Kuzniak A. & P. R. Richard (2014) Espace de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives.

Laval D. (2013). Studying the teaching/learning of algorithms at upper secondary level: first steps (Poster) – CERME 8 – Antalya 2013.

THE TYPES OF CHANGE THAT UNDERLIE THE TRANSITIONS AMONG THE DIFFERENT TYPES OF REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS AND THE ETM

Athanassios Raftopoulos, University of Cyprus

Demetris Portides, University of Cyprus

*Gray and Tall (1994) proposed the scheme action→process→object→procept to describe the development of students' understanding of the notion of function. In this paper, we map the conceptual changes underpinning the transitions in the abovementioned series to the mechanisms of change proposed in Raftopoulos and Constantinou (2004). We argue that each transitional step maps into a specific type of the mechanisms of change. We claim that t*he examination of these mechanisms *sheds light on* the reference knowledge and understanding involved in the MWS.

Key Words: *Mechanisms of change, representations of functions, conceptual change*

INTRODUCTION

Gray and Tall (1994) proposed the scheme action→process→object→procept to describe the development of students' understanding of 'function'. In this paper, we map the conceptual changes underpinning the transitions in this series to the mechanisms of change proposed in Raftopoulos and Constantinou (2004). We argue that each transitional step maps into a specific type of the mechanisms of change. We argue that the examination of these mechanisms sheds light on the reference knowledge and understanding involved in the MWS, since the former relates to the substratum on which change operates and which enables the change, and the latter is explained by the reference knowledge and the conceptual change.

In the first section, we discuss the scheme action→process→object→procept that purports to capture the development of the students' notion of function. In the second section, we present a set of mechanisms of change. In the third section, for lack of space, we put forth the mappings between some of the phase transitions in Gray and Tall (1994) scheme and the specific mechanisms of change. In the last section, we explain how these mappings not only shed light on the reference knowledge and the understanding used in the ETM, but, also, enlighten us about the ways the reference knowledge and understanding are intertwined.

REPRESENTING FUNCTIONS

Researchers agree that there are three ways to represent functions: the numerical representation, where functions are represented by tables; the symbolic representation, where functions are represented by equations; and the geometric or visual representation, where functions are represented by graphs. In Raftopoulos and Portides (2012) we adopted this classification and explained why we prefer the terms 'algebraic' and 'spatial' to 'symbolic' and 'geometric' representations. (For example, the term ‘spatial representation” allows us to include in the same category both ‘geometric’ and ‘graph’ representations of functions, which, their differences notwithstanding, both rely on the representation of space.)

Gray and Tall (1994), proposed the scheme action→process→object→procept to describe the development of students’ understanding of the notion of function, that is, the development of the representations of functions. Researchers have undertaken the task to correlate the phases of this scheme to the various forms of representations of functions. The overall consensus seems to be the following.

Action

The numerical representation of functions fits the action part of the scheme since the student corresponds a number from one table to a number from another table in a series of distinct actions guided only by the instruction to map numbers between tables. Differently put, the numerical representation favors thinking of a function as a sequence of isolated calculations or manipulations, that is, actions.

Process

The algebraic representation of a function, that is, the representation of a function by an equation fits the process phase of the scheme, since it also allows actions but not in the way of the numerical representation because all the actions are united under a unifying formula; that is, the student’s actions are guided by this formula. At the process level, a function allows the correspondence between the values of two tables but it also allows the construction of tables of variation, the calculation of the derivatives of a function, and the construction of the geometrical figure of the function. Thus, the representation of a function as a process increases the number of operations that one can perform. To do all these, however, one need not view functions as objects.

Object

The algebraic representation, by representing functions as formulas, partially fits the object phase of the scheme. Consequently, the algebraic representation may be thought as supporting viewing functions globally, that is, as whole objects and processes. Raftopoulos and Portides (2012) and Vandebrouck (2010) claim that representing functions by means of formulas allows at some level the conception of function as an object, which does not correspond to any of the ordinary objects of our experience; after all, it is just a set of symbols on a piece of paper.

The spatial and algebraic representations are not equivalent in their capacity to present the objecthood of a function. (Raftopoulos and Portides 2012; Vandebrouck 2010). Algebraic representations do not readily lead one to construe functions as whole objects. Spatial representations, on the other hand, by representing functions by means of a concrete schema, which is an object, relate immediately functions to objects and render the comprehension of a function as an object more direct. Hence, the spatial representation most naturally fits the object part of the series.

Procept

The spatial representation of a function (its representation either as a graph or as a geometrical figure) acts as scaffolding that may allow students to pass from the point-by-point representation of a function to a global view of the function as an object. Grounding the algebraic representation of a function on a spatial representation (be it a graphical or a geometrical representation) that is more tangible as an object that exists in space allows students to understand that the algebraic and the spatial representation refer to the same entity, a function, and also that the properties of the one system correspond to a certain extent to properties of the other. At the procept level, students understand functions both as complete objects and as processes. Thus. the procept allows understanding functions both as complete objects that one can come to know, and as processes with which one can perform operations. Finally, the construction of the representation that fits the procept requires the coordination of both the algebraic and the geometrical representation.

In Figure 1 we synopsize the relations between the different forms of the representation of function and the phases in the developmental series.

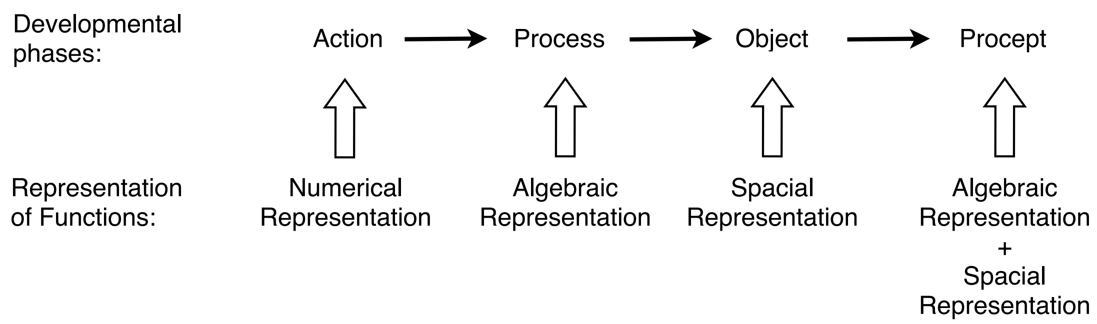


Figure 1: Developmental transitions in function understanding and corresponding representations of functions

Types of Conceptual Change

Raftopoulos and Constantinou (2004) proposed two main types of mechanisms of conceptual change: Mappings, in which structures are mapped, and Tunings, which include ways of modifying a structure. Mappings contain Bridging and Fusion. Tunings contain Differentiation and Refinement. Here we discuss only the class of mappings, since the types of conceptual change in the series action→process→object→procept belong to this class.

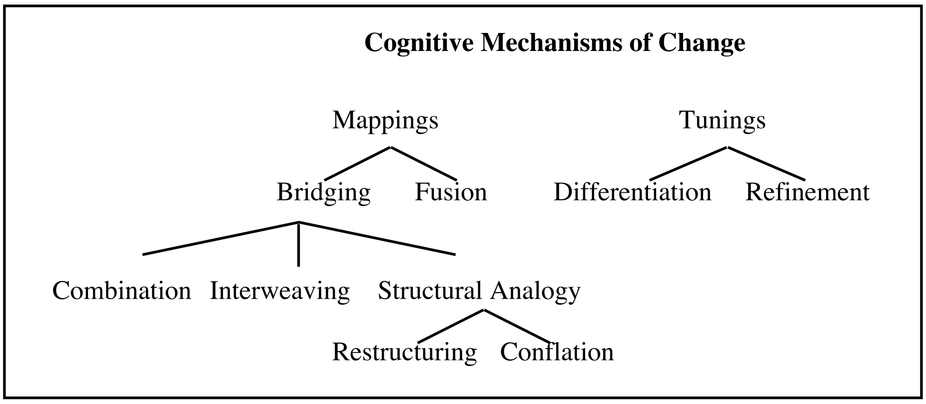


Figure 2. Mechanisms of Cognitive Change

Bridging is a type of cognitive change that characterizes the construction of a new mental structure by means of a combination of existing structures. Bridging is a class of three types of change. The unifying feature of this class is that (a) two or more existing structures are brought together to bear on each other and form a more complex structure, and (b) after bridging the constituent structures retain their functional autonomy, even though they may have been modified.

The blended structures may undergo modification, as it happens in Interweaving. In interweaving, the integration of previously unrelated mental units for the sake of the construction of a new mental unit may engender a preference for the use of the new unit and an ensuing reduction in the use of the units involved in the integration, although these units may still be available. Interweaving, thus, denotes the type of change that is characterized by the blending of the structures involved and the modification of their probability of use in favor of the new representation. The interweaving of hypothesis formation with the isolation-of-variables ability results in the model construction ability. Although each of the two specialized integral abilities is present, the model construction ability will dominate the other abilities.

The last type of change in Bridging is Structural Analogy, which contains two types of change, namely, Restructuring and Conflation. Restructuring is exemplified in the mapping from the domain of wave mechanics to the domain of the phenomena of light and the resulting formation of the structure "light wave" offers an additional example. "Wave" and "light" existed before, as independent well formed structures, and the mapping blends them. But after the formation of the construct "light wave" the constituent structure "light" undergoes a profound restructuring, and when used again is not the same structure as before. The restructuring of one domain on the basis of transfer from another presupposes the discovery of more abstract structure that applies to both domains, despite their surface differences.

THE MECHANISMS OF CHANGE UNDERLYING THE TRANSITIONS IN FUNCTION REPRESENTATIONS

The mapping of the transitions from one form of representation of function to another in the series action→process→object→procept to the mechanisms of change that we propose is:

- The transition action→process is mapped to interweaving.
- The transition object→procept is mapped to restructuring.

Action (Numeric Representation) → Process (Algebraic Representation)

We saw that the numerical representation of functions naturally underlies the action part of the above scheme since a number from one table is mapped to a number from another in a series of distinct actions guided by the instruction to perform this mapping. Thus, the numerical representation in which functions are represented by tables favors thinking of functions as sequences of isolated manipulations or actions.

When students pass from representing functions as actions to representing them as processes they cross from the numerical representation to the symbolic algebraic representation of functions. To achieve this, they have to map tables and inter-table mappings to symbols and symbolic relations. Now, the inter-table mappings relate numbers from a table to numbers from another. To transform these mappings to an equation, the students have to discover the relation underpinning the mappings and also translate the numbers and their relation to symbols. Moreover, they must use the symbols that substitute for the specific numbers as variables, that is, as symbols that can take on different values. In this sense, these symbols, unlike the symbols used to represent specific numbers, are abstract.

The two domains that are mapped, namely, the domain of tables and the domain of symbolic relations are quite dissimilar and, originally, unrelated. The student has to discover or understand when taught both the hidden structure that allows the translation from one domain to the other, that is, the relation that maps the numbers from the one table to the other, and the substitution of concrete numbers by variables.

This results in the construction of the algebraic representation of functions. When the construction takes place, although students retain the ability to perform mappings between two tables, they do not use mappings to solve function-problems, because the abilities conferred by the algebraic representation allow them to solve problems in an easier, speedier, and more reliable manner. In other words, the process level retains the characteristics of the action level and the capabilities related to them but these are not used anymore. Furthermore, using the algebraic representation allows students to solve successfully problems that were unsolvable through mappings. The new representation expands the domain of the problems that can be addressed since its structure is richer than the structure of the previous representation; it allows, for example, the calculation of the derivatives of a function and the construction of the geometrical figure of the function.

Interweaving is the mechanism of conceptual change in which previously unrelated representations are integrated to construct a new more complex representation that may engender a preference for the use of the new representation and a reduction in the isolated use of the interweaved representations, although these representations are still available to the thinker. In view of these, we think that the mechanism of conceptual at work in the transition action→process is interweaving.

Object (Spatial Representation) → Procept (Amalgam Of Spatial And Algebraic Representation)

The construction of the procept requires the mapping of the spatial representation of a function to the algebraic representation of the same function. The new representation that emerges, the procept, allows understanding functions either as complete objects or processes. It also allows students to coordinate the global and the point-by-point view of functions, which assigns concrete meaning to the abstract algebraic formula relating it directly to an object, namely the geometrical scheme of the function.

As a result, the representation underpinning the procept allows the student to benefit from both worlds by combining their relative advantages and strengths either to address more difficult problems. To comprehend all these facets of function, the student should (a) understand that different representations of this entity refer to the same mathematical being; (b) understand that the algebraic abstract representation is grounded in a geometrical, more concrete representation that renders the implicit relations 'hidden' in the algebraic formula explicit by deploying them in space and making them readily available to the senses; and (c) understand that functions are not reduced to spatial representations and, thus, that it is not the case that each curve is a function or that each function is a curve. This emphasizes the abstract character of functions as mathematical entities.

The above demands are not easily met. The restructuring of one domain on the basis of transfer from another presupposes the discovery of more abstract structure that applies to both domains to which the two structures belong. The cognizer has to undertake a more active role and construct knowledge rather than simply relying on experiential connections to establish it, since she has to overcome the fact that the two structures usually have surface differences and discover some structural similarities that enable the mapping.

We saw in examining the mechanisms of conceptual change that in restructuring the two structures that map onto each other existed before as independent well-formed structures and the mapping blends them but both structures remain transparent in the new representation. After the formation of the new more complex construct, however, at least one of the constituent structures undergoes a profound restructuring.

In the case of the mechanism that leads to the formation of the procept, the spatial and the algebraic representation that blend together and are coordinated existed before as independent structures, each with its own expressional capabilities. Moreover, after the coordination, the algebraic representation undergoes a profound, ontological change; it acquires a concrete meaning through its association with its spatial representation. For these reasons, we are led to believe that the kind of change underlying the construction of the procept is restructuring.

CONCLUDING DISCUSSION

Any discussion of reference knowledge and understanding in the context of MWS should address the processes stipulated at the epistemological and the cognitive levels of MWS and GWS. The reason is that ‘reference knowledge’ and ‘understanding’ are both epistemic and cognitive notions. ‘Reference knowledge’ refers to the knowledge associated with some domain or representation that guides visualization, construction, and proof, which are the three components of the cognitive level of MWS. At the same time, it is associated with the epistemological level at which the usage of real space, constructive artefacts, and the definitions and properties of geometrical objects, allow the solution of geometrical problems effectuated by the mapping of the cognitive to the epistemological level of MWS through the figural, instrumental, and discursive geneses. It should be noted that our conception of ’reference knowledge’ expands the view found in the standard accounts of MWS, according to which ‘referential knowledge’ is situated at the epistemological level and consists in a theoretical reference system based on definitions and properties that is associated through discursive genesis with proof at the cognitive level. It also differs from the view of ‘referential knowledge’ as a ‘référentiel théorique’ in the epistemological plane, which contains the visible part, and the institutionalized part (written in textbooks or stated by a teacher) of the mathematical knowledge at stake, although it includes them since it is expressed by them.

Each representational change produces a new reference knowledge that characterizes the newly acquired conceptual representation. Similarly, ‘understanding’ refers both to the capabilities of students to manipulate and explain the reference knowledge used for the solution of a problem given a certain conception of functions, and to the new capabilities available to students given a more advanced conception of functions, in so far as the transition from one conception to the next enhances the understanding of functions. Students, for example, who construe functions as processes tend to think of them as dynamic transformations, whereas students that construe them as objects think of them as input-outputs to higher-order manipulations.

Each transition in the action→process→object→procept series is a conceptual change that leads to a more complex conception of function. This change endows students with the ability to address an extended range of problems and solve problems that they could not solve before. Thus, each conceptual change entails not only extended reference knowledge, but also reference knowledge that may differ partly from the previous reference knowledge. Constructing the procept, for example, enables students to coordinate the algebraic and spatial representations of functions, which, in turn, allows students to construe functions as objects with which one can do various operations. This view of functions was not an ingredient of the reference knowledge underlying either the process or the object level.

This explains both the new solving abilities and understanding that students acquire as they gradually progress from action to procept, which improves their problem solving as evidenced by several researches. This is so because performance is expected to depend on the level of the understanding of the concept of function, and on the reference knowledge associated with this level. That is, the more advanced the notion of function the better the understanding of what is a function and how it works and, hence, the more advanced the reference knowledge, and, thus, the higher the success in problem solving.

It is reasonable to assume that students' performance in problems involving functions depends on the level of understanding of the concept function on the part of the students. Specifically, the more advanced the notion of function is, the better the understanding of what a function is and how to use it, and, thus, the better their performances. Since the understanding of functions results from the sequence action-process-objet-procept, one would expect the students who think of functions as procepts to achieve better performances than other students who do not conceive of functions as procepts. Similarly, students who think of functions as objects ought to exhibit more flexibility in solving problems than students who are still at the procedural level. In fact, students at the procedural level find the solutions of certain problems very difficult, while other students who operate at higher levels of understanding the concept of function show a greater flexibility (Gray et al. 1997). Generally speaking, students who construe of functions as actions think of a function as a series of operations or isolated manipulations that are used to obtain the output value, given an input value (Cuoco 1994). Students who construe of functions as processes, on the other hand, tend to think of functions as dynamic transformations. Students who understand functions as objects are inclined to think of them as atomic structures that could be the inputs or outputs of higher order processes. Finally, students who understand functions as procepts are able to use functions either as objects or as processes depending on the problem at hand (Cuoco 1994).

Evidently, students' progression from the construal of function as an action to its view as a procept is interlinked with the wider traits in child development. In Piaget's theory, actions are the basic source of every kind of knowledge. Thus, actions on elements of reality do constitute the source of mental operations and knowledge about number. This is somehow integrated in any theory of cognitive development. However, there is something more than this general postulate in Piaget's theory. Piaget considered number as a synthesis of the logic of classes and that of relations. Thus, he maintained that in number one sees both the actions of classification and the actions of seriation. The actions emanating from classification, when inter-coordinated, lead to the concept of cardinal number. The actions emanating from seriation, when inter-coordinated, lead to the concept of ordinal number. Eventually, by the age of about seven when the structure of concrete operations is established the two aspects of number are inter-coordinated so that the child understands the relations between cardinal and ordinal number.

According to a more recent theory (Demetriou et al, 1993), all elements of reality can potentially undergo quantitative transformations. Things aggregate or separate so that they increase, decrease, split, or multiply in space or time for many different reasons. At another level of organization, this system involves abilities and skills of quantitative specification, i.e., counting, pointing, bringing in and removing, and sharing. Internalization of these skills into coordinated mental actions results in the four basic arithmetic operations, which provide understanding of the basic quantitative functions of increase, decrease, etc. This level involves rules and operations for identification of various types of relations. Understanding fractions or are examples of these processes. The ability to conceptualize dimensions such as height, weight, and volume are other examples, as are the operations required to indicate relationships between different dimensions, for example, the relationship between changes in height and weight in nature. These processes form the basis of complex mathematical thinking, such as proportional reasoning.

A yet another level involves all kinds of factual knowledge about the quantitative aspects of the world: numerical knowledge, such as, the multiplication tables, the meaning of mathematical symbols, and content knowledge of the various branches of mathematics. Therefore, number originates from the intersection of quantity-specific functions in the perceptual systems, which evolved to be able to grasp the quantitative aspects of reality, and from actions performed on things in order to manipulate their numerosities.

- The Piagetian and neo-Piagetian perspectives converge on the following structural model of intellectual growth:
- Sensorimotor stage (from 1 month to 18 months) at which first-order relations can be understood;
- Interrelational stage (1 ½ yrs to 5 yrs) at which second order relations can be grasped;
- Dimensional stage (5 yrs to 11 yrs), at which third-order relations can be understood; and
- Abstract dimensional stage at which fourth-order relations can be understood. This stage is divided into three substages: substage 1 (11-13 yrs), substage 2 (13-15 1/2 yrs) and substage 3 (15 ½ to 19 yrs). Substage 2 children acquire the general capability to differentiate two different parameters whose function is easily confused or two different functions that are easily confused. Substage 3 children, finally, acquire the general competence to think about the relationship between two abstract mappings and built a second-order model of such relationships.

This brief developmental outlook contributes to explaining the *action→process→object→procept* development of the concept of function. As the child grows developmentally, it becomes able to build increasingly abstract structures and to coordinate information from different sources that can be held in memory in parallel. Since the child initially starts from the level of concrete actions on objects, it is only natural to treat initially functions as affording actions. At the other end of the spectrum, functions are construed as abstract objects conforming to the notion of procept. Consider for example the findings of Gagatsis and Siakkali (2004), according to which 16-17 yrs old grade eleven students were able to use simultaneously and, thus, coordinate both the algebraic and the geometric representations of functions to take advantage of the information offered by these two representational forms. The researchers called this, the coordinated approach. Bearing in mind the developmental sequence presented above, we notice that the capability for such coordination is rendered possible at the third sub stage of the abstract dimensional stage, at which children are indeed able to construct second-order mappings and, thus, coordinate information from two different abstract structures. At this stage, the students have built the procept conception of functions. In contradistinction, 14-15 yrs old students at the ninth grade, fail to coordinate algebraic and geometrical information of the same function and show a marked a compartmentalization, treating the two representations as completely different. The students can conceive of functions as either algebraic or geometrical objects, but they cannot coordinate these two conceptions.

We would like to point out at this juncture that even though there are hardly any curricula where functions are tackled orderly according to, first, their numerical representations, second their algebraic representations, and, third, their spatial representations, since all these representations do usually occur concurrently in an hybrid form, the point is that students will draw information from the hybrid form according to their level of understanding, favoring procedural, spatial, or proceptual information, and will confront problems accordingly.

Relating 'reference knowledge' and 'understanding' to specific levels of representation paves the way for using the mechanisms of conceptual change that underlie the transition from one representational level to another to (a) explain the emergence of each new reference knowledge and understanding associated with a specific level of representation; (b) account for the differences between the newly acquired reference knowledge and understanding and the previous ones; (c) explain why and how the new reference knowledge and understanding enrich the capabilities of students to solve problems related to functions; and (d) understand the ways reference knowledge and understanding are intertwined and constrain each other.

Here we discuss only one example. The reference knowledge in the spatial domain, in order to be redeployed to the algebraic domain requires a set of cognitive processes that put this knowledge into practice and effectuate fusion. These are:

(a) a process of visualization related to the representation of space; (b) a process of construction and use of instruments (rulers, compass, etc.) and the respective geometrical configurations. In the fusion, this is used to construct the reference frame, to connect points on the two axes, etc.; and c) a discursive process producing argumentation and proof. This is used to map the relation expressed in the algebraic formula to a relation between points in the frame of reference, that is, to determine which point along the axis X maps to which point along the Y-axis.

These cognitive mechanisms transform the reference knowledge contained in the algebraic representation that characterizes the process level into the reference knowledge contained in the spatial representation characterizing the object level, by fusing it with the domain of spatial representations.

We claimed above that the specification of the mechanism of conceptual change and the cognitive mechanisms that support it sheds light on two problems, namely, explain why and how the new reference knowledge and understanding enrich the capabilities of students to solve problems related to functions, and understand the ways reference knowledge and understanding are intertwined and constrain each other. Let us tackle the first problem. In Raftopoulos and Portides (2012) we explained why the construction of the geometrical representation of function improves problem solving, and we also explained the restrictions to this claim. The main point of our discussion was that the analogical nature of the spatial representations renders a wide class of problems that were difficult to solve using the algebraic representation more accessible when augmented by symbolic structure to allow for proof.

Let us close with a call for caution. We have argued for a set of mechanisms of change, and we have proposed that the transitions from one level of understanding of the concept of function to the next could be mapped to a specific mechanism of change. All of these do not entail that either the transitions from one level of understanding, or the function of the mechanisms of change are either an all- or-nothing matter or a linear transformation. It is well known from dynamic system theories that such transitions are very seldom linear and an all-or-nothing affair. Instead, oscillations in performance, developmental regressions, and other non-linear phenomena are the order of the day. These problems are accentuated by the fact that there are hardly any curricula where functions are tackled according to, first, their numerical representations, then, second their algebraic representations, and, finally, third their spatial representations. Thus, our claim has been not that each individual student falls in within the presented pattern, or that in each student the conceptual transitions follow the proposed pattern, or even that there is a neat one-to-ne correspondence between conceptual development and student’s performance, or that once a level of understanding is achieved there are no fall backs. Rather, our claim is, first, that the macro-developmental view of the conceptual changes with respect to the notion of function corresponds in large to the series that culminates with the formation of procept and, second, that each conceptual transition is effectuated by a specific mechanism of change. The micro-developmental view, however, fully conforms to the strictures of dynamic systems theory.

A closely related problem concerns the gradual character of conceptual change, which seems at a first glance to be in conflict both with both experience (*ah-ha! I’ve got it now)*, and to our claim that conceptual change is achieved through a set of mechanisms. However, the fact that developmental change is effectuated through some mechanisms does not entail that the developmental transition takes place abruptly. Since these mechanisms act at the micro-developmental level by shaping understanding according to the non-linear dynamics of the system, they operate in a gradual way leading to the acquisition of a more advanced concept of function, a path that is also characterized by occasional set-backs. The fact that at some point the student experiences a "ah-ha, I've got it now" sort of experience should not be taken to mean that the conceptual development that took place was not gradual. What happens is that, as predicted by non-linear dynamic system theories, a point in time is reached when critical mass effects occur and a catastrophe takes place in the form of the acquisition of a new capability or of a more advanced concept. The process of conceptual change driven by some mechanism of change, however, was gradual, in the sense that the system constructs its new capabilities gradually.

REFERENCES

Cuoco, A. (1994). Multiple representations of functions. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematic Learning* (pp. 121-140). Washington, D.C: MAA.

Demetriou, A., Efklides, A., & Platsidou, M. (1993). The architecture and dynamics of developing mind: Experiential structuralism as a frame for unifying cognitive developmental theories. *Monographs of the Society for Research in Child Development,* 58 (5-6, Serial No. 234).

Gagatsis, A. and Shiakalli, M. (2004). 'Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving', *Educational Psychology* 24(5), 645-657.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal of Research in Mathematics Education, 26*.2, 115-141.

Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work. Viewpoints and Perspectives. Special issue of *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.

Raftopoulos, A. & Portides, D. (2012). The concept of function and its spatial grounding. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, 17,* 169-195.

Raftopoulos, A. & Constantinou, C. P. (2004). Modeling cognitive change. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.), *Emergence and Transformation in the Mind: Modeling and Measuring Cognitive Change* (pp. 74-118). Cambridge: Cambridge University Press.

Vandebrouck, F. (2010), Espaces mathématiques de travail en analys, *In Proceedings of the Symposium Franco-Cypriote "Mathematical Working Space"* (pp. 157-174). Paris, France.

PRAGMATIQUE DE LA CONSTRUCTION ET DU FONCTIONNEMENT DES ESPACES DE TRAVAIL GEOMETRIQUES.
ETUDE DE CAS EN GEOMETRIE DANS L'ESPACE SYNTHETIQUE AU LYCEE.

Schlosser Fabien, Université de Bordeaux

Nous traitons dans cet article la question ontologique de la construction et du fonctionnement interne des ETG personnels des élèves lors de la résolution de problèmes, et plus précisément du plan cognitif de ces espaces. Nous abordons en particulier le principe de construction des objets de la géométrie dans l'espace en nous positionnant dans un paradigme sémiotique. La représentation de ces objets par les élèves, ainsi que la production de raisonnements au sein des ETG sont également étudiés. Cette contribution s'inscrit dans le thème 1 du symposium ETM 4, intitulé : « Le travail mathématique et les Espaces de Travail Mathématique ».

Mots clés *: Géométrie espace – Sémiotique triadique – Processus cognitifs*

INTRODUCTION

Le modèle didactique des espaces de travail géométriques est structuré depuis 2012 en deux plans que sont les plans épistémologiques et cognitifs (Kuzniak, 2012). Le premier est constitué d'objets mathématiques (l'espace réel, les artefacts et le référentiel), alors que le second regroupe des processus cognitifs (visualisation, construction et preuve). Se pose alors la question des différentes genèses de ces objets et processus, du point de vue de l'espace de travail géométrique personnel de l'élève. Nous traitons dans cet article la question ontologique de la construction et du fonctionnement du plan cognitif des espaces de travail personnels des élèves du lycée général. Le but d'une telle étude est bien de comprendre les processus d'apprentissage de la géométrie chez les élèves, ainsi que l'origine des écarts de leurs ETG personnels avec l'ETG institutionnel. Nous nous placerons dans le cadre particulier de la géométrie dans l'espace, qui a été l'objet de notre thèse (SCHLOSSER, 2012).

Nous abordons cette problématique en nous positionnant dans une perspective sémiotique. En effet, les mathématiques représentent un système théorique de signes, pour lequel chaque individu produit une interprétation propre qu'il met en fonctionnement dans un système pratique de signes. L'étude pragmatique des signes mathématiques permet à la fois de définir la notion particulièrement délicate d'objet, présente au sein du plan épistémologique, et de comprendre de quelle manière l'élève peut produire des signes personnels (des représentations d'objets), à partir d'autres signes.

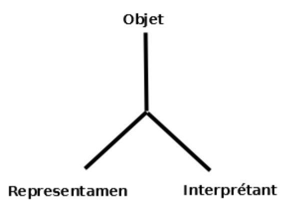
Le modèle sémiotique retenu pour étudier la production de signes par les élèves au sein des ETG, est celui de la sémiotique triadique de Peirce. Celui-ci met en œuvre la distinction fondamentale entre signe premier, second et troisième. Après une brève présentation du modèle de Peirce, nous montrerons que c'est la notion centrale de signe interprétant qui permet de comprendre les mécanismes de production de connaissances et de signes en général. Le principe de renvoi illimité entre signes permet quant à lui de définir la notion d'objet. Nous illustrerons notre propos par le cas particulier du concept de plan en géométrie spatiale. En tant qu'objet géométrique, le plan peut être représenté par des signes de nature iconique, indicielle ou symbolique. Mais plus que les natures propres de ces signes, ce sont leurs renvois mutuels qui nous intéressera. Nous identifions les notions de fonctions sémiotiques, la principale étant la fonction indicielle. Nous montrerons en particulier que la focalisation sur la fonction iconique des signes (la maquette remplissant cette fonction de manière emblématique) peut constituer un obstacle didactique à l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Dans le cas du concept de plan, les signes utilisés pour définir cet objet dans le référentiel théorique du cours du professeur, forment un interprétant souvent trop parcellaire.

La démarche de notre recherche est basée sur l'analyse micro-didactique, c'est-à-dire «du bas vers le haut», en partant d'analyses d'ETG locaux correspondant à des moments de classe, pour parvenir à la définition d'ETM globaux. Pour cette raison, le plan cognitif de l'ETG défini par Kuzniak A., a été structuré en trois nouveaux plans : le plan syntactique, sémantique et pragmatique. Nous montrerons que la dualité iconique/symbolique dont est fortement emprunte la didactique de la géométrie dans l'espace est insuffisante pour comprendre la construction et le fonctionnement des connaissances géométriques.

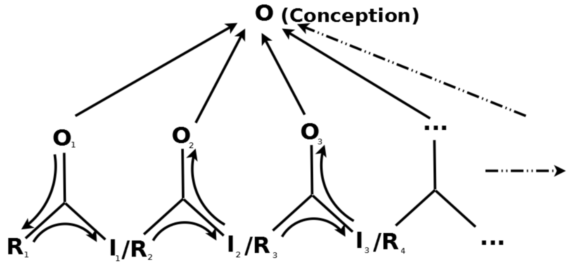
1. LA NATURE DES OBJETS EN GEOMETRIE DANS L'ESPACE

1.1 La sémiotique triadique de Peirce

Le modèle sémiotique de Peirce repose sur l'idée qu'un objet renvoie à tout ce qui vient à la pensée et que tout ce qui vient à la pensée est un signe. En fait, « tout signe est mis pour un objet indépendant de lui-même ; mais il ne peut être un signe de cet objet que dans la mesure où cet objet a lui-même la nature d'un signe, de la pensée. Car le signe n'affecte pas l'objet, mais en est affecté, de sorte que l'objet doit être capable de communiquer la pensée, c'est-à-dire doit avoir la nature de la pensée ou d'un signe » (Peirce C.S., 1931-1935, 1.538). De part cette définition, il ressort que le signe représente l'objet (il s'agit du *representamen*). Il peut donc générer potentiellement autre chose que l'objet qu'il représente : il s'agit du signe interprétant. L'interprétant est le « signifié propre » du signe (Peirce C.S., 1931-1935, 5.473-5.475), le résultat ou l'effet possible de ce signe. Chaque signe est ainsi pris dans une relation triadique pouvant être schématisée ainsi :



Chaque interprétant étant lui-même un signe, il peut à son tour être inclus dans une nouvelle relation triadique avec un autre interprétant, et ainsi de suite. C'est de cette manière que Peirce définit le processus sémiotique, illimité par nature. Un individu ne sera certes pas en mesure de réaliser un processus infini et ne prendra en compte qu'une suite finie d'interprétants. Pour Peirce, ce qui permet de limiter la série d'interprétants, pour le moins provisoirement, c'est l'habitude. Nous pensons que cette série limitée d'interprétants associés à un (ou éventuellement plusieurs) representamen d'un objet, constitue une conception, une représentation de cet objet.



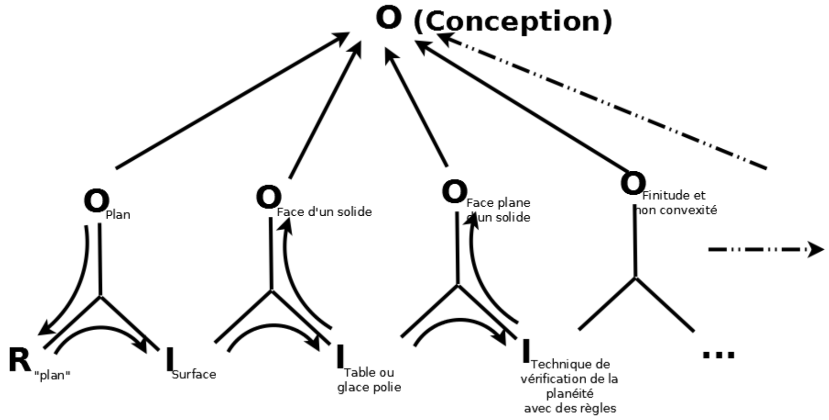
1.2 Le cas du plan en géométrie dans l'espace

Plusieurs types de définitions sont donnés dans les traités de mathématiques et dans les manuels scolaires. En particulier, certaines définitions font appel à l'intuition ou procèdent par analogie avec des objets matériels. C'est le cas de la conception platonicienne des objets géométriques, dans laquelle ces derniers sont construits par réduction de dimensions : le solide étant donné (dimension 3), la notion de frontière permet de définir la surface (dimension 2), puis la ligne (dimension 1) et le point (dimension 0). D'autres définitions sont basées sur des objets de la géométrie du plan précédemment construits. Par ce chemin opposé, souvent qualifié de génético-ontologique, les objets de l'espace sont construits par le principe d'extension de dimension (ce qui nécessite l'entrée en jeu du mouvement, des transformations de l'espace comme les rotations et les translations, voire les réflexions) : la ligne (ou la droite) est générée à partir des points, la surface (ou le plan) à partir des droites et le solide à partir des plans. Enfin, certaines définitions d'objets tels que le plan, sont tout bonnement passées sous silence. Dans tous les cas, le choix de ces définitions conditionne un interprétant propre, pouvant générer des obstacles didactiques. Le principal obstacle est celui du morcellement du référentiel définitoire de l'ETG personnel.

1.2.1 Construction du plan par des interprétants intuitifs ou extraits de l'expérience

La conception naturaliste des objets géométriques ressort typiquement dans le positivisme de A. Comte (1830-1842) :« Il serait en effet impossible de se représenter une surface autrement que comme une plaque extrêmement mince et une ligne autrement que comme un fil infiniment délié ». Ici, les définitions géométriques sont « empiriques, extraites de la réalité : ce sont des abstractions de l'expérience »

(Jullien V., 1996). On retrouve également ce paradigme dans la définition du traité de Camberousse Ch. et Rouchier Eu. (1931) : « La plus simple de toutes les surfaces est le *plan*, dont une glace polie peut donner l'idée. La définition géométrique du plan consiste en ce que toute droite qui joint deux points de cette surface y est contenue tout entière. C'est ainsi par exemple, que, pour vérifier si une table est plane, on s'assure qu'on peut y appliquer *dans tous les sens* une règle bien dressée, sans qu'il reste aucun vide entre la table et la règle ». Dans cette première définition, l'accent est mis sur l'intuition du concept quotidien d'un objet plan, plus que sur le caractère illimité.



Comme on le voit sur ce schéma le glissement sémiotique, voire la substitution sémiotique du plan mathématique par une face plane limitée est fortement probable pour un élève. Ainsi, l'interprétant final du plan peut mener, de proche en proche dans le processus sémiotique, à une conception tronquée du plan géométrique.

Le plan défini comme « surface qui partage l'espace en deux partie congruentes » relève quant à lui d'une intuition initiale de l'espace tridimensionnel. Le plan peut dès lors être vu comme invariant par une réflexion en dimension 3 comme chez Leibniz.

La définition du professeur dans la séquence de classe faisant l'objet de notre thèse (Schlosser, 2012) procède en partie de l'interprétant de la face : « une face va nous matérialiser un plan, une arête matérialise un segment», et de conclure « le plan est infini, c'est-à-dire qu'il se prolonge au-delà de la face du cube ».

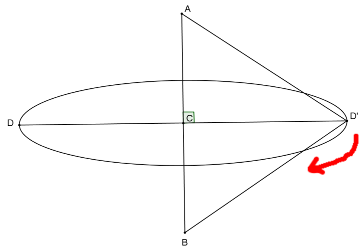
1.2.2 Construction du plan par des interprétants génético-ontologiques

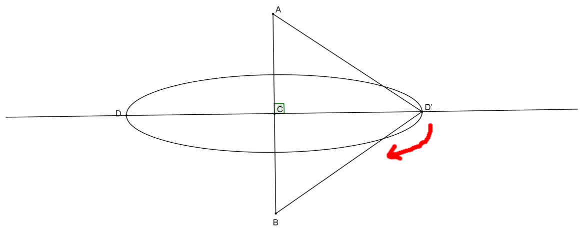
Le procédé de définition du plan par Roberval relève de ce type de genèse. Il écrit en effet (in Jullien V., 1996) : « On appelle une superficie plane, celle qui est également posée et étendue entre ses lignes, c'est-à-dire que toute ligne droite qui convient à cette superficie par deux points, en quelque position que ce soit, lui convient de toute sa longueur, la ligne droite et la superficie étant prolongées et étendues indéfiniment.

Cette superficie est appelée simplement un plan.

Son existence est ordinairement supposée tacitement et sans preuve mais elle peut être démontrée, comme de fait nous la démontrerons ».

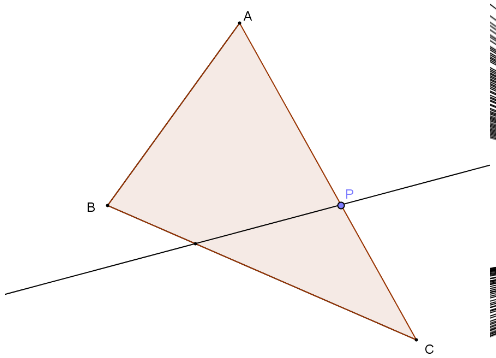
Cette démonstration d’existence est faite en engendrant le plan par le mouvement d’une droite (sur le dessin ci-dessus, la « ligne » en rotation autour de (AB) génère une surface. Sur la deuxième figure, la ligne étant supposée indéfinie, elle génère un plan).

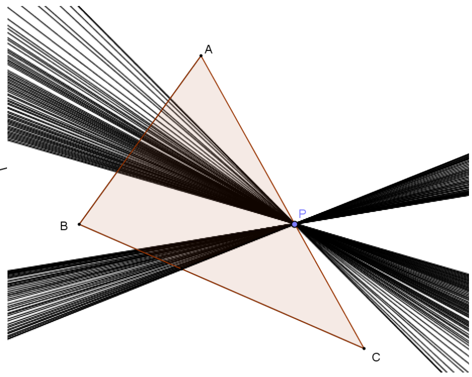




Il faut noter que ce n’est qu’après avoir défini le plan et démontré son existence, que Roberval démontre que deux droites sécantes sont coplanaires (proposition-théorème 15 du livre II), puis que tout triangle est sur un plan (proposition-théorème 16 du livre II) et enfin qu’un plan est entièrement caractérisé par trois points (proposition-théorème 17 du livre II).

Remarquons que Roberval fournit également une méthode quasi instrumentale de génération d’un plan à partir d’un triangle : il s’agit sur la figure ci-dessous de la rotation de la droite passant par un point fixe P sur un des côtés du triangle (à l’exclusion des extrémités) et par un second point mobile sur les deux autres côtés.

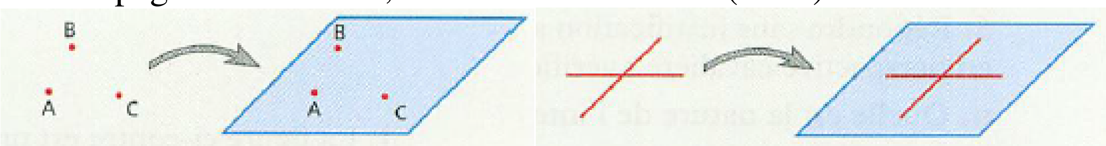




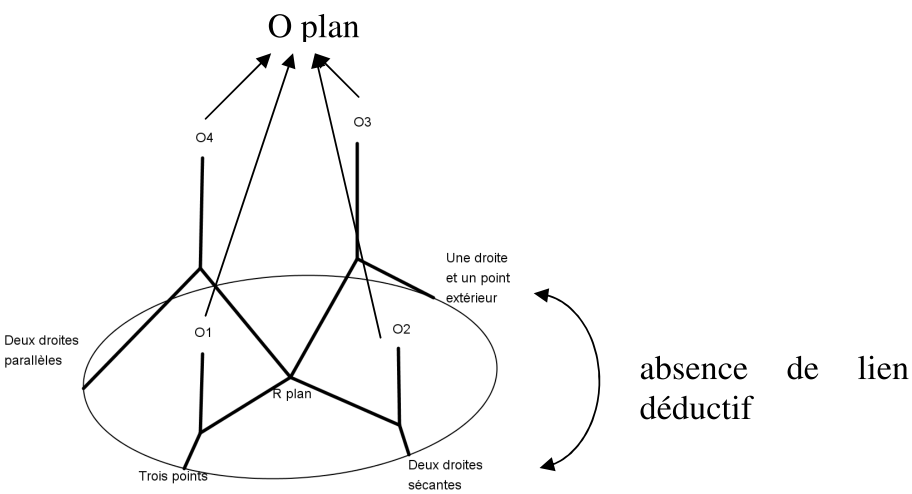
Par opposition à la conception du plan par analogie à des objets sensibles (ayant des caractéristiques communes partielles), les objets de l’espace sont liés chez Roberval par des processus de construction.

Sans nécessairement construire un lien de génération cinétique entre objets, de nombreuses définitions du plan se basent sur un lien d’inclusion, comme chez Hadamard (1901) : « On appelle PLAN une surface telle, que toute droite joignant deux points de cette surface y est contenue toute entière ». Puis il prend pour axiome le fait que « par trois points quelconques de l’espace, il passe un plan » (il montre que ce plan est unique), puis en déduit les autres caractérisations du plan. Il considère le cas particulier de l’objet géométrique contenant une droite et pouvant ainsi être une droite, un plan (contenant cette droite) ou bien l’espace entier.

Choquet quant à lui définit le plan à partir des droites : « Un plan est un ensemble […] D de partie de Π appelées *droites* ». On retrouve ce principe dans les manuels de seconde qui citent uniquement les déterminations d'un plan. Pour certains d'entre eux, le plan est défini par trois point, puis les autres déterminations sont présentées (deux droites sécantes, une droite et un point et deux droites parallèles). Pour d'autres, toutes ces déterminations sont présentées simultanément sans hiérarchisation et sans lien de déduction entre ces déterminations : ils débutent par les positions relatives de deux droites, puis de deux plans sans définition du plan. C'est souvent le concept de coplanarité qui est uniquement abordé : « deux droites sont coplanaires lorsqu'elles sont contenues dans un même plan ». Ces définitions sont parfois accompagnées de dessin, comme dans Modulo (2004) :



La principale particularité de ce type de définition du plan est qu'elle procède par association directe de signes, sans autre lien de génération ontologique. Les représentations iconiques de ces objets mis en relation suivent un principe de superposition iconique que le schéma ci-dessus montre clairement : superposition du signe représentant le plan aux signes représentant les points ou les droites. Dans ce type de dessin, il y a ainsi une perte d'information, celle contenue dans le mot « détermine » de la définition, qui présuppose un lien de génération. Une autre caractéristique de ces démarches est qu'il y agrégation de plusieurs interprétants sans liens déductifs entre ces interprétants comme par exemple la preuve de l'équivalence de ces deux déterminations[1] :

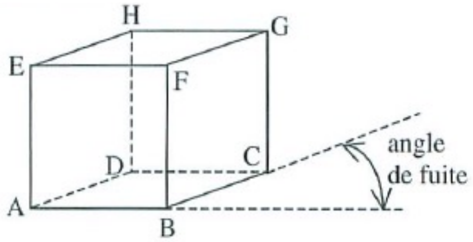


La notion de plan est dans certains cas utilisée en acte, sans soucis de définition comme dans Clairaut : on passe de la notion de faces parallèles, aux plans parallèles : ce sont « ceux qui conservent toujours entre eux la même distance ». De rares manuels comme modulo seconde (2004) font référence au caractère illimité du

[1] Dans les anciens manuels comme Camman et Rébuis (1933), on trouve a contrario les preuves de ces déterminations du plan

plan : « Un plan est une « surface plate illimitée dans toutes les directions » ». Au contraire, on trouve certaines confusions et interférences potentielles entre les concepts mathématiques de plan et de face d'un solide, par la référence au « plan de face », comme par exemple dans le manuel Ellipse de 1ère L (2005) :

« Une représentation en perspective cavalière d'un cube sur un mur parallèle à l'une de ses faces est la suivante :



Les plans qui font « face » (qui sont parallèles au plan de projection) : ABFE et DCGH sont des plans « frontaux ». Dans un plan frontal, toute figure est représentée en vraie grandeur. […]

Tout plan perpendiculaire à un plan frontal est une « *face fuyante* » ».

1.2.3 Utilisation du concept de plan sans en produire une définition formelle

Chez Euclide, le plan n'est pas rigoureusement défini. En effet, après avoir défini la surface : « Une superficie est ce qui a longueur et largeur seulement » et les lignes comme extrémités de ces surfaces, la surface plane est décrite : « Une superficie pleine est celle qui est également interposée entre ses lignes droites ». Le terme « plan » est alors directement mentionné dans la définition suivante : « Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan et qui ne sont point placées dans la même direction ». L'interprétant construit dans ces éléments ne peut donc être que celui d'une surface délimitée[2].

Nous avons pour l'instant traité la question de l'interprétant porté par un signe symbolique (le mot 'plan'), dans le sens de Peirce que nous donnerons en deuxième partie. La représentation iconique du plan est également propice à générer des interprétants erronés, notamment lorsqu'elle se base sur le dessin d'un parallélogramme[3]. En effet, dans la très grande majorité des manuels de lycée, la représentation d'un plan par un parallélogramme est utilisée sans justification de cette représentation, alors que cela est mentionné dans des traités anciens comme Camman et Rébuis (1933): « Un plan est une surface indéfinie dont on ne représente sur le dessin qu'une portion limitée, par exemple rectangulaire ; mais il est bien entendu que la surface n'est pas bornée au contour du parallélogramme ».

---

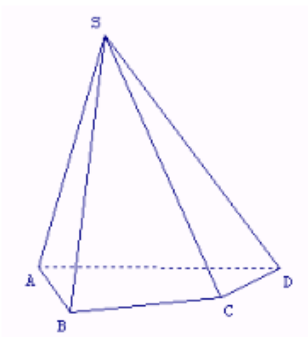
[2] Une ligne est délimitée par des points chez Euclide.

[3] En toute rigueur, il n'existe pas de représentation iconique de plan.

1.2.4 Les obstacles didactiques générés par certaines définitions

Ces définitions précédentes illustrent très bien la manière dont les objets géométriques sont construits par le biais d'interprétants, ainsi que les obstacles qu'elles peuvent engendrer. Le principal obstacle est celui de la référence à un concept quotidien : celui de surface plane mais délimitée. Le second obstacle est lié à la représentation figurale du plan : seule une représentation symbolique est possible (le parallélogramme par exemple) ou une représentation par le biais d'autres objets (nous verrons qu'ils fournissent des indices du plan). On note à ce sujet que la représentation indiciaire du plan par trois points ne porte pas la propriété illimitée du plan, contrairement à celle de deux droites sécantes. En effet, la droite dispose d'une technique instrumentale qui permet de la prolonger. Le dessin d'un plan ne dispose pas d'une telle technique, sauf par le biais des droites qu'il contient.

Ces deux obstacles liés à l'interprétant erroné du plan sont présent dans l'extrait de recherche suivant en classe de 1ère L (Schlosser, 2012) :



Enoncé : « On donne une pyramide SABCD dont la base est un quadrilatère ABCD.

Construire l'intersection des plans (SAB) et (SDC) »

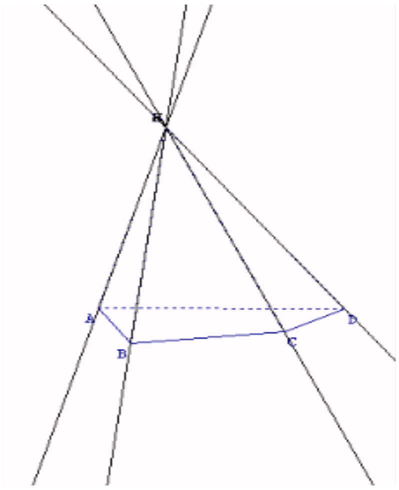
Retranscription des dialogues d'un binôme d'élèves :

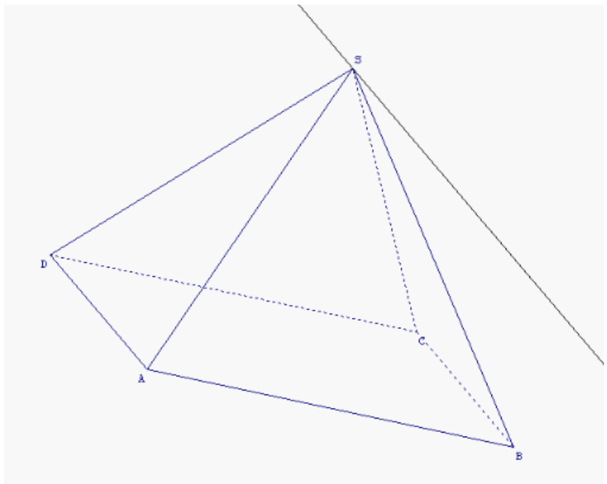
Elève H : SAB et SCD… hein ? [Rires.] SAB et SDC ? Ils sont sérieux ?

Elève C : [inaudible]

Elève H : ben, j'ai envie de te dire qu'elle est déjà créée ! Puisque l'intersection c'est S … J'ai envie de te dire que c'est pas possible Charlotte. Que l'intersection des deux plans c'est S.

Nous voyons bien dans cet extrait que les plans (SAB) et (SDC) sont assimilés à des faces et que l'absence de procédé de construction instrumentale d'un plan cantonne les élèves dans cette conception erronée. Car dans la suite de la recherche, les élèves tracent des droites incluses dans les plans en question, mais ne pensent pas à construire des parallèles (autre détermination d'un plan) dans un exercice suivant :

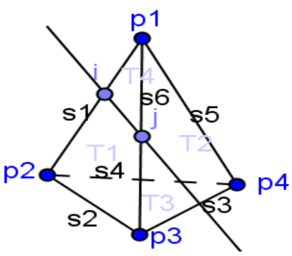


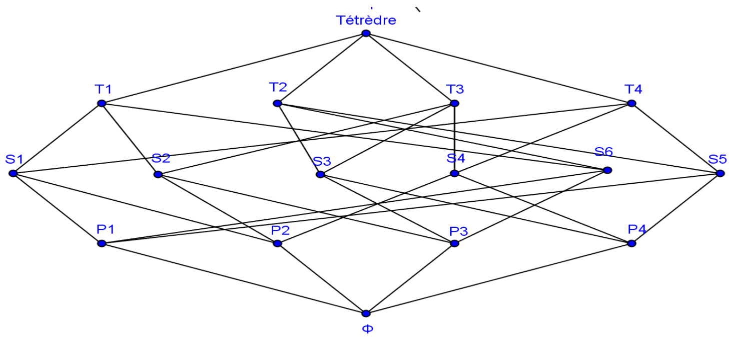


1.3 Les catégories du signe

L’ensemble du modèle sémiotique de Peirce repose sur un principe philosophique, qu’il nomme *phaneroscopie*, suivant lequel toute idée, tout signe peut être considéré comme premier, second, ou troisième. Par ailleurs, trois niveaux d’étude du signe peuvent être retenus. Le niveau syntactique prend en compte le representamen seul, le niveau sémantique considère les relations entretenues par le representamen avec son objet, alors que le niveau pragmatique examine les relations du representamen à son interprétant. Ainsi, concernant la dimension syntactique, le representamen pris comme premier est un qualisigne, à savoir une simple sensation, ou un simple sentiment. Dans sa dimension seconde, il est un sinsigne et dans sa dimension troisième, il est un légisigne.

Ce premier découpage en catégories est particulièrement intéressant pour l’étude didactique de la géométrie. En effet, du point de vue du système théorique, le dessin des objets géométriques met en œuvre un code, ce qui est l’apanage du légisigne (par exemple le code de la représentation d’un point par une croix). Ainsi, au sein du plan syntactique, le dessin représente un hyper signe représentant une structure de treillis dont la loi est celle de l’inclusion. Par exemple, le treillis du tétraèdre ci-dessous est le suivant :





En tant que simple sinsigne, le representamen peut donc déjà être l’objet de traitements dont le plus élémentaire est la décomposition structurale du signe par une rhétorique visuelle, en suivant éventuellement les règles syntactiques du code géométrique. Le qualisigne est le signe le plus élémentaire puisqu'il ne s'agit que d'une simple sensation. Par exemple la sensation de direction, ou d'incidence et de concours sur le dessin. Elle présente toute son importance en géométrie comme nous le verrons plus loin sur un exemple.

Ainsi, à ce niveau syntactique, l'ETG sera composé du representamen (dessin), des artefacts (dont le système visuel) et des règles syntactiques (sorte de rhétorique visuelle).

Au niveau sémantique, le representamen peut représenter son objet de manière iconique, indiciaire ou symbolique. Lorsque le signe existant renvoie à son objet par un rapport de similarité, de ressemblance, en vertu des caractères qui lui sont propres, que l'objet soit existant ou non, il est une icône (premier). Le **representamen** d'une icône peut être un **qualisigne**, un **sinsigne** ou un **légisigne**. Le dessin du tétraèdre ci-dessus est une icône (légisigne iconique), comme la plupart des dessins d'objets géométriques. De manière emblématique, la droite n'est le plus souvent conçue par les élèves que de manière iconique : la droite est définie par le dessin d'une droite ! Ce n'est que par le biais de la géométrie analytique que cette conception iconique exclusive est abandonnée. Par contre, le plan quant à lui, ne dispose pas de représentation graphique iconique (du moins en toute rigueur). En géométrie dans l'espace, un obstacle épistémologique difficile à dépasser pour les élèves est celui de la multivalence des signes iconiques : une intersection de deux segments sur un dessin en perspective peut représenter ou non un point de l'espace. Pour autant, si le dessin géométrique est multivalent, il est peu aisé de s'en passer. La fonction iconique qu'il prend en charge est le support de processus de constructions sémiotiques au sein des ETG.

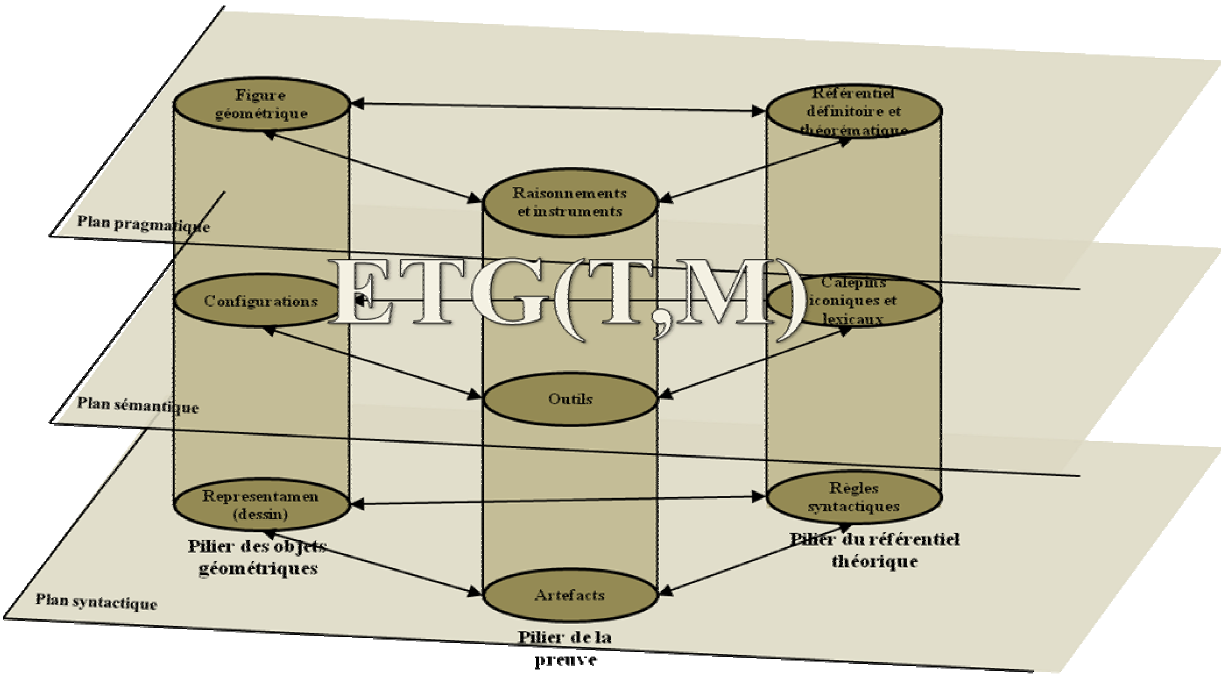
L'indice (second) est un signe qui est affecté par l'existence même de l'objet. Comme le souligne Everaert-Desmedt (2006), le signe entretient un rapport de « contiguïté contextuelle » avec son objet. Peirce prend pour exemple la girouette comme « indice de la direction du vent » (Peirce, 1931-1935, 2.2286). L'**indice** implique une **icône** particulière, dans le sens où un indice est affecté directement par un objet, sans pour autant être cet objet lui-même (cas de la girouette). Le **representamen** d'un indice peut être un **sinsigne** ou un **légisigne**. Nous avons vu plus haut que trois points sont des indices d'un plan, de la même manière que deux droites sécantes : ils remplissent une fonction indicielle vis-à-vis du plan. Un cas particulier d'indice propre à la géométrie est celui de la dénomination des objets (par exemple le fait de nommer un point par une lettre, mais nous parlerons plutôt d'indexe dans ce cas particulier d'indice).

Le **symbole** est un signe qui renvoie à l'objet en vertu d'une loi (tiercéité). Cette loi est une règle symbolique élaborée de manière conventionnelle, souvent *a priori* comme c'est le cas en mathématiques. Nous avons déjà signalé que le plan ne disposait pas de représentation iconique. Sa représentation sous la forme d'un parallélogramme est souvent donnée sans justification comme nous l'avons vu, et donc sans mettre en avant son aspect purement symbolique. Dans le même sens, les faces des tétraèdres sont difficilement perçues comme des symboles de plans car cela n’est pas explicité ainsi dans les cours. A partir de ces définitions, nous structurons le plan sémantique de l’ETG en trois composantes : les configurations, les outils (c’est-à-dire des artefacts associés à des objets géométriques comme par exemple le compas associé au cercle) et le calepin iconique et lexical (respectivement un ensemble d’icônes et de légisignes symboliques (mots)). Par exemple, les différentes représentations d’un cube en perspective sont intégrées dans le calepin iconique et lexical, ainsi que le mot ‘cube’).

Voyons maintenant la trichotomie de l’interprétant (un signe troisième). Le signe est vu comme une loi générale qui sera une possibilité qualitative (rhème), ou aura une existence réelle (dicisigne), ou enfin qui sera le fruit d’un raisonnement (argument). Lorsque l’interprétant est un rhème, il est considéré en tant que tel et se suffit à lui-même pour mettre en relation un representamen avec un objet, grâce à ses qualités propres, sans faire appel à autre chose. Il est considéré de la même manière qu’une fonction propositionnelle de la logique classique. Un rhème n’a pas de vérité logique, il n’est ni vrai, ni faux. Le rhème peut être soit une icône, soit un indice, soit un symbole. Toute perception directe d’un dessin géométrique est rhématique. Au contraire, le dicisigne fonctionne comme une proposition logique, c’est-à-dire qu’il met en relation deux constantes (un sujet et un prédicat). Etant des propositions logiques, les dicisignes peuvent être vrais ou faux, ils ne portent pas en eux de caractère de nécessité ou de contrariété, et ne sont pas non plus portés par des forces argumentatives. Le dicisigne ne peut être qu’un indice ou un symbole. L’intersection de deux droites sur un dessin en perspective est un dicisigne d’un point : il ne s’agit d’un point de l’espace que dans cas où les droites sont coplanaires. Par contre, l’argument engage un processus rationnel de la pensée menant à une conclusion. Ce processus suit une règle d’élaboration : l’argument est un signe qui a pour interprétant une loi, un raisonnement. Cette règle met en relation un representamen avec un objet. Un argument en géométrie repose sur la mise en œuvre de théorèmes est de propriétés, donc d’un référentiel définitoire et théorématique, et de processus d’induction, de déduction où d’abduction. Nous plaçons donc à ce niveau pragmatique de l’ETG les trois composantes suivantes : les figures géométriques, les raisonnements et les instruments (recouvre à la fois l’artefact, les objets qu’il permet de tracer ainsi que les propriétés géométriques induites qui y sont associées) et le référentiel définitoire et théorématique.

1.4 La structuration de plan cognitif de l’ETG

Le plan cognitif se structure donc en trois strates. Dans chacune d’entre elles, nous retrouvons le triptyque de base des ETG, à savoir les objets, les artefacts et le référentiel :



Puisque nous suivons une démarche d'analyse didactique « ascendante » (de l'analyse des séquences de recherche vers l'espace de travail personnel), nous adossons chaque espace de travail « local » à un type de tâche et à un milieu dans le sens de Brousseau (1990). La méthode de construction de l'ETG global par compilation d'ETG locaux est présentée dans Schlosser (2012).

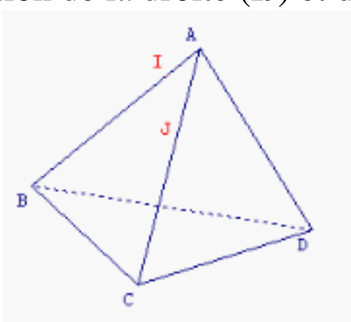
2. LES PROCESSUS COGNITIFS AU SEIN DE L'ETG PERSONNEL DES ELEVES

2.1 Des chemins paradigmatiques au sein des ETG

Examinons deux démarches de résolution d'un problème simple de géométrie dans l'espace, observées auprès de deux binômes d'élèves (Schlosser, 2012).

Enoncé de l'exercice

« On donne un tétraèdre ABCD, un point I sur l'arête [AB] et un point J sur l'arête [AC]. Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD). »



Binôme 1

Etape 1 : Des processus qualitatifs, et des processus expérimentaux au niveau syntactique

1) Création de l'icône de la droite (IJ) : le problème est considéré comme résolu par les élèves

2) Création-indexation de l'intersection de (IJ) et de (CD)

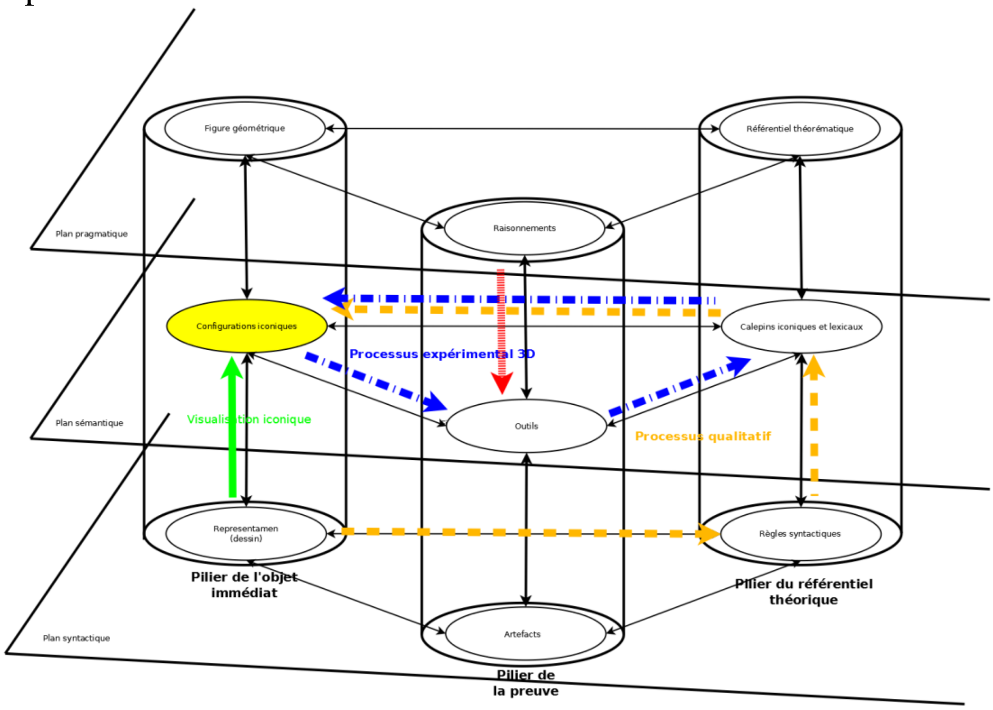
Cette étape est bien basée sur l'identification du sinsigne du point intersection de deux traits du dessin.

Etape 2 : Un processus expérimental pouvant se situer au niveau sémantique comme le montre l'extrait de dialogue suivant :

«Elève H: Ah, ouais, donc normalement, mais je dirais déjà... que du coup, il faudrait... ce serait pas... prolongement de la droite (BC), prolongement de la droite (IJ), et le point il serait par là ».

Ici, le processus expérimental se fait sur les signes 3D, à partir des signes 2D.

La particularité de cet ETG est d'être piloté par le pilier des objets du registre figural. Il parvient à "dépasser" le plan syntactique, pour travailler prioritairement sur le plan sémantique des images mentales tridimensionnelles. Ce registre figural, semble même autonome, puisque les symboles dicents du référentiel théorématique ne sont quasiment pas interpelés. De manière schématique, nous pourrions représenter ce profil d'ETG ainsi :



Notons que le pilier du référentiel théorique, ne semble pas vraiment jouer un rôle de contrôle.

Binôme 2

Etape 1 : identification du but à atteindre, à savoir tracer un point

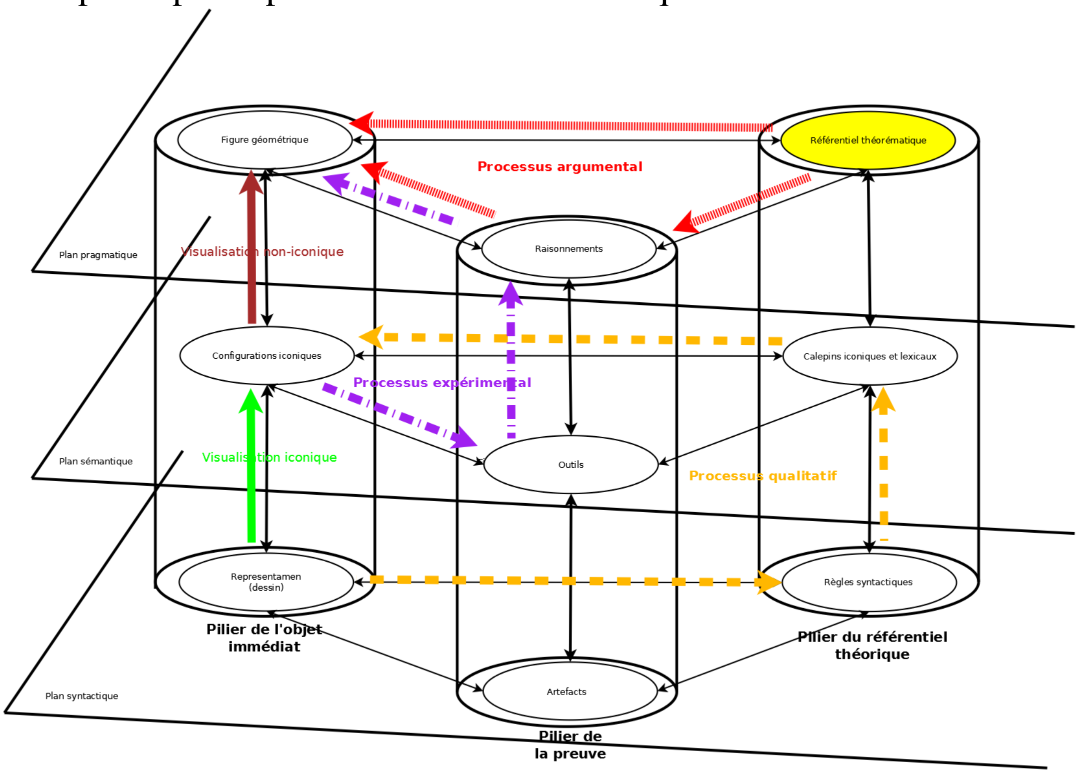
Etape 2 : construction de (IJ), le binôme considère que l'intersection est alors construite (construction évoquée et non effective dans le sens de Chaachoua H. (1999))

Etape 3 : prise en compte de la propriété du cours et recherche de l'intersection de (IJ) avec une droite du plan (BCD). Identification de (CD) et (BC) comme étant deux droites pouvant fournir potentiellement l'intersection recherchée

Etape 4 : premier essai, construction-indexation de l'intersection de (IJ) et de (CD)

Etape 5 : par une démarche combinatoire, deuxième essai, construction de l'intersection de (IJ) et de (BC).

Ce profil du binôme adopte une entrée davantage symbolique, puisque le binôme cherche avant tout à savoir quelle est la nature de l'objet à construire, et qu'une construction évoquée de l'intersection d'une droite et d'un plan semble lui suffire. Le point d'intersection est d'ailleurs construit sans que le binôme ne trace la droite (BC)[4]. Par contre, il cherche à mettre en œuvre une propriété du cours. Cet ETG est plutôt piloté par le pilier du référentiel théorique :



Par contre, le processus argumental n'est pas complet. En effet, la recherche de la droite incluse dans (BCD) n'est pas réellement faite en cherchant un plan commun aux deux droites. La méthode relève d'une sorte de combinatoire, autrement dit par essais et erreurs à partir des différents icônes de droites incluses dans (BCD). En outre, le plan syntactique est malgré tout mis en œuvre dans une des procédures erronée. Cette fois, le pôle de la figure semble bien jouer le rôle de contrôle de la

[4] Cela était possible avec le logiciel de géométrie utilisé par les tracés.

preuve argumentale.

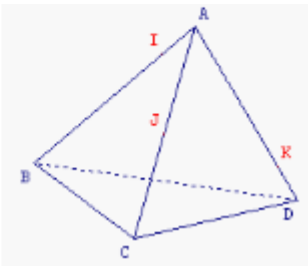
Ainsi, la principale différence entre ces deux démarches réside dans le fait que le premier binôme prend en compte le dessin (légisignes iconiques 2D) en tant qu'indice d'autres signes, les légisignes iconiques 3D. Le processus reste expérimental, et c'est grâce à un qualisigne (sentiment d'incidence) que les droites (BC) et (IJ) sont déclarées sécantes. C'est la fonction indiciaire du dessin qui prédomine. Pour le second binôme, le niveau argumental n'étant que partiel, les sélections de signes dans la démarche combinatoire se font toujours sur la base d'icônes 2D. Dans les deux cas, le travail peine à se faire au niveau pragmatique : le sous-bassement syntactique et sémantique est difficilement dépassé.

Dans Schlosser (2014), nous développons plus précisément les différents processus mis en œuvre par les élèves lors de leurs recherches, à savoir les processus qualitatifs, expérimentaux et argumentaux.

3. LA DUALITE ICONIQUE/SYMBOLIQUE

3.1 Un dépassement difficile de la visualisation iconique

Une des raisons du difficile dépassement du travail à partir de la visualisation iconique se situe dans une certaine confusion de paradigme d'un point de vue institutionnel. Alors qu'en géométrie plane tous les efforts sont mis en œuvre pour faire démontrer certains faits visuellement évidents sur la figure, en géométrie dans l'espace, il est souvent fait état d'un objectif de faire « voir les choses dans l'espace ». De fait, la sélection ou la décomposition structurale des objets se fait quasiment exclusivement par le biais des icônes du dessin géométrique, et très rarement à partir des indices littéraux des objets, des plans par exemple comme le montre le dialogue ci-dessous:



Professeur :	Alors, première question que je vais vous poser, est-ce que tu peux me citer des droites qui appartiennent au plan (IJK)?
Elève S:	Hum, des... des plans?
Professeur:	Des droites...
Elève S:	Des droites?
Professeur:	… qui sont dans le plan (IJK).
Elève S:	Ben (AB), non? (AC) et (AD), ils font pas partie de...
Professeur:	Commencez peut-être par un point... un plan plus simple. Tu peux me citer les droites du plan (BCD)?
Elève S:	Ben (BC)?
Professeur:	Oui.

Elève S: Et (CD).
Professeur: Et?
Elève S: Et (BD).
Professeur: (BD).
Elève S: Ah, donc là c'est (AI)... (AJ) et...
Professeur: Du plan I...J...K
Elève S: Ah, IJ donc ouais, il est pas là... mais euh y a pas de droites alors du coup. [blanc]
Professeur: Qui t'interdit de les dessiner si t'en as besoin?

On voit bien ici la difficulté de l'élève à citer des droites incluses dans le plan (IJK) en raison de l'absence d'icônes de ces droites. L'écriture (IJK) était pourtant opératoire pour réaliser cette décomposition structurale.

Pour reprendre le même exercice que celui donné en exemple au paragraphe 1.2, la suite des propos des élèves montre la prévalence du signe iconique sur le signe symbolique : le professeur rappelle que l'intersection de deux plans est une droite, et qu'il faut donc chercher deux points. Il rappelle également que chaque point est obtenu par l'intersection de deux droites appartenant respectivement à chacun des plans. Mais l'élève répond :

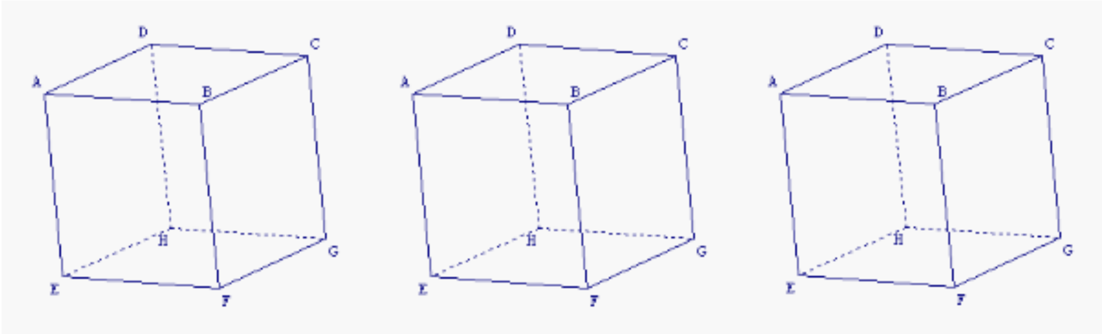
Elève H : c'est S, c'est S l'intersection du plan SAB et SDC
Professeur : l'intersection de deux plans qu'est-ce que c'est ?
Elève H : oui ben il y a 2 points en un point je sais pas ![blanc] mais si en plus. Mais si en plus, regarde t'as non seulement t'as l'intersection de BS et de CS là, mais en plus t'as l'intersection AS et DS c'est ça son intersection
Elève C : ben on l'a… Il faut juste qu'on la renomme »

3.2 Le problème du discernement des plans

Pour Rommevaux M.P. (1998), une compétence clé est engagée dans la résolution des problèmes de géométrie dans l'espace : être capable de discerner et sélectionner les plans dans une représentation bidimensionnelle d'un objet géométrique tridimensionnel. Cette compétence demande de réaliser des « montées en dimension » (Rommevaux M.P (1998, p.29). Par exemple, pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan, c'est-à-dire pour construire un point (de dimension 0), il convient de "plonger" la droite dans un plan auxiliaire. Il y a donc passage d'un objet de dimension 1 vers un objet de dimension 2.

Or nous avons vu dans les exemples ci-dessus, que le plongement dans un plan est loin d'être évident pour les élèves.

Ainsi dans l'exercice suivant dans lequel l'intersection des plans (ECB) et (ACF) était recherchée, l'élève cherche encore une représentation iconique des plans en question.



« Elève S: Ouais. E... C... B, ben on peut pas vraiment le voir, c'est ça le problème. A... C... F ». Le binôme construit ensuite l'intersection de (AF) et (EC).

Pourtant dans cet exemple, la recherche d'une visualisation iconique de l'intersection des plans n'est pas forcément pertinente. En particulier, une décomposition structurale à partir des légisignes indexicaux (ECB) et (ACF) pouvait mener à la solution par un raisonnement diagrammatique. De manière générale, plus que la dualité iconique/symbolique, la principale difficulté rencontrée par les élèves relève d'un pilotage de l'ETG exclusivement iconique (première et deuxième strate du plan cognitif) et de problèmes de raccordements de treillis non iconiques.

CONCLUSION

L'intégration d'outils sémiotiques permet de comprendre le fonctionnement et la construction des espaces de travail géométriques. En effet, l'activité mathématique en général, et l'apprentissage géométrique en particulier, relève d'une intégration d'un système théorique de signes et de sa mise en fonctionnement. Ce système est lui-même producteur de signes, par l'entremise fondamentale du signe interprétant. Ces derniers peuvent générer des obstacles didactiques dont notamment celui de la référence à un objet matériel (perte de propriétés comme par exemple le caractère illimité d'un plan). D'autres obstacles sont dus au code géométrique comme par exemple celui de la multivalence de certains signes, de la juxtaposition de certains signes iconiques sans aucun lien de génération, et enfin le caractère symbolique de certains signes comme celui du plan générant également une perte de propriétés. La structuration de l'ETG en trois strates, à savoir les plans syntactiques, sémantiques et pragmatiques permet d'identifier un travail omniprésent sur les deux plans de sous-bassement, en partie dû à une organisation mathématique du référentiel trop morcelé et parfois trop parcellaire. Nous pouvons également conclure au regard des difficultés de raccordements des différents treillis sémiotiques, qu'un travail sur la visualisation spatiale gagnerait à faire l'objet d'activités dédiées, clairement distinctes de la résolution argumentale discursive.

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9* (3), 309-336.

Camman P., Rebuis A-G. (1933). *Géométrie dans l'espace, classe de première*. Paris : De Gigord.

Comberousse Ch., ROUCHIER Eu. (1931). Traité de géométrie – Deuxième partie- Géométrie dans l'espace. Paris : GAUTHIER-VILLARS.

Chaachoua, H. (1999). Ecologie des problèmes de construction dans l'espace. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 19(3),* 323-356.

Cherruau, C. (2005). *Maths première L*. Paris : Ellipse.

Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris : Hermann.

Clairaut, M. (1741). *Elemens de géométrie*. Lambert et Durand.

Comte, A. (1830-1842). Cours de Philosophie positive, vol.1, p.404.

EUCLIDE (Trad Par PEYRARD, F. (1804)). *Les élémens de géométrie d'Euclide*. LOUIS Editeur.

Everaert-Desmedt, N. (2006). « La sémiotique de Peirce », dans Louis Hébert (dir.), *Signo*. Disponible sur : http://www.signosemio.com

Grevy, A. (1911). Géométrie dans l'espace des classes de première C et D. Paris : Vuibert.

Hadamrard, J. (1901). Leçons de géométrie élémentaire II (Géométrie dans l'espace). Armand Colin.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Modulo (2004), classe de seconde. Paris : Didier.

Peirce, C. S. (1978), textes rassemblés par DELEDALLE G.(1978). *Ecrits sur le signe*. Paris : Editions du Seuil.

Peirce, C.S. (1931-1935). *Collected Papers*. Cambridge: Harvard University Press.

de Roberval, G.P, in Jullien, V.(1996). *Eléments de géométrie*. VRIN.

Rommevaux, M.P. (1998). Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*, 27-65.

Roucher E., De Comberousse Ch. (1800). *Traité de géométrie élémentaire*._Paris : Gauthier-Villars.

Schlosser, F. (2012). Construction et fonctionnement d'espaces de travails géométriques personnels d'élèves. Cas de la géométrie dans l'espace en 1ère L à option mathématique. *Thèse de doctorat de l'Université Denis Diderot Paris 7*.

Schlosser, F. (2014). Construction et fonctionnement d'espaces de travails géométriques personnels d'élèves. Cas de la géométrie synthétique dans l'espace au lycée, *Séminaire national ARDM Janvier 2014* (*à paraître*)

SPACE FOR GEOMETRIC WORK: POINTS OF AFFECT

Melissa Rodd, Institute of Education, University of London

This paper uses ideas from the field of neuroscience of attention to investigate emotional (or other affective) responses - 'points of affect' - that instigate change in teachers' or learners' Space for Geometric Work ('SWG'). SWG theorises that physical space and tools or artefacts, together with suitable language development, are the components from which a cognitive grasp of geometry is formed. Research from the neuroscience of attention theorises a distinction between 'top-down' and 'bottom-up' attention. 'Points of affect' divert attention and thus can change a person's SGW. The main body of the paper concerns relationships between deductive and perceptual reasoning in terms of attention processing and points of affect. Application to teaching geometry is discussed.

***Key words**: geometry, affect, proprioception*

INTRODUCTION

Learners' transition to reasoning based on accepted premises from reasoning based on perceptual givens is central to geometry education in secondary school mathematics curricula throughout the world. Van Heile (e.g. 1986) recognised this in his conceptualisation of learners' progression; the typical child starts with shape recognition, proceeds to description and analysis of properties of shapes and then to reasoning deductively concerning properties of geometrical concepts (like shapes) with increasing levels of rigour and abstraction. This paper concerns affective influences on progression in geometry problem solving, particularly in progression to thinking deductively. The central concepts developed that underpin the discussion are those of attention processing pathways and that of the Space of Geometrical Work (SWG, also known as Espace de Travail Géométrique).

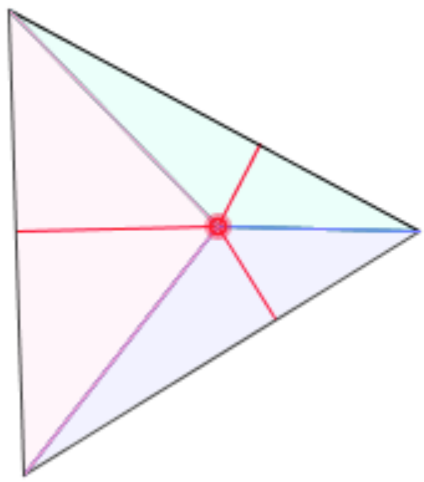


Fig 1. Equilateral triangle, interior point and perpendiculars from that point to sides.

PREVIEW OF THIS PAPER'S CENTRAL THEMES: NEUROSCIENCE, AFFECT AND TRANSITIONS IN GEOMETRIC THINKING

Euclidean geometry problems are good stimuli for 'ah-ha!' insight. Ah-ha! insight occurs when where a solution has become, in an instant, 'obvious' to the problem solver; an emotional transition signals or stimulates insight and deduction.

For example, consider this Euclidean problem and the described solution: given an equilateral triangle and a point P in the interior, investigate the sum of the lengths of the perpendiculars from P to each edge. That this sum of lengths is the measure of the triangle's height can be seen as 'obvious' if the triangle is cut into three smaller triangles with P as a common vertex each with base a side of the original triangle. The visual insight – as a construction or cutting up – affords a deductive grasp of the proposition. Experiencing such insight is motivating for a learner/participant as it is a good feeling, that is, a salient 'point of affect'. Although 'Ah-ha!' also has a flip side, which can be marked as 'lost vision' which is also a 'point of affect', this paper is focussed on 'getting it' or transition to relational and reasoned geometric thinking, which is characteristic of what is termed 'Geometry II' (Liljedahl, 2005, Gal & Linchevski, 2010, Rodd, 2010).

Issues these experiences raise can be informed by current and developing understandings from neuroscience. The developing field of educational neuroscience, is being applied to many areas of education (Mareschal, Butterworth and Tolmie (eds.) 2013), including mathematics. Furthermore, there are other routes for educationalists, mathematical and other, to have access to neuroscientific understandings, I shall draw on, below, the application, to meditative disciplines, of the neuroscience of attention and information processing (e.g., Austin, 2009) to the mathematics education context.

What are data in an investigation of the relationship between affect and transition to deductive geometrical thinking? Self report does offer some data, yet other participants' experiences are needed too. As part of this project, I have data from students in various learning or teaching geometry contexts. One of whom is Lech[5], a case study for this paper. Lech's transitional thinking around points of affect will be analysed further below, but the following short extract from his talking about solving a geometrical problem illustrates well the close connection of affect and reasoning:

I enjoyed it – I enjoyed the moment when the lightbulb came on… it is very emotional…It reassures you, because at the beginning you've got feeling, that this could be, but then, until you actually can see, you can reassure yourself, and can prove it for yourself it is still just a feeling but once you do it you know that you're right and that's a very good positive frame.

Extract from interview with case study, geometric participant, Lech ('…' indicates portion cut).

---

[5] All participants' names are pseudonyms.

Main claim

Thinking (cognition) is a personal endeavour, (of course informed by outer physical, cultural and social environments). Personal endeavours, like solving geometry problems, involve ‘top-down’ processing of information where a person’s attention is ‘close by them’. In geometry learning and problem-solving, information is received through use of words, objects and images ("les geneses", Gómez-Chacón and Kuzniak, 2011, 2013, Kuzniak, 2010); a person’s SGW adapts and develops from processing what comes from these "geneses". Affect can (possibly: is the way to) change attention which facilitates information being processed differently. In particular, affect can switch perceptual thinking (geneses: visual) to deductive thinking (geneses: instrumental and/or verbal) in Euclidean geometry. The role of the instrument, or manipulable is shown to have an important role in attention focussing with a person's SGW.

Outline of the rest of the paper

There follows two sections introducing the ideas used in the rest of the paper: one that explains how the SWG construct is used in this paper and one on neuroscience applied to education. Then data from students working on a geometric problem are presented and analysed. This is followed by an application of the theory and analysis to teaching geometry and a conclusion.

WHAT IS A SPACE FOR GEOMETRIC WORK (SGW)?

This section collates the ideas of SWG that will be used below to argue for conceptualising ‘points of affect’ within the construct of Space of Geometric Work. This notion of ‘points of affect’ will be applied to transition from GI to GII[6] for an individual’s geometrical problem solving experience. The individual’s SWG can be thought of as a construct to draw attention to a current way of working geometrically for that person.

Outline

This notion was introduced to help organise thinking about the many practices that go on in a geometry problem-solving or learning situation. Gómez-Chacón and Kuzniak, represent the SGW construct in a diagram (Gómez-Chacón and Kuzniak, 2013:3) in which there are two (horizontal) layers of geometrical work: personal environment (lower layer) and personal cognition (upper layer); personal environment and personal cognition are connected by that which is, respectively,

[6] N.B. Use of the terms GI and GII in this paper follows the use in Gomez-Chancon & Kusniak (2013) where Geometry II (GII) is characterised as “natural axiomatic geometry”. This use of GI and GII differs in meaning from Kusniak and Rauscher 2011’s “Established Geometry I and Established Geometry II” (ibid. p135).

seen, manipulated and languaged. These connections are called ‘geneses’, and respectively named “Figural, Instrumental and Discursive”; they are represented as (vertical) conduits connecting personal environment with personal cognition. Furthermore, these horizontal layers of the formal diagram are structured: personal cognition in the “cognitive plane” consists of “visualization”, “construction” and “proving”. And personal environment in the “epistemological plane”[7] consists of “real space”, “artefacts” and “reference”. The threads, Figural, Instrumental and Discursive, join Real Space with Visualisation, Artefacts with Construction and Reference with Proving. This diagram is, of course, a schema with which to engage, as learner, teacher or researcher, and itself is a tool for helping to think about geometry learning and teaching and this paper hopes to contribute to this schema’s development by conceptualising ‘points of affect’ affecting ‘vertical’ connections between personal and public.

How does emotion or feeling change a person’s thinking from GI to GII? Why the SWG is a useful frame in which to position this question is that connections between the public and personal are conceptualised as initiating or informing conduits (“geneses”). These initiating or informing conduits can be, metaphorically, fused (or severed) by affect. In particular, a ‘point of affect’ occurs when the geometrical problem-solver experiences facilitation or impediment of one or more of the figural, instrumental or discursive linking of the personal cognitive and public component planes. To exemplify, ‘points of affect’ are experienced by learners when stress impedes visual working memory (Shackman et al. 2006) or, like Lech quoted above, the “lightbulb” is an emotional moment of experienced intellectual clarity. Further exemplification and conceptual development will be given by studying case study students’ reasoning development and my report of changes in teaching practice.

CAN NEUROSCIENCE INFORM EDUCATION?

SOME BACKGROUND

There are many advocates of integrating neuroscientific understandings into education practices. For example, The Royal Society (2011) argues that understanding the way the brain works should contribute to understanding how learning takes place thus should be included in teacher education. Dubinsky, Roehrig and Varma (2013) take this further, specifying explicit “neuroscience learning concepts … [for example] Mastery involves changing the brain system used for executing a task from deliberative to automatic through rehearsal, application, and self-evaluation” (ibid. p319). While that particular ‘learning concept’ does not seem to require brain science for its validation, there is evidence that better understanding of brain functions coming from neuroscience has contributed to advances in teaching

---

[7] Note that ‘epistemology’ in English and ‘épistémologie’ in French have different meanings http://meta.wikimedia.org/wiki/Interwiki_synchronization/Epistemology accessed 20/6/2014.

children with dyslexia to read (Diaz et al. 2012). However, cautions about over-enthusiastic application of neuroscience to education include those from neuroscientists. For instance, Blakemore and Frith (2005) in their introduction to educationally relevant neuroscience book observe that "much of the research is not yet ready for implications to be drawn" (ibid. p15). Nevertheless, Willingham and Lloyd (2007) argue that well-established results from neuroscience can offer a guide for cognitive theories that underpin educational practice. They cite as example a hot debate in the 1970s between those who claimed memory used visual as well as linguistic representation and those who claimed that all memories were in some sense linguistic representations. Brain location studies a decade or so later showed "decisively" (Willingham & Lloyd, op. cit. p144) that the visual and linguistic parts of the brain were used for memory. Willingham and Lloyd also report that "visual processing operates differently if one is naming objects versus simply observing them" (p145) and that visual acuity is thwarted by distraction from producing language.

There are many pedlars around the field of neuroscience wanting to sell to education and it behoves us to be wary. I shall turn to a path opened for me by affective neuroscientists, explain what I have learnt from their work and apply it: (1) to explain data that I have collected from teaching and from learning geometry; (2) to theorising points of affect within ETG/SWG.

EXAMPLE OF POTENTIAL APPLICATION TO EDUCATION: NEUROSCIENCE OF ATTENTION

The neuroscience of attention is concerned with location of brain activity relative to the subject's attention. While neuroscientific results cannot be directly employed in teaching, new results that can be a source of inspiration for how students' experiences can be enhanced.

Outline of background theory of sensory processing from neuroscience of attention

Two sensory processing pathways exist in primate brains which are correlated with different forms of attention referred to as 'top-down' (focussed) and 'bottom-up' (receptive). These processing pathways are physical neural circuits located, respectively, in the dorsal and ventral regions of the brain (e.g., Austin, 2009: 31 & 57, Kravitz et al. 2011) and their activity can be tracked and recorded by brain scans. Top-down, focussed attention is experienced by humans when using tools like hammers; when hammering a nail we have to attend to where the hammer and nail are quite precisely. Top-down attention is also experienced when we are care-giving, say, trying to feed a poorly baby while attending to the infant's reactions closely. Complimentarily, 'bottom-up attention' is experienced when we are receptive to wider aspects of our environment through sight or sound inputs that alert us to pleasure (sound of friends' voices), warn us of danger (ferocious animal seen approaching!) or prompt a new behaviour (sun rises).

These evolved dispositions facilitate humans experiencing these two forms of attention in other situations. Top-down attention is appropriate for geometrical problem-solving: our diagrams, rulers, compasses, DGS, models etc. are attended to with coordinated near-to-me vision, touch and proprioception via this 'top-down' sensory processing. Bottom-up attention is appropriate for teaching: in the context of a (mathematics) classroom, the teacher is receptively aware of the atmosphere of the classroom, the feedback from students and to what is happening generally through the processing of sounds and signs coming from the environment.

Proprioception

The use of manipulatives in mathematics education is part of a long tradition … educators have observed that numerous students get engaged with materials that they manipulate with their hands and move them physically around, with an intensity and insight that do not seem to be present when they just observe a visual display on a blackboard, a screen, or a textbook. While one should not expect that students' experimentation with manipulatives and devices would automatically cause them to learn mathematics, there must be something valuable that sustains their use even at the present age when it is simple to simulate them on a computer.

Introduction to the special issue on 'bodily activity and imagination" of Educational Studies in Mathematics Nemirovsky and Borba (2004: 301)

An explanation for why engagement is stimulated with manipulatives can be made using the theory of sensory processing outlined above. If I am processing information in a top-down "where is it?" attitude (Austin, op.cit. p63) the senses available are proprioception (taking in current location, posture and surroundings) as well as sight, touch and smell. Manipulatives are excellent stimuli to aide the student in keeping his/her focus as the watching, touching and sensing position are integrated in this top-down processing stream. Proprioception has an important function in developing imagination (Moore & Baressi, 2013: 291) and humans have evolved to use fingers to represent ideas and to communicate through gesture as well as manipulation of materials.

CONSTRUING/INTERPRETING DATA IN THE LIGHT OF AWARENESS OF NEUROSCIENCE OF ATTENTION WITHIN THE SPACE FOR GEOMETRIC WORK CONSTRUCT

This section starts with two observations. Firstly, in presenting data in the form of a transcribed audio interview illustrated with fieldnotes, I would like to point out that my awareness of the neuroscience of attention influenced the choice and presentation of the task, the extra tools (e.g., DGS, scissors) and the language used in the interview, as well as what I wrote down at the time. Secondly, although, in analysing the interview with respect to the SGW construct, the evidence of emotion at conceptual breakthough, is independent of the construct.

Hence, the SGW construct can be enhanced by incorporating consideration of affect. In particular, what I have called 'points of affect' are points, or discontinuities, where something new, or re-newed, happens for that person working on a geometry problem. These points of affect are "genetic" in the sense of the SGW model.

METHODOLOGICAL REMARKS

Justifying appropriateness of case study work is a standard challenge in qualitative research. Hodkinson and Hodkinson (2001) set out six strengths and eight weaknesses of case studies[8] The particular issue that geometric work involves that I am exploring is how reasoning changes (from GI to GII style). This is a "lived reality" that is of the "unexpected and unusual" variety and not "generalisable in the conventional sense" (quotations from endnote number *iv*).

Data presented come from interactions with Masters students or teachers on in-service courses. In this section, a fairly long extract from Lech is presented and analysed. Then Lech's reaction is compared with that of another participant, Su. Sections of Su's transcript have not been presented like that of Lech's, instead brief comments from Su are used for the comparison.

The geometrical problem Fig 2. (Küchemann & Rodd 2012) was given to the participants individually.

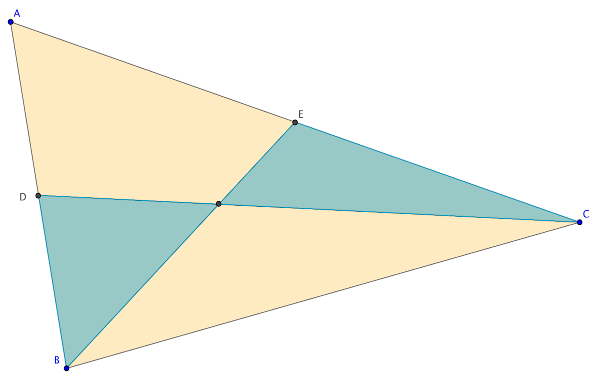


Fig. 2. Triangle, two medians and triangles formed with medians' point of intersection and half edges.

---

[8] The Strengths of Case Studies: They can help us understand complex inter-relationships; Case Studies are grounded in "lived reality"; Case studies facilitate the exploration of the unexpected and unusual; Multiple case studies can enable research to focus on the significance of the idiosyncratic; Case studies can show the processes involved in causal relationships; Case studies can facilitate rich conceptual/theoretical development. Limitations of Case Studies: There is too much data for easy analysis; Very expensive, if attempted on a large scale; The complexity examined is difficult to represent simply; They do not lend themselves to numerical representation; They are not generalisable in the conventional sense; They are strongest when researcher expertise and intuition are maximised, but this raises doubts about their "objectivity"; They are easy to dismiss, by those who do not like the messages that they contain; They cannot answer a large number of relevant and appropriate research questions (Hodkinson & Hodkinson 2001).

LECH'S GEOMETRICAL WORK SPACE

Lech is a part-time Masters student and a school teacher at a Special school for boys with emotional and behavioural difficulties. Originally trained in Physical Education in the EU outside the UK, he is now teaching mathematics and science. Lech was invited to investigate geometrical relationships given the visual prompt of Fig.2. Extracts from the interview with Lech are indexed in the table by the time from the beginning of the recording in mins.secs; my words are in italics.

8.15	Those blue triangles also make me think 'is there something to do with the area?' but then if it is area I would have to. Pause
13.47	So Pause could they have the same area? …Pause. (A Geogebra file is brought up on the computer in front of Lech. He drags point A, making the triangle look isosceles.)
14:30	Pause. Oh yes they are! Pause ok, must be something with triangles it must be something with the properties of triangles.
14.52	*When you moved the mouse and you went 'ah yes!'* (Lech laughs) *how did you see it just at that moment?*
15.03	I could move them I could make them look congruent. …So it doesn't matter how I manipulate them the area will still be the same because it is the same area, whatever transformation you go through except for enlargement.
17.24	I have to have more information about properties of triangles to be able to, I dunno, I've got the feeling that I am right, but I cannot put it into words, I cannot Pause prove it
17.40	(Lech laughs) sounds of cutting (triangle on worksheet cut up)
18.42	Oh! (Sounds of moving cut out pieces around) This is height?
19.02	(Sounds of L drumming fingers on table)
19.34	Pause. Does mean, the areas are the same (upward inflection suggesting 'result' but softly not triumphant)
19.46	So ok those areas are the same. … Cut this one out. Ah! (sounds of cutting).
20.21	So? Pause I am lost. Pause, Sigh. Pause.
20.53	If I cut, AAH! OK! So that means that those two are the same. Those two are the same, and if I cut through here, those two are the same …
23.30	I know they are the same area but I'm not seeing them as the same area (Softly) This area is the same as that area and this area is the same as that area (Loudly) I know just one step away ….
26.40	Oh Oh I think I know it …. I can see it now but I don't know how to explain it. *I bet you do …*
28.19	May be I can do it the other way round (Sounds of moving cut out pieces around)
28.56	I jumped in my mind I jumped I'm trying to find which way lead me to it. Pause.
29.14	Something to do with this half and this is half so those are two halves … this triangle is the same as that triangle Pause. OOH and I know that those two are half of that, the same as that and this is the same as that, so those two have to be the same!

29.50	Feels good (laughs and rubs hands vigorously!) I needed a lot of manipulation I would not have been able to see it in my head without having those triangles on the table.
34.00	Now it is enough for me to look at those (points to pieces of cut out triangles).
34.11	Look how confident you are! Something's changed. And it was just in a split second.
34.40	It does not matter what tool you use, it is emotional.

Commentary and interpretation

Lech took a while looking at Fig. 3 on the worksheet then was offered a Dynamic Geometry Software ('DGS') representation (using Geogebra). After manipulating the figure to an isosceles triangle (AB=AC) he refers says (14.30) "Oh yes they are!", referring to the areas of the blue-green triangles. This is a 'point of affect', he is gazing at the screen and smiling. Lech then turns back to the paper representation and says that he does not know why they should be equal. (Notice that he has, at this stage, incorrectly generalised from the isosceles triangle situation!) He works in various ways before cutting two copies of the triangle in half in different ways (cut through BE to get two halves BEC and BEA and through CD to get CDB and CDA). He spends over 11 minutes (17.40-28.56) moving the four triangle halves around. His gaze is on his hands, his utterances are not in full sentences but repeats 'this is the same as that' frequently. Then, he refers to 'half of' (29.14) and thence to "OOH I know" – another point of affect - and his explanation which was delivered by pointing to parts of the cut out triangles.

Lech's attention was downward towards his hands cutting and moving the tangible triangle in two different ways and he reported that he had an internal 'conversation' that kept him focussed. This suggests that, in terms of attention, his attention was top-down and that attention was sustained, at least in part, by the availability of the manipulables as well as his internal narration. My belief, based on new lenses (neuroscience of attention) and experienced eyes (from established practice of mathematics teaching), is that the proprioceptive, attention focussing actions facilitated his transferring his reasoning from GI to GII. One[9] might ask 'what evidence is there that Lech's reasoning was of GII type at the end of the teaching episode?'* There is evidence from the transcript and field notes that Lech gave a deductive argument based on premises (e.g., (1) triangles were Euclidean, and (2) midpoints of line segments were given). These premises were abstracted from perception, clarified and made significant to him through discussion. However, no 'writing up' was done; does this matter? Not to me at the time, as I understood how his actions (moving the halves of the triangle) together with his verbal communication constituted a logical argument. The further point that the question* raises is 'to what extent is deduction now Lech's way of being convinced?' This was

[9] One reviewer asked such a question!

a question I addressed more fully in a previous project (Rodd 2000); I have not yet collected sufficient evidence to be sure of an affirmative answer to this second question in Lech's case.

SU'S GEOMETRICAL WORK SPACE

While Lech enjoyed the 'lightbulb' moment when he solved this problem, another participant, Su (pseudonym), did not! Su was trained as a primary mathematics specialist in her home country in East Asia and she has been living in the London area for several years; at the time of the interview she was a full-time Masters student. Su took about the same length of time to solve the problem (about 20 minutes) and also cut up copies of the triangle to manipulate. She showed that the triangles were of equal area, using half triangles like Lech did. When asked how she felt when she got the problem, Su reported experiencing strong emotion: "stupid! I should notice it!" (in a shorter time) despite having been in a good humour – chatting pleasantly, saying that she liked the problem – during the solving process. When asked how did you see it (areas equal)? Su said "manipulation". When asked why are you sure? she repeated the word "reasoning" several times several times while showing manipulation of the cut out triangles. Her actions suggest her transition from GI to GII for this stimulus.

During the interview Su remarked that the use of colour on the worksheet affected her attention "I was obsessed with the colour". And though Su was in a good mood during the interview, she was irritated with herself when she saw how simple the problem was and attributes her lack of quick problem solving to a pleasant relaxation: "Maybe I was distracted by cutting which I enjoyed, I didn't recognise what I did. We love manipulations, in [my home country] geometry is kind of rest time."

A conjecture, given the neuroscience of attention: Su was insufficiently top-down focussed during the start of her working on the problem of Fig. 2. (suggested by her good humoured chat as well as her remarks concerning colour). Despite what Su says about cutting distracting her, she did use the manipulables to facilitate her proprioceptive attention and to get the solution. Whereas the use of colour in the visual prompt had put her on the wrong track. In her Space for Geometric Work, colour on the Artefact (worksheet) disturbed her (upward) progression to proving (discursively), whereas the Artefact de-constructed (cut up) afforded a tool (instrument) for her to construct and thence to prove. While it is true that positive emotion is often experienced at an instance of understanding, it can also be the case that a dull affective state is correlated with insufficiently focused attention, as in Su's case.

APPLICATION: IN PRACTICE, TEACHING GEOMETRY

This section reports on two teaching scenarios, one developing an individual's SGW, the other one, a class in which Instrumental linking of Artefacts and

Construction were deliberately planned for and instigated an unexpected point of affect. In this section, unlike the previous one, the subject is the teacher and data come from my recent teaching. In the first case, teaching one-to-one, I audio recorded the session; in the class situation, I relied on reflections noted during and after the lesson. The aim of this section is to illustrate how my recently gained awareness of the neuroscience of top-down vs. bottom-up attention processing, together with my on-going belief in the importance of affect have influenced how I have taught for transition from GI to GII.

TEACHING FOR TRANSITION GI TO GII: INCORPORATING POINTS OF AFFECT

In the box is part of a transcript of a dialogue of me working one-to-one with a student who is working on the geometry problem represented in FIG.3 (my words are in italics and '…' indicates a cut). The tools involved in this task were the nearby visual stimulus on the worksheet and the student's finger manipulation.

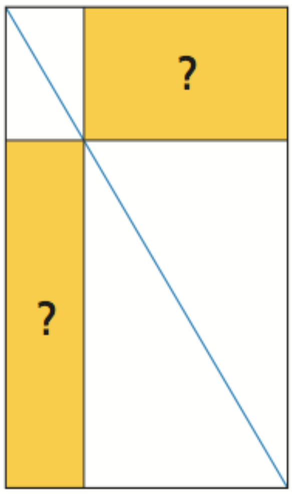


Fig. 3. Rectangle, diagonal, two perpendicular segments parallel to respective sides of original rectangle and coloured constructed rectangles.

What do you see?
Pause
I see a rectangle
Put your finger round the rectangle
The big rectangle which is divided into four sections large and three smaller rectangles and diagonal, I see two yellow rectangles with question marks on them and I'm thinking something to do with perfect numbers? Pause something to do with areas?
(This right handed student's right hand fingers remain on the worksheet, moving slightly back and forth within the (big) rectangle.)
Keep thinking areas
So the area of the two yellow relates somehow to the biggest rectangle. And I am thinking: is the area of the two yellow rectangles the same? and it looks like

it is

It looks like it is

Pause ….

Explain that to me again, using your fingers maybe …

Pause

Why's that diagonal here? Pause so those big triangles have to be equal, the areas have to be equal, now this triangle and this triangle are Pause congruent so the areas are the same. Those two little white triangles are congruent, so what's left of this triangle Ah I've got it! so what's left of this triangle has to be equal with what's left of this triangle here …

You've a way of explaining it by subtraction…do they look like they have the same area?

They don't look like it, Pause because they're a different shape, they've different dimensions, but once you've subtracted all the other shapes they have to be. …

And have you proved it?

If you cut those shapes, cut them out you can prove it, as there are two pairs of triangles which are congruent.

You moved from visual to logical.

Remarks

The awareness coming from my recent enthusiasms with neuroscience positioned me to encourage proprioception (use your fingers). To encourage transition from GI to GII the student is prompted to reason rather than see (logical not visual). An outline of an acceptable proof is spoken by the student and the student's achievement is reinforced verbally while the student was in a satisfied and receptive state of mind. While it may be true that a sound GII proof was not written down, the issue was that Lech's belief system had changed so that he now *needed* a GII type proof (even if he could not always achieve it himself). This change of belief is in the affect domain.

TEACHING FOR TRANSITION FROM ARTEFACT TO CONSTRUCTION

In this section I describe a teaching scenario which involved tool use of the proprioceptive (rather than linguistic) variety and deliberately included opportunities for bottom-up as well as top-down processing. The class taught consisted of 12 qualified teachers on day 9 of a 20 day in-service course that is designed to prepare them to contribute to teaching mathematics in the high schools or colleges where they are employed within greater London. Almost all of them have been educated outwith the UK and they teach a range of subjects from literacy to electronics.

I am one of two university tutors who teach them and, in the lesson reported on below, I am teaching geometry, following a session in which they have been working on graphs using Geogebra. In this whole class situation, learning was designed to take place both in a top-down manner, with proprioceptively experienced tools, but also in a bottom-up manner, within an interactive lecture format: To begin the geometry session they are asked to come to sit at the central table, away from their computers with Geogebra open, and I give a brief introduction to Euclid's historical context and his geometrical system, then the Euclidean tools of rulers and compasses are distributed. As their introduction to Euclidean geometry - which almost all of them had never studied as a deductive system before – they are asked to construct an equilateral triangle (as in Euclid's system) and then a square.

What happened

This post-lesson commentary was written using reflective notes.

After giving out the rulers and compasses, gazes went down, hands manipulated the tools and chatter decreased.

For most of them this was the first time they had been asked to use compasses to make a structure (equilateral triangle) that had properties by virtue of the constructing tools, rather than the marks made by the tools.

Several had practical difficulties with manipulating their compasses.

I then used Geogebra's basic geometry to do the equilateral triangle construction on the screen and drag it about. And here there were several gasps when what they had done on paper was animated.

This was my opportunity for didactic exposition concerning the purpose of dynamic geometry software (DGS): it is a digital representation of the Euclidean tool.

Remarks and observations

That their use of compasses was not perfect; there is a point of affect here in the struggle to make an acceptable, decent circle, procioceptive sensing is concentrated, the attention is 'top down' and the desire/aim/intention is both mental and physical. The tools was integral to formation of the concept of Euclidean circle – they all knew perceptual circles.

Inasmuch as the procioceptive concentration is physical and also intentional there is in this act of non-fluent tool use (having difficulty with the compasses) potential to transition from GI to GII. If drawing a circle with compasses is very easy to do there is not the attention focus and limited affective engagement. The too familiar does not stimulate affect and concentrated eye-hand activity stills chatter (Austin, 2009; 63).

It was an important teaching point for me to get them to grasp the abstractness of GII. I assessed that for at least some of the participating teachers, they did get that GII was reasoning based. In other words, their SGW had a strengthened connection between Construction and Proving. The 'explanation' that Geogebra does digitally what the compasses do in your hand prompted them towards understanding that the software was not only to explore shapes, GI style, but also was a means to work in GII.

CONCLUSIONS

Transitional thinking, such as GI to GII, is a cognitive achievement yet affective or emotional energy that is needed for such change (Damasio, 2003). Hence, conceptualising a person' Space for Geometric Work requires inclusion of affect. In this paper I have exemplified points of affect around transitions and suggested how awareness of affect within SGW might be used in teaching through integrating understandings of attention processing. This paper has not conceptualised lack of transition from GI to GII so much as a block, but as a yet-to-be-developed aspect of the person's SGW. Indeed, strong negative emotions (e.g., fear, panic, grief) can stimulate defence mechanisms that can manifest as the student losing interest, strong positive emotions (e.g. relief, delight, happiness) also mark cognitive achievements from sustained engagement on a task. Although not the focus of this paper, positive affect can of course be experienced as a consequence of cognitive achievement even in circumstances when that cognitive goal was achieved in a state of negative affect ('I am happy I have done it, but I hated doing it').

This discussion is centred on Euclidean geometry. This geometry has good approximate representation on paper, slates and the space we walk about in. But the issue of top-down attention and the centrality of proprioception is not just for Euclidean geometry: For example, in 2-dimensional spherical geometry, a key learning tool is a hand-held write-on ball. These geometry-specific tools (rulers and compasses, hand-held spheres) are top-down attention focusers for the respective geometry. In the schema of the SGW, they are part of Real Space and they are Artefacts and they are Reference. What is more the conduits (Geneses) from the personal environment (Epistemological plane) to the personal cognition (Cognitive plane) are intertwined. And at 'points of affect' there is a metaphorical fusing that allows Proving, Visualisation and Construction to all come together in the Cognitive plane. This 'fusing' can feel strong and pleasant which bodes well for retaining it in memory. The important news from neuroscience is that top-down processing integrates the near-to-me senses and, in particular, fingers are used to represent ideas in the imagination. So the coming together in the Cognitive plane is reinforced by further interaction with Real Space objects, Artefacts and discussion of the Reference terms in natural language. Such symbiosis reinforces the material and the affect stimulated by proprioceptive activity directs attention to the geometrical environment and enhances the individual's Space for Geometric Work. A challenge for further work in this area is to keep the different theoretical lenses simultaneously in focus on these points of affect.

REFERENCES

Austin, J. H. (2009). *Selfless Insight: Zen and the meditative transformation of consciousness*. Cambridge MA: The MIT Press.

Barrantes, M. & Blanco, L. J. (2006). A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education* 9:411–436.

Blakemore, S-J. & Frith, U. (2005) *The Learning Brain*. Oxford: Blackwell

Damasio, A. (2003). *Looking for Spinoza: Joy, Sorrow, and the Feeling Brain*. San Diego CA. Harcourt.

Begoña D., Hintz, F., Kiebel, S.J. & von Kriegstein, K. (2012) Dysfunction of the auditory thalamus in developmental dyslexia. *PNAS* August 6, 2012, phttp://psychcentral.com/news/2012/08/08/new-insights-into-the-neuroscience-of-dyslexia/42844.html) accessed 2/2/14.

Dubinsky, J. M., Roehrig, G. & Varma, S. (2013) Infusing Neuroscience Into Teacher Professional Development, *Educational Researcher* Vol. 42 No. 6, pp. 317–329

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). 'To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception' *Educational Studies in Mathematics* 74:163–183.

Gómez-Chacón I. Mª & Kuzniak, A. (2011) Les Espaces de Travail Géométrique de Futurs Professeurs en Contexte de Connaissances Technologiques et Professionelles. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, volume 16, p. 187 – 216.

Gómez-Chacón I. Mª & Kuzniak, A. (2013) 'Spaces for geometrical work: figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment' *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Hodkinson, P. and Hodkinson, H. (2001) The Strengths and Limitations of Case Study Research. Paper presented to the conference *Making an Impact on Policy and Practice*. Learning and Skills Development Agency, Cambridge, 5-7 December 2001.

Kravitz, D. J., Saleem, K. S., Baker, C. I. & Mishkin, M. (2011). A new neural framework for visuospatial processing *Nature Reviews Neuroscience* 12, 217-230.

Küchemann, D. & Rodd, M. (2012) 'On learning geometry for teaching', *Mathematics Teaching*. no. 229, 16-19.

Kuzniak, A. & Rauscher, J-C. (2011) How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? Educational Studies in Mathematics. 77: 129-147.

Liljedahl, P. (2005). Mathematical discovery and affect: The effect of AHA! experiences on undergraduate mathematics students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(2-3), 219-236.

Mareschal, D., Butterworth, B., Tolmie, A. (Eds.) (2013) *Educational Neuroscience*. Oxford: Wiley-Blackwell.

Moore, C. & Baressi, J. (2013) 'Imagination and the self' pp 288-301 in Taylor, Marjorie (Ed.) *The Oxford Handbook of the Development of Imagination*. Oxford: Oxford University Press.

Nemirovsky, R. & Borba, M. (2004) PME special issue: bodily activity and imagination in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 57, 303-305.

Rodd, M. M. (2000) On Mathematical Warrants: Proof Does Not Always Warrant, and a Warrant May Be Other Than a Proof, *Mathematical Thinking and Learning*, 2:3, 221-244.

Rodd, M. (2010). Geometrical Visualisation – epistemic and emotional. *For the Learning of Mathematics* 30(3) 29-35.

Royal Society (2011) *Brain Waves 2: Neuroscience: implications for education and lifelong learning*. http://royalsociety.org/policy/projects/brain-waves/education-lifelong-learning/ accessed 26/2/14

Shackman, A., Sarinopoulos, I., Maxwell, J., Pizzagalli, D., Lavric, A. & Davidson, R. (2006). Anxiety Selectively Disrupts Visuospatial Working Memory. *Emotion*, Vol. 6, No. 1, 40–61.

Van Hiele, P.M. (1986) *Structure and Insight: a theory of mathematics Education*. Orlando, Florida: Academic Press.

Willingham, D. T. & Lloyd, J. W. (2007). How educational theories can use neuroscientific data. *Mind, Brain, & Education*, 1, 140-149.

REPRESENTATIONAL FLEXIBILITY PROFILES IN FRACTION AND DECIMAL NUMBER ADDITION

Athanasios Gagatsis, University of Cyprus

Eleni Deliyianni, Cyprus Pedagogical Institute

Iliada Elia, University of Cyprus

The study focuses on the cognitive level of Mathematical Working Space (MWS) and the component of the epistemological level related to semiotic representations in two mathematical domains of rational numbers: fraction and decimal number addition. Within this scope, it aims to explore how representational flexibility develops over time. A similar developmental pattern of four distinct hierarchical levels of students' representational flexibility in both domains is identified. The results suggest that there is not a clear and stable correspondence between developmental levels of representational flexibility and school grades. Didactical implications are discussed.

INTRODUCTION

Mathematical work is the result of a continuous process of genesis that allows an inner joint at epistemological and cognitive level and articulation of these two levels. Representations are a basic component of any epistemological plane related to a particular mathematical field, while the cognitive level is influenced by the importance we grant to representations in the development of mathematical work (Kuzniak, 2011).

A number of studies (e.g. Lamon, 2001) stress the necessity of using a variety of representations in supporting and assessing students' constructions of fractions and decimal numbers. In this study, we concentrate on the cognitive processes undertaken when students dealing with fraction and decimal number addition tasks that demand transformation of representations: recognitions, treatments and conversions. Recognizing the same mathematical concept in multiple representations is considered essential for the acquisition of the concept (Lesh, Post, & Behr, 1987). Treatments and conversions are transformations of representations that (a) occur within the same system of representation and (b) consist of changing a system of representation without changing the objects being denoted, respectively (Duval, 2006). The conversion involves the construction of the target representation standing for the same object that is denoted in the initial representation, while recognition does not. Representational transformations can be seen as indications of the existence of representational flexibility in a mathematical domain (Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2011).

The study aims to explore how representational flexibility develops over time. Further knowledge about a possible developmental trend in students' representational flexibility in fraction and decimal number addition can provide improved clarity about students' individual differences in flexible mathematical thinking. Knowledge of this developmental progression may contribute to the designing of learning activities that stimulate the cognitive processes which move students through levels of flexible thinking in the particular domain. The importance of this study is even more underlined taking into account that the curriculum devotes a lot of time to work with fractions and decimals, but both teachers and students find the ideas and skills related with these numbers difficult (Barnett-Clarke, Fisher, Marks, & Ross, 2010).

In this study, we take into consideration the theoretical and research work related with the role of representations in the learning of mathematical concepts and MWS. In particular, an analysis of the students' cognitive processes is undertaken considering that the mathematical work in a school can be described in three different levels: personal, reference and appropriate MWS. Mathematics aimed at by the institutions is described in the reference MWS. This should be arranged by the teacher in an appropriate MWS, in order to allow effective implementation in the classroom where each student works within his personal MWS (Kuzniak, 2012).

METHOD

The study is conducted among 1701 students, aged 10 to 14, of primary and secondary schools in Cyprus (414 in Grade 5, 415 in Grade 6, 406 in Grade 7, 466 in Grade 8). The test which is constructed consists of 37 tasks which differed in terms of: (a) the types of representation transformation, (b) the modes of representation and (c) the rational number concept. The conceptualization of the various processes that are involved in the tasks appear in Appendix.

RESULTS

To identify students' response profiles for representational flexibility in fraction and decimal number addition, Ward's method of hierarchical clustering was applied. The z-scores of the factors composing representational flexibility, based on the elaborated structural models presented in previous research studies (Deliyiani, Elia, Panaoura, & Gagatsis, 2009; Gagatsis & Deliyianni, 2009), were used as variables for clustering.

Four clusters were identified in the two mathematical concepts. The representational flexibility scores of the students in Clusters 1, 2, 3 and 4 are 0.25, 0.43, 0.55 and 0.79, respectively in fraction addition. In decimal number addition, the scores in Clusters 1, 2, 3 and 4 are 0.34, 0.46, 0.66 and 0.75, respectively. Analysis of variance (ANOVA) with representational flexibility score as the dependent variable and cluster as the independent variable showed that the differences in the representational flexibility scores among the four clusters were significant both in fraction [$F(3, 1697) = 1009.46$, $p<0.01$] and decimal number addition [$F(3, 1697) = 1274.21$, $p<0.01$]. This suggests that there is a developmental pattern relative to representational flexibility in fraction and decimal number addition and that the four clusters may correspond to four distinct hierarchical levels of flexibility. Table 1 and 2 present the mean scores and standard deviations on the representational flexibility components by cluster in fraction and decimal number addition, respectively. More specific information about the clusters' characteristics is provided in Table 3 and 4, which show the success percentages per representational flexibility task for the four clusters separately in fraction and decimal number addition, respectively. This information allows us to indicate differences between diagrammatic representations (number line, bi-dimensional diagrams) and the complexity of fraction and decimal number addition (same/different denominators, same/different number of decimal digits).

Dimensions	**Cluster 1**		**Cluster 2**		**Cluster 3**		**Cluster 4**	
	Mean	**SD**	**Mean**	**SD**	**Mean**	**SD**	**Mean**	**SD**
F1: Same denominator fraction-addition recognition tasks	0.37	0.30	0.44	0.31	0.52	0.32	0.71	0.27
F2: Different denominator fraction-addition recognition tasks	0.20	0.31	0.04	0.11	0.77	0.16	0.83	0.17
F3: Treatment tasks	0.24	0.16	0.87	0.20	0.87	0.23	0.91	0.20
F4: Conversion tasks from a symbolic representation to a diagram	0.27	0.25	0.47	0.35	0.30	0.26	0.90	0.16
F5: Conversion tasks from a diagram to a symbolic representation	0.14	0.24	0.29	0.32	0.33	0.32	0.62	0.35
N		249		331		538		583

Table 1: Mean Scores and Standard Deviations in Representational Flexibility Components by Cluster in Fraction Addition

The students in Cluster 1 for fraction addition show low performance in solving all types of representational flexibility tasks. From Table 3 it is evident that these students encounter greater difficulties in adding fractions with different denominators than with the same denominators irrespectively of the representational transformation required (recognition, treatment or conversion). To sum up, the students of Cluster 1 cannot respond adequately to any type of representational transformation and this poor performance is influenced by the complexity of fraction addition, that is, whether the addends had the same or different denominators. These characteristics led us to conclude that they belong to the lowest developmental level of representational flexibility, Level 1.

Dimensions	Cluster 1		Cluster 2		Cluster 3		Cluster 4	
	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD	Mean	SD
F1: Recognition tasks with the same number of decimal digits	0.50	0.28	0.54	0.24	0.76	0.23	0.78	0.19
F2: Recognition tasks with different number of decimal digits	0.05	0.16	0.67	0.12	0.06	0.13	0.73	0.17
F3: Treatment tasks	0.65	0.29	0.67	0.23	0.93	0.23	0.93	0.12
F4: Conversion tasks from a symbolic representation to a diagram	0.36	0.28	0.31	0.25	0.74	0.29	0.69	0.29
F5: Conversion tasks from a diagram to a symbolic representation	0.14	0.11	0.11	0.18	0.80	0.18	0.61	0.32
N		530		470		179		522

Table 2: Mean Scores and Standard Deviations in Representational Flexibility Components by Cluster in Decimals Addition

Students who belong in Cluster 1 for decimal numbers exhibit low performance in conversion tasks and tasks that involve recognition of decimal number addition with different number of decimal digits. However, they demonstrate moderate performance in treatment tasks. This characteristic may related with decimal number similarities in notation with whole numbers. Their performance is also moderate in recognition tasks that involve recognition of decimal number addition with similar digits. According to Table 4, the students in Cluster 1 encounter greater difficulties in adding decimals with different number of decimal digits than with the similar digits irrespectively of the representational transformation required. They have also difficulties in treatment tasks Trd13 and Trd14 in which decimal digits are different between the addends and the sum. Their performance in tasks that demand understanding of the notion of equivalence in order to be solved is low even in adding decimals with similar digits (e.g. Cod17, Cod20). According to the results, the students in Cluster 1 have lower performance in conversion tasks from a diagrammatic to a symbolic representation in relation with the corresponding conversion tasks from a symbolic to a diagrammatic representation (Cod16- Cod18, Cod17-Cod20, and Cod15-Cod19).

Representational flexibility mean scores of students in Cluster 2 for fraction addition are higher than the scores of students in Cluster 1. The students in Cluster 2 demonstrate high performance in the symbolic treatment tasks. Similarly to Cluster 1, the students in Cluster 2 perform much better in the same denominator fraction addition recognition tasks relatively to the recognition of different denominator fraction additions. They exhibit moderate performance in the conversion tasks from a symbolic to a diagrammatic representation. However, their performance in the conversions from a diagrammatic to symbolic representation is lower.

Thus, two major dissociations appear in the performance of the students in Cluster 2 for fraction addition. First, although the students fluently calculate the sum of fractions with different denominators (treatment), they are not competent in recognizing whether a circle, a rectangle or a number line model represented a given symbolic expression of fraction addition with different denominators. They also have great difficulties in converting fraction additions with different denominators from and towards symbolic expressions. These results suggest that, on the one hand, Cluster 2 students are able to apply an algorithmic procedure within the symbolic representation to add fractions with different denominators. On the other hand, their poor performance in the recognition and conversion tasks of fraction addition with different denominators indicate deficiencies in the understanding of essential concepts in this type of fraction addition, that is, fraction equivalence and part-whole relations. Cluster 2 students' weakness in fraction equivalence is further supported by their low performance in solving correctly the same denominator fraction addition recognition task in which the number of subdivisions on the number line was double the denominators of the symbolic expression (task Ref4).

Factor	Tasks	Total (%)	Cluster 1 (%)	Cluster 2 (%)	Cluster 3 (%)	Cluster 4 (%)
F1	Ref1	61.4	35.4	48.6	55.6	84.9
	Ref2	58.8	42.2	49.8	58.4	71.5
	Ref3	69.7	56.2	61.9	68.4	81.0
	Ref4	31.2	13.3	19.3	26.6	49.9
F2	Ref5	45.6	13.7	4.5	58.6	70.5
	Ref6	55.5	21.3	7.6	73.2	81.0
	Ref7	68.4	24.9	0.6	98.0	98.3
F3	Trf8	89.9	65.5	94.9	94.1	93.8
	Trf9	76.7	4.0	88.8	85.5	92.8
	TrSd10	71.0	1.2	77.9	81.0	87.7
F4	Cof11	67.0	50.6	64.4	43.7	96.9
	Cof12	52.3	26.1	49.2	26.8	88.7
	Cof13	41.3	2.8	28.1	19.3	85.6
F5	Cof14	35.7	11.6	25.4	27.0	60.0
	Cof15	52.1	24.9	42.0	47.2	73.9
	Cof16	30.7	8.0	19.0	25.3	52.1
	Cof17	30.5	6.4	20.5	23.4	52.8
	N	1701	249	331	538	583

Table 3: Percentages of Success in Representational Flexibility Tasks by Cluster in Fraction Addition

The second dissociation in the performance of Cluster 2 students is between the conversions from a symbolic expression to a diagram and the conversions from a diagram to a symbolic expression. In the former type of conversions they perform better relatively to the latter one. This inconsistency in performance indicates that they do not sufficiently understand the common concept that both the symbolic expression and the diagrammatic representation denoted. Although students of Cluster 2 exhibit deficiencies in the recognition and conversion tasks, they succeed in treatment tasks; therefore, they belong to a higher level than Level 1, namely, Level 2 of representational flexibility.

Factor	Tasks	Total (%)	Cluster 1 (%)	Cluster 2 (%)	Cluster 3 (%)	Cluster 4 (%)
F1	Red1	55.4	47.5	51.3	75.4	60.2
	Red2	61.8	47.5	49.8	74.9	82.8
	Red3	64.8	50.2	59.6	77.7	79.5
	Red4	68.5	54.2	61.5	81.0	85.2
	Red5	44.2	35.5	31.5	60.9	58.8
	Red6	73.1	62.3	69.6	85.5	83.0
F2	Red7	45.3	6.8	66.2	10.1	77.8
	Red8	54.9	4.0	93.0	0.0	91.0
	Red9	29.5	4.9	43.0	7.3	50.0
F3	Trd10	95.3	90.2	94.9	99.4	99.4
	Trd11	92.1	84.2	91.3	97.8	98.9
	Trd13	62.4	42.5	43.8	89.9	89.8
	Trd14	75.4	63.2	64.7	91.5	91.8
	Trd12	59.8	44.0	39.1	84.9	85.8
F4	Cod15	29.9	13.0	7.4	65.4	55.0
	Cod16	74.4	67.2	64.3	86.0	87.0
	Cod17	43.0	29.1	22.1	71.5	66.1
F5	Cod18	49.0	27.9	23.0	94.4	78.2
	Cod19	30.7	9.6	7.2	74.9	58.2
	Cod20	23.6	3.6	3.2	69.3	46.7
N		530	470	179	522	530

Table 4: Percentages of Success in Representational Flexibility Tasks by Cluster in Decimal Number Addition

Students of Cluster 2 for decimal numbers exhibit the same deficiencies as students of Cluster 1 for decimal numbers in treatment, recognition with the same number of decimal digits and conversion tasks. However, due to their moderate performance in recognition tasks with different number of decimal digits they belong to a higher level of representational flexibility.

Students in Cluster 3 in fraction addition generally perform better than the students in Clusters 1 and 2. These students exhibit high performance in the treatment tasks) and the recognition tasks with different denominator fraction additions. They attain moderate performance in the recognition tasks of fraction addition with the same denominators. Their performance in the conversion tasks is low irrespectively of the initial representation, symbolic or diagrammatic. This means that these students face difficulties in producing a symbolic or diagrammatic representation of a fraction addition given in diagrammatic or symbolic form respectively. The above characteristics suggest that students in Cluster 3 are in a higher developmental level relatively to students in Cluster 2 who perform well only in the treatment tasks. Thus, the students in Cluster 3 belong to the third level of the representational flexibility hierarchy.

Students in Cluster 3 for decimal numbers exhibit high performance in the treatment tasks, conversion from a symbolic to a diagrammatic expression and the reverse and recognition tasks with the similar digits. However, they are not competent in recognizing whether a circle, a rectangle or a number line model represents a given symbolic expression of decimal number addition with different number of decimal digits. Their performance in these tasks is similar with the performance of students who belong in Cluster 1 for decimal numbers.

Cluster 4 in fraction addition involves high achievers in most of the tasks. Due to their greater success in dealing with transformation tasks relatively to the students of the previous clusters, these students belong to the highest developmental level of representational flexibility that was identified in this study, Level 4. They demonstrate high performance in recognition of fraction additions with the same denominators and different denominators and treatment tasks. Nevertheless, dissociation between the conversions from and towards symbolic expressions is found in their performance. Even though they exhibit high performance in conversion tasks from symbolic to diagrammatic representation, they perform moderately in the conversion tasks from a diagram to a symbolic expression.

Cluster 4 in decimal numbers involves high achievers, as in the case of fractions. The sharp dissociation though in their performance between the conversions from and towards symbolic expressions was not found as in the case of Cluster 4 in fraction addition.

According to the results in Tables 3 and 4, students in all clusters exhibit lower performance in recognition and conversion fraction addition tasks with the same denominators that involve number line in relation with them that involve bi-dimensional diagrams. The same occurs in recognition and conversion tasks in decimals.

Table 5 presents the frequency distribution of Grade 5 to 8 school students, at the four developmental levels of representational flexibility in fraction and decimal number addition. Chi-square test reveals that there are significant differences between the four age groups regarding their distribution in the four representational flexibility levels in fraction [(x^2 (9)=73.65, $p<0.01$].

Levels	Rational Number	Grade 5 (*f*)	Grade 6 (*f*)	Grade 7 (*f*)	Grade 8 (*f*)	N
Level 1	Fractions	58	47	99	45	249
		(-0.3)	(-1.8)	(5.1)	(-2.8)	
	Decimals	164	116	116	134	530
		(3.1)	(-1.2)	(-0.9)	(-0.9)	
Level 2	Fractions	105	75	68	83	331
		(2.7)	(-0.6)	(-1.2)	(-0.8)	
	Decimals	116	96	143	115	522
		(0.2)	(-1.7)	(2.9)	(-1.2)	
Level 3	Fractions	148	141	105	144	538
		(1.5)	(0.9)	(-2.1)	(-0.3)	
	Decimals	47	46	32	54	179
		(0.5)	(0.4)	(-1.6)	(0.7)	
Level 4	Fractions	103	152	134	194	583
		(-3.3)	(0.8)	(-0.4)	(2.7)	
	Decimals	87	157	115	163	470
		(-3.6)	(2.6)	(-0.9)	(1.7)	
N		414	415	406	466	1701

NOTES

1. Standardized residuals appear in parentheses below group frequencies

Table 5: Frequency Distribution of Hierarchical Levels by Grade in Fraction and Decimal Number Addition

Delving further into the correspondence of the hierarchical levels with school grades, standardized residuals are used to find out which ones have major influence on the chi-square test statistic. In these cases the absolute value of the residual should be greater than 2.00. According to this analysis, within the highest level of representational flexibility, eighth graders possess the most significant proportion among the students of all grades, while fifth graders are significantly underrepresented. Within the third developmental level of representational flexibility seventh graders are significantly underrepresented. The most significant proportion of students in the second level of representational flexibility is possessed by the youngest students of the study, the fifth graders. In the lowest level of the representational flexibility, the majority of the students are seventh graders, whereas eighth graders are significantly underrepresented.

Chi-square test reveals that there are significant differences between the four age groups regarding their distribution in the four representational flexibility levels in decimal number addition [(x^2 (9)=52.25, p<0.01], as well. According to standardized residuals, within the highest level of representational flexibility in decimal number addition, sixth graders possess the most significant proportion among the students of all grades, while fifth graders are significantly underrepresented. Within the third developmental level of representational flexibility all the grade are almost equally presented. The most significant proportion of students in the second level of representational flexibility is possessed by the seventh graders. In the lowest level of the representational flexibility, the majority of the students are the younger students, the fifth graders.

The above results indicate that students of the same educational level moved to higher levels of representational flexibility in fraction and decimal number addition with school grade, that is, from fifth grade to sixth grade of primary school or from seventh grade to eighth grade of secondary school, respectively. In decimal numbers sixth graders' representational flexibility is at a higher level compared to the flexibility of the fifth graders and secondary school students. Furthermore, eighth graders' representational flexibility in fraction addition is at a higher level compared to the flexibility of the students in primary school. This is not however the case for seventh graders. Thus, students' representational flexibility does not improve from sixth grade to seventh grade, which is the transition period from one educational level to the other.

DISCUSSION

A main contribution of the study is the identification of hierarchical levels in representational flexibility in fraction and decimal number addition. Particularly, our findings suggest that there are at least four developmental levels of the students. At Level 1, students do not yet developed their representational transformation competences in fraction addition. At Level 2 students develop the ability to carry out treatments of fraction addition in the symbolic system of representation. At Level 3 students are able to carry out symbolic treatments, but also to recognize the diagrammatic representations of fraction additions that are given in symbolic form. At Level 4 students are able to handle symbolic treatments but also to carry out transformations from symbolic representations of fraction addition to diagrams either by recognizing the appropriate diagram(s) or by constructing them. They encounter difficulties though in converting fraction additions from diagrammatic representations towards symbolic expressions.

Similar results are indicated for decimal number addition. However, differences are also revealed between the two mathematical domains of rational numbers. An interesting phenomenon that is appeared by our findings in decimals was the dissociation between the conversions from and towards symbolic expressions in lower levels. This type of compartmentalized way of thinking is indicated though even in the highest level of representational flexibility in fraction addition. The great majority of the students, even the students belonging to the fourth developmental level of representational flexibility, find the conversions of fraction additions from diagrammatic representation to symbolic expression much more difficult than the inverse conversions. Although the two types of conversion tasks refer to the same concept, they yield either different types of difficulties or similar types of difficulties but to a different extent, indicating that they require different or more complex types of cognitive processes. Changing representations in a mathematical domain is not a reversible process; it can be transparent or congruent in one direction and not transparent in the other (Duval, 2006). The conversion from a symbolic representation to a diagram is a simple coding activity involving a term-by-term translation of the symbolic expression. Thus, it can be characterized as a transparent conversion. However, the conversion from a diagrammatic representation of a fraction or a decimal number addition to symbolic expression is less transparent, as it requires a global interpretation of the visual representation, its components and their relations. Students' training in mathematics teaching can further amplify this discrepancy. A high level of representational flexibility in fraction addition, which, according to our findings, does not been accomplished by the students of this study, not even by the majority of the eighth graders, presupposes success in both types of tasks, which is, moving back and forth from the symbolic to the diagrammatic representation. Lack of this kind of flexibility among the students of this study indicates that they do not sufficiently understand the common concept denoted by both the symbolic expression and the diagrammatic representation (Duval, 2006).

Difficulties are also indicated in recognizing the diagrammatic representations of decimal number additions with different number of decimal digits that are given in symbolic form even in high level of representational flexibility (Level 3). However, difficulties with different denominator fraction addition recognition are indicated only in the lower levels of representational flexibility in fraction addition. This may explained taking into account the fact that in recognizing the diagrammatic representations of decimal number additions with different number of decimal digits, the transitional step of converting each decimal number to fraction with fixed denominator in order to be solved is required.

Based on these findings, there seems to be a regular and systematic increase in the sophistication from one level to another. Thus, these hierarchical levels and specifically the different competences that they encompass can be of practical use because they may support the progressive organization of learning activities on fraction and decimal number addition by difficulty level, which could help students with various abilities develop their representational flexibility within the particular domain. There is not thought a clear and stable correspondence between the developmental levels of representational flexibility and school grades. Students within the same educational level appear to move to higher levels of representational flexibility with school grade, but there is a lack of improvement in the transition period, from the last grade of primary school (Grade 6) to the first grade of secondary school (Grade 7) in fraction and decimal number addition. These results move a step forward Gagatsis & Deliyianni's (2014) results, that indicated interesting variations in students' performance regarding conversion ability having diagrammatic and symbolic representation as the source and target representation respectively, and vice versa, and verbal and diagrammatic problem-solving ability across these age groups. These findings revealed that the students' performance improved within the same educational level (primary school, secondary school). However, a hiatus in performance progress is indicated when the students move to secondary school.

In line with previous results (Gagatsis & Deliyianni, 2014), it seems that the MWS of the primary school students (personal) and teachers (reference) are based on the same paradigm regarding fraction and decimal number addition. Within the MWS of both, students and teachers, the component of the epistemological level related to semiotic representations is conceived and approached in the same way. The mathematical work of both teachers and students is based on the use not only of symbolic representations, but also of diagrammatic and verbal representations and their interrelations. However, the reference MWS which is aimed to by secondary schools concerning the concept of fraction and decimal number addition has not been successfully transformed into an appropriate MWS, as it does not allow its successful implementation in the classroom where every student works within his/her personal MWS. Secondary school students at this early stage (Grade 7) need to use not only symbolic representations, but also diagrammatic and verbal representations and their coordination in order to solve fraction and decimal number addition tasks. Schools and teachers, however, promote a more abstract and symbolic approach to the representation and learning of fractions and decimals. Therefore, when the students encounter tasks that require flexible manipulation of representations in fraction and decimal number addition, they face difficulties.

Independently how the calculations (written or mental, exact or approximate) are performed in the various transformation tasks, findings reflect comprehensively the role of multiple representations. It is also worth mentioning that the students face difficulties in the majority of tasks which involve number line irrespective of the hierarchical level they belong. This finding is explained taking into account both the differences between number line and bi-dimensional diagrams and students' familiarity with them. Rational numbers are interpreted as points on a number line, emphasizing that the rational numbers are a subset of the real numbers (Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2013). In fact, number line is a geometrical model, which involves a continuous interchange between a geometrical and an arithmetic representation. Operations on real numbers are represented as operations of segments on the line (Michaelidou, Gagatsis, & Pitta-Pantazi, 2004). Circular diagrams are mainly used in introducing and teaching the addition of fractions. However, a circular representation had lower factor loadings than the other tasks in the proposed model (Gagatsis & Deliyianni, 2009). This finding suggests that even though circular diagrams are mainly used in introducing and teaching the addition of fractions, the number line and rectangular representation were more strongly related than the circular one to fraction-addition representational flexibility. Therefore one might claim that the traditional approach of introducing and teaching the addition of fractions, mainly using circular models, should be reconsidered and perhaps connected more systematically with other diagrammatic representations, which is in line with the findings of Charalambous and Pitta-Pantazi (2007).

In future, the extent to which the developmental levels of representational flexibility that are identified in this study apply in the learning of other concepts or in different age ranges could be of great theoretical and practical interest.

REFERENCES

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). Developing essential understanding of rational number: Grades 3 – 5. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. Educational Studies in Mathematics, 64(3), 293 – 316.

Deliyianni, E., Elia I., Paraoura, A., & Gagatsis A. (2009). A structural model for the understanding of decimal numbers in primary and secondary education. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2 (pp.401-408). Thessaloniki: PME.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103- 131. doi:10.1007/s10649-006-0400-z

Gagatsis, A. & Deliyianni, E. (2014). Mathematical working space relations with conversions between representations and problem solving in fraction addition. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17 (4-I): 191-210

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2009). La comprensione dell'addizione di frazioni nella scuola primaria: Il ruolo delle rappresentazioni multiple. La Matematica e la sua Didattica, 23(3), 299-318.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité : Le cas du domaine numerique. Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 25-43.

Kuzniak, A. (2011). L' espace de travail mathématique et ses genèses. Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 9-24.

Kuzniak, A. (2012). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. Retrieved from http://www.icme12.org/upload/submission/1922_F.pdf

Lamon, S. (2001). Presenting and representing from fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), The role of representation in school mathematics (pp. 146-165). Boston: NCTM.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Michaelidou, N., Gagatsis, A., & Pitta-Pantazi, D. (2004). The number line as a representation of decimal numbers: A research with sixth grade students. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education: Vol. 3 (pp. 305 – 312). Bergen: PME.

Teppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2013). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. ZDM Mathematics Education, DOI: 10.1007/s11858-013-0518-2.

APPENDIX

Competence	Fraction addition	Description	Representation/s	Diagrammatic representation	Variables
Recognition	Same denominators	Recognizes whether the shaded part of a diagram corresponds to the symbolic expression of an addition of fractions	Symbolic to Diagrammatic	Number line	Ref1
				Circle	Ref2
				Rectangle	Ref3
				Number line	Ref4
	Different denominators		Symbolic to Diagrammatic	Circle	Ref5
				Rectangle	Ref6
				Number line	Ref7
Treatment	Same denominators	Finds an answer to the addition of fractions	Symbolic		Trf8
	Different denominators				Trf9
					Trf10
Conversion	Same denominators	Illustrates an addition of fractions	Symbolic to diagrammatic	Circle	Cof11
				Number line	Cof12
	Different denominators			Rectangle	Cof13
	Same denominators	Writes the symbolic expression of the addition of fractions	Diagrammatic to symbolic	Number line	Cof14
				Circle	Cof15
	Different denominators			Number line	Cof16
				Rectangle	Cof17

The Representational Flexibility Processes in Fraction Tasks

Competence	Decimal number addition	Description	Representation/s	Diagrammatic representation	Variables
Recognition	Same number of decimal digits	Recognizes whether the shaded part of a diagram corresponds to the symbolic expression of an addition of decimals	Symbolic to Diagrammatic	Circle	Red1*
				Number line	Red2
				Rectangle	Red3
				Circle	Red4
				Number line	Red5
				Rectangle	Red6
	Different number of decimal digits		Symbolic to Diagrammatic	Circle	Red7
				Number line	Red8
				Rectangle	Red9
Treatment	Same number of decimal digits	Finds an answer to the addition of decimals	Symbolic		Trd10
					Trd11
					Trd13
					Trd14
	Different number of decimal digits				Trd12
Conversion	Same number of decimal digits	Illustrates an addition of decimals	Symbolic to diagrammatic	Rectangle	Cod16
				Circle	Cod17
	Different number of decimal digits			Number line	Cod15
	Same number of decimal digits	Writes the symbolic expression of the addition of decimals	Diagrammatic to symbolic	Rectangle	Cod18
				Circle	Cod20
	Different number of decimal digits			Number line	Cod19

The Representational Flexibility Processes in Decimal Number Tasks

A UNIFIED FRAME OF REFERENCE FOR THE STUDY OF STUDENTS' ERRORS AND OBSTACLES WITHIN THE DISCURSIVE GENESIS OF THE MATHEMATICAL WORK SPACE ON THE CONCEPT OF ABSOLUTE VALUE

Athanasios Gagatsis, University of Cyprus, Cyprus

Serkan Özel, Boğaziçi University, Turkey

Iliada Elia, University of Cyprus, Cyprus

Areti Panaoura, Frederick University, Cyprus

Zeynep Ebrar Yetkiner Özel, Fatih University, Turkey

In this study we analyze students' conceptions of absolute value, the errors in their mathematical work and the interrelations of these cognitive aspects in order to identify the obstacles that hinder the discursive genesis in their personal mathematical work space for the particular concept. A test was administered to a sample of 289 ninth grade students in Turkey. The results revealed that students encountered epistemological obstacles, which have commonalities with conceptions in the historical evolution of the concept, and didactic obstacles which are related to its didactic transposition and the phenomenon of didactic contract in mathematics teaching. We also found an interplay of the two types of obstacles, with the didactic obstacles reinforcing the epistemological obstacles in students' reasoning.

Keywords: *mathematical work, epistemological obstacles, didactic transposition, didactic contract, historical approach*

INTRODUCTION

In the teaching of mathematics the notion of absolute value is used to express the distance between two numbers at the line of the real numbers and also to define the concept of limit, of the continuity for the real functions and the multivariate functions (Almog & IIany, 2012). In the present study, we attempt to capture the mathematical and cognitive complexity when students deal with the concept of absolute value, on the basis of the Mathematical Work Space (MWS) (Kuzniak & Richard, 2013). The MWS includes a network of two planes, a cognitive and an epistemological one, and this networking is based on three geneses, namely, the semiotic genesis (between representations and visualization of mathematical objects), the instrumental genesis (between artifacts and mathematical construction), and the discursive (between the theoretical reference system and access to mathematical reasoning, argumentation and validation).

In this study we are mostly interested in the discursive genesis in the MWS as it enables us to follow a theoretical approach in analyzing the obstacles students encounter in their reasoning on absolute value. This reasoning is generated in various (typical and non-typical) tasks on absolute value and its properties as well as in giving explanations about the meaning of the concept of absolute value. Within this genesis we are in a position to identify and interpret students' conceptions and errors while thinking about this particular concept. Although the semiotic genesis is also an important aspect of students' work on absolute value and is worthy of being analyzed, it is beyond the scope of this study.

We complement this theoretical framework with other theoretical approaches based on a historical analysis of the concept of absolute value, and the ideas of epistemological and didactic obstacles in mathematical work. A historical overview on absolute value can give insight into the epistemological nature and content of the mathematical reference system related to the concept of absolute value in students' personal MWS. For example, particular components of students' cognitive processes when dealing with problems on absolute value may trigger the enactment of theoretical components at the epistemological level which might have been parts also of the historical evolution of the concept in the previous centuries. An analysis of the obstacles students encounter in their mathematical work on absolute value will reveal the sources of students' errors and delays in the genesis of mathematical meaning for the concept. We are interested in obstacles either of epistemological nature, that is, related to existing components of mathematical knowledge which could have commonalities with conceptions in the historical evolution of the concept, or of didactic character, that is, related to the process of the didactic transposition of absolute value and the phenomenon of didactic contract in teaching.

A HISTORICAL PERSPECTIVE ON ABSOLUTE VALUE

The study of Thomaidis and Tzanakis (2007) underlines the valuable role of the historical approach in the mathematics teaching and learning. In studying the historical evolution of the notion of absolute value three key stages can be distinguished, according to Cornu (1991): (i) the absolute value as an implicit concept, (ii) the notion of absolute value in the algebra of inequalities, (iii) the transition to a new conceptual context where absolute value was on the way to notation and formalization.

Based on a comprehensive analysis of the historical evolution of absolute value by Gagatsis and Thomaidis (1995) and Gagatsis and Panaoura (2013), in the first stage, the initial references to the absolute value are associated with the name of Fr. Viete, 1591 who introduces a special notation for 'uncertain minus'. During the seventeenth century, in the second stage, the absolute value is considered as the number without sign and as the distance from zero. The use of 'abstraction being made from the sign' for the expression of 'positiveness' emerged naturally by the traditional conception that a letter without sign in algebra represents a 'positive' quantity (Gagatsis & Thomaidis, 1995).

The third stage, in the nineteenth century, included a transition to a new conceptual context (Cornu, 1991). This conceptual change was characterized by a rupture between the concept of number and quantity. The absolute value appears for the first time as an independent notion in Cauchy's famous work 'Cours d'analyse'

(1821). In this work, the concept of absolute value is introduced and used directly to positive and negative quantities, as the “numerical value” of a quantity. Finally in Cauchy's posterior work “Memoire sur les functions continues” (1844) absolute value appears in a new role, as a function. Using the several analytical expressions given by Cauchy for this concept, absolute value could be defined as follows:

$$val.num.(x) = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & if \quad x \geq 0 \\ -x & if \quad x < 0 \end{cases} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2}{t^2 + x^2}\,dt$$

OBSTACLES IN MATHEMATICAL WORK ON ABSOLUTE VALUE

Epistemological obstacles

Brousseau (1983) points out that errors are not always a “result of ignorance [...] or chance”, but often are caused by “prior knowledge that was relevant and had its success, but which now proves to be false, or simply inadequate” (Brousseau, 1983). This old knowledge that proves to be an obstacle to new knowledge and make students deviate from an expected mathematical reasoning is called epistemological obstacle (Schneider, 2014).

According to Duroux (1983) the cause of pupils' errors in the learning of absolute value are the epistemological obstacles concerning relative numbers, e.g. the conception of number as a measure; this conception hinders the acquisition of positive and negative numbers as elements of a unified set on which the absolute value function may be constructed (Gagatsis & Thomaidis, 1995). The study by Gagatsis and Panaoura (2013) indicated that another major obstacle, linked to the learning of absolute value in Cypriot students, concerns the conception of absolute value as the number without a sign.

Didactic obstacles: Didactic transposition and didactic contract

The theoretical notions of the didactics of mathematics ‘didactic transposition’ and ‘didactic contract’, are essential in acquiring a better understanding of the current framework of teaching and useful as interpretative tools for the appearance of obstacles of a didactic nature in students’ personal MWS related to the concept of absolute value.

“The process of didactic transposition refers to the transformations an object or a body of knowledge undergoes from the moment it is produced, put into use, selected and designed to be taught, until it is actually taught in a given educational institution” (Chevallard & Bosch, 2014). This notion was introduced in the didactics of mathematics by Chevallard (1985). In “transposing” a body of knowledge from its origin to school, particular work should be carried out to reconstruct a proper context with activities aimed at making this knowledge an appropriate object of teaching with a meaningful and useful content (Chevallard & Bosch, 2014).

Considering the didactic transposition of absolute value, in the teaching of the first years of secondary school, absolute value is introduced together with positive and negative numbers and therefore the conception of the "number without sign" (which constituted a legitimate definition of absolute value in the past) emerges. The definition and symbolism of absolute value at this early stage serve more an internal necessity of the curriculum, especially its spiral structure (which goes through a lot of objects of teaching, including operations on integers and rational numbers to equations and inequalities and, finally, to the concepts of limit and continuity) than situations where the use of this concept is indispensable. The incorporation of the formal definition and properties of absolute value in school algebra, between elementary teaching of integers and theory of limits in calculus at a later stage, leads to a detachment of this concept from the situations which historically justified its construction and use. In their place, exercises and problems formed by didactic criteria appear (which, however, are not aimed at teaching absolute value); that is, equations and inequalities with absolute values, whose treatment aims to a practice on the formal definition and properties of this concept. A basic feature of these exercises is that their solution is connected, from the very beginning, with the removal of the absolute value sign, a process usually reduced to the execution of algorithms (Gagatsis & Thomaidis, 1995).

Empirical research results have indicated that many difficulties with the notion of absolute value arise when passing from the arithmetic to the algebraic domain, where several definitions of the same concept are offered (Stupel, 2012). The study by Almog and Ilany (2012) showed that some students did find an immediate solution in absolute value inequalities while others used algebraic manipulations without fully understanding the meaning of absolute value.

Gagatsis and Panaoura (2014) showed that the attempt by the students to use algebraic algorithms, e.g., to get rid of the absolute value sign, is employed also in situations in which a different mathematical reasoning is expected, for example, in an equation of the form $||x-2|-17|=-2$. This behavior indicates students' mechanical application of a "rule" especially employed in teaching, which could be explained by the notion of didactic contract (Brousseau, 1997). Teachers favour the process of excluding the absolute value sign in school tasks and facilitate pupils' work with algorithms and other didactic devices; thus it becomes a "rule" of the didactic contract between teachers and pupils, regarding the concept of absolute value. Most students are impelled by an "obligation for action" to apply the specific process, e.g., at the first sight of an equation or function with absolute value; nevertheless, students who easily identify the equation $||x-2|-17|=-2$ as an impossible one are those who break the didactic contract and do not follow it (Gagatsis & Panaoura, 2014).

Our purpose in this study is to propose and use a unified frame of reference for the study and interpretation of errors and obstacles in students' mathematical work, within the framework of MWS and specifically within the discursive genesis, interwoven with important theoretical notions of the didactics of mathematics, namely, epistemological obstacles, didactic transposition and didactic contract, as well as with a historical approach on the evolution of the concept. In this respect we have the following research questions:

1. What are the conceptions of students about the mathematical meaning of the concept of absolute value and to what extent do they appear?

2. What are the errors in students' mathematical work on the concept of absolute value and to what extent do they appear?

3. How are students conceptions of absolute value connected to the errors in their mathematical work?

4. What obstacles intervene in the geneses of students' mathematical work on the concept of absolute value and which errors do they account for?

5. How are the obstacles students encounter connected a) to didactical phenomena related to the concept, that is, the process of didactic transposition and the didactic contract in the teaching of the concept and b) to mathematical knowledge that had a historical role in the evolution of the concept of absolute value?

METHOD

The sample of the study consisted of 289 ninth grade students from a high school in Istanbul, Turkey. Females (53%) were more than males.

The Turkish curriculum that was in use when the study was conducted is the Primary Mathematics Curriculum: 6-8 Grades (2009) and High School Mathematics (9-12 Grades) (2011). The first introduction to absolute value is in the 6th grade when students are studying integers and as the distance from "0." Additionally, teachers are suggested to emphasize that an absolute value of any number is positive. After the limited introduction to absolute value in 6th grade, students are re-introduced to absolute value concept in 9th grade. While students study absolute value on integers and rational numbers in middle school, they study on real numbers in high school. Formal definition and properties of absolute value are given in 9th grade but the emphasis on this definition is not strong. Equations and inequalities with absolute value are also studied at this grade. The "solution" of impossible inequalities (e.g., $|x+3| \leq -1$ is hardly found. Moreover, there is no exercise on determining the sign of $-x$ to evaluate student understanding of this important area.

The research instrument of the present study is a test that was used in the study by Gagatsis and Panaoura (2014). The tasks of the test are presented in the Results section. This test was chosen because it serves this study's needs, as most of the tasks of the test require reasoning based on the meaning of absolute value and its properties and not the mechanical application of algebraic manipulations. For example, tasks D, G and H entail the recognition of the impossibility of the corresponding equations or inequalities on the basis of the definition of absolute value and of the resistance to any possible influence of the didactic contract. Thus, through the tasks of the test the nature of the discursive genesis is activated and the power of it could be also indicated in students' work. Students spent approximately one hour to complete the test.

RESULTS

Students' conceptions of absolute value and errors

Students' conceptions of absolute value (Task A) are provided below. Students' errors as they were categorized in each of the other tasks (B-I) are also described. Furthermore, the codification of these conceptions and errors for the statistical analysis and the percentages of their appearance among the students' responses are shown.

A. What do we mean by 'absolute value of a real number'?

Definition 1 (Def1): $|a| = \begin{cases} a & if\ a \geq 0 \\ -a & if\ a < 0 \end{cases}$

Symbolically or Verbally expressed (7%)

Definition 2 (Def2): Distance from zero (41%)

Definition 3 (Def3): Number without sign (16%)

B. Solve the equation | x + 3 | = 2.

Error 1: Finds one x value and the second x value is the additive reverse. (2%)

Error 2: Absolute value cannot be less than 0. For example, student does not solve the equation x+3 = -2 and states the explanation or Solves only for when the expression is positive. For example, student does not solve for x+3 = -2. (9%)

Error 3: Solves as an inequality. For example $+3 \geq 0\ and\ x < 0$. (2%)

Error 4: Error with taking out as negative. For example, -x+3 = 2, x-3 = 2 or –x-3 = -2. (5%)

Error 5: Computational error or x values were obtained but incorrect solution set. For example, looks for an intersection. (7%)

C. |x| > 5.

Error 1: Could not solve for x<0 or Only positive values. (27%)

Error 2: -5>x>5, -5>-x>5, -5<x<5 (12%)

Error 3: Correctly find x values but incorrect solution set or Incorrect use of close end of the solution set. For example, (-∞, -5]. (5%)

C_err_integer: Provide the solution set only for integer values. (18%)

D. Solve the equation | |x − 5 |−12| = –5

Error 1: Ignores the impossibility and tries to solve (sometimes as an inequality). (51%)

E. Determine the sign of −x.

Error 1: States "negative" or "-". (53%)

Error 2: no mentioning of the variable x. For example, student states "positive or negative" or "indefinite". (7%)

Error 3: Unnecessary and incorrect use of absolute value. For example $|-x| = x$. (4%)

Error 4: states “positive” or “+”. (3%)

Error 5: States “depends on the value of x”. (6%)

F. Give the real values of x for which the inequality is valid $|x - 2|<3$.

Error 1: Cannot solve the negative part. (18%)

Error 2: Cannot solve the positive part. (2%)

Error 3: Do not continue for negative solution. For example, leaves $-x<1$ or Find x values correctly and then add $-1<-x<5$ or Computational error or Incorrect use of close end of the solution set. For example, $(-1, 5]$. (2%)

F_err_integer: Provide the solution set only for integer values. (26%)

G. Solve the inequality $|x - 4| < -2$.

Error 1: Ignores the impossibility and tries to solve the inequality. (50%)

H. Solve the equation $|x + 2| + |x + 6| = 0$.

Error 1: Ignores the impossibility and tries to solve the equation. (46%)

I. Solve the inequality $| x - 3| > 0$

Error 1: Cannot solve the negative part. (37%)

Error 2: Incorrect use of equality. For example, starts solving as an inequality but finds one solution as equality. For example, $x=3$. (10%)

Error 3: $(-\infty,\infty)$ or Cannot write the solution set. (7%)

Error 4: Cannot solve the positive part. (3%)

I_err_integer: Provide the solution set only for integer values. (4%)

To examine the associations between students’ ways of conceptualizing the meaning of absolute value and their errors in various tasks on this concept, the data were analyzed using the similarity method of the software CHIC (Gras, Suzuki, Guillet, & Spagnolo, 2008; Lerman, 1981). Figure 1 presents the similarity diagram.

Two distinct similarity clusters are established in the diagram, with each cluster including two similarity groups connected to one another. The similarity groups of the first cluster include the formal definition of absolute value (definition1) and the definition of absolute value as the distance from zero (definition 2), respectively, with each definition associated with different types of errors in the tasks. The definition of absolute value by the students as a number without sign (definition 3) is connected to other types of errors in the first similarity group of the second cluster. In the second cluster a second similarity group is associated with the first similarity group, which includes also a number of error patterns.

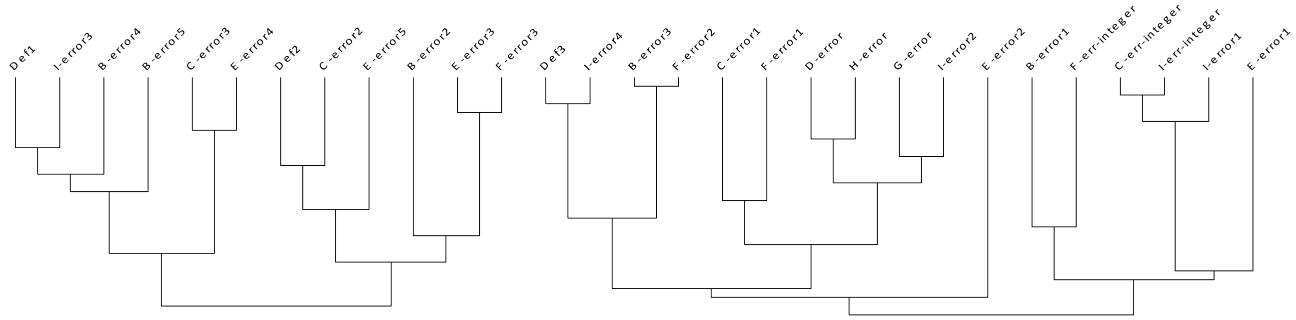


Figure 1: Similarity diagram of students' conceptions of absolute value and their errors in the tasks

The structure of the similarity groups of the diagram yields the following remarks:

Among the students who gave the formal definition of absolute value, those who responded incorrectly to the tasks were more inclined to make the following errors: I-error 3, B-error4, B-error 5, C-error3 and E-error4. Most of these errors do not exhibit deficiencies in the conceptual understanding of the meaning of absolute value, but rather a difficulty in the algebraic manipulation required in the tasks.

Among the students who gave the definition of absolute value as the distance from zero, those who responded incorrectly to the tasks were more inclined to make the following errors: C-error 2, E-error5, E-error3, B-error2 and F-error3. Besides a difficulty in the algebraic manipulation required in the tasks, the students who gave the second definition might exhibit lack of flexibility in using the absolute value correctly in various contexts, influenced by the conception of number as a measure or by the conception that the solution set of an inequality with absolute value should include zero (as their meaning of absolute value is the distance from zero).

Among the students who gave the definition of absolute value as the number without sign, those who responded incorrectly to the tasks were more inclined to make the following errors: I-error4, B-error3, F-error2, F-error1, C-error1, D-error, H-error and G-error, I-error2 and E-error2. The students who defined the absolute value as a number without sign exhibited a combination of various deficiencies in the solution of the tasks on the concept which are derived from the conception of number as a measure and of absolute value as a number taken positively, from overlooking the impossibility of equalities or inequalities and from their inclination to adjust the task to their own existing knowledge and capabilities to be able to proceed to a familiar algebraic "solution".

The indirect connection of the second group of the second similarity cluster to the third definition and the lack of associations with the other definitions suggest that the errors included in this similarity group are more likely to appear in the work of students who adopt the meaning of absolute value as a number without sign (third definition), extending the aforementioned deficiencies. These errors include B-error1, F-err-integer, C-err-integer, I-err-integer, I-error1 and E-error1. Besides the deficiencies already noted about the work of students who gave the third definition about absolute value, these errors imply students' perseverance on integer values and the defective application of the formal definition of absolute value.

Obstacles in students' mathematical work on absolute value: Connections to teaching and history

The obstacles that intervene in students' mathematical work on absolute value are revealed by identifying and interpreting three interrelated and supplementary aspects of our analysis: a) students conceptions of absolute value and the types of students' errors in their reasoning while solving the tasks, b) the connection of students' errors with their conceptions regarding the meaning of absolute value as shown in the similarity diagram, c) the grouping of errors of a specific type on different tasks in the similarity diagram, which indicates the common obstacle that might be behind the consistency by which these errors appear in students' solutions.

Table 1 includes the results of this analysis which reveal the obstacles that intervene in students' discursive genesis related to absolute value. This table also shows that some epistemological obstacles are enhanced by obstacles of didactic nature, which are derived from the didactic transposition of the concept in school mathematics.

Obstacle	Nature	Definition or Error type by students
• Number as a measure • Letter without sign in algebra represents a positive quantity • Introduction to absolute value when studying integers (positive or negative) • Initial emphasis of teaching that an absolute value of any number is positive • No exercise in textbooks on determining the sign of -x	Epistemological Didactic (didactic transposition)	• Absolute value is a number without sign • Solving an equation or inequality only when the expression is positive: B-error 2, C-error 1, F-error 1, I-error 1 • The sign of –x is negative: E-error 1
• Absolute value as a distance from zero	Epistemological	• Zero is an essential part of the solution set of any inequality: C-error2
• Absolute value is a number without sign • Absolute value as a distance from zero	Epistemological	• Lack of conceptual understanding and defective application of the formal definition of absolute value and its properties: E-error 3, F-error3, I-error4,

• Gap in the transition from arithmetic to algebra • Providing two definitions in teaching (distance from zero and formal definition) in an isolated way with a focus on the former definition • Focus on exercises and problems to practice on these definitions	Didactic (didactic transposition)	B-error3, F-error2, B-error1
• Study of absolute value on integers	Epistemological	• Perseverance on integer values when providing a solution set for inequalities with absolute value: C-err-integer, F-err-integer, I-err-integer
• Exercises and problems in school mathematics formed by didactic criteria (practice on formal definition) • Solution of the regular exercises is connected from the beginning to the removal of the absolute value sign, a process usually reduced to the execution of algorithms	Didactic (didactic transposition and didactic contract)	• Persistence to solve impossible equations and inequalities on absolute value: D-error, F-error, G-error • Applying algebraic manipulations to remove the sign of absolute value in impossible or straightforward mathematical expressions: D-error, F-error, G-error, I-error1, I-error2, I-error4 • Changing the task to comply with the execution of familiar algorithms: B-error 2, I-error2

Table 1: Connections between obstacles and students' conceptions and errors in their mathematical work on absolute value

CONCLUSIONS

Students in this study conceptualize absolute value in three distinct ways: as the distance from zero, as a number without sign, and as provided in the formal definition. This finding is an indication of the diversity of the personal MWS of students for the same mathematical concept, primarily regarding the component of discursive genesis. Students' conceptions of absolute value emerge as a result of the Turkish curriculum on this mathematical topic, whose emphases are common with important notions of the historical evolution of the concept. Based on the Turkish curriculum, absolute value is introduced in sixth grade as the distance from zero and then, in ninth grade its formal definition is provided. Additionally, at the beginning, in sixth grade, teachers are suggested to emphasize that an absolute value of any number is positive. These taught definitions and their order in teaching of absolute value are common with the conceptions of absolute value and the order of their appearance in the historical evolution of the concept. This provides an explanation for the commonalities between students' conceptions of absolute value and the historical evolution of mathematical knowledge related to the particular concept.

The extent to which students adopt each of the three conceptions of absolute value is also of interest. According to the reference MWS for absolute value, in ninth grade the formal definition of the concept is introduced. However, the formal definition was the most rarely found among the ninth grade students' responses. The conception of absolute value as the distance from zero was the most widely accepted definition among students, followed by the conception of number without sign. These findings suggest that the appropriate MWS on absolute value, as implemented in the textbooks and by the teachers, might strongly affect students' way of thinking and making sense of this concept. Ninth grade mathematics textbooks include the formal definition of absolute value but the emphasis to this definition is not strong. The main focus is the meaning of absolute value as the distance from origin (0) as it was in the previous grades. Thus, we can assume that this could still be the focus also of the teachers and the classroom teaching on absolute value in ninth grade, although further investigation is necessary to support this, as analyzing these aspects of MWS was beyond the aims of this study.

The analysis of students' errors in the tasks on absolute value showed that the most frequently found errors appear in non-typical tasks (D, E, G, H) and in tasks including inequalities (C, F, I). A regular error type which is common among various tasks is students' constraint only to the positive part of the expression (equation, inequality, variable) and inability to consider also the negative aspect in their solutions. Two additional error patterns which are not only frequently found and common between tasks, but also each of them appears consistently among the responses of the students are firstly, the ignorance of the impossibility of the equation or inequality and the persistent effort to provide a solution, and secondly, the focus only on integers, without considering real numbers in the solution.

Drawing on the common conceptions of absolute value and errors among ninth grade students, as well as on the mathematics curriculum in the particular grade in Turkey, we may conclude that although there is a turn in the theoretical reference system on absolute value, there is not a corresponding change in the reasoning of most students. Specifically, as already explained above, while the formal definition of absolute value and its properties are proposed at the grade level of the students under study, students' reasoning on the concept is based on the meanings of the notion that are highlighted by the curriculum and teaching in previous grades, that is, distance from zero and number without sign. Based on students' conceptions of absolute value, their errors, and the interrelations between the two aspects of students reasoning that were analyzed in the present study, the epistemological obstacles and the didactic obstacles, related to the didactic transposition and the didactic contract, were found to undermine students' discursive genesis of absolute value and account for this gap between the epistemological and the cognitive aspects of students' MWS.

The epistemological obstacles suggest that students' prior knowledge affected to a great extent students' discursive genesis on absolute value and led students to the construction of defective or insufficient meanings for the concept and errors in using the concept in different contexts. Two major obstacles of epistemological nature that were identified in our study are the conception of number as a measure and the conception that a letter without sign in algebra represents a positive quantity.

The nature of the didactic obstacles identified in the students' productions in the present study suggest that the ways scholarly mathematics knowledge on absolute value is transposed in schools (didactic transposition), i.e., providing two definitions of absolute value at the same grade without any connection between them, lack of non-typical tasks, inclusion of exercises and problems formed exclusively by didactic criteria, as well as the mathematics classroom norms that characterize teacher-student interactions regarding the teaching of absolute value (didactic contract), e.g., mechanical application of algebraic manipulations to remove the sign of absolute value, also hindered students' discursive genesis within their personal MWS.

In most cases, there was an interplay of both types of obstacles that hindered students' reasoning, with the didactic obstacles reinforcing the epistemological obstacles. Students' prior knowledge was sometimes derived from previous teaching of this concept (e.g., the absolute value of any number is positive) and other relevant concepts (e.g., use of absolute value only on integers), or was enhanced by current teaching of the concept (e.g., absolute value as the distance from zero). The objects of this teaching were also a product of the didactic transposition process.

These conclusions should be considered in the perspective of our study's major limitation that the sample comes from only one school. Getting more robust findings that could be generalized requires further research in which a larger number of schools are involved.

REFERENCES

Almog, N. & IIany, B. (2012). Absolute value inequalities: High school students' solutions and misconceptions. Educational Studies in Mathematics, 81(3), 347-364.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 4(2), 165-198.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfielf (Eds). Mathematics Education Library Vol. 19. Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1985). La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné (2nd edn 1991). Grenoble, France: La Pensée sauvage,.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2014). Didactic transposition in mathematics education. In St. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education, Retrieved February 26, 2013 from http://www.springerreference.com/docs/html/chapterdbid/313227.html

Cornu, B. (1991). Limits. In A. J. Bishop (Managing Ed.) & D. Tall (Vol. Ed.), Mathematics Education Library: Vol. 11. Advanced mathematical thinking (pp. 153–166). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer. doi:10.1007/0-306-47203-1_10.

Duroux, A. (1983). La valeur absolue. Difficultés majeures pour une notion mineure. Petit x, 3, 43-67.

Gagatsis, A. & Panaoura, A. (2014). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 45(2), 159-173.

Gagatsis, A., & Thomaidis, Y. (1995). Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs absoluter Betrag [A study of a historical design, development and didactic transposition of the term "absolute value"]. Journal fur Mathematik – Didaktik, 16, 3–46.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., & Spagnolo, F. (Eds.). (2008). Statistical implicative analysis: Theory and applications. Heidelberg: Springer.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2013). Les Espaces de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives. Relime, Numero Spécial sur les ETM.

Lerman, I. C. (1981). Classification et Analyse Ordinale des Données. Paris: Dunod.

Schneider, M. (2014). Epistemological Obstacles in Mathematics Education. In St. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education, Retrieved February 26, 2013 from http://www.springerreference.com/docs/html/chapterdbid/313236.html#

Stupel, M. (2012). A special application of absolute value techniques in authentic problem solving. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1-9.

Thomaidis, Y. & Tzanakis, C. (2007). Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line: The notion of historical "parallelism" revisited. Educational Studies in Mathematics, 66 (2), 165-183.

EL TRABAJO MATEMATICO EN EL ANÁLISIS: UNA APROXIMACIÓN A LOS ETM EN FRANCIA Y CHILE[10]

Soledad Estrella, Universidad Paris Diderot

Alain Kuzniak, Universidad Paris Diderot

Elizabeth Montoya-Delgadillo, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Laurent Vivier, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

ELEMENTOS INICIALES DE LA INVESTIGACIÓN

En Chile como en Francia los profesores del liceo se forman en la universidad. Ellos adquieren nociones de Análisis que tratan de recontextualizar en su enseñanza en el liceo. Esta formación, ¿será suficiente para que puedan integrar en su enseñanza los principios del Análisis?

En Chile el Análisis esta escasamente presente en el currículo escolar, mientras que en Francia, el currículo está orientado esencialmente en el Cálculo. La enseñanza no está únicamente guiada por la conceptualización ya mencionada y esto plantea más ampliamente la cuestión de la transposición de saberes que hay que enseñar.

Podemos pensar que con esta enseñanza se profundizan las dificultades para el profesor. Él debe, posiblemente más que en otros dominios, apoyar su enseñanza sobre un discurso explicativo, o meta-matemático, con los cambios de marcos y de registros para favorecer los aprendizajes. Pero ello demanda visiblemente conocimientos más profundos, supone por parte del profesor un gran manejo conceptual, epistemológico y didáctico, con el fin de poder organizar y controlar este discurso. Así es la formación profesional de los profesores de matemáticas tanto en su formación inicial como continua.

Después de una necesaria comparación de los contextos en Chile y en Francia, exponemos el marco del ETM que desarrollamos para el dominio del Análisis, ETM_A.

LOS CONTEXTOS DE ENSEÑANZA Y FORMACIÓN

Organización del currículum

En términos generales, los estudios secundarios finalizan en el grado 12 en ambos países (después de 8+4 años en dos instituciones en Chile y después de 5+4+3 años en tres instituciones en Francia). En el liceo, se distinguen diferentes orientaciones disciplinarias a partir del grado 11, con una especialidad científica en cada país. Existe en ambos países un examen al finalizar la secundaria: PSU en Chile, en forma de selección múltiple, que clasifica a los estudiantes para su entrada a la universidad y el bachillerato en Francia (sin selección múltiple), exigencia necesaria para poder ingresar a la universidad.

La formación de profesores de matemática tiene una duración de 4,5 años en

[10] Con el apoyo del proyecto ECOS-CONICYT C13H03 (2014-2016).

Chile, y 5 años en Francia, y una especialización (separación progresiva de los estudios de matemáticas) que comienza en el segundo año en la PUCV y en el tercer año en París Diderot. En ambos países hay un concurso para los profesores, INICIA en Chile y CAPES en Francia, pero con diferencias, más aun, en Chile tendrá carácter obligatorio a partir del año 2015.

En cuanto a los programas, en Chile se contemplan contenidos mínimos y obligatorios a enseñar, mientras que en Francia el programa contempla exactamente los contenidos que se deben enseñar. En Chile el tiempo de enseñanza de las matemáticas puede variar entre 4 horas y 12 horas a la semana en los dos últimos niveles en el liceo (contando la especialidad matemática), mientras que en Francia se tienen 4 horas para la clase de *Première S*, y de 6 horas a 8 horas con especialidad en el *Terminale S*. Estos indicadores nos hacen pensar en potenciales desigualdades ce carga horaria entre establecimientos chilenos. Sin embargo, en Francia existen desigualdades, posiblemente menos visibles, ya que están relacionadas a contextos socioeconómicos de los establecimientos escolares.

Los contenidos de Análisis en el liceo y en la universidad

Los programas de los liceos chilenos y franceses son muy diferentes. En Chile, no se contempla derivada, integral, ni límites en los programas (mínimos obligatorios), pero pueden ser temas tratados en algunos establecimientos. Mientras que en Francia son temas importantes de la enseñanza de las matemáticas para todos los establecimientos (cerca del 40% de la clase de Terminal S). En la especialidad matemáticas en Chile, existe el contenido "funciones y procesos infinitos" pero sin formalización exhaustiva en estos temas, el trabajo sobre las funciones es esencialmente algebraico y gráfico. En la universidad, en cambio, podemos pensar que el trabajo sobre el Análisis en ambos países se uniforma rápidamente con contenidos a enseñar muy similares o próximos.

ETM DEL ANÁLISIS: REFERENCIA, IDÓNEO Y PARADIGMAS

Paradigmas y puntos de vista

- A pesar de una alternativa constituida por el Análisis no estándar, el ETM de referencia del Análisis (ETM_A) es guiado por un paradigma global, el Análisis estándar. Específicamente, interpretamos el trabajo matemático en el dominio del Análisis a través de tres paradigmas:
- Análisis-Geométrico/Aritmético (AG) que permite interpretaciones nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real, probablemente, con muchos implícitos.
- Análisis-Calculatorio (**AC**) donde las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.
- Análisis-Infinitesimal (**AI**) es caracterizado por un trabajo de aproximación:

supremos e ínfimos, cotas, una entrada a trabajos de proximidad (o una entrada más topológica): "cerca de ε", "lo despreciable".

Estos paradigmas se complementan con visiones diferentes, que parecen intervenir en todas las componentes del ETM e influyen en los objetos matemáticos. Consideramos el punto de vista desarrollado por Vandebrouck (2011) que define para las funciones: puntuales, locales, globales, y que nosotros ampliamos para los números. Otro elemento considerado y que puede intervenir es lo discreto/continuo, cuestión identificada en el polo teórico y que juega un rol en la manera de concebir los objetos y el trabajo en el ETM_A.

ETM idóneo y de referencia en la universidad

Los contenidos de enseñanza de las universidades se presentan como una lista corta de nociones focalizadas sobre el polo teórico, en principio aparecen más *signos* en el programa francés. Esto nos muestra la importancia otorgada en la universidad a las matemáticas, y por los matemáticos. No hay por ejemplo gráficas, no se evocan artefactos[11], sino esencialmente definiciones y teoremas.

Esto no quiere decir que no se realice, de hecho, los profesores de universidad deben hacer gráficas, introducir los temas con diversidad de *signos,* esto implica que no se puede ver el ETM_A idóneo de la universidad solamente a partir de los contenidos en los programas. Sin embargo, es sorprendente ver que la simple evocación de teoremas y definiciones basta para saber lo que hay que enseñar. El poder contar con pocas variaciones de interpretación en un programa, es una fortaleza de las matemáticas, transmitida por la comunidad de los matemáticos. En consideración a lo anterior, el ETM_A de referencia sería idéntico entre Chile como en Francia.

TAREAS Y LA ACTIVACIÓN DE LAS GÉNESIS EN EL ETM

Hemos afirmado que las tareas y los tipos de tareas no son parte del Espacio de Trabajo Matemático, pero lo activan y permiten analizar las circulaciones que se pueden desplegar. Para aplicar una situación didáctica, e intencionar un aprendizaje en el ETM es necesario activar circulaciones entre las tres génesis, y es por ello que las tareas son centrales para comprender la dinámica de la conceptualización que realiza un sujeto. En este sentido, un análisis a priori de la tarea es esencial.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, volume 16.*

[11] Existe un curso de L1-S2 en la universidad Paris Diderot sobre cálculo formal.

LOS ESPACIOS DE TRABAJO GEOMETRICO PERSONAL DE ESTUDIANTES DE LICEO: UN ESTUDIO DE CASOS

Rafael Arancibia-Rojas, Universidad de Santiago de Chile

Carolina Henríquez-Rivas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso – Chile

RESUMEN.

El tema central de esta contribución es presentar el análisis al trabajo matemático de cuatro estudiantes de un liceo, en la resolución de una tarea que tiene como propósito favorecer el tránsito y la complementariedad entre la geometría sintética y la analítica. Los estudiantes pertenecen a una institución con estudiantes sobresalientes que ocupa el primer lugar en según evaluaciones de carácter nacional como la *Prueba de Selección Universitaria* (PSU). Para los efectos de este trabajo, fue relevante la institución de los participantes, pues dada su formación, fue posible una diversidad de formas de hacer en la resolución de una tarea dada. El estudio forma parte de una investigación sobre el trabajo geométrico a nivel de Enseñanza Media cuando los contenidos de geometría euclidiana consideran enfoques con y sin coordenadas cartesianas, el cual está sustentado en la teoría *Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Geométrico* (Houdement & Kuzniak, 1996, 2006) –actualmente ampliada al *Espacio de Trabajo Matemático* (Kuzniak, 2011) –.

En el currículum chileno la geometría analítica aparece en la enseñanza media de forma intermitente y desconectada de la geometría sintética presente desde los niveles básicos. Proponemos a partir del diseño de una secuencia de situaciones de aprendizaje, que el trabajo geométrico se efectúe en tránsito y complementariedad. Según estudios realizados a los distintos ETM_G (referencia, idóneo, personal) y de acuerdo a nuestros propósitos, esto implica que la secuencia debe integrar y coordinar las tres génesis, en particular, activar el trabajo mediante la génesis figural en coordinación con la génesis discursiva, que favorecen razonamientos argumentativos (Duval, 1995, 1999, 2005) y un trabajo en el paradigma GII.

Para este estudio fue seleccionada una secuencia de tareas de un conjunto de situaciones, aplicadas y analizadas en dos versiones. Los resultados frente a una primera versión de tareas, revelaron dificultades en la coordinación entre las génesis del ETM_G, además, un trabajo que principalmente privilegia el paradigma GI. En la segunda versión, una vez mejorada la secuencia que considera los resultados obtenidos en la versión inicial, se revelaron *circulaciones* que dan continuidad a los métodos geométricos utilizados.

En esta presentación se mostrarán los conocimientos utilizados en el ETM_G-personal de cuatro estudiantes de liceo –son distintos según cada versión– y las *circulaciones* entre las componentes de los planos cognitivos y epistemológicos de cada ETM_G. El estudio de casos nos ha permitido no solo mejorar el diseño de situaciones de referencia, sino que reflexionar respecto a un ETM-idóneo eficiente y que favorece el trabajo en complementariedad entre los enfoques geométricos.

Finalmente, este estudio contribuye en una investigación mas amplia sobre el tránsito entre geometría sintética y analítica aludida inicialmente.

BIBLIOGRAFÍA CITADA

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Suisse: Peter Lang.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st North American PME Conference, 1, 3-26.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Developpement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de luers Fonctionnements. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10, 5-53.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, 16(3), 289-321.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11, 175-193.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9-24.

TEMA 2

ESPECIFICIDAD DE LAS HERRAMIENTAS Y SIGNOS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO

Tomás Recio, Universidad de Cantabria, España

Philippe R. Richard, Université de Montréal, Canada

Laurent Vivier, Université Paris-Diderot, Francia

1. DESCRIPCIÓN INICIAL

Al igual que en las ediciones pasadas el Tema 2 del simposio ETM4 trabaja conjuntamente la influencia de las herramientas y signos en el trabajo matemático. Este tema se centra específicamente en el uso de los entornos de tecnología y de los signos considerados mediadores del conocimiento y como elementos que influyen en el trabajo matemático (Fig. 1). Hemos tratado de dar respuesta a dos interrogantes. En primer lugar, nos preguntamos sobre las potencialidades que las tecnologías y los sistemas de signos ofrecen para transformar el trabajo matemático del estudiante. Como componente esencial del espacio de trabajo matemático, la interacción entre los instrumentos y los signos serán un punto de anclaje privilegiado. La segunda pregunta se deriva de la consideración del trasfondo epistemológico presente en el ETM. Se trata de estudiar cómo el uso de entornos tecnológicos o sistemas de signos afectan a la construcción epistemológica específica para el estudiante, guiando su trabajo matemático

Por ejemplo, esto puede implicar tanto la naturaleza de los objetos matemáticos que el construye, como las demostraciones matemáticamente aceptables o el papel del proceso de indagación.

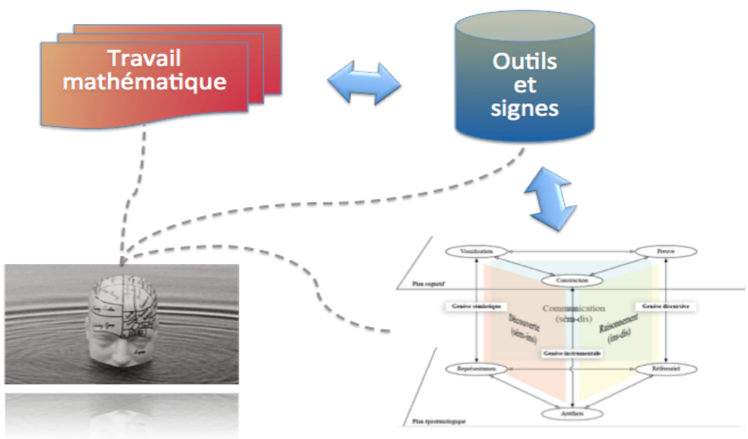


Fig. 1 Las herramientas y los signos como clave interpretativa entre el trabajo matemático y los ETM.

2. CONTRIBUCIONES

Las sesiones del Tema 2 permitieron la presentación de once estudios, incluyendo dos pósters, permitiendo un amplio debate. Aunque el idioma dominante fue el castellano con seis textos, también fueron representados el francés (seis textos) y el inglés (dos textos). Los debates fueron trilingüe en encuentro ETM4. El trabajo ha capturado diferentes puntos constitutivos del tema dos como los sistemas de signos, representación semiótica, el papel de las herramientas de visualización, signos instrumentales, coordinación (en el sentido amplio), representaciones gráficas y dinámicas. Aunque siete de las presentaciones tienen que ver con el aporte de la tecnología, particularmente con GeoGebra, SimCalc, Casyopée, la pizarra electrónica y los videos en Internet, las otras cuatro presentaciones tienen que ver más específicamente con aspectos de las herramientas y los signos. En la Tab. 7 aportamos un resumen ilustrativo de cada contribución, el campo matemático de referencia así como los procesos teóricos específicos o prominentes. Así pues, parece que este bloque temático, que también fue una innovación organizativa del simposio (en ETM3 las herramientas (Tema 2) y los signos (Tema 4) se estudió en dos grupos) ha sido en el presente éxito. Más aún, la noción de trabajo colaborativo ha sido una importante fuente de preguntas en el seno del grupo, lo que sugiere que esta reorganización ha beneficiado fuertemente al tema 2. En cuanto al contenido matemático, incluso si podemos ver una predominancia del análisis matemático en el sentido amplio, las áreas tocadas son diversas: números, geometría, álgebra, probabilidad, área, funciones, cinemática, optimización, álgebra lineal y transformaciones. Además dos o más de estas áreas se tratan conjuntamente, abriendo interés en la fibración externa, y comprensión en la coordinación del ETM relativa a las diferentes áreas de las matemáticas.

Autores **Título**	**Dominio matemático**	**Especificidad**
Fernando Hitt, Mireille Saboya & Carlos Cortes *La pensée arithmétique-algébrique comme prioritaire pour la transition du primaire secondaire à travers l'espace de travail arithmético-algébrique (ETA-a) dans le contexte des nombres polygonaux*	Números	Sistemas de signos y representación. Trabajo colaborativo Teoría de la actividad
Rosa Paez & Laurent Vivier *Espacio de trabajo matemático alrededor de las desigualdades lineales en una sola variable*	Números	Sistemas de signos y representación. Registros semióticos
Miguel A. Abánades, Francisco Botana, Jesús Escribano & Inés M. Gómez-Chacón *Distintas herramientas para la enseñanza/aprendizaje del concepto de lugar geométrico*	Geometría, Álgebra	Herramientas, visualización en ETM
Kuzniak Alain & Drouhard Jean-Philippe *Un point de vue multidimensionnel sur les outils et les instruments dans les espaces de travail mathématique*	Probabilidad, Álgebra, Geometría	Herramientas, signos, instumentos en ETM. Saberes epistemologicos

Charlotte Derouet *Signes et outils technologiques: obstacles pour une "bonne" interaction entre le calcul intégral et les lois de probabilités à densité?*	Análisis y probabilidad	Herramientas, signos en ETM
Ruth Rivera, Maximiliano De Las Fuentes & Ana Dolores Martínez *Evaluación del uso del pizarrón electrónico como entorno tecnológico mediador para la enseñanza de tópicos del cálculo diferencial*	Funciones	Herramientas, representación
Leticia Sánchez López & Luis Enrique Moreno Armella *Movimiento rectilíneo y graficación: una relación simbiótica*	Cinemática	Herramientas, representación,. Epistemología
Jean-Baptiste Lagrange *Functions in technological environments: from multi-representations to connected workspaces*	Análisis, funciones	Herramientas, signos instrumentados (coordinación)
María Teresa Dávila Araiza & Luis Moreno-Armella *Intuición y movimiento: hacia una redescripción de las ideas intuitivas del cálculo*	Análisis	Sistema de signos gráficos (gráficas)
Manuel Santos-Trigo, Luis Moreno-Armella & Matías Camacho-Machín *Contrasting analytic and dynamic problem solving approaches within the mathematical working space frame*	Geometría, análisis (optimización)	Herramientas, signos (coordinación) Resolución de problemas
César Fabián Romero Félix & Asuman Oktaç *Coordinación de registros y construcciones mentales en un ambiente dinámico para el aprendizaje de transformaciones lineales*	Álgebra lineal (transformación)	Signos instrumentados, representación dinámica APOS

Tabl. 1 Resumen de las contribuciones al Tema 2

Las posibilidades de integrar teorías en el modelo ETM y la elección de trabajo matemático como un tema global permitió que otras aproximaciones enriqueciesen la discusión, y especialmente al problema central. Entre otros acercamientos podemos citar Teoría de la Actividad, Teoría APOS (Acción-Objeto-Proceso-Esquema), la teoría de los registros semióticos, acercamiento cognitivo a los instrumentos contemporáneos, epistemología histórica, epistemografía del conocimiento o acercamiento de resolución de problemas.

3. MARCO DE TRABAJO Y LÍNEAS DE INVESTACIÓN ABIERTAS

3.1 Propiedades específicas

En la introducción se presentó el tema a partir tres aspectos que en la articulación entre herramientas y signos afecta visiblemente el trabajo matemático. Como primer ejemplo, consideramos la noción de función en análisis (Fig. 2). Tradicionalmente, la representación, el control y la interpretación de algunas propiedades de funciones procedían de la coordinación de registros (verbal, gráfico, tabular, analítico o simbólico). Sin embargo, bajo algunas condiciones relacionadas con la representación en un ordenador, es posible cambiar la función objeto actuando directamente en una de sus representaciones, de manera que todos los registros se coordinan para representar el nuevo objeto. Este tipo de experimentación semiótico-instrumental permite descubrir o explorar el impacto de los registros de la representación matemática. Parte del conocimiento lo maneja un ordenador, pero es en respuesta a las peticiones de un usuario que determina las herramientas y los signos.

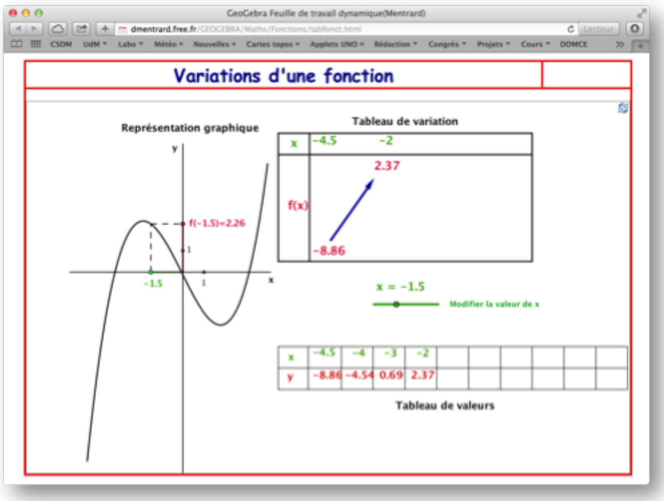


Fig. 2 El descubrimiento mediado en un ETM$_{\text{analisis}}$

Como segundo ejemplo, debatimos el efecto del movimiento en la representación tridimensional y la variación del fenómeno modelado en Geometría (Fig.3). Es conocido los problemas con la reconstrucción en una pantalla de la representación tridimensional. La sensación de profundidad es generalmente posible con distintos tipos de índices que juntos ayudan a percibir la dimensión que falta (Blossier y Richard, ETM3). Pero cuando uno mueve una construcción geométrica, por ejemplo, con el uso del ratón para producir una vista rotacional del modelo, parece que recreamos una tercera dimensión que permite que generar la vistas deseadas con el consiguiente ajuste de índices de profundidad. Uno puede “ver” una representación en pantalla que es en realidad la del objeto o fenómeno que queríamos representar mediante su apariencia visual (aproximación sintética) porque uno puede establecer la naturaleza razonando (aproximación analítica) o porque el modelo matemático le da significado a la representación (la teoría de la representación donde la tercera dimensión se mueve) creando coherencia entre las visiones principales, secciones transversales de sub-figuras y gráfica de variación entre dos medidas (longitud y área) de la experimentación semiótico-instrumental.

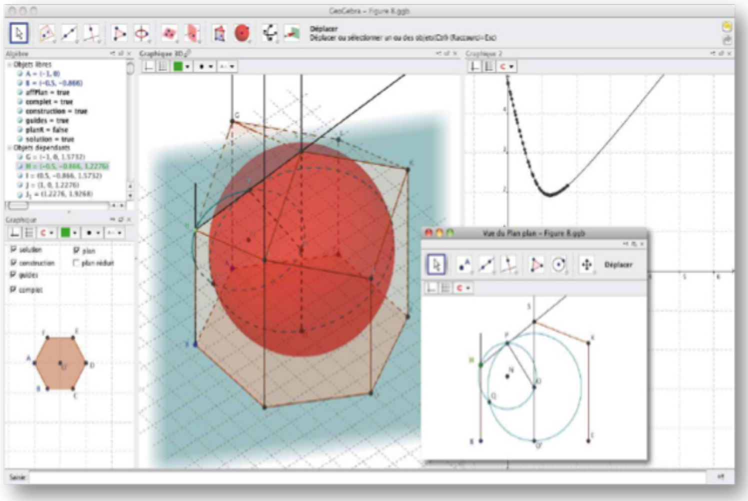


Fig. 3 Movimiento en 3D en un ETM$_{\text{Geométrico}}$.

El tercer ejemplo trata de extender la idea de fibración entre espacios de trabajo iniciada en el coloquio ETM3. Desde el principio, es importante señalar que esta idea parece bastante cercana al concepto de modelización intra-matemática donde la primera teoría permite la representación de la segunda y vice-versa. Cuando estas teorías se ofrecen asistencia mutua para la representación, la comunicación y el procesado del mismo objeto a nivel de interfaz del software (Fig. 4), las conexiones que surgen entre los diferentes espacios desde la perspectiva de la interacción del usuario, no tienen la misma transparencia que la que debe ocurrir para una exitosa programación del ordenador. En otras palabras, los cristales en las ventanas no ofrecen las vistas, pero las herramientas tienen una cierta autonomía entre ellas, incluso si el software asegura consistencia entre los modelos matemáticos de referencia. Del mismo modo la autonomía del orden simbólico se mantiene respecto a lo se supone significa. Cada espacio de trabajo provee algún tipo de experimento semiótico-instrumental con características propias.

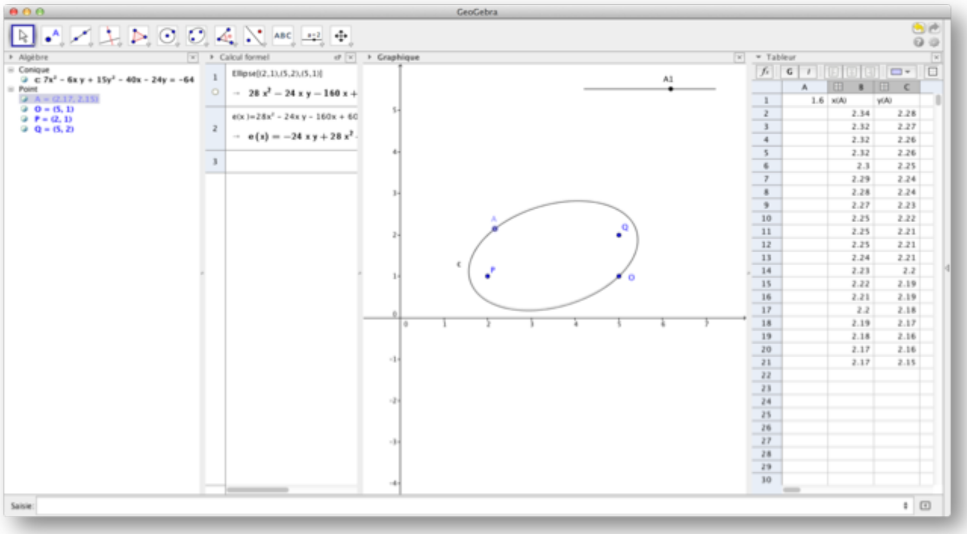


Fig. 4 Fibración entre cuatro espacios de trabajo: ETM$_{\textbf{Algebra}}$ ↔ ETM$_{\textbf{Análisis}}$ ↔ ETM$_{\textbf{Geometría}}$ ↔ ETM$_{\textbf{Arimética}}$.

3.2 Aportes del modelo de Espacio de Trabajo Matemático

El trabajo matemático y el aprendizaje de Matemáticas

Como ya bien sabemos, la única forma de hacer Matemáticas es intentar resolver problemas específicos y, en este contexto, hacer nuevas preguntas. Desde la perspectiva de Brousseau, en el concepto de devolución el papel principal del profesor es clave y un prerrequisito para el desarrollo de la autonomía del estudiante. De algún modo, se toma la idea de que una situación-problema parte del patrimonio del profesor, que pasa este legado dejando al alumno a cargo de la resolución. En este sentido, los problemas matemáticos son a la vez una oportunidad de aprendizaje y una oportunidad para que el alumno comience su trabajo matemático. Sin embargo, la distinción entre "hacer matemáticas" y "aprender matemáticas" sigue siendo esencial, especialmente cuando se trata de potenciar el aprendizaje o la valoración. Ya el hacer matemáticas es una actividad fuertemente a-didáctica, que la marca la formación u organización de los conceptos resultantes de la actividad. Aún así, el trabajo matemático no es un "lugar" o un "contenedor", sino también un espacio creado por las interacciones. Es decir, un sistema de actividades o de interacciones acabadas. En todos los casos, la descripción o análisis del trabajo matemático, ya sea en sistemas educativos o mecanismos de investigación es posible por las interacciones módulo el propósito de los de las interacciones en un sistema de actividades). Para entender mejor los signos y las herramientas específicas para aprender matemáticas, uno debe preguntarse por la autenticidad de las interacciones matemáticas en el ETM y lo apropiado de las interacciones finalizadas en el trabajo matemático.

En una situación de aprendizaje, un espacio de trabajo puede ser adecuado si las interacciones potenciales son adecuadas para el trabajo matemático. La idea de conveniencia que surge aquí se plantea en términos de la vigilancia epistemológica. Es decir, la idoneidad asumida desde el principio de que dominio de validez del conocimiento que se puede formar (conceptualización) o ser implementado (operatividad) en el espacio de trabajo es consistente con los modelos matemáticos de referencia. Un ejemplo de un espacio de trabajo que ilustra la falta de validez epistemológica es visible por medio de las piezas algebraicas (Fig. 5). Estas piezas, originalmente seis (piezas "unidad" y piezas x, xy, x^2, e y^2) se supone que ayudan a los alumnos a resolver ecuaciones de primer y segundo grado, o a desarrollar o factorizar expresiones cuadráticas y afines. Se podría pensar aquí que la geometría sirve como modelo para el álgebra. Sin embargo, cuando se mira a estas piezas con cuidado, se puede ver que no lo son, por ejemplo, el producto cartesiano de los longitudes, si no que tienen significado independiente en relación con las posibles cantidades medibles que representan. En particular vemos que la pieza "unidad" es siempre representada por el cuadrado unidad, incluso en la manipulación de expresiones afines. Para probar la adecuación de este área de trabajo, se debe conocer la estructura matemática generada por las piezas algebraicas así como el dominio de validez de los problemas que permite resolver.

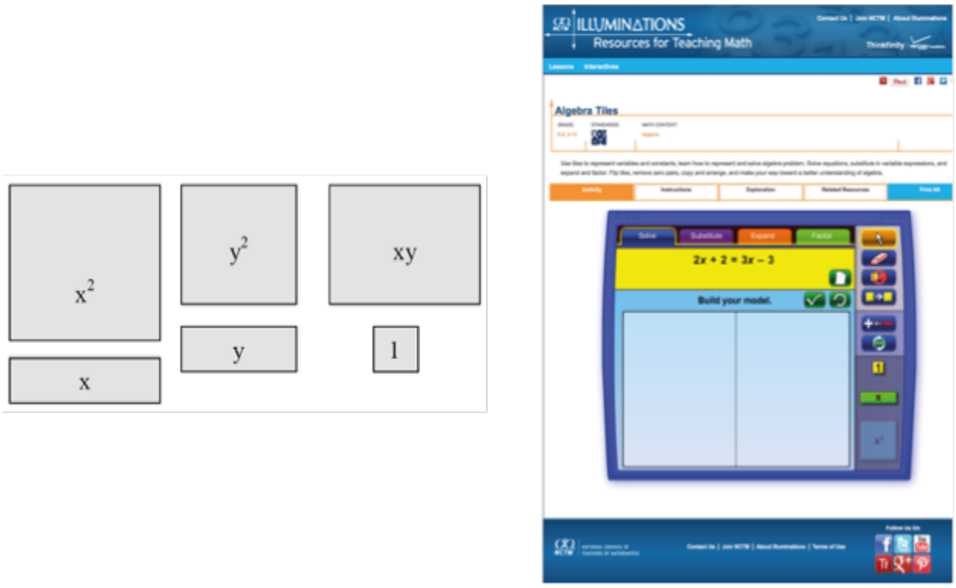


Fig. 5 Teselación algebraica y vigilancia epistemológica.

Conceptos, métodos y teoría

Desde el punto de vista de la metodología, la consideración de las interacciones, potenciales o reales, en el ETM discutidas por este grupo de trabajo nos permitió subrayar la importancia del proceso de aprendizaje. Del mismo modo que la realidad puede sacar comparaciones entre "photo" y "video" es posible: (a) Describir el aprendizaje (estado) detallando las interacciones de un espacio de trabajo o (b) explicar (evolución) comparando el análisis a priori del ETM con interacciones retrospectivas (no necesariamente completadas) como resultado de un experimento. Esta última recuerda a la ingeniería de la didáctica, por la comprensión del dominio posible, creado por el ETM idóneo al dispositivo de investigación. Este es esencial antes de poder interpretar correctamente las interacciones de los alumnos. El modelo de los espacios de trabajo, con sus interacciones, planos y componentes, ofrece un conjunto de referencias para la interpretación del trabajo matemático en un contexto de aprendizaje.

Más generalmente, ha sido posible tener en cuenta el conocimiento matemático consumido (estado) o inducido (evolución) y mostrar que el modelo ETM es una referencia estructurada y funcional que asegura continuidad entre marcos de trabajo conceptuales y metodológicos como herramienta de búsqueda. Aunque el modelo ETM está diseñado a la luz de las investigaciones y teoría existentes, no es en sí mismo una teoría. La interpretación de los componentes de un ETM (polos, planos, génesis….) y su interacciones depende en gran medida de las teorías completementarias que que dan significado a esta interpretación. La Teoría de Situaciones Didácticas (TDS) de Guy Brousseau o la Teoría de la Decisión (DT) de Alan Schoenfeld, que no ha sido considerada en términos de trabajo, son buenos ejemplos. Así, la interacción entre los modelos de ETM epistemológicos y cognitivo se pueden interpretar en términos de interacciones entre un ambiente epistemológico y un sujeto epistémico (en el TDS), o las sorprendentes e decisiones de un profesor o un alumno, en base a las componentes del ETM (en el DT). Similarmente, la Teoría de la Actividad (AT), no se anticipaba en el aspecto matemático del trabajo, muchos menos en un entorno educativo. Aunque AT asegura que las acciones se dan forma y se desarrollan en una situación que puede ser un entorno social (como una clase) compuesta de individuos y artefactos, con el fin de situar el funcionamiento de la mente en artefactos que, siguiendo esto, unen individuos y artefactos en actos cognitivos encarnados.

Refinando el modelo

En discusiones del grupo temático, se remarcó el hecho de que las componentes del ETM pueden, en algunas circunstancias, tener efectos secundarios en la génesis. Por ejemplo, en la medida en que el instrumento es una interacción entre el sujeto y la herramienta (entendiéndose aquí la última en términos de medio para la acción) y que el área de trabajo provee un conjunto estructurado de interacciones, debemos añadir al modelo de ETM la idea de fibras que confían más específicamente en las componentes (Fig. 6). Así, las herramientas semióticas, tan material como nocional (noción en el sentido discursivo) tienen efecto en la génesis, dado que el uso de estos instrumentos influencia la formación de las partes semiótica, nocional y material del instrumento. Es cuestión del modelo de fibraciones internas que se puede extender los instrumentos y el génesis relacionados con fibraciones externas. Incluso en algunas áreas de las matemáticas, como el álgebra, materias semióticas y funciones nocionales de las herramientas se encuentran tan agrupados como para necesitar un intento de desfibración para entender los problemas.

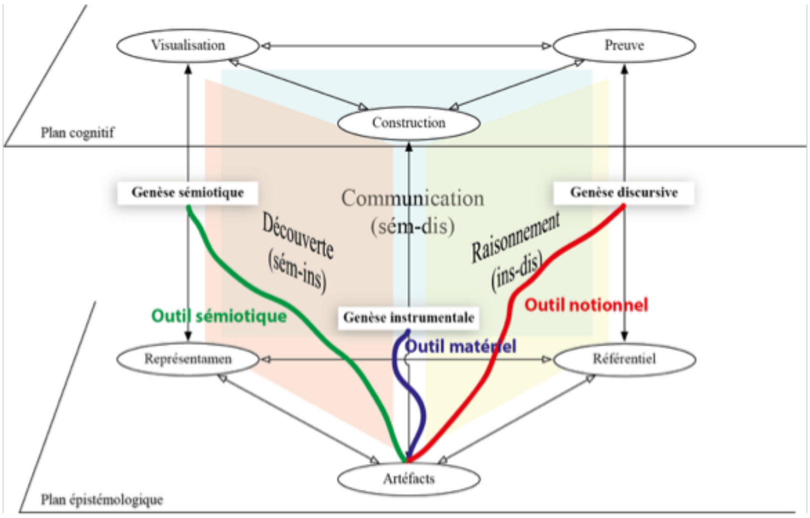


Fig. 6 Ejemplo de fibración interna en un ETM.

3.3 Retorno al trabajo del Tema 2: las cuestiones

La articulación de las diferentes aproximaciones hizo surgir el debate, llevando al grupo hacia la idea de que el modelo de ETM es el esqueleto sobre con elque diferentes marcos de trabajo y teorías dan sustancia a diferentes preguntas, problemas y dificultades involucradas en la búsqueda. Si algunas aproximaciones encuentran naturalmente tu lugar, como las teorías semióticas o instrumentales, en otros casos esto resulta mucho menos obvio hasta el punto en que se debe considerar sison pertinentes. Sin entrar en detalles, se mantiene una atención constante para evitar forzar integraciones inapropiadas, particularmente para que la coherencia de la intención didáctica, que es la base del modelo, no se perdiese, ni para reducir innecesariamente la fuerza explicativa. Es el caso, entre otros, de la teoría APOS, en la que la dimensión genética se encara de manera muy diferente a la del ETM. Sin embargo, la fricción producida permitió la oportunidad de debatir nuevos insights, señalando las ambigüedades del modelo y considerar nuevas reconciliaciones. En breve, el grupo fue capaz de entender mejor la distinción entre lo que es periférico y lo que en el núcleo del ETM.

A su manera, el modelo ETM dedica mucha atención al individuo sobre el grupo. Esta característica plantea una pregunta crucial en el trabajo colaborativo: ¿cómo estudiar este tipo de trabajo en el modelo ETM? Esta cuestión es aún más crucial dado que debemos reconocer la importancia del trabajo colaborativo en la construcción del conocimiento matemático. La importancia de este tema es remarcada en la presentación de Hitt y explorada más en profundidad en el trabajo de Hitt, Saboya & Cortes. Así, mientras que el registro de las representaciones de Duval encaja fácilmente en el modelo ETM (se les menciona frecuentemente) se ha notado que los signos no constituyen necesariamente un registro, claramente en las tareas de modelización. Además, la aproximación de Duval se centra en el individuo, mientras que el colectivo juega un papel importante en la tarea de aprendizaje. La colaboración, las herramientas de comunicación de los signos y, más en general, la clase social, fueron alimentadas por una elocuente discusión sobre AT, con atención especial en las contribuciones de Hitt y Lagrange. Dado que en AT, el trabajo matemático es una actividad finalizada que se lleva a cabo en una situación determinada, debe distinguir actividad productiva enfocada a la compleción de la tarea (corto plazo), con la actividad constructiva de la conceptualización (largo plazo). En el modelo de ETM, buscamos dar y describir las condiciones de trabajo matemático e identificar interacciones acabadas de un sujeto o un grupo, como una entidad emergente. Sin embargo, algunos problemas de reconciliación entre el modelo de ETM y AT siguen abiertos, aunque solo sea por la consideración de las representaciones y el papel del medio social en el alineamiento de las herramientas de signo (Ω).

TOPIC 2

SPECIFIC FEATURES OF TOOLS AND SIGNS IN THE MATHEMATICAL WORK

Tomás Recio, Universidad de Cantabria, Spain

Philippe R. Richard, Université de Montréal, Canada

Laurent Vivier, Université Paris Diderot, France

1. INITIAL DESCRIPTION

This topic was concerned with the use of technology and signs as vehicles of knowledge and aimed to see how they affect mathematical work (Fig. 1). We initially had two questions relative to their impact. It was first necessary to consider the possibilities offered by technological environments and sign systems to transform the mathematical work of a student. Considered an essential component of the mathematical working space, the interactions between instruments and signs were to be the main basis. The second question stemmed from the consideration of the epistemological background present in the ETM. It explored how the use of technological environments or sign systems affects the epistemological construction in the student, guiding their mathematical work. This could involve, for example, the nature of mathematical objects to build up mathematically acceptable evidence or the role of the investigative process.

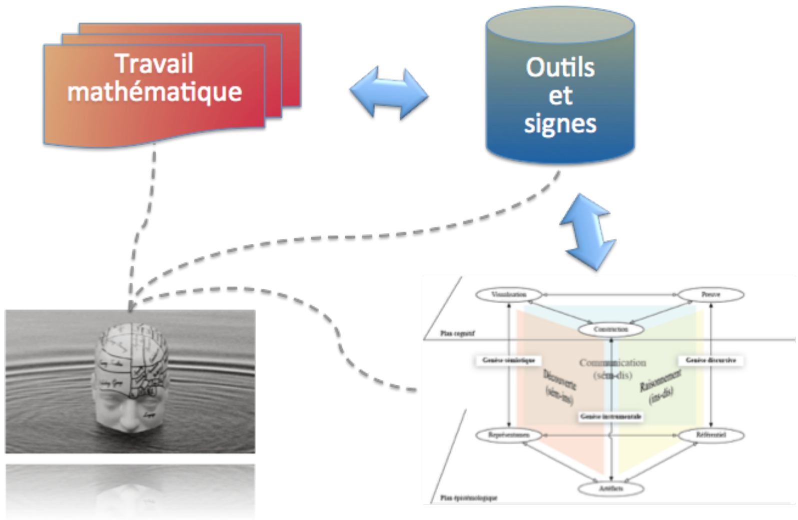


Fig. 1 Tools and signs as an interpretative key between the mathematical work and ETM

2. CONTRIBUTIONS

The sessions of theme 2 allowed the presentation of eleven studies, including two posters, and allowed plenty of time for discussion. Whilst the dominant written language was Spanish with six texts, French (three texts) and English (two texts) were also represented. Discussions have fully utilised the trilingual nature of ETM4 meeting. The work has captured different points constituting theme 2 as sign systems, semiotic representations, the role of tools, visualisation, sign instruments, coordination (in the larger sense), graphics and dynamic representations. While seven presentations are mainly technological input, particularly with GeoGebra software, SimCalc and Casyopée, the interactive whiteboard and online videos, the other four presentations relate more specifically to other aspects of tools and signs. In Tab. 7 we provide an illustrated summary of the relationship between each contribution, the mathematical field of reference as well as the specifics or prominent theoretical processes. So it seems that the thematic rapprochement, which was also an organisational innovation at the symposium - in ETM3, tools (Theme 2) and signs (theme 4) were studied by two groups - is a success. Furthermore, the notion of collaborative work has been an important source of questions within the group, which suggests that this reorganisation has greatly benefited theme 2. As for mathematical content, even if we can see a predominance of mathematical analysis in a broad sense, the areas addressed are diverse: numbers, geometry, algebra, probability, analysis, area, functions, kinematics, optimisation, linear algebra and transformations. Moreover two or more on these areas are treated together, opening up interest in external fibration, and understanding of the coordination of ETM relative to different areas of mathematics.

Authors **Title**	**Mathematical domain**	**Particularities or leading theoretical treatments**
Fernando Hitt, Mireille Saboya & Carlos Cortes *La pensée arithmétique-algébrique comme prioritaire pour la transition du primaire secondaire à travers l'espace de travail arithmético-algébrique (ETA-a) dans le contexte des nombres polygonaux*	Numbers	Sign systems and Representation Collaborative work Activity Theory
Rosa Paez & Laurent Vivier *Espacio de trabajo matemático alrededor de las desigualdades lineales en una sola variable*	Numbers	Sign systems and representation Registers of semiotic representation
Miguel A. Abánades, Francisco Botana, Jesús Escribano & Inés M. Gómez-Chacón *Distintas herramientas para la enseñanza/aprendizaje del concepto de lugar geométrico*	Geometry, algebra	Tools, visualisation ETM
Kuzniak Alain & Drouhard Jean-Philippe *Un point de vue multidimensionnel sur les outils et les instruments dans les espaces de travail mathématique*	Probabilities, algebra, geometry	Tools, instrumented signs ETM, epistemography of knowledge

Charlotte Derouet *Signes et outils technologiques: obstacles pour une "bonne" interaction entre le calcul intégral et les lois de probabilités à densité ?*	Analysis and probabilities (area)	Tools, signs ETM
Ruth Rivera, Maximiliano De Las Fuentes & Ana Dolores Martínez *Evaluación del uso del pizarrón electrónico como entorno tecnológico mediador para la enseñanza de tópicos del cálculo diferencial*	Functions	Tool, representation
Leticia Sánchez López & Luis Enrique Moreno Armella *Movimiento rectilíneo y graficación: una relación simbiótica*	Kinematics	Tools, representation Historical epistemology
Jean-Baptiste Lagrange *Functions in technological environments: from multi-representations to connected workspaces*	Analysis, functions	Tools, instrumented signs (coordination)
María Teresa Dávila Araiza & Luis Moreno-Armella *Intuición y movimiento: hacia una redescripción de las ideas intuitivas del cálculo*	Analysis	Sign systems (graphics)
Manuel Santos-Trigo, Luis Moreno-Armella & Matías Camacho-Machín *Contrasting analytic and dynamic problem solving approaches within the mathematical work space frame*	Geometry, analysis (optimisation)	Tools, signs (coordination) Problem solving
César Fabián Romero Félix & Asuman Oktaç *Coordinación de registros y construcciones mentales en un ambiente dinámico para el aprendizaje de transformaciones lineales*	Linear algebra (transformati on)	Instrumented signs, dynamic representation APOS

Tabl. 7 Summary of contributions to theme 2

The possibilities for integrating other theories in the ETM model and the choice of mathematical work as a global theme allowed other approaches to enrich the discussions, and especially the fundamental problem. Among the approaches we have cited Activity Theory, APOS theory (Action-Object-Process-Scheme), the theory of semiotic registers, the cognitive approach to contemporary instruments, historical epistemology, the epistemography of knowledge or the problem solving approach.

3. FRAMEWORK AND OPEN RESEARCH QUESTIONS

3.1 Specific features of topic 2

In the introduction, we illustrated the theme based on three types of issues wherein linkages between tools and signs visibly affect mathematical work. As a first example, we considered the notion of analysis function (Fig. 2). Traditionally, representation, monitoring and interpretation of some properties of functions proceed by coordinating registers (verbal, graphical, tabular, analytical or symbolic).

However, under certain conditions related to representation on a computing device, it is possible to change the object function by acting directly on one of its representations, so that all records coordinate to represent the new object. This kind of semiotic-instrumental experimentation allows us to discover or explore the impact of the records for the mathematical representation. Part of the knowledge is managed by the computer, but it is in response to an inquiry from the user that determines the tool and signs.

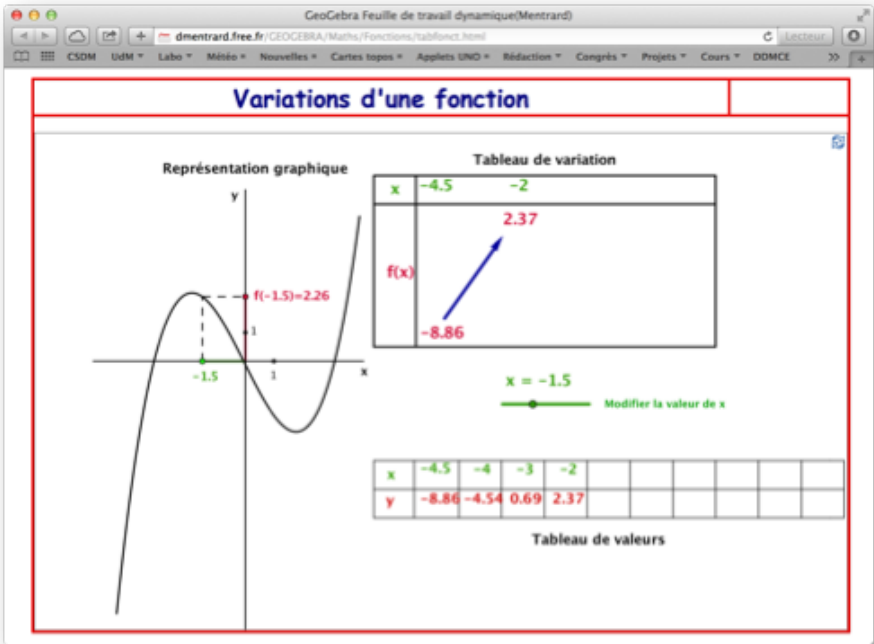


Fig. 2 The discovery mediated in an ETM$_{\text{Analysis}}$

As a second example, we discussed the effect of movement in the three-dimensional representation and the variation in a phenomenon modelled in geometry (Fig. 3). We are already aware of issues with reconstruction on a screen and three dimensional representations. The experience of depth is generally possible with several types of indices that together help to collect the missing dimension (Blossier and Richard, ETM3). But when one moves a geometric construction, for example, by using a mouse to take a rotational view of the model, it appears that we recreate a third dimension which allows the lead wire desired views with an adjustment result of depth cues. One can "see" a representation on the screen is actually that of the object or phenomenon that we wanted to represent through its visual appearance (synthetic approach) because one can establish the nature by reasoning (analytical approach) or because the mathematical model that gives meaning to representation - representative theory where the third dimension is moving - creating coherence between the semiotic-instrumental experimentation main views, cross sections of sub-figures and the graph of variation between two variables (length and area).

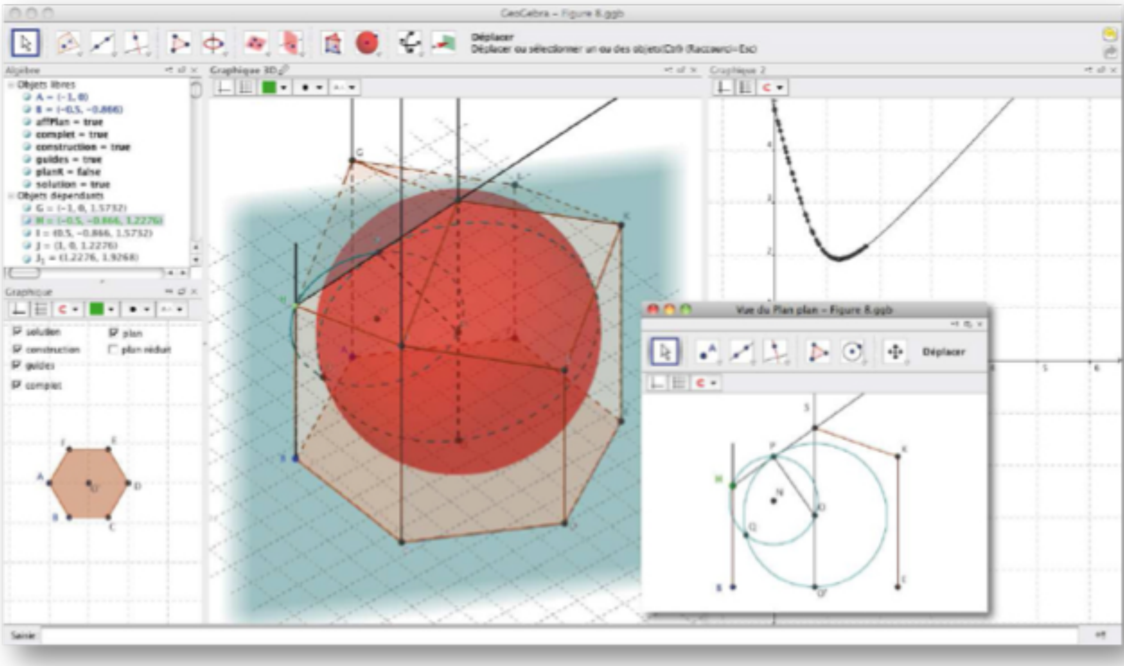


Fig. 3 Movement and 3D in an ETM$_{Geometry}$

The third example that extends the legacy of ETM3 concerns the idea of fibration between working spaces. From the outset, it must be said that this idea seems fairly close to the concept of intra-mathematical modelling where the first theory allows for the representation of a second and vice-versa. When these theories offer mutual assistance for representation, communication and processing of the same object at the software interface (Fig. 4), the links that arise between the different working spaces from the perspective of interaction with a user, do not have the same transparency as that which must occur for successful computer programming. In other words, the panes do not offer views, but the tools have a certain autonomy from each other, even if the software ensures consistency between the mathematical reference models. In the same way that the autonomy of the symbolic order is maintained in relation to what it is supposed to signify, each working space provides a kind of semiotic-instrumental experiment with features of its own.

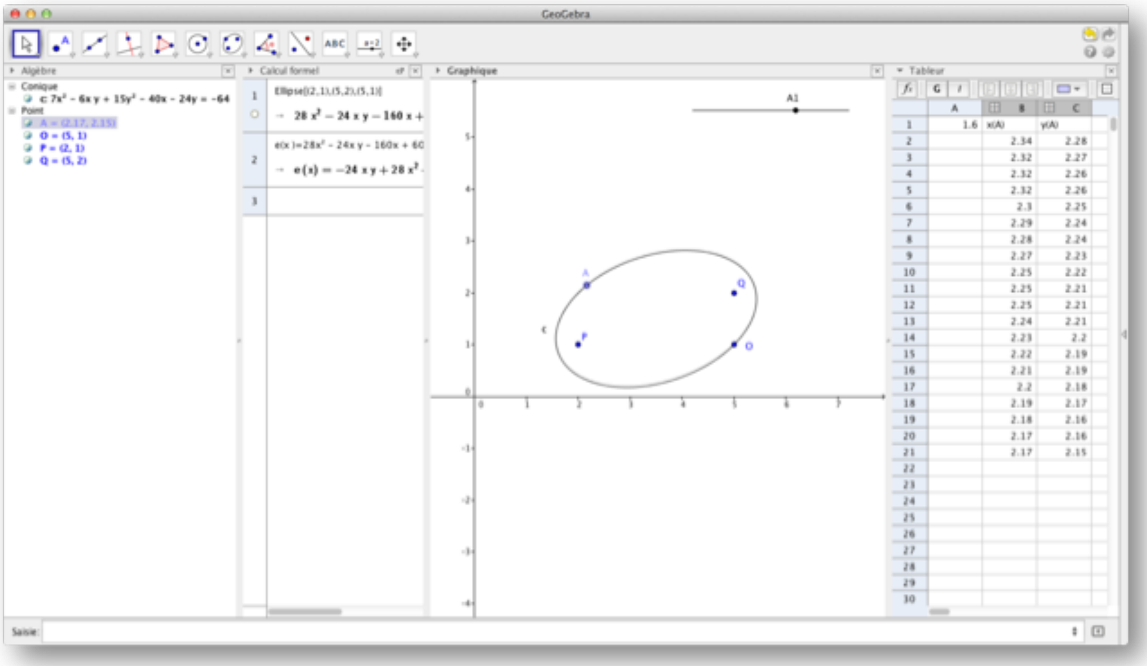


Fig. 4 Fibration between four working spaces: ETM$_{\text{Algebra}}$ ↔ ETM$_{\text{Analysis}}$ ↔ ETM$_{\text{Geometry}}$ ↔ ETM$_{\text{Arithmetic}}$

3.2. CONTRIBUTIONS OF THE MATHEMATICAL WORKING SPACE MODEL

Mathematical work and the learning of mathematics

As we are well aware, the only way of doing mathematics is to try and solve specific problems and, in this regard, to ask new questions. From the Brousseau's perspective, the concept of devolution appears to be a primary role of the teacher and a prerequisite for the development of student autonomy. In a way, it takes the idea that a problem situation is up to the teacher's heritage and that it seeks to make this heritage to the student leaving him in charge of the resolution. In this sense, mathematical problems are both a learning opportunity and a chance for the student to begin mathematical work. However, the distinction between "doing mathematics" and "learning of mathematics" remains essential, especially when it comes to encouraging learning or assessment. Already doing mathematics is a highly didactic activity, which marks the formation or organisation of concepts resulting from the activity. Still, mathematical working space is not a "place" or "container", but also a space created by the interactions, that is to say a system of activities or finalised interactions. In all cases, the description or analysis of mathematical work, whether in an educational systems or research mechanism becomes possible by raising interactions - modulo the purpose of the interactions in a system of activities. To better understand the specific signs and tools for learning mathematics, one must question the authenticity of mathematical interaction in an ETM and the appropriateness of finalized interactions in mathematical work.

In a learning situation, a working space may be suitable if the potential interactions are suitable for mathematical work. The idea of convenience that is raised here in terms of epistemological vigilance, that is to say, the suitability assumed from the outset that the knowledge domain of validity that can form (conceptualisation) or be implemented (operational) in the working space is consistent with the mathematical reference models. An example of a working space that illustrates a lack of epistemological validity is visible via the algebra tiles (Fig. 5). These tiles, originally six in number, (tile "unity" and the tile x, y, xy, x^2 and y^2) are supposed to help students solve equations of the first or second degree, or to develop or factorise affine or quadratic expressions. You could think here that geometry serves as a model for algebra. However, when looking at the tiles closely, you immediately notice that they are not, for example, a Cartesian product of two lengths, but that they are of independent significance in relation to possible measurement quantities that they could represent. In particular, we note that the tile "unity" is always represented by a square unit, even if the manipulating expression is affine. To test the suitability of this area of work, we must know the mathematical structure generated by the algebra tiles and the domain of validity of the problems they solve.

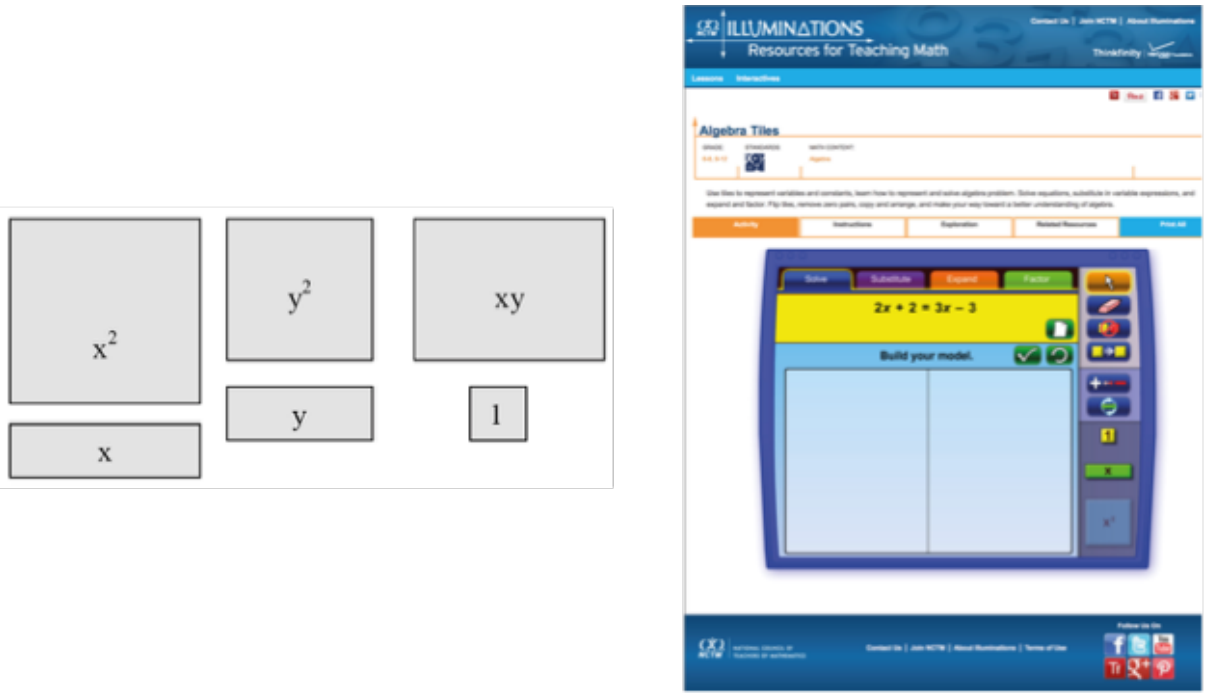


Fig. 5 Algebra tiles and epistemological vigilance

From a methodological point of view, consideration of interactions, potential or real, in ETM discussed in the thematic group, allowed us to underline their importance to the learning process. In the same way that reality can draw comparisons with "photo" or "video", it is possible: (a) to relate learning (state) by describing the interactions of a working space, or (b) to explain (evolution) by comparing an a priori analysis of an appropriate ETM with hindsight interactions (not necessarily completed) as a result of an experiment. With the latter referring to didactic engineering, it appears that a good understanding of the realm of possibility, created by the appropriate ETM in search feature is essential before it can properly interpret the interactions of students. The model working spaces, with its interactions, plans and other components, offer a set of appropriate benchmarks for the interpretation of the mathematical work in a learning context.

More broadly speaking, it has been possible to take account of mathematical learning consumed (state) or induced (evolution) and show that the model ETM is a structured and functional reference that ensures continuity between conceptual and methodological frameworks as a search feature. Although the model of ETM was designed in the light of research and existing theories, it is not in itself a theory. The interpretation of the components of an ETM (poles, plans, genesis ...) and the interactions they undertake to enter or win to rely on complementary theories. The Theory of Didactic Situations (TDS) of Guy Brousseau or the Decision Theory (DT) of Alan Schoenfeld, which have not been thought of in terms of work, provide good examples. Thus, the interaction between the epistemological and cognitive ETM model can be interpreted in terms of interactions between an epistemological milieu and epistemic subject (in the TDS), or the seemingly surprising decisions of a teacher or a student, on the basis of the components of ETM (in the DT). Similarly, the Activity Theory (AT), was not anticipated for the mathematical aspect of the work, let alone in a learning environment. Yet AT asserts that the actions take shape and develop in a situation that can be a social environment (such as a class) made up of individuals and artefacts, in order to place the functioning of the mind on artefacts which, following on from this, binds individuals and artefacts in embodied cognitive acts. Reconciliation seems possible here with semiotics embodied by viewing the actions of students at the interface of 3D geometry software.

Refining the model

In discussions of the thematic group, we highlighted the fact that the components of the ETM may, under certain conditions, have a side effect on genesis. For example, insofar as the instrument is an interaction between a subject and a tool – the last to be taken here in the sense of a means of action - and that the work area provides a structured set of interactions, we must add to the ETM model the idea of fibres that rely more specifically on the components (Fig. 6). Thus, semiotic tools, both material and notional (notion in the discursive sense) have an effect on the genesis, since the use of these instruments influences the formation of semiotic, notional and material parts of the instrument. It is a question of internal fibration model that can extend the external fibration related instruments and genesis. Even in some areas of mathematics, such as algebra, semiotic material and notional functions of tools are so clustered as to need to undertake an attempt at defibration to understand the issues.

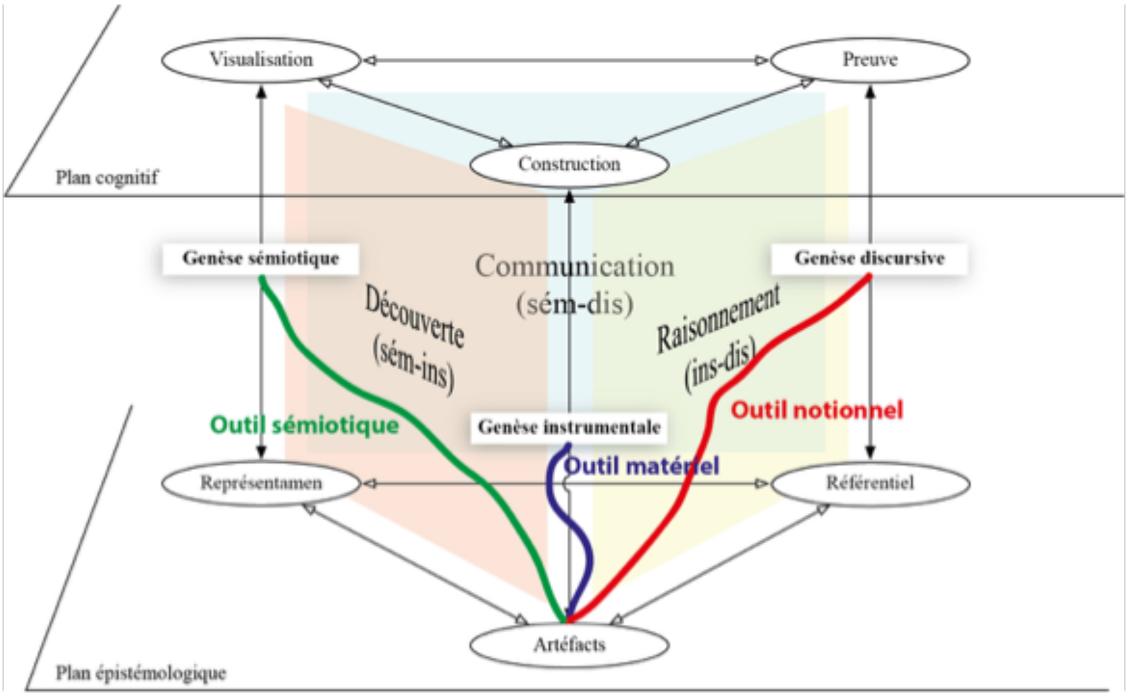


Fig. 6 Example of internal fibration in an ETM

3.3. Back to the work of Topic 2: the questions

The articulation of different approaches punctuated discussions, leading the group towards the idea that an ETM model is a skeleton on which different frameworks or theories give substance following questions, problems or difficulties involved in searches. If some approaches naturally found their place as semiotic or instrumental theories, others were much less obvious to the point where it was questioned if they were desirable at all. Without going into detail, sustained attention has been paid to avoid forcing some inappropriate integrations, particularly so that the coherence of the didactic intention which is the basis of the model was not lost, nor to unnecessarily reduce the explanatory force. It is the case, amongst others, of the APOS theory where genetic dimension is tackled very differently to that of ETM. However, the friction produced allowed the opportunity to discuss new insights, pointing to the ambiguities of the model and consider some possible reconciliations. In short, the group was able to better understand the distinction between what is on the periphery and what is at the heart of the ETM.

In this way, the model of ETM focuses much attention on the individual over the group. This characteristic raises a crucial question on collaborative work: how to study this type of work in the ETM model? This question is all the more crucial given that we must recognise the importance of collaborative work in the construction of mathematical knowledge. The importance of this issue was highlighted with the presentation of Hitt and further explored through the text of Hitt, Saboya & Cortes. Thus, while the register of representations of Duval easily fits into the model of ETM - they are also often mentioned - it has been noted that signs do not necessarily constitute a register, notably in the modelling task. Moreover, the approach of Duval is centred on the individual, while the collective plays an important role in learning. The coverage of collaboration, sign reporting tools and, more generally, social class, were fed by an eloquent discussion of AT, with special focus placed on the contributions of Hitt and Lagrange. Given that in AT, mathematical work is finalised activity that takes place in a certain situation, we must distinguish productive activity focused on the completion of the task (short term) of constructive activity for conceptualising (long term). In the model of ETM, we seek to provide and describe the conditions of mathematical work and to identify interactions finalized for a subject or a group, as an emerging entity. Nevertheless, several issues of reconciliation between the model of ETM and AT remain open, if only for the consideration of representations and the role of social milieu in the alignment of sign tools. (Ω)

THEME 2

SPECIFICITE DES OUTILS ET DES SIGNES DANS LE TRAVAIL MATHEMATIQUE

Tomás Recio, Universidad de Cantabria, Espagne

Philippe R. Richard, Université de Montréal, Canada

Laurent Vivier, Université Paris Diderot, France

1. DESCRIPTION INITIALE

Ce thème s'intéressait aux utilisations des outils technologiques et aux signes considérés en tant que véhicules des connaissances afin de voir dans quelle mesure ils affectent le travail mathématique (Fig. 1). Nous retenions initialement une double interrogation relativement à leur impact. Il convenait, en premier lieu, de s'interroger sur les potentialités qu'offrent les environnements technologiques et les systèmes de signes pour transformer le travail mathématique de l'élève. Considérées comme une composante essentielle de l'espace de travail mathématique, les interactions entre les instruments et les signes devaient constituer un point d'ancrage privilégié. La seconde interrogation découlait de la prise en compte de l'arrière-plan épistémologique présent dans les ETM. Elle consistait à étudier en quoi l'utilisation d'environnements technologiques ou de systèmes de signes affecte la construction épistémologique propre à l'élève, guidant son travail mathématique. Cela pouvait concerner, à titre d'exemple, tant la nature des objets mathématiques qu'il construit que les preuves mathématiquement acceptables ou le rôle de la démarche d'investigation.

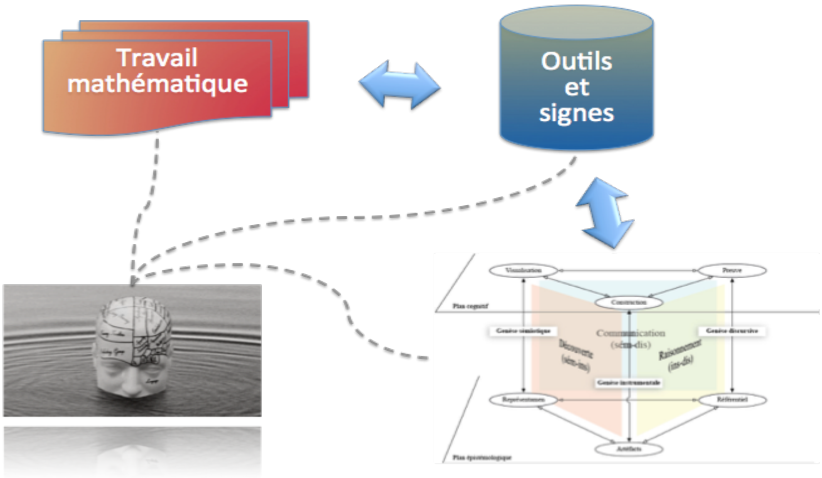


Fig. 1 Les outils et les signes comme clef interprétative entre le travail mathématique et les ETM.

2. CONTRIBUTIONS

Les sessions du thème 2 ont permis la présentation de onze travaux, dont deux affiches, laissant une large place à la discussion. Si la langue dominante de l'écrit était l'espagnol avec six textes, le français (trois textes) et l'anglais (deux textes) furent aussi représentés. Les discussions ont pleinement utilisé le caractère trilingue de la rencontre ETM4. Les travaux se sont emparés des différents points constituant le thème 2 comme les systèmes de signes, les représentations sémiotiques, le rôle des outils, la visualisation, les signes instrumentés, la coordination (au sens large), les graphiques et les représentations dynamiques. Alors que sept présentations ont une entrée principalement technologique, notamment avec les logiciels Geogebra, SimCalc et Casyopée, le tableau numérique interactif et les vidéos en ligne, les quatre autres présentations portent plus spécifiquement sur d'autres aspects des outils et des signes. Nous dressons, au Tabl. 1, un résumé des relations entre chaque contribution, le domaine mathématique de référence ainsi que les particularités ou les traitements théoriques de premier plan. Il semble donc que le rapprochement thématique, qui était aussi une nouveauté organisationnelle lors du symposium – dans l'ETM3, les outils (thème 2) et les signes (thème 4) étaient étudiés par deux groupes distincts –, est une réussite. En outre, la notion de travail collaboratif a été une source importante de questions au sein du groupe, ce qui permet d'avancer que cette réorganisation a largement profité au thème 2. Du côté des contenus mathématiques, même si l'on peut voir une prédominance de l'analyse mathématique dans une large acception, les domaines abordés sont très divers : nombres, géométrie, algèbre, probabilités, analyse, aires, fonctions, cinématique, optimisation, algèbre linéaire et transformations. Enfin, plus de deux domaines sont souvent traités conjointement, ouvrant la voie à l'intérêt pour la fibration externe, entendue comme étant la coordination d'ETM relatifs à des domaines mathématiques différents.

Auteurs **Titre**	**Domaine mathématique**	**Particularités**
Fernando Hitt, Mireille Saboya & Carlos Cortes *La pensée arithmétique-algébrique comme prioritaire pour la transition du primaire secondaire à travers l'espace de travail arithmético-algébrique (ETA-a) dans le contexte des nombres polygonaux*	Nombres	Systèmes de signes et représentation Travail collaboratif Théorie de l'Activité
Rosa Paez & Laurent Vivier *Espacio de trabajo matemático alrededor de las desigualdades lineales en una sola variable*	Nombres	Systèmes de signes et représentation Registres de représentation sémiotique
Miguel A. Abánades, Francisco Botana, Jesús Escribano & Inés M. Gómez-Chacón *Distintas herramientas para la enseñanza/aprendizaje del concepto de lugar geométrico*	Géométrie, algèbre	Outils, visualisation ETM

Kuzniak Alain & Drouhard Jean-Philippe *Un point de vue multidimensionnel sur les outils et les instruments dans les espaces de travail mathématique*	Probabilités, algèbre, géométrie	Outils, signes instrumentés ETM, épistémographie des savoirs
Charlotte Derouet *Signes et outils technologiques: obstacles pour une "bonne" interaction entre le calcul intégral et les lois de probabilités à densité ?*	Analyse et probabilités (aires)	Outils, signes ETM
Ruth Rivera, Maximiliano De Las Fuentes & Ana Dolores Martínez *Evaluación del uso del pizarrón electrónico como entorno tecnológico mediador para la enseñanza de tópicos del cálculo diferencial*	Fonctions	Outil, représentation
Leticia Sánchez López & Luis Enrique Moreno Armella *Movimiento rectilíneo y graficación: una relación simbiótica*	Cinématique	Outils, représentation Epistémologie historique
Jean-Baptiste Lagrange *Functions in technological environments: from multi-representations to connected workspaces*	Analyse, fonctions	Outils, signes instrumentés (coordination)
María Teresa Dávila Araiza & Luis Moreno-Armella *Intuición y movimiento: hacia una redescripción de las ideas intuitivas del cálculo*	Analyse	Systèmes de signes (graphiques)
Manuel Santos-Trigo, Luis Moreno-Armella & Matías Camacho-Machín *Contrasting analytic and dynamic problem solving approaches within the mathematical work space frame*	Géométrie, analyse (optimisation)	Outils, signes (coordination) Problem solving
César Fabián Romero Félix & Asuman Oktaç *Coordinación de registros y construcciones mentales en un ambiente dinámico para el aprendizaje de transformaciones lineales*	Algèbre linéaire (transformation)	Signes instrumentés, représentation dynamique APOS

Tabl. 1 Résumé des contributions au thème 2

Les possibilités d'intégration d'autres théories au modèle des ETM et le choix du travail mathématique comme thématique globale ont permis à d'autres approches d'enrichir les discussions, et surtout la problématique de fond. Parmi les approches utilisées, on peut citer la théorie de l'activité, la théorie APOS (Action-Processus-Objet-Schème), la théorie des registres sémiotiques, l'approche cognitive des instruments contemporains, l'épistémologie historique, l'épistémographie des savoirs ou l'approche par résolution de problèmes.

3. CADRE DE TRAVAIL ET QUESTIONS DE RECHERCHE OUVERTES

3.1. Spécificité du thème 2

Au cours de l'introduction, nous avons illustré le thème à partir de trois types d'enjeux dans lesquels l'articulation des outils et des signes affecte visiblement le travail mathématique. Comme premier exemple, nous avons considéré la notion de fonction en analyse (Fig. 2). De façon traditionnelle, la représentation, le contrôle et l'interprétation de certaines propriétés des fonctions procèdent par coordination de registres (verbal, graphique, tabulaire, analytique ou symbolique). Or, sous certaines conditions liées à la représentation sur un dispositif informatique, il est possible de modifier l'objet fonction en agissant directement sur l'une de ses représentations, de sorte que l'ensemble des registres se coordonne pour représenter le nouvel objet. Ce type d'expérimentation sémiotico-instrumentale permet de découvrir ou d'explorer l'incidence des registres pour la représentation mathématique. Une partie des connaissances en jeu est gérée par l'outil informatique, mais c'est en réponse à un questionnement de l'utilisateur que l'outil et les signes interviennent.

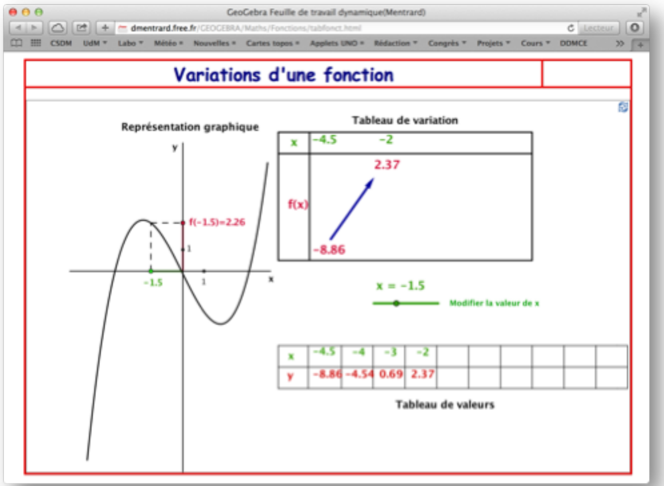


Fig. 2 La découverte médiée dans un ETM$_{\text{analyse}}$

En guise de deuxième exemple, nous avons abordé l'effet du mouvement dans la représentation tridimensionnelle et la variation d'un phénomène modélisé en géométrie (Fig. 3). On connaît déjà les questions de la reconstitution, sur un écran, du réel dans ses trois dimensions. L'expérience de la profondeur est généralement possible à l'aide de plusieurs types d'indices qui, conjointement, aident à la percevoir la dimension absente (Blossier et Richard, ETM3). Mais lorsqu'on fait bouger une construction géométrique, par exemple, à l'aide d'une souris, tel un oeil qui tourne autour d'une maquette, il semble qu'on recrée ainsi une 3^{e} dimension qui permet d'engendrer le fil de vues souhaitées avec un ajustement conséquent des indices de profondeur. On peut donc «voir» qu'une représentation à l'écran est effectivement celle de l'objet ou du phénomène que l'on voulait représenter grâce à son apparence visuelle (approche synthétique), parce que l'on peut en établir la nature par le raisonnement (approche analytique) ou parce que le modèle mathématique qui donne du sens à la représentation – théorie représentante où la 3e dimension est le déplacement – rend cohérent l'expérimentation sémiotico-instrumentale entre les vues principales, les coupes transversales de sous-figures et le graphique d'une variation entre deux grandeurs (longueur et aire).

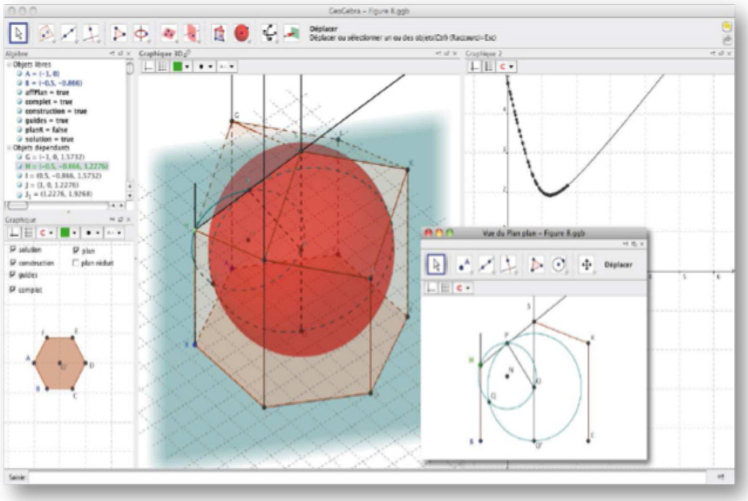


Fig. 3 Mouvement et 3D dans un $\text{ETM}_{\text{Géométrie}}$

Le troisième exemple qui prolonge l'héritage de l'ETM3 concernait l'idée de fibration entre espaces de travail. D'entrée de jeu, il faut dire que cette idée semble assez proche de la notion de modélisation intramathématique où une première théorie permet d'en représenter une seconde, et vice-versa. Lorsque ces théories se prêtent mutuellement assistance pour la représentation, la communication et le traitement d'un même objet à l'interface d'un logiciel (Fig. 4), l'articulation qui se pose entre les divers espaces de travail, dans une perspective d'interactions avec un utilisateur, n'a pas la même transparence que celle qui doit intervenir pour réussir la programmation informatique. Autrement dit, les sous-fenêtres n'offrent pas que des vues, mais bien des outils qui jouissent d'une certaine autonomie les uns par rapport aux autres, même si le logiciel assure une certaine cohérence entre les modèles mathématiques de référence. De la même manière que l'autonomie de l'ordre symbolique se maintient par rapport à ce qu'il est censé signifier, chaque espace de travail propose un type d'expérimentation sémiotico-instrumentale avec des caractéristiques qui lui sont propres.

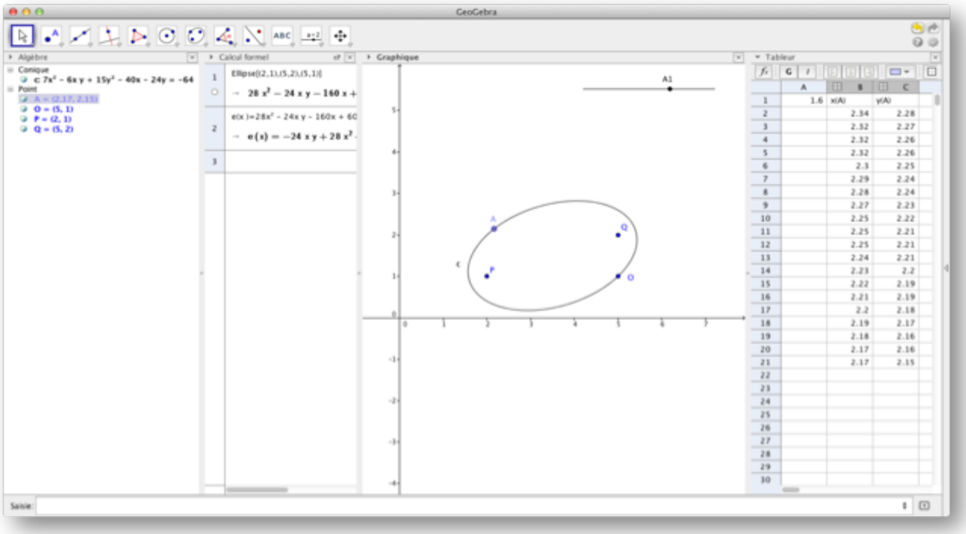


Fig. 4 Fibration entre quatre espaces de travail : $\mathrm{ETM}_{\text{Algèbre}} \leftrightarrow \mathrm{ETM}_{\text{Analyse}} \leftrightarrow \mathrm{ETM}_{\text{Géométrie}} \leftrightarrow \mathrm{ETM}_{\text{Arithmétique}}$.

3.2. Apports du modèle des espaces de travail mathématique

Travail mathématique et apprentissage des mathématiques

On le sait pourtant si bien, le seul moyen de faire des mathématiques c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions. Dans la perspective brousséenne, la notion de dévolution apparaît comme un rôle principal de l'enseignant et une condition indispensable pour le développement de l'autonomie de l'élève. D'une certaine façon, elle reprend l'idée qu'une situation-problème appartient au patrimoine de l'enseignant et que celui-ci cherche à rendre ce patrimoine à l'élève en lui laissant la responsabilité de la résolution. En ce sens, les problèmes mathématiques constituent à la fois une opportunité d'apprentissage et une occasion pour l'élève d'entreprendre son travail mathématique. Toutefois, la distinction entre «faire des mathématiques» et «apprendre des mathématiques» demeure incontournable, surtout lorsqu'il s'agit d'encourager un apprentissage ou de l'évaluer. Déjà, faire des mathématiques est une activité fortement adidactique, ce qui marque la formation ou l'organisation des concepts qui découle de l'activité. Encore, l'espace de travail mathématique n'est pas un «lieu» ou un «contenant», mais surtout un espace qui se crée par les interactions, c'est-à-dire un système d'activités ou d'interactions finalisées. Toujours, la description ou l'analyse du travail mathématique, que ce soit dans un dispositif d'enseignement ou une mécanique de recherche, devient possible en relevant les interactions – modulo la finalité des interactions dans un système d'activités. Pour mieux comprendre la spécificité des signes et des outils pour l'apprentissage des mathématiques, il faut s'interroger sur l'authenticité mathématique des interactions possibles dans un ETM et sur l'à-propos des interactions finalisées dans le travail mathématique.

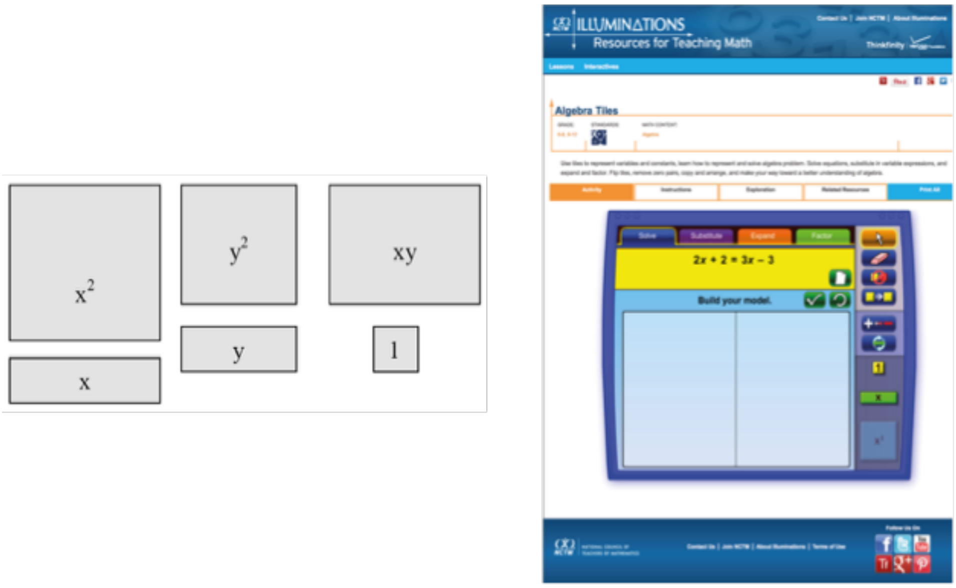


Fig. 5 Tuiles algébriques et vigilance épistémologique.

Dans une situation d'apprentissage, un espace de travail peut-être idoine si les interactions potentielles conviennent au travail mathématique. L'idée de convenance qui est soulevée ici se pose en termes de vigilance épistémologique, c'est-à-dire que l'idonéité suppose d'emblée que le domaine de validité des connaissances qui peuvent se former (conceptualisation) ou être mises en oeuvre (opérationnalisation) dans l'espace de travail est cohérent avec les modèles mathématiques de référence. Un exemple d'espace de travail qui permet d'illustrer un manque de validé épistémologique est visible avec les tuiles algébriques (Fig. 5). Ces tuiles, initialement au nombre de six (la tuile «unité» et les tuiles x, y, xy, x^2 et y^2), sont censées aider l'élève à résoudre des équations du premier ou du second degré, ou à développer ou factoriser des expressions affines ou quadratiques. On pourrait croire ici que la géométrie sert de modèle à l'algèbre. Cependant, lorsqu'on regarde les tuiles de près, on remarque tout de suite qu'elles ne représentent pas, par exemple, un produit cartésien de deux longueurs, mais qu'elles revêtent une signification autonome par rapport à d'éventuelles grandeurs mesurées qu'elles pourraient représenter. En particulier, on remarque que la tuile «unité» est toujours représentée par un carré unité, même si l'expression à manipuler est affine. Pour tester l'idonéité de cet espace de travail, il faudrait connaître la structure mathématique engendrée par les tuiles algébriques ainsi que le domaine de validité des problèmes qu'elles permettent de résoudre.

Concepts, méthodes et théories

Du point de vue méthodologique, la considération des interactions, potentielles ou réelles, dans les ETM discutés au sein du groupe thématique, a permis d'en souligner l'importance pour rendre compte d'un apprentissage. De la même manière que l'on peut croquer la réalité avec une «photo» ou une «vidéo», il est possible : (a) de relater un apprentissage (état) par la description des interactions d'un espace de travail, ou (b) de l'expliquer (évolution) par la comparaison d'une analyse a priori d'un ETM idoine avec l'analyse a posteriori des interactions (non nécessairement finalisées) à la suite d'une expérimentation. Cette dernière évoquant l'ingénierie didactique, il appert qu'une bonne compréhension du domaine du possible, créé par l'ETM approprié au dispositif de recherche, est indispensable avant de pouvoir interpréter convenablement les interactions des élèves. Le modèle des espaces de travail, avec ses interactions, ses plans et ses autres composantes, offre un ensemble de repères approprié à l'interprétation du travail mathématique dans un contexte d'apprentissage.

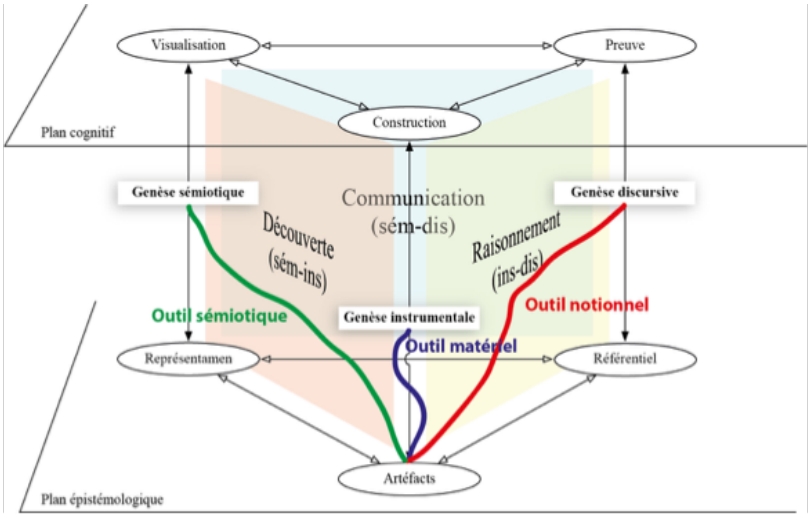


Fig. 6 Exemple de fibration interne dans un ETM

De façon plus large, c'est en pouvant rendre compte d'un apprentissage mathématique consommé (état) ou provoqué (évolution) que le modèle des ETM constitue une référence structurée et fonctionnelle qui permet d'assurer une continuité entre les cadres conceptuels et méthodologiques d'un dispositif de recherche. Si bien le modèle des ETM a été conçu au regard de recherches et de théories existantes, il n'est pas en soi une théorie. L'interprétation des composantes d'un ETM (pôles, plans, genèses ...) et des interactions qu'elles engagent gagnent à intégrer ou à s'appuyer sur des théories complémentaires. La Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Guy Brousseau ou la Théorie de la Décision (TD) d'Alan Schoenfeld, qui n'ont pas été pensées en termes de travail, en donnent de bons exemples. Ainsi, les interactions entre les plans épistémologique et cognitif du modèle des ETM peuvent s'interpréter au regard des interactions entre un milieu épistémologique et un sujet épistémique (dans la TDS), ou les décisions apparemment étonnantes d'un enseignant ou d'un élève, sur la base des composantes des ETM (dans la TD). De la même manière, la Théorie de l'Activité (TA) n'a pas été prévue pour l'aspect mathématique du travail, encore moins dans un milieu d'apprentissage. Pourtant, la TA affirme que les actions prennent forme et se développent dans des situations qui peuvent être un milieu social (comme une classe) composé d'individus et d'artefacts, afin de situer le fonctionnement de l'esprit à travers les artéfacts qui, du coup, lient les individus et les artéfacts dans des actes cognitifs incarnés. Un rapprochement semble ici possible avec la sémiotique incarnée par ce que voient des élèves en agissant à l'interface d'un logiciel de géométrie 3D.

Raffinement du modèle

Dans les discussions du groupe thématique, on a mis en évidence le fait que les composantes des ETM peuvent avoir, sous certaines conditions, un effet collatéral sur les genèses. Par exemple, dans la mesure où l'instrument est une interaction entre un sujet et un outil – ce dernier prenant ici le sens d'un moyen d'action – et que l'espace de travail offre un ensemble structuré d'interactions, il faut joindre au modèle des ETM l'idée de fibres qui relient plus spécifiquement les composantes (Fig. 6). Ainsi, les outils sémiotiques, matériels et notionnels (notion en instance discursive) ont un effet sur les genèses, puisque l'usage de ces outils influence la formation des parties sémiotiques, notionnelles et matérielles de l'instrument. Il s'agit d'un type de fibration interne au modèle susceptible de prolonger la fibration externe en relation avec les outils et les genèses. Même que dans certains domaines mathématiques, comme l'algèbre, les fonctions sémiotiques, matérielles et notionnelles des outils sont tellement agglutinés qu'il faut entreprendre un effort de défibration pour en comprendre les enjeux.

3.3 Retour au travail du thème 2 : les questions

L'articulation des différentes approches a jalonné les discussions au point d'avoir mené le groupe vers l'idée que le modèle des ETM serait un squelette auquel les différents cadres ou théories employés donnent de la chair suivant les questions, les problèmes ou les difficultés en jeu dans les recherches. Si certaines approches trouvent naturellement leur place, comme les théories sémiotiques ou instrumentales, d'autres se sont avérées beaucoup moins évidentes, au point d'avoir eu à se demander si elles étaient souhaitables. Sans entrer dans le détail, une attention soutenue a été accordée afin d'éviter de forcer certaines intégrations inopportunes, notamment pour ne pas perdre la cohérence de l'intention didactique qui est à la base du modèle, ou pour ne pas en diminuer inutilement la force explicative. C'est le cas, entre autres, de la théorie APOS où la dimension génétique est abordée de manière très différente à celle des ETM. En revanche, le frottement produit a permis de discuter suivant de nouveaux éclairages, de pointer sur les points d'ombre du modèle et d'envisager certains rapprochements possibles. Bref, le groupe a été en mesure de mieux comprendre la distinction entre ce qui est à la périphérie de ce qui est au cœur des ETM.

De cette façon, le modèle des ETM focalise bien plus l'attention sur l'individu que sur le groupe. Cette caractéristique pose de manière cruciale la question du travail collaboratif : comment considérer ce type de travail dans le modèle des ETM? Une telle question est d'autant plus cruciale que l'on doit reconnaître l'importance du travail collaboratif dans la construction des connaissances mathématiques. L'importance de cette question a été mise en relief avec la présentation de Hitt, puis approfondit lors les discussions autour du texte de Hitt, Saboya & Cortes. Ainsi, alors que les registres de représentations de Duval trouvent facilement leur place dans le modèle des ETM – ils y sont d'ailleurs souvent évoqués –, il est à noter que les signes ne sont pas nécessairement constitués en registre, notamment dans une tâche de modélisation. De plus, l'approche de Duval est centrée sur l'individu, alors que le collectif joue un rôle important dans les apprentissages. La prise en compte de la collaboration, des rapports signes-outils et, plus généralement, du milieu social, ont été nourries par une discussion éloquente sur la TA, en s'appuyant particulièrement sur les apports de Hitt et de Lagrange. Puisqu'en TA, le travail mathématique est une activité finalisée qui se réalise en situation, il faut distinguer l'activité productive centrée sur la réalisation de la tâche (court terme) de l'activité constructive pour la conceptualisation (long terme). Dans le modèle des ETM, on chercherait à fournir et à décrire les conditions du travail mathématique, ainsi qu'à identifier des interactions finalisées pour un sujet ou pour un groupe, telle une entité émergente. Malgré tout, plusieurs questions de conciliation entre le modèle des ETM et la TA demeurent ouvertes, ne serait-ce que pour la prise en compte des représentations et le rôle du milieu social dans l'arrimage signes-outils. (Ω)

LA PENSEE ARITHMETICO-ALGEBRIQUE: UNE PRIORITE POUR LA TRANSITION DU PRIMAIRE AU SECONDAIRE A TRAVERS L'ESPACE DE TRAVAIL ARITHMETICO-ALGEBRIQUE (ETA-A) DANS LE CONTEXTE DES NOMBRES POLYGONAUX

Fernando Hitt, Université du Québec à Montréal

Mireille Saboya et Carlos Cortés, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Dans ce document nous présentons une expérimentation liée à une pensée arithmético-algébrique (PA-A) comme prélude à la pensée algébrique (P-A) à l'école secondaire. Dans le processus de construction de cette pensée, nous analysons les productions spontanées des élèves face à une activité sur les nombres polygonaux. Nous proposons un ETA–A (Espace de Travail arithmético-algébrique) autour des processus de construction des signes (PA-A) en suivant une méthodologie d'apprentissage collaborative ACODESA encadrée par la théorie de l'activité et par une approche technologique. Nous montrons que les représentations spontanées des élèves peuvent évoluer dans un milieu socioculturel.

Mots-clés : *Espace de Travail Mathématique, Pensée arithmétique, Pensée algébrique, Pensée Arithmético-Algébrique.*

INTRODUCTION

Un des premiers problèmes dans l'enseignement des mathématiques signalé par la littérature est lié aux obstacles cognitifs sur la transition de l'arithmétique à l'algèbre (Chevallard, 1980; Booth, 1988; Filloy & Rojano, 1989). Grâce à ces études, entre autres, les chercheurs en didactique ont progressivement caractérisé la pensée algébrique (*PA*). Cette *PA* est décrite dans une perspective globale (Kaput, 2000) ou dans une perspective explicite avec le modèle GTG_m (Kieran, 2007) :

G) L'activité générationnelle.

T) L'activité de transformation.

G_m) L'activité globale/méta.

La caractérisation des composants de la *PA* a donné lieu à une distinction (Kaput, 2000; Blanton & Kaput, 2011; Artigue, 2012) entre :

a) un chemin naturel de l'arithmétique vers l'algèbre,

b) un chemin symbolique direct dans la construction de la *PA*.

Le premier point touche les éléments G et G_m dans le modèle de Kieran, et le 2e point est lié aux activités de Transformation (« T »). Sur ce dernier point, la littérature fait état de problèmes d'apprentissage liés à un enseignement symbolique de l'algèbre.

Un nouveau paradigme a émergé à la fin du XXe siècle aux États-Unis, que l'on a caractérisé comme le mouvement « Early algebra » (Cai & Knuth, 2011), lequel s'est attardé, d'un point de vue pragmatique, aux tâches « algébriques » que l'on peut utiliser dans la classe de mathématiques à l'école primaire.

À propos de ce mouvement, « Early algebra », Radford (2011, p. 304) signal que: « …the idea of introducing algebra in the early years remains clouded by the lack of clear distinction between what is arithmetic and what is algebraic ». Mais au début de l'école secondaire, cette perspective pourrait changer pour une autre plus intéressante (voir p.e. Combier, Guillaume et Pressiat, 1996 ; Coulange et Grugeon, 2008) : celle de s'attarder à la reconnaissance des actions liées aux processus arithmétiques et visuel-arithmétiques et leurs transformations vers l'algèbre et ***vice versa***. En fait, dans notre perspective, nous sommes intéressés à la distinction dans les processus de transformation quand on passe d'une approche arithmétique à une approche algébrique et ***vice versa***.

Dans cette perspective et en prenant en compte la notion d'*ETM* proposé par Kuzniak (2011) nous souhaitons dans ce document de l'importance de caractériser ce que l'on pourrait nommer une pensée arithmético-algébrique (*PA-A*). Celle-ci peut nous éclairer sur les processus arithmétiques, visuel-arithmétiques, visuel-algébriques, purement algébriques et leurs interactions. Dans une approche socioculturelle à l'apprentissage des mathématiques (Hitt, 2013), nous proposons une analyse des productions d'élèves du secondaire à travers le d'*ETM* (Kuzniak, 2011). Ainsi, centrés sur la tâche mathématique et les productions des élèves dans les processus de résolution, nous avons considéré également le travail de Robert (2008) centré sur l'activité de l'élève.

ETM comme cadre organisateur pour la construction d'une pensée Arithmético-Algébrique (PA-A) dans ETA-A

Kuzniak (2011) a donné les fondements théoriques pour constituer ce qui est un *ETM*, en présentant la géométrie comme exemple et son possible prolongement à d'autres branches en considérant un plan épistémologique et trois éléments liés à l'abstraction: Intuition, expérience, déduction. Sur le plan épistémologique, Kuzniak (*Idem*) fait référence à l'espace réel et local dans le cadre *ETG*, aux artéfacts et référentiels, qui permettent à l'élève de générer un/des processus sur le plan cognitif, en lien avec la visualisation mathématique, la construction et la preuve.

Dans notre travail nous sommes centrés sur la construction du signe et nous voulons nous attarder sur le caractère fonctionnel des représentations dans l'activité mathématique, et la construction d'une ***PA-A***. Nous retenons pour ce faire les propositions de Kaput et d'Artigue sur l'apprentissage de l'algèbre. C'est-à-dire, le choix d'un chemin naturel, ce chemin exigeant la construction d'une ***PA-A*** comme prélude à la ***PA***.

Dans notre approche nous allons introduire la notion de représentation institutionnelle et représentation fonctionnelle. Notions que dans un premier regard pourrait se confondre aux notions *ETG idoine* et *ETG personnel* d'Hudemond et Kuzniak (2006), elles sont très différentes. Nous allons argumenter dans les lignes à continuation.

Dans le cadre théorique de Kuzniak (2011) il fait référence au cadre théorique de Duval autour de la notion de registre de représentation. Et comme nous l'avons expliqué en Hitt (2006), ce cadre donne une priorité aux représentations institutionnelles, même si Duval (2006) accepte les représentations non institutionnelles:

> Of course, some representations that do not depend on a semiotic system are used in mathematical activity… Their use depends only of the interpretant. They appear most frequently as transitional auxiliary representations (Hitt, 2003). (p. 110-111).

Cette tendance se retrouve dans Houdemond et Kuzniak (2006):

> ETG idoine. L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie.
>
> ETG personnel. … Quand l'élève construit son espace de travail, il a tendance à écraser le pôle théorique pour se replier sur le dipôle espace-artéfact plus évident et matériel. Il lui accorde ainsi une fonction de validation indépendamment de l'horizon visé. Le rôle de l'enseignant consistera à développer le référentiel théorique en précisant l'espace de travail le mieux adapté à la tâche qu'il propose aux élèves… (p.15)

Il y a dans ce discours une tendance à prioriser les représentations institutionnelles et à négliger les représentations spontanées. Aussi en Kuzniak (2011, p. 20) l'on trouve la même tendance : « …ces signes vont se constituer en registres de représentation sémiotique pour permettre un travail qu'on pourra qualifier de mathématique ». Cela peut donner l'impression qu'on ne peut pas qualifier de mathématique le travail fait par un élève ou un groupe d'élèves reposant sur des représentations spontanées.

Dans ce document, nous souhaitons présenter une autre approche qui repose sur le rôle des représentations spontanées et institutionnelles telles que définies par Hitt (2013):

- Représentation institutionnelle: « représentations que l'on trouve dans les livres, ou dans les écrans des ordinateurs, etc. », (p.10)
- Représentation fonctionnelle : « …représentation mentale qui émane dans l'activité mathématique non routinière, qui s'exprime par une représentation [spontanée] liée à l'action. ». (p. 13)

Nous pensons que les représentations non institutionnelles émergent de façon naturelle dans un processus de résolution d'une tâche complexe en mathématique. Ainsi, nous voulons suivre le chemin dans lequel les élèves, dans un processus de construction du signe-fonction, vont utiliser des icônes, des arguments, des représentations arithmétiques mêlées avec des représentations algébriques, avant d'arriver aux symboles dans un ou plusieurs registres de représentation.

Dans notre approche, nous utilisons la notion de visualisation de Duval (2003):

> Visualiser c'est produire une représentation qui, en l'absence de toute perception visuelle des objets représentés, permette de les regarder comme s'ils étaient vraiment devant les yeux… (p. 49).
>
> Un autre aspect de notre recherche est lié à l'utilisation de la technologie. En ce sens, dans les ETM, les artéfacts et la notion de genèse instrumentale sont pris en compte (Kuzniak, *Idem*, p. 21).

Finalement, comme nous sommes également intéressés à la problématique sur la fragilité des connaissances (Thompson, 2002; Karsenty, 2003) dans la construction de la pensée mathématique, nous considérons important d'utiliser une méthodologie d'enseignement et de recherche ACODESA (Hitt, 2013; Hitt et González-Martín, en presse) avec l'intention de consolider la connaissance construite dans la résolution de nos activités.

Questions de recherche et méthodologie

Notre question générale de recherche s'énonce comme suit, *comment développer une PA-A en suivant un chemin naturel vers la PA?* Plus particulièrement, *comment favoriser une articulation entre l'arithmétique et l'algèbre? Quel est l'apport de la technologie dans le développement de cette structure?*

Méthodologie

Notre approche méthodologique repose sur la théorie de l'activité (voir Hitt, 2013), qui intègre dans la classe de mathématiques les aspects liés à la collaboration, à l'apprentissage et à l'autoréflexion (ACODESA). La méthodologie propose 5 étapes:

1. *Travail individuel,*
2. *Travail en équipe,*
3. *Débat (avec la possibilité de promouvoir un débat scientifique),*
4. *L'autoréflexion,*
5. *Institutionnalisation des connaissances.*

Nous avons suivi cette méthodologie avec deux populations :

Au Québec, avec des étudiants de la 1ère année du secondaire. Deux chercheurs ont mené l'expérimentation,

Au Mexique, avec des étudiants de 3^{e} année du secondaire. L'expérimentation a été menée par l'enseignant et un chercheur.

Analyse à priori

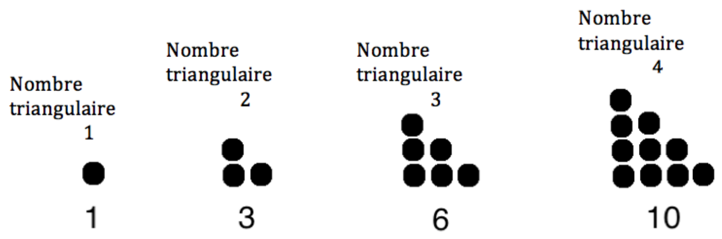
Les études de Healy & Sutherland (1990) et Hitt (1994), autour des nombres triangulaires (polygonaux en général), prennent place dans un milieu technologique (Excel). Aussi, dans ces deux recherches il y a une tendance à passer le plus vite possible aux représentations algébriques. Dans notre étude actuelle, centrés dans la tâche mathématique dans le sens de Robert (*Ibid*), nous avons intégré des activités avec Excel et avec un applet POLY (Cortés & Hitt, 2012). Dans cette étude nous priorisons l'approche socioculturelle de co-construction des connaissances, la production des représentations fonctionnelles et la production externe des représentations spontanées en favorisant la visualisation mathématique.

Dans l'expérimentation menée au Québec, deux activités préliminaires ont été présentées aux élèves. Les élèves devaient résoudre des problèmes dans un environnement papier crayon, et ensuite, avec EXCEL. Notre intention était qu'en suivant ce chemin, nous pourrions favoriser le travail papier crayon, la visualisation, la production de représentations liées au contexte Excel (p.e. dans Healy & Sutherland, les élèves de première année du secondaire sont arrivés à l'expression: "*trig. Δn = na before + position*"). Dans notre étude, nous avons voulu promouvoir l'évolution des représentations spontanées des élèves (par un travail en collaboration), vers une représentation institutionnelle liée aux nombres triangulaires:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Présentation de l'activité

Après une brève explication sur la découverte des nombres polygonaux par les Grecs (Ve siècle a. C.) on a proposé les cinq premiers questions:



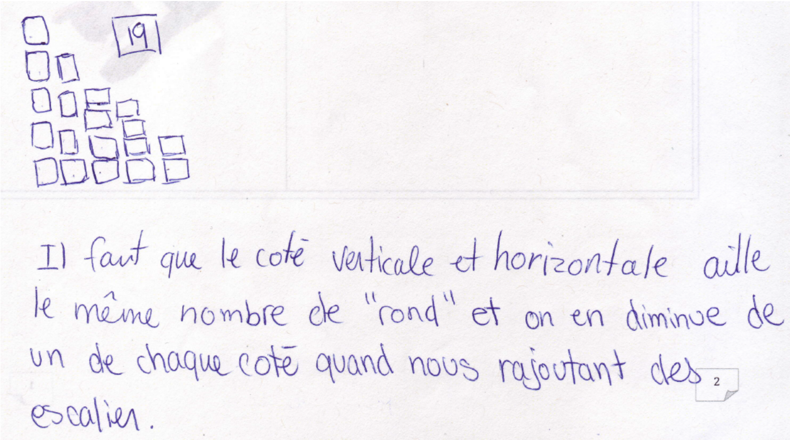
Les cinq premières questions de l'activité
1)Observe bien ces nombres. Quel est le cinquième nombre triangulaire ? Représente-le. Explique la façon dont tu as procédé. 2)D'après toi comment sont construits ces nombres triangulaires ? Qu'observes-tu ? 3)Quel est le 11^{e} nombre triangulaire ? Explique comment tu fais pour le trouver. 4)Tu dois écrire un courriel COURT à un ami pour lui décrire comment procéder pour calculer le nombre triangulaire 83. Décris ce que tu lui écrirais. TU N'AS PAS À FAIRE LES CALCULS! 5) Et pour calculer n'importe quel nombre triangulaire, comment ferait-on (on veut encore ici un message COURT).

Analyse *à postériori* (population du Québec)

Travail individuel (étape 1 d'ACODESA)

Une fois que les élèves ont résolu de manière individuelle les deux premiers problèmes, nous avons proposé d'utiliser Excel (chercheur Ch_1).

Voici un exemple du travail individuel:



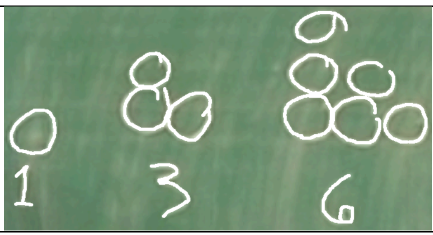
Dans cette production, nous pouvons remarquer un manque de contrôle sur l'activité. En effet, il y a une contradiction entre la représentation figurale et la représentation verbale. Si l'on reprend Kuzniak (2011), on peut affirmer que l'intuition et la première expérience déterminent cette première approche. Par la suite, on constate chez l'élève, auteur de cette production, une évolution vers un processus d'abstraction à partir de ses représentations spontanées lors du travail en équipe.

Deux aspects sont à noter :

Nous voulons promouvoir une évolution des représentations spontanées vers les représentations officielles en prenant en compte un apprentissage dans un milieu socioculturel.

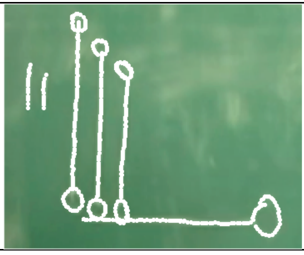
Enfin, nous voulons promouvoir la construction d'une structure de contrôle (Saboya, 2010) fondée sur les processus de visualisation mathématique et sur la découverte de relations entre les nombres associés à chaque nombre triangulaire, qui déclenchera en principe, un processus de généralisation qui pourra sensibiliser les élèves à la contradiction en mathématiques.

Premier cas

Représentation iconique et nombres	**Représentation arithmétique**
	1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11

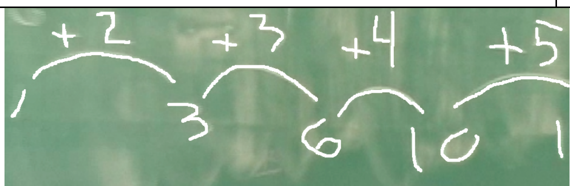
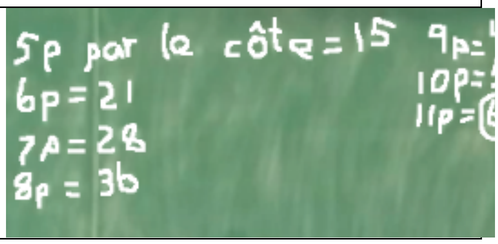
Dans ce premier cas, les élèves pour le calcul de T_{11} ont utilisé leurs représentations iconiques pour les trois premiers nombres et sont passés au calcul arithmétique. Nous pouvons classer cette approche comme visuelle-arithmétique (visualisation dans le sens Kuzniak-Duval). Dans l'expression arithmétique donnée, on peut constater que les élèves possèdent une notion de relation entre chaque nombre triangulaire, qui est liée à augmenter « le nombre des boules » d'une unité par rapport au nombre triangulaire précédent.

Deuxième cas

Représentation iconique généralisée	**Représentation arithmétique**
	11+10+9+8+7+5+4+3+2+1

Dans ce cas, un processus de double abstraction a été mis en place autour d'une stratégie *visuelle-arithmétique*. La construction des triangles précédents n'a pas été utilisée dans cette stratégie. On commence avec le nombre triangulaire demandé et on lui associe une expression arithmétique.

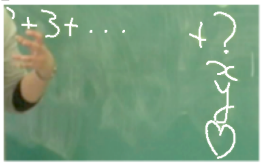
Troisième cas

Représentation non iconique	**Représentation itérative**
	

Un élève a proposé cette représentation comme représentation intermédiaire. La deuxième est plus pratique parce que, par itération, on obtient la valeur du nombre triangulaire. L'élève et son équipe ont passé par une représentation figurale (les boules) vers une représentation iconique (les sauts) et ensuite, vers une représentation itérative. En fait, cette équipe a produit un processus de visualisation d'après Kuzniak-Duval et une construction signe-fonction dans le sens d'Eco (1988). Et si l'on prend en compte ces deux processus, un à côté de l'autre, nous avons une représentation spontanée non officielle dans le sens de Hitt (2006).

Une fois que le nombre triangulaire 11 a été construit, la chercheuse (Ch_2) a demandé aux élèves de lui expliquer comment calculer le nombre triangulaire 83:

Dialogue entre Ch_2 et élèves	**Interprétation**
Élève 2 : Tu additionnes 1+2+3+4+5+6 etc., jusqu'à ce que tu arrives à ton nombre. Puis la réponse ben, c'est le… ta réponse c'est le nombre triangulaire. Ch_2 : Ok. Donc là je ferais 1+2+3+… Élève 2 : …4+5+6… Ch_2 : jusqu'à mon nombre.	Addition de 1+2+3+ ... +83

Élève 1 : etcétéra, jusqu'à ton nombre. Tu additionnes tout ça et ça te donne c'est ton nombre triangulaire.	
Ch_2 : Comment je vais l'écrire mon nombre que je connais pas ? Élève 2 : Point d'interrogation ? Ch_2 : Point d'interrogation ? Vous êtes tous d'accord avec ça ? Oui ? Ça, ça va être mon nombre que je connais pas ? Élève 2 Plus x.	les élèves décrivent le dernier nombre en mots. Ch_2 répète la question et les élèves répètent sa réponse.
Élève 3 : Oui plus x ? Ch_2 : x ? Est-ce que je peux mettre autre chose ? Oui ? (Pointe un élève) Élève 4 : Ben n'importe quelle lettre. Ch_2 : N'importe quelle lettre oui. y ? Un cœur ? Est-ce qu'on peut mettre un cœur ? G4-1 : On peut mettre n'importe quoi, qui n'est pas un chiffre.	Ch_2 exprime la question de façon plus directe. Les élèves ont proposé plusieurs symbolismes sans que cela leur cause un problème.  Même la proposition d'un cœur de la part de Ch_2 n'a pas dérangé les élèves.

Dans ce dialogue, nous pensons que l'intervention de Ch_2 est fondamentale. Les élèves avaient une stratégie qui peut fonctionner pour calculer n'importe quel nombre triangulaire, ce qui est important est le fait de demander comment on pourrait faire pour designer « jusqu'à ton nombre ». Le signe d'interrogation semble naturel. La question de Ch_2, en demandant si tout le monde est d'accord provoque l'utilisation de la lettre *x*, ensuite *y* et finalement elle demande si elle peut utiliser un cœur (♥). Il faut signaler que ces élèves avaient utilisé une boite vide pour résoudre des équations à l'école primaire (des égalités avec des termes manquants), mais l'algèbre n'a pas été introduite à ce moment de l'expérimentation. Nous avons ainsi,

Expérience personnelle → **Expérience équipe** → **Discussion globale**

À ce premier stade de l'expérimentation, nous pouvons constater que l'intuition, la visualisation et la déduction dans le sens de Kuzniak (2011) ont été présentes dans les discussions des élèves. De plus, les processus de signification selon Eco (1988) et Radford (*Ibid.*), ont donné lieu à une évolution des représentations des élèves.

Par la suite Ch_2 relance les élèves dans la tâche en leur annonçant qu'elle est capable de calculer n'importe quel nombre triangulaire en faisant trois opérations :

> […] *Moi je vous dis qu'en trois coups*, je vous le donne votre nombre. Quel que soit le nombre que vous voulez, *en trois opérations j'arrive à vous le trouver…*

Cette affirmation, comme nous le verrons plus loin, a marqué les élèves. Ceux-ci reprennent le travail en individuel puis en équipe (selon ACODESA).

Deuxième partie de l'activité (en équipe)

6) Utilise les mêmes idées que tu as trouvées précédemment, mais cette fois-ci dans un environnement technologique (EXCEL). Voici ce que tu dois trouver:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Nombres polygonaux						
2	Position	1	2	3	4	5	
3	Triangulaire	1					
4							
5							

Que fais-tu pour trouver le 6^e, 7^e et 8^e nombres triangulaires ?

Est-il possible de calculer :

le nombre triangulaire 30 : ______________________________

le nombre triangulaire 83 : ______________________________

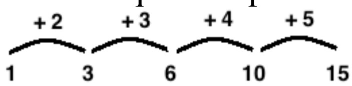
le nombre triangulaire 120 : _____________________________

Comment as-tu procédé?

Quelles sont les limitations et les possibilités de cette façon de procéder?

Donne les opérations à faire pour calculer n'importe quel nombre triangulaire.

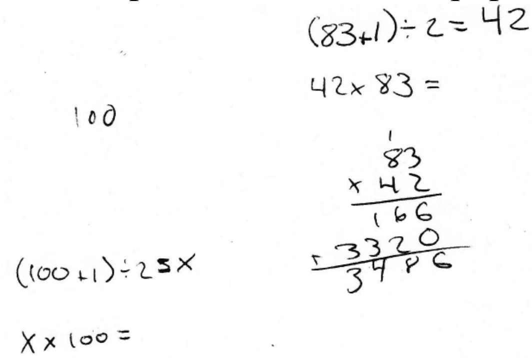
Travail en équipe 2^e étape de l'activité

Dialogue Ch_2 et élèves	Interprétation
Ch_2 : C'est intéressant, vous avez deux stratégies différentes. Les élèves parlent entre eux G4-1 : Tu préfères faire comme ça ou comme ça ? *(Il montre sa copie et la compare à celle des filles)*. G4-3/G4-2 : Ah ben… G4-1 : Ah ben. Bon regarde, laisse tomber çaaaa. G4-2 : Je n'ai pas envie d'abandonner mon dessin, je n'abandonne pas mon dessin. G4-1. Bon d'accord continue à dessiner et en même temps tu m'écoutes d'accord ? G4-2. Bon d'accord. 52' [Explication de G4-1 à G4-2 et G4-3 sur le résultat avec Excel]	C'est lui qui était passé au tableau  Ici l'élève utilise un ton en laissant comprendre que leur stratégie de dessiner est ennuyeuse. La réponse de l'autre élève est déterminante. Alors, lui utilise un ton amical pour la convaincre, et elle accepte d'écouter sa proposition. Finalement, il convainc les deux filles de suivre sa stratégie.

Dans notre méthodologie le travail collaboratif est très important. L'évolution des représentations fonctionnelles et leurs produits suivent un chemin naturel et les représentations institutionnelles ne sont pas imposées par l'enseignant. Cette approche par ACODESA montre que la construction des signes passe par l'expérience selon Kuzniak (2011), dans un processus lié à la notion de signe-fonction d'Eco (1988).

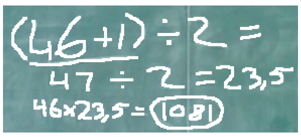
À un moment, G4-1 demande à Ch_1 s'il doit attendre le groupe pour continuer. Ch_1 l'encourage à continuer et à utiliser POLY pour vérifier ses conjectures. G4-1 fait signe à Ch_1 pour lui dire qu'il a trouvé une stratégie. G4-1 explique au chercheur qu'il prend par exemple le T_{101} (« exemple générique » dans le sens de Balacheff, 1987). Il ajoute 1, il divise par 2 et il multiplie le résultat par 101. Ch_1 lui dit d'essayer sa stratégie avec T_{100}. Ce à quoi l'élève répond qu'il va ajouter 1 puis diviser par 2. G4-1 s'arrête alors dans ses explications pour s'exclamer « Oh, on arrive à un nombre à virgule !! ». Il se dirige alors vers G4-2 (membre de son équipe) : « G4-2, est-ce que ça a du sens avec un nombre à virgule ? ». Ch_1 s'adresse alors à l'équipe et leur demande de discuter ensemble la stratégie, de la vérifier avec POLY et de décrire dans leur questionnaire cette stratégie.

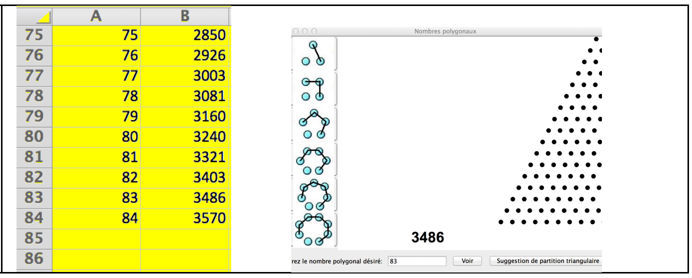
Voici la production de cette équipe :



Discussion en grand groupe

Il restait quelques minutes pour finir la session et Ch_2 demande une discussion en grand groupe. Ch_2 désigne G4-1 qui lève la main pour passer au tableau.

Dialogue entre Ch_2 et élèves	Interprétation
G4-1 : Le nombre triangulaire pour 46. 	Étonnant ! Il a choisi un nombre pair.
Ch_2 : Pour 46. Est-ce que ça marche ? … Élèves : oui, 1081. Ch_2 : C'est 1081 ? Est-ce que tu peux nous expliquer maintenant comment tu as fait ? Ben de façon générale pourquoi…? G4-1 : Comment je l'ai trouvé ? Ch_1 : Pour n'importe quel nombre.	
G4-1 : Comment je l'ai trouvé ou pourquoi ça fait ça ? Ch_2 : Ben comment tu as trouvé ça ? Pourquoi +1 ? Pourquoi divisé par 2 ? Pourquoi ensuite tu multiplies ? G4-1 : Ben en fait c'est que j'ai regardé pour	Il avait calculé en colonne de façon itérative avec Excel jusqu'à T_{84} et il a utilisé POLY.

le nombre 83, ben avec l'ordi, sur le programme, j'ai regardé le nombre 83 je crois que ça donnait 3486, ici. Et ensuite j'ai regardé pour 84. …	

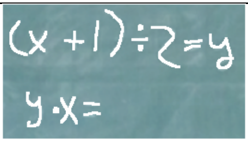
Quand Ch_1 lui a demandé de trouver T_{100}, l'élève arrive à un nombre à virgule en calculant 101/2 et s'arrête en pensant que quelque chose cloche. Par la suite, l'élève utilise POLY pour vérifier son résultat et voit que sa stratégie fonctionne.

On peut remarquer une évolution de la notation lors du processus de construction de l'algorithme en termes algébriques. Quand l'élève passe au tableau, il choisit T_{46} et trouve le résultat. Ch_2 lui demande d'expliquer comment il a trouvé l'algorithme, il mentionne que c'est avec T_{83} et T_{84} (résultats qu'il a trouvés avec Excel). Il ne précise pas aux autres élèves qu'il avait vérifié sa conjecture avec POLY. En résumé on peut dire que :

- G4-1 sous un processus de visualisation (Kuzniak-Duval), a trouvé une relation arithmétique avec Excel,
- La démarche de G4-1 est de diviser le résultat T_{83}=3486 par 83, peut-être motivée par le fait qu'il cherche une relation (ce qu'il mentionne en entrevue), il a obtenu 42 et il a alors établi une relation avec 84,
- L'élève a mentionné qu'il a une stratégie pour calculer un nombre triangulaire *« quelconque »* (triangulaire impair),
- Ch_1 a demandé G4-1 de calculer T_{100}. G4-1 a été déconcerté par l'obtention d'un nombre à virgule,
- G4-1 a utilisé POLY comme un artéfact de vérification,
- G4-1 dans son cahier a écrit: $\begin{array}{l}(100+1)\div 2 = x\\ x\times 100 =\end{array}$. Dans l'entrevue, G4-1 affirme que l'obtention d'un nombre à virgule le dérangeait.

La cloche sonne et Ch_2 mentionne :

Dialogue entre Ch_2 et élèves	**Interprétation**
Ch_2 : Wow. Bon ça prendrait un peu de temps là pour regarder vraiment, comprendre tout tout tout ce qu'il a fait. Autre élève : Mais c'est quoi la formule facile que vous faisiez ? Ch_2 : Ben c'est ça que je voulais vous montrer, qu'on n'a pas eu le temps de vous montrer. G4-1 : Je peux l'écrire, je la connais. Ch_2 : Oui ? Ch_2 : Écris là ! G4-1 :	Avec cette question, on voit que l'affirmation de Ch_2 sur la possibilité de calculer en « trois coups n'importe quel nombre triangulaire ! » est restée dans la tête des élèves. L'élève réagit en disant qu'il sait. Ch_2 lui demande d'écrire la formule. Cette fois-ci, et de façon spontanée face au tableau, G4-1 utilise les variables ***x*** et ***y*** pour exprimer sa formule.

 [brouhaha pendant que l'élève écrit au tableau] G4-1 : Moi je suis content là ! Ch_2 : x+1…Donc x c'est ton nombre triangulaire ? G4-1 : x c'est pas mon nombre triangulaire c'est mon nombre de base, +1, divisé en 2, ça va donner y. y fois x donne le nombre triangulaire.	L'explication qu'il donne est liée à l'idée géométrique (il parle du nombre des points sur la base du triangle).

4^e^ étape. L'autoréflexion.

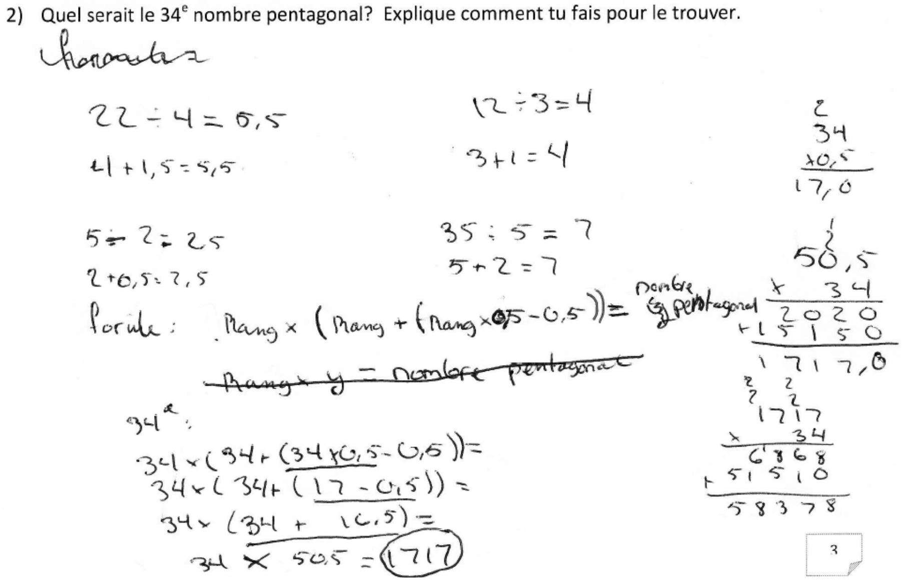
Avant l'autoréflexion, une fois analysées les productions des élèves, on a décidé de faire une entrevue à G4-1 (15 jours après). Et 45 jours après l'expérimentation, nous avons demandé aux élèves de refaire l'activité sur les nombres triangulaires de façon individuelle. Nous avons ajouté un défi à G4-1 sur les nombres pentagonaux (voir annexe).

8 élèves sur 13 qui ont suivi l'expérimentation ont vécu l'étape d'autoréflexion.

- Deux élèves (dont une de l'équipe G4) ont eu recours au dessin de points pour répondre aux questions. Ils n'ont pas pu calculer le T_{11}.
- Cinq élèves ont utilisé l'approche d'addition arithmétique et des sauts. Il est intéressant de constater qu'ils se sont appropriés la stratégie de G4-1. Un des élèves a même utilisé: ***La somme du chiffre précédent + le nombre triangulaire*** [la position] (similaire au résultat de Healy & Sutherland). Par ailleurs, une élève d'une autre équipe a écrit l'expression: ***(rang + 1) ÷ 2 × rang = nombre triangulaire***. De plus, elle a ajouté que la formule *peut seulement servir pour les nombres triangulaires impairs*. Ce résultat est selon nous le produit d'un travail dans un milieu socioculturel. Nous pouvons ainsi constater que cette élève a retenu pendant 5 semaines le résultat et dans un processus d'autoréflexion elle a pu reconstruire et améliorer le résultat discuté en grand groupe.

  • Surprise ! L'élève G4-1 trouve un résultat erroné pour T_{11} en utilisant une formule erronée, par contre, pour le défi, sa stratégie il l'a bien utilisée pour les nombres pentagonaux.

Au calcul du nombre pentagonal 34 (P_{34}), G4-1 a écrit:



2) Quel serait le 34^e nombre pentagonal? Explique comment tu fais pour le trouver.

22 ÷ 4 = 5,5
4 + 1,5 = 5,5

5 ÷ 2 = 2,5
2 + 0,5 = 2,5

12 ÷ 3 = 4
3 + 1 = 4

35 : 5 = 7
5 + 2 = 7

Formule : Rang × (Rang + (Rang × 0,5 − 0,5)) = nombre pentagonal

~~Rang × y = nombre pentagonal~~

34^e :
34 × (34 + (34 × 0,5 − 0,5)) =
34 × (34 + (17 − 0,5)) =
34 × (34 + 16,5) =
34 × 50,5 = 1717

34 × 0,5 = 17,0
50,5 × 34 : 2020 + 15150 = 1717,0
1717 × 34 : 6868 + 51510 = 58378

$$rang \times \left(rang + \left(rang \times 0{,}5 - 0{,}5\right)\right) = nombre\ pentagonal$$

Le processus d'autoréflexion est une phase importante d'ACODESA. D'un côté, nous pouvons constater que certains élèves ont régressé par rapport à ce qu'ils avaient produit pendant l'expérimentation. En effet, ceux-ci sont revenus au dessin de boules pour répondre aux questions posées et n'ont pas utilisé de stratégie plus élaborée. D'un autre côté, on dénombre plus des élèves qui adoptent la stratégie des sauts pour calculer les nombres triangulaires demandés (visualisation dans le sens de Duval).

En résumé, les résultats de l'expérimentation dans la phase d'autoréflexion montrent que :

- Le consensus est éphémère. Après 45 jours quelques élèves reviennent à la stratégie initialement utilisée,
- Une fragilité des connaissances (l'élève G4-1 a écrit une formule pour les nombres triangulaires dont il se « souvenait », mais il ne l'a pas vérifiée et ne s'est donc pas aperçu qu'elle était erronée),
- Construction pour quelques élèves d'une structure cognitive générale qui permet de structurer leurs actions face à la tâche (un *habitus*) dans le sens de Bourdieu.
- Nous avons pu constater que les représentations des élèves sont loin des représentations institutionnelles que l'on enseigne dans un cours magistral.

Conclusions

De notre point de vue, le mouvement « Early algebra » génère deux tendances. L'une liée à la construction d'une voie qui pourrait amener les élèves le plus vites possible vers l'algèbre (voir p.e. Carraher, Schliemann & Brizuela, 2006). Dans ce document, nous avons voulu présenter une nouvelle approche pour alimenter la discussion autour de la transition de l'arithmétique à l'algèbre, qui est le fait de

« ***renforcer l'intersection existante entre l'arithmétique et l'algèbre*** ». Si on suit le modèle proposé par Kuzniak nous avons besoin de construire un plan cognitif lié à la ***PA-A***, qui précède au plan cognitif lié à la ***PA***. Ainsi, nous proposons que dans la ***PA-A*** et aussi dans l'***ETA-A***, nous devions compter avec :

I) Visualisation mathématique liée à la production de représentations:

- Reconnaissance d'un pattern,
- Visualisation associée à un algorithme arithmétique ou un processus arithmético-géométrique,
- Visualisation d'un algorithme général arithmético-algébrique.

II) Structure cognitive de contrôle:

- L'activité devrait être présentée de façon à ce que les conjectures des élèves puissent être corroborées,
- L'arithmétique comme moyen de rétroaction permanente. Par exemple, dans l'étape d'autoréflexion, l'élève qui n'a pas vérifié sa nouvelle proposition. Il est ainsi nécessaire de promouvoir un processus de réversibilité entre l'algèbre et l'arithmétique.

En résumé, avec l'approche présentée dans ce texte, nous voulons que les élèves puissent s'approprier la notion de variable (avant de construire la notion d'indéterminée, d'inconnue ou de paramètre), qu'ils puissent généraliser en mathématiques et en même temps qu'ils développent une structure de contrôle (dans le sens de Saboya, 2010) sur l'activité mathématique en jeu (celle-ci pourrait jouer un rôle important pour le développement d'une sensibilité à la contradiction en mathématiques).

REFERENCES

Artigue, M. (2012). Enseignement et apprentissage de l'algèbre. Consulté le 16 janvier 2013 en http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.

Blanton, M-L. & Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 5-23). Springer.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In: *The ideas of algebra, K-I2, 1988 NCTM Yearbook* (pp. 20–32). Reston, Virginia: NCTM.

Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris, Éditions de Minuit.

Cai J. & Knuth E. (Eds., 2011). *Early algebraization : A global Dialogue from Multiple Perspectives*. New York, NY: Springer.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Combier G., Guillaume J.-C. et Pressiat A. (1996). Les débuts de l'algèbre au collège, Au pied de la lettre ! Paris : Éditions INRP.

Cortés C. & Hitt F. (2012). POLY. Applet pour la construction des nombres polygonaux. UMSNH.

Coulange, L. et Grugeon B. (2008). Pratiques enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre. *Petit x*, 78, 5-23.

Chevalard, Y. (1980). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x,* No. 5, 51-94.

Duval R. (2003). Voir en mathématiques. In F. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, A. Rivera & S. Ursini (Eds.), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual* (pp. 19-50). México: Fondo de Cultura Económica.

Eco U. (1988). *Le signe. Introduction à un concept et à son histoire*. Bruxelles : Labor.

Filloy, E & Rojano, T. (1989). Solving equations : The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No. 2.

Healy L. & Sutherland R. (1990). The use of spreadsheets within the mathematics classroom. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 21, No. 6, 847-862.

Hitt F. (1994). Visualization, anchorage, availability and natural image: polygonal numbers in computer environments. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, Vol. 25, No. 3, 447-455.

Hitt, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Strasbourg, Vol. 11, pp. 253-268.

Hitt, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Strasbourg, Vol. 18, pp. 9-27.

Hitt, F. and González-Martín, A. (in press). Covariation between variables in a modelling process : The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*.

Hudement C. et Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.

Kaput, J. (2000). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power By "Algebrafying" the K-12 Curriculum. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Dartmouth, MA. (ERIC Service No. ED 441 664).

Karsenty R. (2003). What adults remember from their high school mathematics ? The case of linear functions. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 51, pp 117-144.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester, Jr., (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 16, pp. 9-24.

Radford L. (2011). Grade 2 students' non – symbolic algebraic thinking. In J. Cai & E. Knuth (eds.) *Early Algebrization, Advances in Mathematics Education* (pp. 303-322). Dordrecht: Kluwer.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignement de mathématiques. In Vanderbrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45-68), Toulouse : Octarès.

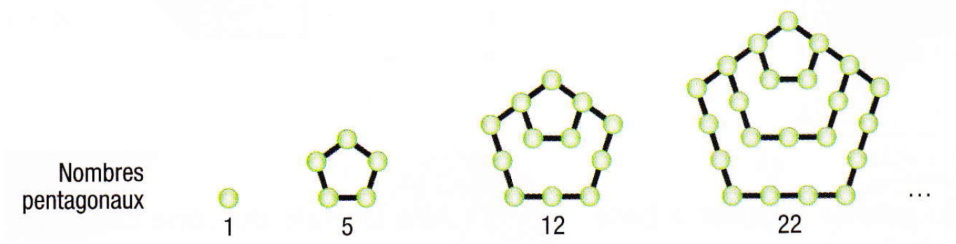
Saboya M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat non publiée, Université du Québec à Montréal.

Thompson P. (2002). Some remarks on conventions and representations. In F. Hitt (ed.), *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico.

Annexe : Nombres pentagonaux

Et maintenant un petit défi.... Les nombres pentagonaux!

Voici les 4 premiers nombres pentagonaux :



1) Peux-tu trouver le cinquième nombre pentagonal? Explique comment tu fais pour le trouver.
2) Quel serait le 34 nombre pentagonal? Explique comment tu fais pour le trouver.
3) Et pour le calcul de n'importe quel nombre pentagonal?
4) Y aurait-il une façon simple de calculer n'importe quel nombre pentagonal?

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE LAS SOLUCIONES DE LAS DESIGUALDADES LINEALES EN UNA SOLA VARIABLE[12]

Rosa Elvira Páez Murillo, Universidad Autónoma de la Ciudad de México

Laurent Vivier, Laboratoire André Revuz – Université Paris Diderot

Con el objetivo de estudiar las representaciones semióticas que utilizan los estudiantes a nivel superior en el tratamiento de desigualdades lineales en una variable, diseñamos una actividad didáctica en la cual se solicitan conversiones entre representaciones. El análisis que realizamos es de corte cualitativo, fundamentado en la teoría de registros de representaciones semióticas (Duval, 1999), a un grupo de 14 estudiantes de ingeniería. En los resultados obtenidos, detectamos signos y representaciones espontáneas que utilizan los estudiantes en el proceso de conciliación entre representaciones.

Palabras claves: *Representaciones semióticas, visualización, desigualdades lineales.*

1. INTRODUCCIÓN

Este estudio corresponde al proyecto de investigación: *Situaciones en contexto y uso del software libre como apoyo al desarrollo del pensamiento matemático: Covariación y función*. Presentamos las respuestas de un grupo de 14 estudiantes de ingeniería del curso de Cálculo Diferencial de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México. Para la primera parte del proyecto, relacionada específicamente con los preconceptos necesarios para la construcción del concepto de función, diseñamos tres actividades didácticas que nos permitieron indagar a profundidad sobre los conocimientos básicos que tienen los estudiantes acerca de los números reales, los intervalos, las desigualdades y el valor absoluto.

Nos interesa exhibir algunas de las representaciones semióticas que utilizan los estudiantes, identificados como A1, A2,… a A14, para mostrar el conjunto solución de desigualdades de primer grado, ya sea desarrollando una tarea de tratamiento o de conversión, analizando a su vez el fenómeno de congruencia entre representaciones de registros de representación semiótica (Duval, 1999).

En la siguiente sección, detallamos los registros semióticos principales del estudio. El análisis de la información se encuentra en las tres secciones siguientes, con un estudio característico de las conversiones en las secciones 3 y 4, y un estudio particular para la unión y la intersección en la sección 5.

[12]Este estudio es una parte del Proyecto PI 2010-45 financiado por la Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM) y el Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal (ICyTDF).

2. REPRESENTACIÓN[13] DE LAS SOLUCIONES DE DESIGUALDADES

El objetivo de esta sección es posicionar los registros de representación (Duval, 1999) necesarios para el estudio. Nos restringimos aquí a los siguientes cuatro tipos de desigualdades[14], siendo f, g, y h funciones afines y a un número real:

$f(x)<g(x)$ cuyo conjunto solución es un intervalo no acotado o vacío. Aquí no hay necesidad de una unión o intersección entre intervalos.

$f(x)<g(x)<h(x)$ cuyo conjunto solución es un intervalo, de cualquier forma posible, que resulta de la intersección de dos intervalos del tipo anteriormente mencionado. Sin embargo, la intersección está implícita en la desigualdad doble y no es necesario hacerla explícita para la resolución.

$|f(x)|<a$ cuyo conjunto solución es, cuando f no es constante, un intervalo acotado que puede ser vacío, dependiendo del signo de a. Se puede transformar la desigualdad en una de segundo grado y utilizar los conocimientos de polinomios de segundo grado para su resolución. También podemos interpretar la desigualdad en términos de distancia sobre la recta numérica: $\text{dist}(f(x),0)<a$, la cual conduce directamente a la desigualdad doble $-a<f(x)<a$. Finalmente, si se utiliza la definición de valor absoluto, es necesario utilizar las conjunciones “y” y “o” ($f(x)\geq 0$ y $f(x)<a$) o ($f(x)\leq 0$ y $-f(x)<a$), las cuales pueden estar contempladas en la desigualdad doble del tipo precedente.

$|f(x)|>a$ cuya solución es, cuando f no es constante, la reunión de dos intervalos no acotados, no vacíos y disjuntos, excepto si el conjunto solución es **R**. Las mismas transformaciones anteriormente mencionadas tienen cabida. Sin embargo, es posible no utilizar la conjunción “y”, siendo necesario utilizar la conjunción “o” para escribir ($f(x)<-a$ o $f(x)>a$). Igualmente es posible buscar todos los valores de x que no satisfacen la ecuación y, por lo tanto, llegar a una desigualdad de tipo III antes de acudir a buscar el conjunto complementario.

Para nuestro caso, las desigualdades pueden ser expresadas en el registro algebraico (RA) y su solución también se pueden representar en este registro, en el registro conjuntista (RC), en el registro gráfico (RG), o en el registro del lenguaje natural (RN), y también en el registro de intervalos (RI). Veamos un ejemplo con la desigualdad $|x|\leq 3$:

RA	RC	RI	RN	RG
$-3\leq x\leq 3$	$\{x\in\mathbf{R} \mid -3\leq x\leq 3\}$	[-3,3]	Los números entre -3 y 3	

Figura 1. Diferentes representaciones del conjunto de soluciones de $|x|\leq 3$

[13] No explicitamos los registros numéricos.

[14] Para efectos de simplificar la presentación sólo utilizamos <. Tampoco discutimos en esta sección, el carácter de abierto y cerrado de los conjuntos.

2.1 Descripción de los registros

En este apartado se describen los principales registros[15] del estudio, centrándonos principalmente en la congruencia entre representaciones en la que utilizamos los tres criterios de congruencia de Duval (1999, p. 16):

CC1: correspondencia semántica entre las unidades significantes de las dos representaciones.

CC2: igual orden posible de aprehensión de estas unidades.

CC3: convertir una unidad significante en la representación de partida en una sola unidad significante en la representación de llegada.

2.1.1 El registro conjuntista RC

El registro RC se refiere al uso principalmente de los signos[16] "{" y "}". Además de la utilización de la propiedad característica de conjuntos con desigualdades expresada en RA (*ver* Figura 1), se puede representar un conjunto por extensión como {3.4} y {3,4} en vez de escribir $\{x\in\mathbf{R} \mid x=3.4\}$ y $\{x\in\mathbf{R} \mid x=3 \text{ o } x=4\}$. Para la unión y la intersección, es posible utilizar dos tipos de representación como: $\{x\in\mathbf{R} \mid x\leq 2 \text{ y } x\leq 1\} = \{x\in\mathbf{R} \mid x\leq 2\} \cap \{x\in\mathbf{R} \mid x\leq 1\}$ y $\{x\in\mathbf{R} \mid x\leq 2 \text{ o } x\leq 1\} = \{x\in\mathbf{R} \mid x\leq 2\} \cup \{x\in\mathbf{R} \mid x\leq 1\}$.

Cabe señalar que hay dos tipos de signos: < y ≤, así como > y ≥, dando esto lugar a variaciones cognitivas neutras (Duval, 1999, p. 74) como "$x<5$" y "5>" en RA y por lo tanto también en RC.

Dos conjuntos específicos[17] tienen representaciones especiales: **R** y Ø. Podemos escribir { } para Ø pero no $\{x\in\mathbf{R} \mid \ \}$ para **R**. Por último, el signo "-" se utiliza para representar el complemento de un conjunto como es el caso de $\mathbf{R}-\{0\}$.

La utilización del registro algebraico RA, el registro usual del álgebra, con los tratamientos habituales, incluyendo el valor absoluto, para representar las soluciones de las desigualdades, como se muestra en la Figura 1, es en realidad un conjunto porque estamos considerando todos los números que las satisfacen. Es decir, si aún los símbolos "$\{x\in\mathbf{R} \mid \ \}$" no aparecen, de todos modos es una expresión en RC. Por lo que, sólo mencionaremos RA para las resoluciones que involucran explícitamente los tratamientos algebraicos.

Algunas de las tareas planteadas en la actividad didáctica, no son como tal de conversión (ver Anexo 1, pregunta 34, 35, 36, 39, 42, 44), ya que es relacionar la desigualdad en RA (excepto la 35, que está en RN) con el conjunto solución. Pero desde el punto de vista teórico, esto no tiene mayor importancia y en nuestro análisis,

---

[15] Cumpliendo las tres actividades cognitivas que se requieren para considerarse como registro (Duval, 1999, p. 29).

[16] No consideramos los signos $\in$, $\notin$, $\subset$ y $\not\subset$ porque no se utilizan en general para representar el conjunto solución, excepto $\in$, pero su uso es sobretodo retórico.

[17] También se podría añadir $\mathbf{R}^*$, $\mathbf{R}^-$ y $\mathbf{R}^+$.

tratamos estas tareas como si fueran de conversión[18].

2.1.2 El registro de intervalo RI

Este registro es también utilizado para representar soluciones de desigualdades. Se utilizan los signos[19] "[ ]" y "( )". Pero a diferencia de otros registros, es necesario introducir el signo "∞", que no representa un numero, para escribir los intervalos no acotados con "(- ∞" y "∞)". Además de los intervalos, se considera en este registro RI las uniones finitas de intervalos. Los signos ∪ e ∩ se utilizan como en RC. **R** también puede ser representado por (-∞,∞) y Ø no puede ser escrito de esta manera[20].

Este registro está cerca del registro utilizado en la geometría para escribir los segmentos y las semi-rectas. Sin embargo, el número a la izquierda es menor que el numero a la derecha, es decir, escribimos [4,8] y no [8,4], mientras que geométricamente escribimos [AB] también como [BA]. Por otra parte, $x>1$ y $1<x$ son semánticamente idénticos en RC, mientras que en RI sólo podemos escribir (1,∞), estando el orden de **R** implícitamente percibido de izquierda a derecha para los intervalos que favorece la congruencia como con $a<x<b$ y (a,b). En términos de congruencia: $x>1$ y (1,∞) no son congruentes (CC1 y CC2) y tampoco lo son $1<x$ y (1,∞) (CC1).

2.1.3 El registro gráfico RG

El registro gráfico (RG) está basado en una recta geométrica que representa **R.** Se pueden elegir muchas variables, como el origen y la orientación, pero por lo general, la recta es *horizontal* y orientada de izquierda a derecha. Encontramos, como en RI, la percepción del orden de izquierda a derecha. Utilizamos específicamente los signos "●" y "○" para marcar los extremos de los intervalos[21], respectivamente incluidos o no incluidos, y los signos "●", "|" o "×" para indicar un punto. Es necesario representar por una línea, color o un trazo más grueso, el conjunto considerado (*ver* Figura 1). Por defecto, la presencia de varios conjuntos es considerada en RG como una unión. La intersección se debe identificar específicamente, pero ninguna marca institucional está disponible. Los registros RG y RI tienen características muy similares, sobre todo el orden (CC2), a excepción de la unión, la intersección e ∞.

2.1.4 El registro del lenguaje natural RN

El registro RN del lenguaje natural permite evidentemente representar los

---

[18] Por ejemplo, la pregunta 34 está considerada como una tarea de conversión de RC a RI y RG.

[19] Esto depende del país, por ejemplo, en Francia se utiliza únicamente [y] como en [3,4[para [3,4).

[20] Podríamos escribir, por ejemplo, [4,4) o (2,2) pero esto sería muy artificial.

[21] También se pueden utilizar signos [ ] y ( ) en un enlace directo con RI.

conjuntos mediante la descripción, con las palabras habituales. Esto puede ser por ejemplo, la manera de expresar oralmente los conjuntos en los otros registros, pero también podemos decir: "todos los números...", como en la Figura 1. El conjunto **R** puede ser representado por "todos los números reales" y el conjunto Ø también puede ser representado por "conjunto vacío", o haciendo referencia al conjunto solución como "sin solución". En el lenguaje natural, al momento de expresar el enunciado, el orden no importa, por ejemplo, podemos decir "todos los números entre 1/2 y 1/3", siempre y cuando en RI no se escriba [1/2,1/3], porque 1/3<1/2. Los cuatro signos >, ≥, < y ≤ están bien definidos en RN, con "mayor que", "mayor o igual que", etc. Por supuesto, podemos utilizar las conjunciones "y" y "o". Nótese también el uso de términos específicos como "positivo" y "negativo".

3. UNIDADES SIGNIFICANTES EN EL BLOQUE (RI, RG)

En esta primera parte del análisis nos concentramos en identificar las unidades significantes para los estudiantes, dentro de la representación de intervalos, en los registros RI y RG, así como en su conversión. Para ello, analizamos algunas de las preguntas propuestas en la actividad 0.3 (ver Anexo 1).

3.1 Del registro de intervalo al registro gráfico (RI→RG)

Hay un primer grupo de preguntas que concierne a intervalos acotados. Aquí estudiamos la utilización de los signos "()" y "[]" del registro RI en el registro RG como también los signos " ●" y "○". De las respuestas podemos establecer dos categorías. En la primera están los estudiantes que ubican los extremos y demarcan el intervalo subrayándolo con una línea, y en la categoría dos están los que sólo marcan los extremos. Luego, dentro de cada categoría tenemos cuatro casos que dependen de los signos utilizados:

RI→RG	**Conservación de los signos: "( )" y/o "[ ]"**	**Utilización de los signos: "●" y/o "○"**	**Utilización de los dos tipos de signos a la vez: "( )[ ]" y "●○"**	**Utilización de otros signos**
Categoría Uno: Intervalo demarcado con los extremos y una línea		A1, A4, A11	A6	A11: signo "|"
Categoría Dos: Intervalo demarcado sólo con los extremos (sin línea)	A2, A3, A7, A14	A5, A8	A9	A10: signo "|"

Tabla 1: Intervalos acotados, ítems 9 a 12

Un segundo grupo de preguntas conciernen a intervalos no acotados. Por lo que en RI, como ya se mencionó, se exige la introducción del símbolo ∞. La clasificación de las respuestas de los estudiantes es similar a la anteriormente presentada, sólo con observaciones específicas para algunos estudiantes. Veamos entonces la agrupación y sus observaciones:

RI→RG	Conservación de los signos: “( )” y/o “[ ]”	Utilización de los signos « ● » y/o « ○ »	Utilización de los dos tipos de signos a la vez: “( )[ ]” y “●○”
Categoría Uno: Intervalo demarcado con el extremo acotado y una línea		A1, A4, A5, A11	A6, A9; A3: Añade “←”
Categoría Dos: Intervalo demarcado sólo con el extremo acotado (sin línea)	A2, A10. A7 y A14: Añaden los símbolos ∞ o el -∞ (*ver* Figura 2)	A8	

Tabla 2: Intervalos no acotados, ítems 13 a 16

Tenemos un grupo de estudiantes (A3, A5 y A9) en el que concilian las dos representaciones utilizando el subrayado de dicho intervalo (ya que no les parece importante hacerlo para los intervalos acotados) y otro grupo (A3, A7, A14) en el que añaden símbolos como “←” , “∞)” y “(-∞”. La adición de estos signos es un índice de que los estudiantes sienten la ambigüedad de sus representaciones gráficas en el caso de un intervalo no acotado. Por otra parte, A3, A5 y A9 resuelven este problema de ambigüedad realizando el subrayado, el cual no habían realizado en el caso de un intervalo acotado. Aquí identificamos el criterio CC1 que no es satisfecho por el signo ∞, pero eso no parece perturbar a los estudiantes que se adaptan.

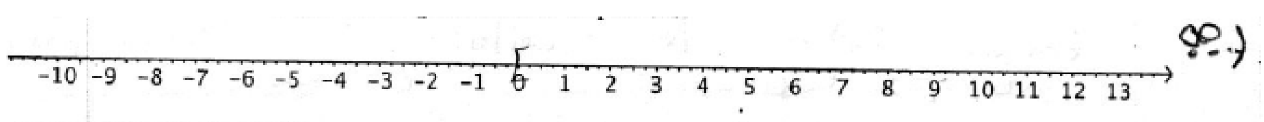


Figura 2. Respuesta estudiante A7

En este primer bloque de preguntas, 9 a 12, se puede observar una falta en CC1 y/o CC3 pero no es problemática. Implícitamente, el intervalo está dentro los dos *valores*: no se necesita marcar la línea porque se añaden signos de RI en RG. De hecho, sólo A8 para los intervalos no acotados da respuestas ambiguas. Notamos también que el uso de (,), [y] en RG refuerza la congruencia entre las representaciones.

Después de estos primeros ítems, mostramos ahora las respuestas de los estudiantes en tareas de conversiones en contextos ligeramente diferentes: ítems 17i, 17ii, 18i, 18ii, 19i y 19iv. En algunas de estas preguntas, se les solicita también una respuesta en RC, pero suponemos que esto tiene poca influencia en la conversión

I→G debido a la proximidad de RI y RG. Se les proporcionó un ejemplo modelo para las preguntas 17 y 18, en el cual el intervalo se demarca con un trazo más grueso.

La clasificación que a continuación mostramos es similar al inciso anterior. Agrupamos en la Tabla 3 los intervalos acotados y en la Tabla 4 los intervalos no acotados.

RI→RG	**Conservación de los signos: “( )” y/o “[ ]”**	**Utilización de los otros signos: “●” y/o “○ ”**	**Utilización de los dos tipos de signos a la vez: “( )[ ]” y “●○ ”**
Categoría Uno: Intervalo demarcado con los extremos y una línea		A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A11, A12, A13, A14	A9
Categoría Dos: Intervalo demarcado sólo con los extremos (sin línea)		A1, A10	

Tabla 3: Intervalos acotados, ítems 17i, 17ii, 19i y 19iv

RI→RG	**Conservación de los signos: “( )” y/o “[ ]”**	**Utilización de los otros signos “●” y/o “○”**	**Utilización de los dos tipos de signos a la vez: “( )[ ]” y “●○”**
Categoría Uno: Intervalo demarcado el extremo acotado y una línea		A1, A2, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14. A3, A4: Añade “←”,	
Categoría Dos: Intervalo demarcado sólo con el extremo acotado (sin línea)		A10	

Tabla 4: Intervalos no acotados, ítems 18i y 18ii

Un aspecto que resalta en las preguntas de intervalos no acotados es que aquí no hubo la inclusión del símbolo ∞, el cual apareció espontáneamente en el grupo de preguntas de la 13 a la 16. Tampoco hubo estudiantes que solamente utilizaran los signos (,), [y], y la gran mayoría delineó el intervalo solicitado. Quizás todo este tipo de comportamientos se deba a la necesidad de seguir el modelo mostrado en la primera fila de las preguntas 17 y 18. El modelo de resolución cumplió su papel, ya que los estudiantes sintieron la necesidad de una representación gráfica no ambigua a los ítems 13 a 16. Es de destacar que en este último grupo sólo A10 continua no marcando la línea en el caso de los intervalos acotados. El criterio CC1 es problemático sólo para A10.

Globalmente, no encontramos mayor dificultad en la conversión de RI→RG. Lo más que se puede encontrar son pequeñas confusiones al momento de incluir o no los extremos.

3.2 Del registro gráfico al registro de intervalo (RG→RI)

Para analizar este aspecto contamos con dos preguntas: el intervalo acotado (19ii), en la cual tenemos un éxito total; situación similar ocurre para el intervalo no acotado (20i), con algunas excepciones en las que encontramos errores del estilo de incluir o no el extremo que es acotado, así como la respuesta incompleta proporcionada por el estudiante A14: "(∞,".

Aunque son pocas las preguntas para analizar la conversión de RG→RI, podemos mencionar que los errores detectados son casi similares al proceso inverso analizado en los dos incisos anteriores. En los registros RI y RG no hay variación cognitiva neutra y posiblemente esto influya en el poco grado de dificultad en las conversiones. Esto también confirma la congruencia que existe entre las representaciones de estos dos registros. Sin embargo, se observa que RI→RG es un poco menos sencilla que RG→RI en el caso de los intervalos no acotados, sin duda por el criterio CC1, para la línea y ∞.

4. CONVERSIONES (RI,RG)↔RC

Ninguno de los criterios CC1, CC2 y CC3 resultan problemáticos en una conversión entre RI y RG. Por lo tanto, en esta sección analizamos conversiones con RC.

4.1 Conversiones (RI,RG)→RC

De las preguntas 9 a la 16 se solicitó una justificación y algunos estudiantes utilizaron el registro conjuntista. Hay que mencionar que se manifestaron pequeños errores en RC, como la omisión de unos de los signos {, } o | y, de nuevo, los errores ligados a la inclusión o no de los extremos en la conversión. De aquí en adelante ya no mencionamos estos errores, pero aparecen con cierta frecuencia entre algunos de los estudiantes.

Para las preguntas 13 a 16, intervalos no acotados, hay respuestas erróneas, o inadecuadas, ligadas al signo ∞: A8 escribe $-\infty<a$, A11 escribe $0\geq x>\infty$ y $-5>x>\infty$, y A12 que acompaña la respuesta $0\leq x$ del intervalo $[0,\infty)$ con $0\leq\infty$. Se puede notar, de nuevo, la necesidad de conservar y de importar el signo ∞. Una vez más, observamos el criterio CC1, que en ciertas ocasiones va acompañado de escrituras correctas, como el caso de A12, pero que, en otras, aparece con escrituras incorrectas, como es el caso de A11.

Para los intervalos acotados encontramos un mayor éxito como es el caso de las preguntas 19i y 19iv (RI→RC) en la que 9 estudiantes responden correctamente los dos incisos. Los otros 5 responden alguna de las dos de manera correcta. Para 19ii (RG→RC) hay un éxito casi total. Para 36i y 36iv (RI→RC) tenemos 10 que responden correctamente. Hay errores como omitir uno de los símbolos "<" (o ≤) o colocarlos en posiciones contrarias, como A11 que escribe $-5\geq x<8$. También tenemos el caso de A1 que para 36iv proporciona una representación gráfica correcta pero una representación conjuntista[22] $-4\geq x\geq 1$, que correspondería a un conjunto vacío.

Las respuestas proporcionadas por los estudiantes para intervalos no acotados las clasificamos y las resumimos en la siguiente tabla en donde podemos evidenciar nuevamente la exportación del signo ∞ en las conversiones RI→RC y también de RG→RC (20i), probablemente debido a una conversión inicial en RI por: RG→RI→RC. Cabe señalar que el signo ∞ se encuentra a la derecha y el signo -∞ a la izquierda como una conservación del orden de izquierda a derecha, incluso si los signos de comparación no se utilizan correctamente (*ver* A11 en 36iii).

Pregunta	**Respuesta correcta**	**Conservación de ∞ o -∞**		**Otras respuestas**
		Respuestas de la forma $a<\infty$ (o sus respectivas variaciones)	**Respuestas de la forma $a<x<\infty$ (o sus respectivas variaciones)**	
18i	A1, A2, A3*, A4, A5, A6, A7**, A8, A11, A12, A13	A9, A14	A10,	
18ii	A1, A2, A3*, A4, A6, A7**, A11, A12, A13**,	A5, A9, A14		A8: $\{x\in R \mid 3>-x\}$ A10: $\{x\in R \mid x\leq x\}$
20i	A1, A2, A3, A4, A6, A8, A10, A12, A13, A14	A11	A5	A9***
20iii	A2, A4, A6, A7, A10, A11, A12, A13, A14		A5	A1***
36ii	A1, A2, A3, A4, A6, A9, A10, A11, A12, A14		A5, A13	A8: $-5>0$
36iii	A3, A4, A9, A10, A12, A14		A1, A5, A13	A8: $4x\leq 0$ A11: $4\leq x>\infty$

Tabla 5: Intervalos no acotados, ítems 18i, 18ii, 20i, 20iii, 36ii y 36iii

*****Utiliza términos generales.
**Omisión de los símbolos {}, ∈
***Intervalo de sentido contrario

4.2 Conversiones RC→(RI, RG)

El éxito de las preguntas 19iii y 34iii es casi total, exceptuando a algunos estudiantes que no subrayan el segmento. Por el contrario, sólo un estudiante responde correctamente a las preguntas 34ii y 34iv. La razón es, presumiblemente, la

[22] Recordemos que interpretamos las respuestas visualmente en RA como un conjunto, es decir en el registro RC.

variación cognitiva neutra en RC (que viene directamente de RA) que perturba el orden tradicional izquierda-derecha y hace la conversión entre representaciones no congruentes (criterio CC3).

Para el grupo de preguntas de intervalos no acotados realizamos dos tablas para las conversiones RC→RI y RC→RG.

Pregunta	**Respuesta correcta**	**Intervalo contrario**	**Otras respuestas**
18iii	A1, A2, A3, A4, A6, A7, A9, A10, A11, A12, A13 y A14		A8: (+∞,3)
20ii	A1, A3, A4, A6, A7, A9, A11, A12, y A13	A10	A8: (-3,∞ A5: R
20iv	A1, A3, A4, A6, A9, A11, A12, y A13	A2, A10	A5: [-1,4] A7 y A14: [4, ∞ A8: [4, ∞]
34i	A2, A3, A4, A6, A7, A8, A10, A12, A13 y A14		A1, A11: [-∞,5] A9: (-x,5]
18iv (caso especial de **R**)	A2, A3, A4, A6, A7, A9, A10, A11, A12, A13 y A14		A8: (-∞,∞]

Tabla 6: RC→RI

Pregunta	**Respuesta correcta**	**Intervalo demarcado sólo con el extremo sin línea**	**Intervalo contrario**	**Otras respuestas**
18iii	A1, A2, A4, A6, A7, A8, A10, A11, A12 y A13	A9, A10		
20ii	A1, A3, A6, A7, A8, A9, A12 y A13	A10		
20iv	A1, A3, A4, A6, A7, A11, A12 y A13	A10	A2	A5: [-1,4]
34i	A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8 y A13			A12: Sólo coloca el número 5 y utiliza una flecha a la izquierda para indicar la semirecta
18iv (caso especial de **R**)	A3*, A4, A6, A7, A8, A9, A12 y A13			

Tabla 7: RC→RG

*Agrega una flecha del lado izquierdo ya que la flecha del lado derecho ya está incorporada.

4.3 Algunas conclusiones sobre las conversiones

Además de la inclusión o no de los extremos, dificultad tan mencionada en todos los registros de representación y, en el registro conjuntista, la omisión de signos como el "∈", "|" y "{}", resaltamos que los estudiantes tienen más dificultades para las conversiones RC↔(RI,RG) que para RI↔RG:

- Cuando la representación en RC es diferente al orden de izquierda-derecha – criterio CC3 de congruencia que plantea un problema para los estudiantes.
- La exportación del signo ∞, o el uso de una flecha, en el caso de intervalos no acotados, lo que hace referencia al criterio de congruencia CC1.
- Un problema ligado a la significación de los símbolos $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$ que permiten variaciones cognitivas neutras, lo cual conlleva a proporcionar el intervalo contrario, como los casos que mencionamos para intervalos no acotados.

Tenemos que notar que para intervalos acotados las representaciones en una conversión RI/RG→RC son congruentes.

5. INTERSECCIONES Y UNIONES

Con los cuatro tipos de desigualdad de la sección 2, a priori, sólo debería haber un uso del signo ∪ y la conjunción "o" en las desigualdades de tipo IV (preguntas 42 y 44), mientras que el signo ∩ y la conjunción "y" no son necesarios para las desigualdades propuestas (pues se puede trabajar con desigualdades dobles). Sin embargo, éste no es el caso, sobre todo porque los estudiantes tienen conocimientos a menudo incompletos o incorrectos relacionados con las uniones e intersecciones.

5.1 Utilización en caso de desestabilización

5.1.1 Caso de un conjunto vacío

Las preguntas 21*i* y 21*ii* son susceptibles de presentar un problema, ya que el conjunto solución es vacío[23]. Los estudiantes A2, A5, A6, A10, A12, A13 y A14 identifican la respuesta, pero a menudo con vacilación, contradicciones y/o signos de interrogación (A10 marca una vacilación para *i*, pero opta, al parecer, sin dudarlo, por la respuesta incorrecta (5,0) en *ii*). A1 proporciona como resultado en RI, el intervalo formado con las dos *extremidades* en el orden propuesto, [-3,5) y (5,0), pero traza en RG los dos intervalos no acotados que debe tomar en la intersección – esto sugiere que ha habido conversiones RC→RI y RC→RG y no entre RI y RG. A4 no responde, A7 y A11 toman los *dos extremos* de la desigualdad pero los reordenan (A8 también, pero finalmente tacha el resultado). A3 procede como A1 en RG y en RI escribe, antes de rayar, la unión de dos intervalos. Sin duda, él percibe el problema pero no puede resolverlo. ¿Es esto una confusión entre la intersección y la unión? Por último, A9 traza los mismos intervalos, sin proporcionar una respuesta en RI.

[23]También tenemos la pregunta 42e.

Cabe señalar que la intersección nunca aparece en las respuestas de los estudiantes. En cambio, la unión es evocada por algunos de ellos para tratar de eludir los problemas.

El uso que se encuentra en RG para intervalos acotados es marcar los dos extremos sin indicar el conjunto a través de un subrayado: *dos números marcan los extremos de un intervalo*. Esto está relacionado con CC1, pero también con CC3, por la conservación del orden sin tener en cuenta el sentido de los signos >, <, etc.

5.1.2 Caso de variaciones cognitivas neutras viniendo de RA

Notamos igualmente el mismo tipo de uso, unión en lugar de intersección, en las dos desigualdades dobles de 34ii y 34iv. Estas dos únicas[24] desigualdades dobles dadas con los signos > y ≥ (en las otras se utilizó < y ≤). Esto perturbó a la mayoría de los estudiantes de dos maneras: A4, A8, A10 y A11 toman los números en el orden izquierda-derecha para escribir el intervalo (lo cual conduce a un error en el uso del registro RI), mientras que A3, A9 y A14 utilizan la unión en *ii* pero responden correctamente en *iv*, probablemente porque el orden es más claro entre los dos números de distinto signo que entre dos números negativos. También está el caso especial de A1, que muestra una vacilación en *ii* (ver Figura 3) entre unión e intersección. Esta respuesta en *ii* es la única referencia a una intersección con el signo ∩.

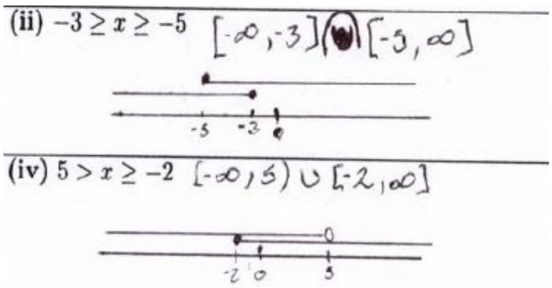


Figura 3.

Puede ser que el vacío dejado por las variaciones cognitivas neutras de RC (que viene de RA) haga posible una interpretación falsa, lo que conduce a un cambio de sentido de las desigualdades dobles en:

- $-5 \leq x \leq -3$ para representar $-5 \leq x$ y $x \leq -3$
- $-5 \geq x \geq -3$ para representar $-5 \geq x$ o $x \geq -3$

En la sección siguiente tenemos otro argumento para esta interpretación. Sin embargo, esta significación ataca la transitividad del orden, porque tendríamos $-5 \geq -3$.

5.2 Utilización de las desigualdades del tipo IV

La pregunta 42 parece más simple que la 44, pero hay que señalar que no hay ninguna indicación para resolver la desigualdad del tipo IV, sólo las desigualdades

[24] También está la 21*i*, pero ésta es un caso aparte, ya que el conjunto solución es vacío.

del tipo III se tratan a través de un ejemplo antes de la pregunta 42 utilizando la distancia a 0.

Para estos últimos ítems, esperamos buenos resultados: es el caso de 42a y 42b. Se observa una confusión entre los signos ∩ y ∪ para A11 (*ver* Figura 4), que indica la disociación de la desigualdad doble en dos desigualdades simples, con la dificultad de representar la intersección en RG.

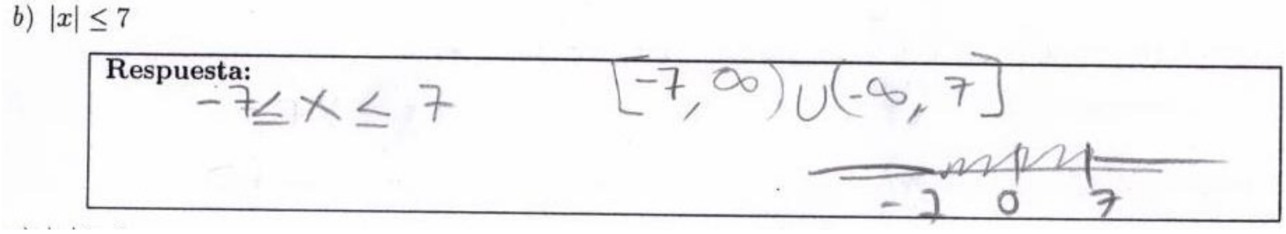


Figura 4

En cambio, para los apartados 42*c* y 42*d*, hay muchas adaptaciones diferentes, a menudo personales e incorrectas, para realizar la actividad:

- A8 y A11 revierten los signos de comparación como -1>*x*>1 para 42*d*.
- A1 también invierte un signo y proporciona, para 42*d*, -1<*x*>1, sin respuesta en RI.
- A3, A12, A13 y A14 proporcionan el componente conexo *positivo* del conjunto solución para 42*c* y 42*d* (es lo mismo de A6 y A9 para *d*). A2 en 42*c* y 42*d* hace un uso correcto de "o" en RC, el cual finalmente tacha (*ver* Figura 5). Quizás la respuesta debe ser un intervalo para estos estudiantes.
- A4 utiliza en 42*c* y 42*d*, la "y" de RN en lugar de la "o" matemática: (-∞,-1) y (1,∞) – posiblemente correcta en un sentido común del "y".
- A6, A9 y A10, en 42*c*, proporcionan la respuesta correcta en RI con el signo ∪.

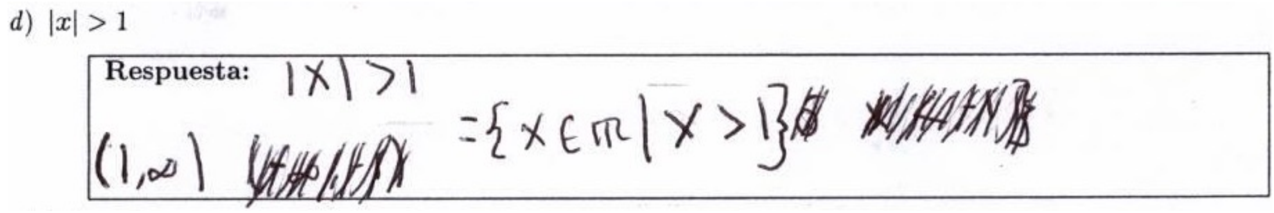


Figura 5: Respuesta de A2

En la pregunta 44, encontramos más o menos el mismo tipo de respuestas, pero también notamos una evolución, positiva, para muchos estudiantes. Observamos también que A4, A5, A7 y también A13 a partir de *vi*, no responden.

El ítem 44*i* es de hecho una conversión RI→RG y las respuestas son correctas (*ver* sección 4.1). Para las desigualdades del tipo III, 44*ii,* 44*vi* y 44*vii*, la mayoría de respuestas son correctas a excepción de algunos pequeños errores.

Sin embargo, tengamos en cuenta que A1 (*ver* Figura 6), para 44*vi* y 44*vii*, en RI utiliza la unión en lugar de la intersección y en RC utiliza la "o" en lugar de "y" separando la desigualdad doble.

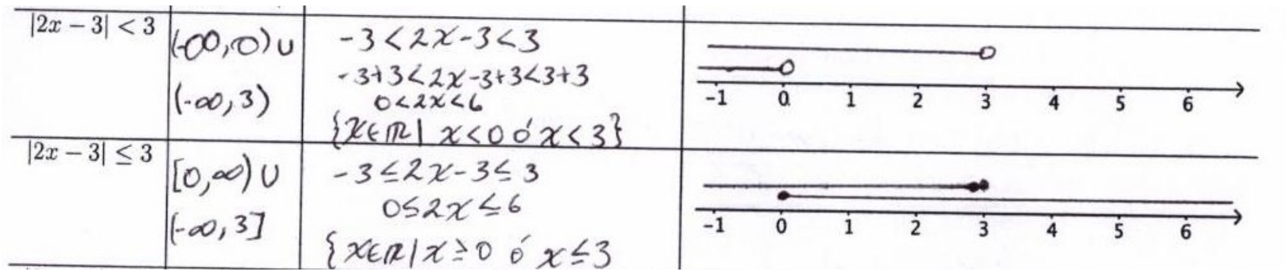


Figura 6: A1 en 44*vi* y 44*vii*

Para 44*iii* y 44*iv*, sólo A2 y A12 proporcionan la respuesta correcta, con el signo ∪, mientras que para 44*viii* y 44*ix* notamos igualmente que A1 y también A3, A9 y A14, para los tres últimos, utilizan una adaptación especial. Ellos invierten los signos de la desigualdad y realizan un tratamiento *correcto*, pero en la interpretación del resultado $0 \geq x \geq 3$ lo toman como una "o" y no una "y". No podemos dejar de resaltar que son los 3 estudiantes que interpretaron la desigualdad doble 34*ii* por una unión (ver 5.1.2). Su interpretación, aunque no es correcta desde el punto de vista del registro RA, es suficientemente operacional para obtener la respuesta correcta en RI.

Esta inversión de los signos es utilizada por varios de los demás estudiantes: A3, A9, A10, A13 y A14 en 44*iii* y 44*iv* con un tipo de respuesta incorrecta (3,5) conservando el orden izquierda-derecha (CC3). A8 y A10 también utilizan esta inversión de los signos de comparación sin que podamos encontrar una coherencia.

Por último, sólo A6 y A11 descomponen la desigualdad doble en dos desigualdades simples, como en la resolución del modelo. Pero A6 llega a (3,5) y "$3<x>5$" en 44*iii* y 44*iv* y cometió el mismo error en 44*viii* y 44*ix*, mientras que A11, que utiliza la conjunción "o", no puede llegar a la respuesta correcta porque no proporciona adecuadamente las desigualdades simples ($2x–3>3$ y $2x–3>-3$).

Además de las dificultades mencionadas, estas desigualdades del tipo IV requieren el uso de la intersección, asunto problemático para muchos estudiantes y que promueve una interpretación no-institucional de las desigualdades dobles. Podemos identificar a los estudiantes que tienen un control semántico y otros que no tienen ninguno. Aquí nos encontramos con problemas de significación de los signos >, <, etc. para los conjuntos vacíos.

6. CONCLUSIONES

Una de las dificultades que se presentó en todos los registros de representación aquí mencionados, está relacionada con la inclusión o no de los extremos de un intervalo. Existe una frágil relación entre los signos <, >, ≥, ≤, (,), [,], ●, y ○, la cual se evidencia al momento de la conversión.

Otro aspecto sobresaliente que también incluye todos los registros de representación son las variaciones cognitivas neutras que se permiten o no en cada uno de ellos. En los registros RI y RG no hay variación cognitiva neutra (para RG es el que se usa habitualmente), mientras que en RC y RN sí hay variaciones cognitivas neutras. Esto afecta la relación de congruencia, y de acuerdo con la afirmación de

Duval (1999, p. 58) en la que sostiene que en el caso de congruencia la conversión es trivial, agrupamos en un bloque a RI y RG detectando así las dificultades de conversión entre (RI,RG) y RC.

Dentro de las dificultades de conversión identificamos específicamente el criterio de congruencia CC1, para intervalos no acotados, destacando la trascendencia que tiene para algunos estudiantes, la importación del signo ∞ que aparece en RI a los otros registros de representación, así como el caso de la línea en RG.

Para establecer la correspondencia semántica (que se menciona en CC1) entre el signo ∞ que aparece en RI con RG, algunos de los estudiantes subrayaron la semirecta, colocaron una flecha o simplemente mantuvieron dicho signo en RG. Para RC aparece específicamente el signo ∞, lo que hace surgir notaciones espontáneas (Hitt, 2006) en las que guardan el orden de izquierda-derecha como en $-\infty<x<b$.

En relación con las desigualdades dobles, detectamos el hecho de que no existe una identificación de la operación que se debe realizar entre las dos desigualdades simples. Utilizan la unión en vez de la intersección.

Finalmente, este estudio se puede interpretar en el marco de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011). El elemento esencial del polo teórico del ETM alrededor de la desigualdad es algebraico, pero también aparecen unos componentes ligados a las representaciones del conjunto solución. Específicamente, se identifica el orden de **R** que, como hemos visto, se representa tradicionalmente de izquierda a derecha en RI y RG. Por lo tanto, en este corazón del polo teórico constituido por el orden, existe el riesgo de que el proceso de visualización tenga prioridad sobre el control teórico.

Asimismo, consideramos que el significado de los signos de comparación no es en general suficiente para el trabajo matemático. Hay una falta de control y de significados no apropiados de variaciones cognitivas neutras en RC. Y esto va acompañado de una falta de coordinación de los signos que marcan los bordes de los conjuntos.

En contraste con la pluralidad de representaciones posibles, alrededor de las desigualdades de primer grado con una variable, el ETM sólo tiene un débil polo teórico y el ETM personal de los estudiantes se centra de alguna manera en el eje "Representamen-visualización".

BIBLIOGRAFÍA

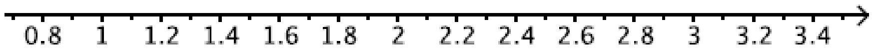
Duval, R. (1999). Sémiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. (Traducción de Miryam Vega). Cali: Universidad del Valle.

Hitt, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11, 253-268.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses, Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 9-24.

ANEXO NO. 1: TAREAS ANALIZADAS DE LA ACTIVIDAD 0.3

9. Marque el intervalo [1,3], sobre la figura; "palomeé" en caso de que los números listados pertenezcan a dicho intervalo y "tache" en caso de que no. Argumente sus respuestas.



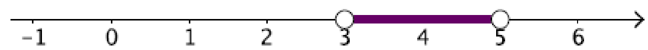
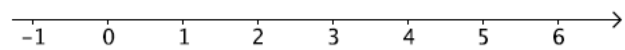
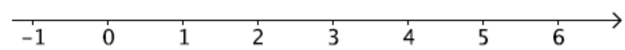
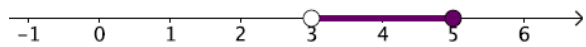
1	2.999...	3.00000000001	-2	0.9	2	3	1.6	$\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$

Argumentos:

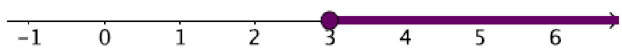
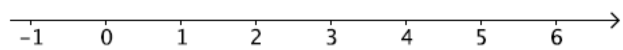
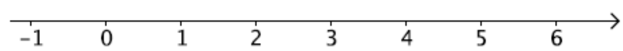
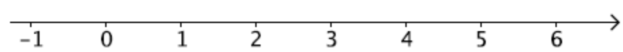
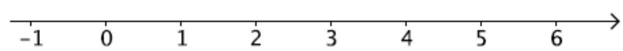
Siguiendo el mismo modelo:

10. (1.5,3) 11. [1,2) 12. (-4,0] 13. [0,∞)
14. (-5,∞) 15. (-∞,3] 16. (-∞,-3)

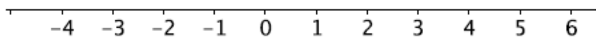
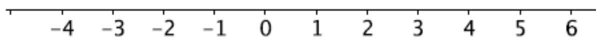
17. Complete la siguiente tabla.

Notación	Descripción del conjunto	Tipo	Figura
(3,5)	$\{x \in R \mid 3<x<5\}$	Abierto	
i. [3,5)	$\{x \in R \mid 3 \leq x<5\}$		
ii. [3,5]	$\{x \in R \mid 3 \leq x \leq 5\}$		
iii.	$\{x \in R \mid 3<x \leq 5\}$		

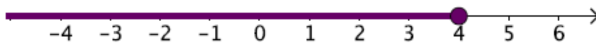
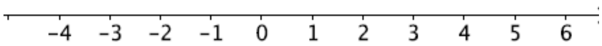
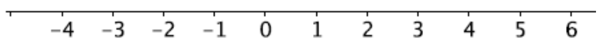
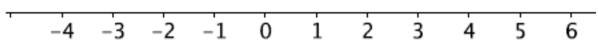
18. Complete la siguiente tabla.

Notación	Descripción del conjunto	Figura
[3,∞)	$\{x \in R \mid 3 \leq x\}$	
i. (3,∞)		
ii. (-∞,3]		
iii.	$\{x \in R \mid x<3\}$	
iv.	R	

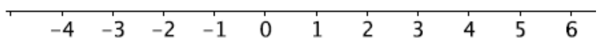
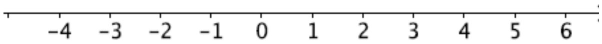
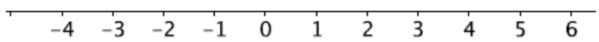
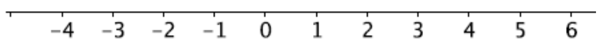
19. Complete la siguiente tabla.

Notación	Descripción del conjunto	Tipo	Figura
i. (-3,4)			
ii.			
iii.	$\{x \in R \mid -3 < x \leq 5\}$		
iv. [-3,4)			

20. Complete la siguiente tabla.

Notación	Descripción del conjunto	Tipo	Figura
i.			
ii.	$\{x \in R \mid x > -3\}$		
ii. [-3,∞)			
iv.	$\{x \in R \mid x > 4\}$		

21. Casos particulares. Complete la siguiente tabla.

Notación	Descripción del conjunto	Tipo	Figura
i.	$\{x \in R \mid -3 \geq x > 5\}$		
ii.	$\{x \in R \mid 5 < x < 0\}$		
ii. {-3,4}			
iv. {-3.4}			

31. ¿Para qué valores de x se cumple el enunciado $x+3>0$?

34. Exprese la desigualdad como intervalo y realice su representación geométrica

i. $x \leq 5$ ii. $-3 \geq x \geq -5$ iii. $3 \leq x \leq 7$ iv. $5 > x \geq -2$

35. Exprese como desigualdad y realice su representación geométrica.

i. x es negativa ii. a esta entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$,

36. Exprese el intervalo en su representación algebraica, es decir, como una desigualdad en la variable x.

i. (-5,8] ii. (-∞,-5) iii. [4,∞) iv. [-4,-1]

39. Encuentre el conjunto solución de las siguientes desigualdades.

a. $x - 8 \leq 4$

b. $2x - 7 \geq 5x - 19$

c. $3 \leq 2x - 7 \leq 21$

d. $13 \leq 7x + 13 \leq 34$

e. $-2x > 4$

f. $5x - 3 \leq 7 - 3x$

g. $3(2 - x) < 2(3 + x)$

h. $-x - 2 \leq -1$

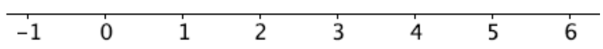
i. $(0.2)(2x + 37.5) - 2.2x \leq 5.7$

42: Usando el razonamiento anterior, resuelva las siguientes desigualdades:

a. $|x| < 3.$ b. $|x| \leq 7.$ c. $|x| \geq 5.$

d. $|x| > 1.$ e. $|x| < -3.$ f. $|x| > 0.$

44. Complete las siguientes tablas.

Notación en valor absoluto	Notación de intervalo	Descripción del conjunto	Figura
i. $\lvert x-4 \rvert \leq 1$	[3,5]	$\lvert x-4 \rvert \leq 1$ $-1 \leq x-4 \leq 1$ $-1+4 \leq x-4+4 \leq 1+4$ $3 \leq x \leq 5$ El conjunto soluciòn es $\{x \in R \mid 3 \leq x \leq 5\}$	

Posteriormente se les solicitó completar la tabla en la que sólo se les proporcionó la desigualdad:

ii. $|x-4|<1$ iii. $|x-4|\geq 1$ iv. $|x-4|>1$ v. $|x-4|=1$

vi. $|2x-3|<3$ vii. $|2x-3|\leq 3$ viii. $|2x-3|>3$ ix. $|2x-3|\geq 3$

x. $|2x-3|=3$

DISTINTAS HERRAMIENTAS PARA LA ENSEÑANZA/APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LUGAR GEOMÉTRICO

Abánades, M., Universidad Complutense de Madrid

Botana, F., Universidad de Vigo

Escribano, J., Universidad Complutense de Madrid

Gómez-Chacón, I. M.ª, Universidad Complutense de Madrid

En este artículo se analizan y comparan la efectividad de tres herramientas de software matemático para la resolución de problemas de Lugares Geométricos. Mediante el análisis del Espacio de Trabajo Personal (ETM personal) de futuros profesores de Secundaria se busca identificar qué constituye en ellas un Espacio de Trabajo Matemático más Idóneo (ETM idóneo). Para ello, se realiza una caracterización sobre lo que cualifica a las herramientas respecto a preferencias del usuario y se analiza la génesis instrumental en diversos problemas respecto a cada una de estas tres herramientas. En particular, de qué forma esta génesis integra el artefacto en aspectos clave en el aprendizaje matemático: intuición, exactitud, visualización-modelización algebraica.

Palabras claves: *Lugares Geométricos, SGD, Geometría, Pensamiento visual, Pensamiento algebraico*

1. INTRODUCCIÓN

La capacidad de los sistemas de geometría dinámica (SGD) de mostrar la trayectoria de objetos sometidos a restricciones está presente de manera señalada en cualquiera de ellos, y la práctica totalidad de estos sistemas poseen un procedimiento para la generación de lugares geométricos de puntos (ver SDG list).

Informalmente, un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen ciertas condiciones. En este artículo nos limitaremos a los lugares geométricos planos que se pueden obtener con los entornos geométricos actuales, es decir, el lugar geométrico descrito por un punto T dependiente de otro punto M, ligado este a un camino lineal, en una cierta construcción con regla y compás. La estrategia habitual consiste en muestrear el camino de M y, para cada muestra, calcular la correspondiente posición de T. Estas posiciones se almacenan en una lista de pares de coordenadas numéricas, que es, en la mayoría de sistemas, el objeto que representa el lugar. Algunos entornos utilizan sencillas reglas para unir puntos contiguos en la lista y presentar así un resultado visualmente continuo. Sin embargo, esto puede producir resultados aberrantes debidos a discontinuidades o errores numéricos (Botana, 2002).

En el presente estudio se considera el entorno de geometría dinámica GeoGebra que ofrece la aproximación estándar a los lugares comentada arriba (denotaremos Herramienta 1= “LugarGeométrico” en GeoGebra), e incorpora en sus versiones más recientes (hemos utilizado la versión 4.4) una implementación para la obtención de descripciones algebraicas de los lugares mediante eliminación algebraica (Herramienta 2= "EcuaciónLugar") (Botana y Valcarce, 2003). Además, se usará también un prototipo basado en GeoGebra (Botana y Abánades, 2014) con el mismo ánimo de obtención de información algebraica acerca de los lugares, que permite calcular una descripción exacta de tales lugares en el campo algebraico (Herramienta 3= "LocusGC").

El objetivo de la investigación es comparar estas tres herramientas de software matemático e identificar qué constituye en ellas un Espacio de Trabajo Matemático más Idóneo[25] desde la percepción de un usuario-futuro profesor: sólo el lugar geométrico expresado meramente como un trazado gráfico en la pantalla; el lugar descrito gráficamente y, además, su representación algebraica en términos de ecuaciones (que con frecuencia incorporan elementos espurios al lugar real); o una representación gráfica junto con una respuesta algebraica exacta como la de la aplicación "LocusGC", dada en términos de conjuntos constructubles, es decir, como diferencia de ecuaciones.

Para analizar la funcionalidad de esta herramienta para un usuario-futuro profesor, se considerará clave la observación de la reacción de este ante la aproximación numérica del paradigma de la Geometría dinámica. Los expertos (desarrolladores) de la herramienta "LocusGC" que participan en esta investigación plantean el enriquecimiento de los sistemas de Geometría dinámica mediante sistemas de Álgebra computacional. Para ello se centran en la mejora de los principales problemas constatados en los sistemas de Geometría dinámica: continuidad, cálculo de lugares geométricos, descubrimiento y demostración (Botana, 2007).

La investigación ha demostrado que la génesis instrumental es un proceso complejo (Guin, Ruthven, y Trouche, 2004) fundamentalmente individual en el que las dimensiones cognitivas, metacognitivas y afectivas tienen un peso específico. También, se caracteriza por una dimensión social, ya que los individuos desarrollan sus esquemas mentales en el contexto de una comunidad (en nuestro caso en un espacio de formación de profesores).

En el presente trabajo se analiza la génesis instrumental en problemas de lugar

[25] Para que un Espacio de Trabajo en una institución escolar se pueda implementar y sea eficaz, calificado de Idóneo, es necesario que permita el trabajo en la Geometría correspondiente al problema planteado y que se construya en el sentido de las diferentes componentes de los planos epistemológico y cognitivo (Kuzniak, 2006). Al trabajar en un SGD coincidimos con Coutat y Richard (2011) cuando ponen de manifiesto la necesidad de considerar el valor que aporta la interacción entre sujeto epistémico y medio epistémico y las interacciones entre las génesis. Estos autores señalan que bajo una realidad de Geometría dinámica y en la idea de un espacio de trabajo que se crea por un procedimiento potencial es importante considerar el valor epistémico que un sujeto puede asociar a sus realizaciones ya sea en sus representaciones semióticas, el tratamiento intencional o los tratamientos espontáneos (Coutat y Richard, 2011: 119). Asimismo, la caracterización de los planos verticales del ETG idóneo se apoyaría en la idea de los procesos: validación, modelización y descubrimiento. Estos procesos constituyen las manifestaciones de las competencias matemáticas del sujeto en el momento de su trabajo geométrico de descubrimiento, comunicación y razonamiento.

geométrico en tres herramientas en un entorno de SGD y la forma cómo esta génesis integra el artefacto en aspectos clave en el aprendizaje matemático: intuición, exactitud, visualización gráfica-modelización algebraica.

Hacemos notar que la noción de génesis instrumental se refiere al paso que va de considerar una herramienta como artefacto a considerarla como instrumento, lo que conlleva compaginar el artefacto y las habilidades cognitivas necesarias para su uso. Esta génesis tiene dos dimensiones direccionadas, la instrumentación y la instrumentalización (Rabardel 1995), que se corresponden respectivamente con el proceso mediante el cual el artefacto influye al usuario y el proceso de interiorización en el sujeto del uso de dicho artefacto. En aportes posteriores sobre la génesis instrumental Rabardel y Bourmaud (2003) han señalado la continuidad entre la potencialidad del artefacto y los esquemas de uso del alumnado. Este resultado ha hecho que en este estudio hayamos dado especial relevancia a la selección de la herramienta como parte de un buen diseño de la secuencia didáctica.

El artículo se organiza de la siguiente manera. En primer lugar se describe el estudio, planteamiento teórico y metodológico para nuestra investigación. Sigue la descripción de las herramientas y problemática desde perspectiva experta. A continuación se incluye una sección sobre los resultados subdividida en secciones relativas a los análisis que caracterizan el paso del Espacio de Trabajo Personal al Espacio de Trabajo Idóneo (tipologías de solución, preferencias y modelización y sinergia entre registro gráfico y algebraico). Finalmente se describen las conclusiones del trabajo.

2. ESTUDIO: CONTEXTO, MARCO INTERPRETATIVO Y METODOLOGÍA

La experimentación se realiza con un grupo de 24 futuros profesores de matemáticas de Secundaria (actualmente estudiantes de un Master Profesional para Educación Matemática Secundaria en la Universidad Complutense de Madrid).

Dos aspectos queremos hacer notar, uno es referente al marco interpretativo y otro referente a aspectos metodológicos.

Se utiliza el marco de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2011; Gómez-Chacón y Kuzniak, 2013; Gómez-Chacón y Escribano, 2014) como propuesta teórica y metodológica para en una primera fase:

- analizar las herramientas y problemática desde la perspectiva del experto y la concepción de trabajo matemático de los desarrolladores de las herramientas, ETM de referencia[26],

- analizar la diversidad de pensamientos matemáticos y cambios de registros en la resolución de los futuros profesores, ETM personal.

[26] ETM de referencia, este espacio de trabajo lo concebimos de manera ideal en función sólo de criterios matemáticos. El que lo utiliza es un individuo experto epistémico, en nuestro caso por ejemplo, son los matemáticos desarrolladores de la Herramienta 3= "LocusGC"). Será importante analizar no sólo el proceso de resolución del problema sino los criterios matemáticos que han llevado al desarrollo de la herramienta.

En una segunda fase, se reexaminan las producciones de los futuros profesores conjuntamente con los cuestionarios online (Anexo 1) para identificar:

- la percepción de los futuros profesores sobre la competencia de las herramientas desde el punto de vista de tipos de funcionamiento semiótico-figural, instrumental y discursivo,
- el establecimiento de un ETM idóneo a partir de la estructura de los ETM personales de este grupo de estudio[27].

Como venimos indicando respecto al análisis de la génesis instrumental nos centramos tanto en ETM-referencia y en el ETM-personal. Este artículo no tiene como finalidad abarcar la conceptualización completa de orquestación instrumental (concepto inicialmente desarrollado por Trouche (2004) y ampliado por Drijvers, Doorman, Boon y Gisbergen (2010)). Estos últimos autores completan la estructura de la orquestación instrumental propuesta por Trouche (configuración didáctica y modo de explotación) con un tercer aspecto: la implementación didáctica. Aunque en nuestro trabajo, al centrarnos en el ETM-referencia y en el ETM-personal, estamos recabando información sobre el objeto orientado a la enseñanza y el modo en el que el futuro profesor interpreta una configuración (herramienta) para atender a sus intenciones didácticas.

La metodología utilizada ha sido multimétodos, combinando métodos cualitativos y cuantitativos. Como instrumentos de recogida de datos se les plantea la resolución de una serie de tres problemas de Lugares Geométricos a realizar con cada una de las tres herramientas informáticas (sec. 3). Los estudiantes deben realizar un protocolo detallado de la resolución de los mismos señalando procesos matemáticos, bloqueos y dificultades al resolver los problemas (Anexo 1). Se han realizado video-grabaciones de las sesiones de trabajo y entrevistas más detalladas a algunos alumnos.

Además, se les plantea para cada problema la realización de un cuestionario online de sus percepciones relativas a la competencia matemática de la herramienta y la comparación entre ellas (Anexo 2). En la valoración de las herramientas se tuvieron en cuenta distintos criterios de calidad de acuerdo con la finalidad del diseñador. Se plantearon dos niveles de valoración: un primer nivel, evaluación de la herramienta específica (solución/imagen esperada, exactitud-precisión matemática y satisfacción con el resultado matemático) y un segundo nivel comparativo (valorando las siguientes dimensiones: dimensión intuitiva, precisión matemática, sinergia entre visualización y registro algebraico). También cabe señalar que junto al análisis cualitativo se realizó un Análisis Estadístico Implicativo (SIA) (Gras et al, 1997) buscando explorar la estructura de los ETM personales. Como indica Couturier (2007) este análisis estadístico permite establecer reglas de asociación en un conjunto de datos cruzando variables e individuos, marcando las tendencias de conjuntos de

27 Situados en la formación de futuros profesores y en el desarrollo del conocimiento estratégico para enseñar con tecnología y haciendo uso de datos empíricos encontrados en esta formación donde se muestran algunas de la fragilidades del ETM personal, nuestra finalidad será comprender su ETM personal para desarrollar un buen ETM idóneo en el aula.

propiedades, usando una medida de carácter no lineal de tipo inferencial.

Las cuestiones abiertas concernientes a tipologías de resolución, tipologías de dificultad identificadas conscientemente y explicitadas por los sujetos, valoración de las herramientas, aspectos comparativos instrumentales-matemáticos y la caracterización de los sujetos fueron codificadas mediante un análisis cualitativo de contenido que permitía establecer categorías. Dos expertos realizaron estos análisis y cuantificaron sus frecuencias. De forma similar se compiló y codificó la matriz para el análisis implicativo para ser trabajada con el programa CHIC (Couturier, 2007) mediante variables binarias. Se analizará si los sujetos presentan una tendencia a cumplir la variable b cuando sabemos que cumplen la variable a. El objetivo principal del Análisis Implicativo es poner de relieve tales tendencias en un conjunto de propiedades. La codificación de las variables se puede ver en el Anexo 3. Hacemos notar que aunque el número del sujetos del grupo no es muy grande, este análisis nos permite abordar dos puntos de vista complementarios de la implicación entre las variables: una perspectiva global que busca cuantificar la calidad de cada una de las particiones asociadas con cada nivel de jerarquía, y un punto de vista local que se centra en la calidad de las reglas –asimilables a las clases- construidas en cada nivel.

Por último señalar que no se pretende establecer conclusiones para el conjunto de todos los futuros profesores, pero si que nos podemos plantear si este conjunto de futuros profesores (24 personas) se decanta claramente (“significativamente”) por el “si” o por el “no”. En particular queremos saber si el % obtenido puede haberse obtenido al azar o se aleja tanto del 50% que es demasiado raro que ocurra al azar, y por tanto, refleja una tendencia más clara por el “si”.

3. HERRAMIENTAS Y PROBLEMÁTICA DESDE LA PERSPECTIVA DEL EXPERTO

La primera aproximación para el estudio de un problema de lugar geométrico es el uso de la traza. Dado un punto móvil, podemos indicar que GeoGebra dibuje el rastro que deja este punto al ser movido. La traza dejada por el punto móvil permite dar una idea intuitiva del lugar geométrico que representa, pero realmente es una aproximación muy grosera en la que además se pierde el dinamismo de la construcción.

Para dibujar un lugar con una cierta precisión, es más adecuado utilizar una herramienta específica, “LugarGeométrico”. A partir del punto que define el lugar y del punto que hace moverse a ese punto, GeoGebra realiza una aproximación numérica (pero sofisticada) del lugar geométrico. Esta construcción no tiene mayor estructura (es poco más que una “nube de puntos”) pero se mantiene el dinamismo y hay una cierta precisión.

Aunque el comando “LugarGeométrico” en GeoGebra admite diferentes tipos de argumentos (ver GeoGebra wiki, URL en referencias), aquí usaremos el primero de ellos, que acepta dos argumentos, siendo el primero de ellos el punto cuya trayectoria describe el lugar y el segundo, necesariamente ligado a un objeto lineal, aquel punto cuyo movimiento genera el anterior. Obsérvese que el lugar obtenido es un objeto auxiliar para GeoGebra del que se ignora cualquier información algebraica.

En la versión actual de GeoGebra se incluye el comando "EcuaciónLugar" que permite calcular la ecuación de los lugares y la representa como una curva implícita. Básicamente, este comando considera las ecuaciones algebraicas de los elementos involucrados en el lugar y realiza un proceso de eliminación algebraica, basado en bases de Groebner, que devuelve una ecuación conteniendo únicamente las coordenadas simbólicas del punto que traza el lugar. Como es sabido, tal eliminación devuelve la menor variedad algebraica que contiene el lugar buscado, pudiendo pues incluir partes espurias, como se señala en (EcuaciónLugar en GeoGebra Wiki, URL en referencias). Además, este método es incapaz de realizar una discusión automática de las posibles degeneraciones o apariciones de componentes algebraicas exóticas, añadiendo incertidumbre en cuanto a la corrección del resultado. Por así decirlo, el resultado es "demasiado completo", ya que incorpora componentes algebraicamente correctas pero de difícil interpretación desde el punto de vista didáctico.

Finalmente, la tercera alternativa que se usará solventa los problemas mencionados de inclusión de componentes espurias e indecidibilidad en caso de degeneración. Utilizando un reciente algoritmo de resolución de sistemas polinómicos con parámetros, GroebnerCover (Montes y Wibmer, 2010), se ha construido el prototipo *"LocusGC"*, en el que se procesan construcciones geométricas de lugares contenidas en un applet de GeoGebra y la salida del algoritmo GroebnerCover se reintroduce en el applet, de forma que, para lugares estrictamente algebraicos, el resultado que se devuelve es matemáticamente correcto.

El manejo de las herramientas "EcuaciónLugar" y de "LocusGC" es sencillo. Basta realizar una construcción geométrica en la que aparezca un lugar geométrico (utilizando la Herramienta "LugarGeométrico"). Para utilizar "EcuaciónLugar", basta llamar a la instrucción desde la línea de comandos de GeoGebra. En el caso de "LocusGC", basta con pulsar un botón.

3.1. Tres problemas, punto de vista del experto

Los tres problemas de Lugares Geométricos planteados a los futuros profesores de Secundaria son:

Problema 1. Construcción de una elipse (método del jardinero)

La elipse puede construirse como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Pista: Si se construye un segmento AB, y un punto "móvil" E en el segmento, la suma de las distancias de los segmentos AE y EB es constante.

Problema 2. Construcción del Caracol de Pascal

Este lugar se describe mediante el punto trazador T, dependiente del punto M. En este caso, M es un punto de la circunferencia con centro A que pasa por el punto B, y T está en la recta BM a una distancia fija de M.

Problema 3. Construcción del lugar geométrico descrito por "El punto perdido”

Este lugar se describe mediante el punto trazador T, dependiente del punto M. En este caso, sean A, B y C tres puntos fijos en el plano y M un punto en la recta AB. El punto T es la intersección de la recta MC y la recta perpendicular a MC que pasa por B.

A continuación se presenta la resolución del Problema 2 poniendo de manifiesto las diferencias en la solución según cada una de las herramientas y la problemática didáctica.

En la solución en GeoGebra, se construye el diagrama según el siguiente protocolo de construcción:

- Punto A: A = (3,2)
- Punto B: B = (3,4)
- Circunferencia c: circunferencia por B de centro A
- Punto M: punto sobre circunferencia c
- Punto D: D = (8,4)
- Punto E: E = (9,4)
- Recta a: recta MB
- Circunferencia d: circunferencia de centro M y radio distancia de D a E
- Punto T: punto de intersección de la recta a y la circunferencia d
- Lugar Geométrico lugar: lugar geométrico descrito por T cuando M varía sobre c

Como muestra la figura 1, se obtiene la concoide conocida como caracol de Pascal.

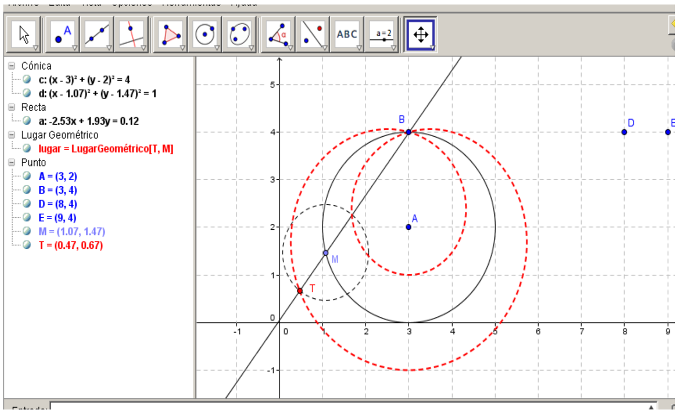


Fig. 1: Caracol de Pascal como el lugar geométrico determinado por *T* y *M*.

Para ver qué ecuación tiene el lugar geométrico, utilizamos la función “EcuaciónLugar”, escribiendo EcuaciónLugar[lugar] en la línea de *Entrada*. Obtenemos, como muestra la figura 2 una ecuación de grado 6 (indicada en la ventana algebraica como una curva implícita) cuya gráfica incluye, además del caracol de Pascal, una circunferencia de centro *B*.

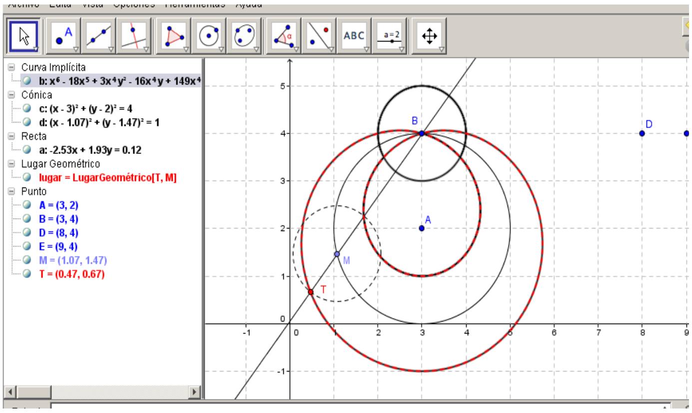


Fig.2: Caracol de Pascal obtenido como ecuación del lugar geométrico.

La Herramienta “EcuaciónLugar” proporciona esta circunferencia extra porque las dos condiciones impuestas sobre el punto *T*, a saber: *T* está en la recta *BM* y *T* está a una distancia fija de *M*; para el caso en el que *M* sea igual a *B*, se reducen a la segunda, ya que cuando *M* coincide con el punto *B*, la recta *BM* no está definida. Consecuentemente, los puntos de la circunferencia extra satisfacen las condiciones algebraicas del problema, y por tanto forman parte del lugar geométrico *algebraico*.

Sin embargo, los métodos más sofisticados detrás de la Herramienta *“LocusGC”*, son capaces de identificar esa circunferencia extra como una componente no deseada del lugar geométrico. La figura 3 muestra cómo la respuesta dada por *“LocusGC”* incluye únicamente el caracol de Pascal, cuya ecuación de grado 4 queda recogida en la ventana algebraica como una curva implícita (Figura 4)

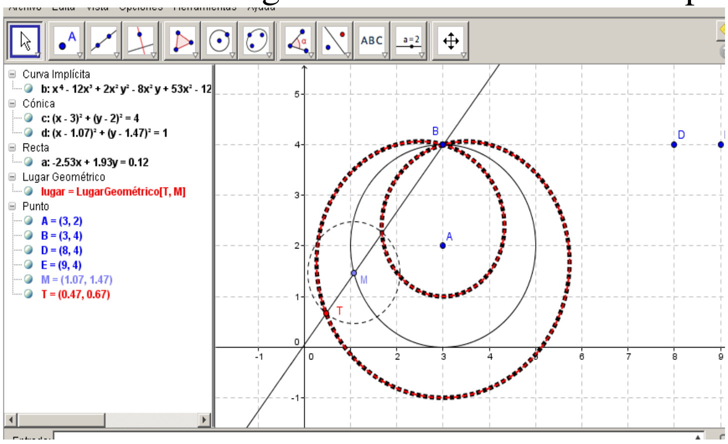


Fig. 3: Caracol de Pascal en *LocusGC*.

RESULT: The sought locus (graphed in applet - dotted black) is the set:

$$\mathbb{V}(x^4+2x^2y^2+y^4-12x^3-8x^2y-12xy^2-8y^3+53x^2+48xy+33y^2-102x-64y+56)$$

Fig. 4: Ecuación de grado 4 del caracol de Pascal dada por “LocusGC”. “EcuaciónLugar” da una ecuación de grado 6.

4. RESULTADOS: DEL ESPACIO DE TRABAJO PERSONAL AL ESPACIO DE TRABAJO IDÓNEO

Como se ha indicado en la introducción, se quiere determinar, mediante la exploración y comparación de las tres herramientas, qué espacio de trabajo es más eficaz matemáticamente y didácticamente para la resolución de Lugares Geométricos.

El espacio de trabajo matemático de referencia, que concebimos de manera ideal en función sólo de criterios matemáticos de los matemáticos expertos que han desarrollado el prototipo "LocusGC", da bastante importancia a la obtención de una información algebraica exacta. Se considera clave el análisis del ETM personal de este grupo de futuros profesores dado que ellos, como profesores, están llamados a desarrollar un referente teórico y un ETM idóneo, precisando el espacio de trabajo que se adapte mejor a la tarea, aunque está mediado por lo que denominamos componente personal (conocimientos matemáticos y valoraciones y preferencias).

En esta sección de resultados primero se presentarán las tipologías de soluciones de los participantes y dificultades más destacables con las herramientas, pasando seguidamente a caracterizar qué cualifica a las herramientas respecto a preferencias, modelización y dimensión instrumental y sinergia entre registro gráfico y algebraico.

4.1. Tipologías de soluciones

En primer lugar hacemos notar que se han planteado tres problemas de lugares geométricos de distinta tipología (ver para clasificación Gómez-Chacón & Escribano, 2011). Mientras que en algunos la construcción en GeoGebra se puede realizar de manera bastante directa a partir del enunciado, en otros es necesario un proceso de modelización previo. Esto lleva a distintas soluciones por parte de los estudiantes. Algunos simplemente dibujan la traza del punto que define el lugar, lo que permite un dibujo parcial sin ningún tipo de precisión. Otros son más precisos y utilizan la herramienta "LugarGeométrico". Entre las distintas soluciones en las que se utiliza el "LugarGeométrico", hay variantes que posibilitan el uso de herramientas más avanzadas, como "EcuaciónLugar" y otras que no. Por ejemplo, el uso de deslizadores está permitido en la construcción de un "LugarGeométrico" pero no en "EcuaciónLugar" (ver EcuaciónLugar en GeoGebra wiki, URL en referencias). Todo esto queda reflejado en la siguiente tabla en la que se recogen las frecuencias de tipologías de resolución matemática y procedimiento tecnológico del grupo de estudio.

	Herramienta LugarGeométrico en GeoGebra				Herramienta “EcuaciónLugar” en GeoGebra		
	LugarGeométrico	LugarGeométrico Desl	Traza	No resuelve	EcuaciónLugar	Otra Forma	No resuelve
Problema 1-	8	10	2	4	11	7	6
Problema 2-	12	5	4	3	15	1	8
Problema 3-	16	1	4	4	20	1	3

Tabla 1: Tipologías de solución y frecuencias (N= 24).

En el problema 1, aparte de algunos estudiantes que no resuelven el problema, en algunas soluciones propuestas simplemente se dibuja una traza del lugar geométrico solicitado. Es decir, se dibuja un punto y simplemente se observa el rastro que deja al ser desplazado. Esto da una solución intuitiva pero en absoluto precisa. El uso de la herramienta “LugarGeométrico” obliga a un proceso de modelización y conocimiento técnico de GeoGebra más elevado. Este proceso de modelización permite pasar de lo intuitivo a lo visualmente preciso, a costa de un esfuerzo técnico. Finalmente, bastantes alumnos realizan una construcción no solo correcta, sino compatible con las herramientas que queremos utilizar. Esto obliga a un mayor conocimiento técnico de GeoGebra y a un esfuerzo de modelización superior. (El intuitivo deslizador no es válido para la herramienta “EcuaciónLugar” y obliga a otro tipo de construcciones auxiliares, como segmentos). Esto permite pasar de lo meramente visual a una compresión matemáticamente precisa de la construcción, que incluye una representación gráfica y las ecuaciones algebraicas.

Mientras los problemas 2 y 3 admitían una transcripción bastante directa del enunciado a la construcción geométrica, en el problema 1 ha sido necesario un proceso previo de modelización. Aparte de cierta “influencia” producida por los conocimientos previos (diversos estudiantes, al leer “método del jardinero” ya no leían más del enunciado y pasaban a una construcción que recordaban haber estudiado anteriormente) y de las dificultades técnicas anteriormente detalladas, la misma modelización del problema creó muchas dificultades. El manejo de dos distancias cuya suma es constante (sencillo de hacer utilizando un segmento auxiliar) constituyó para varios alumnos un bloqueo que dificultó la resolución del problema.

En la resolución con la herramienta 1 “LugarGeometrico” de GeoGebra se constata que el 37% de los estudiantes indica tener dificultades en la utilización del comando (Tabla 2), mostrando dificultades asociadas con la génesis instrumental en más de un 33% y produciéndose bloqueos del paso del razonamiento discursivo al instrumental en un 29% de los participantes.

D1-Geo. Dif. Comprensión e Interpretación problema		12,5 %
D2-Geo. Dif. En relación a la génesis figural visual		8%
D3-Geo. Dif. asociadas con la génesis instrumental	**D31-Geo.** Dificultades asociadas con los comandos del software y el significado matemático	33%
	D32-Geo. Dificultades sobre dependencia de objetos en geometría dinámica	21%
D4-Geo. Bloqueo en el control global de las diferentes génesis de trabajo geométrico	**D41-Geo.** Bloqueo del paso del razonamiento discursivo al instrumental	29%
	D42-Geo. Bloqueo del paso del razonamiento visual al analítico-algebraico	8%
	D43-Geo. Bloqueo del paso del razonamiento visual al razonamiento instrumental	25%
	D44-Geo. Bloqueo en el uso de LOCUS	37%

Tabla 2: Tipologías de dificultades expresadas con la Herramienta 1 "LugarGeometrico" (ver anexo 2).

Algunas de sus justificaciones son:

"El primer problema resultó el más complicado al no tener una referencia clara de qué forma definir la dependencia para el lugar geométrico" (JU., Cuestionario1).

"Al comienzo del problema 1 tuve dificultades en la comprensión e interpretación del problema, fase inicial de la resolución del problema y en cómo usar el comando "LugarGeométrico". Necesité una comprensión mayor de qué hacia este comando. Busqué información y "LugarGeométrico" no deja de ser pintar el lugar geométrico a partir de puntos que cumplen ciertas propiedades, entonces…, cuando entendí esto matemáticamente empecé a realizar el problema. Hasta entonces no sabía cómo hacer la elipse… Como pone el método del jardinero, empecé a hacerlo sin usar GeoGebra…empecé hacer la típica forma que explican en la escuela, con chinchetas y la cuerda, los focos y dibujar. Una vez hecho esto, fui a la página web de GeoGebra y volví a mirar el significado de la herramienta "LugarGeométrico". Me pregunté ahora que entiendo el comando "LugarGeométrico" ¿cómo hago yo la elipse con la herramienta "LugarGeométrico"? Me costó darme cuenta que la elipse tiene unas propiedades y si quieres dibujar el lugar geométrico basándote en esas propiedades y no quería usar tampoco deslizadores, pues no los controlaba suficiente, pues lo hice a la manera tradicional….Me gusta la Herramienta "LugarGeométrico", ya que no vas a construir nada al menos que entiendas bien lo matemático y lo tecnológico. Porque se basa en sus propiedades, si no lo defines bien las propiedades es imposible que hagas el "Lugar Geométrico" (MA., entrevista, video 26, 5:00- 8:00).

El análisis estadístico jerarquizado implicativo de las resoluciones de los 24 estudiantes relativas a los tres problemas mediante las variables tipología de resolución con la herramienta "LugarGeométrico" y "EcuaciónLugar" en GeoGebra y tipología de dificultad indica una relación causal, con un índice de fiabilidad de al menos un 70%, entre las siguientes variables: *D4Geo* (Bloqueo en el control global de las diferentes génesis de trabajo geométrico Herramienta "LugarGeométrico") —(.80)—D32Geo. Dificultades sobre dependencia de objetos en geometría dinámica—(.85)—D3Geo. Dificultades asociadas con la génesis instrumental—(.70)—RP1-EC (resolución del problema 1 mediante "EcuaciónLugar"—(.85)—RP3-EC (resolución del problema 3 mediante "EcuaciónLugar"). (Figura 5)

Fig. 5: Relación entre los distintos indicadores

Este resultado pone de manifiesto que aquellos sujetos que han sido capaces de resolver correctamente el problema 1 y 3 mediante la Herramienta "Ecuación Lugar" en GeoGebra han aportado más información y son conscientes de dificultades asociadas con la génesis instrumental y las dificultades en la transición entre génesis semiótico-figural e instrumental y discursiva.

4.2. Herramientas y preferencias

Como se indicó en la sec. 3 en la valoración de las herramientas se tuvieron en cuenta distintos criterios de calidad de acuerdo con la finalidad del diseñador: el primer nivel de evaluación para cada solución/imagen esperada, exactitud-precisión matemática y satisfacción con el resultado matemático (Tabla 3).

	Herramienta "LugarGeométrico" en GeoGebra	**Herramienta "EcuaciónLugar" en GeoGebra**	**Herramienta "LocusGC"**
Valoración de lo esperado	91% (22 p.)	75% (18 p.)	58% (14p)
Valoración de exactitud	70% (17p)	79% (19p	70% (17p)
Valoración de satisfacción	88% (21)	75% (18 p)	70% (17p)

Tabla 3: Criterios de calidad para la herramienta (porcentajes y dominios).

El grupo considera con más alta valoración la Herramienta 1 "LugarGeométrico" en GeoGebra. Las razones que alegan están más relacionadas con el espacio de trabajo idóneo –producto de la transposición que intenta hacer de un conocimiento para enseñarlo en el aula de Secundaria– que con su propio estudio como "matemático". En sus propias palabras:

- 1- La Herramienta 1 “LugarGeométrico”, una herramienta más apropiada para la comprensión y profundización en las propiedades geométricas, sirve más para explorar y trabajar el razonamiento geométrico y visual con los alumnos de Secundaria:

“Con la Herramienta “Ecuación Lugar” pasas del campo de la Geometría a ver ecuaciones. Esta herramienta te da de forma sencilla y rápida qué ecuación verifica matemáticamente, pero la Herramienta 1 “LugarGeométrico” es más satisfactoria para mi para un estudiante de Secundaria, porque te permite verificar que has comprendido bien y se ha construido bien a partir de las propiedades definidas. Es verdad que “Ecuación Lugar” es una forma sencilla y rápida de obtener la ecuación y puedes explorar otras propiedades a partir de la ecuación. Me gusta por la sencillez. Pienso que es un comando útil.” (M. A., entrevista, video 27, 1:20- 4:09).

- 2.- La Herramienta 1 “LugarGeométrico”, una herramienta más intuitiva:

“Es más intuitivo porque lo ves, ves cómo pasan los puntos, como hace, como se traza según vas moviendo un deslizador u otro, ves cómo va deslizándose el punto y como va dibujándose. Lo que tu esperabas lo ves dibujándose. Con la Herramienta “EcuaciónLugar”, sale todo y sale bien…. pero sale como si fuera una seta, no sabes muy bien de donde sale, con esta herramienta no ves tan intuitiva lo que significa el Lugar Geométrico.. porque sale directamente la ecuación….(EL, Entrevista, video 34, 1:30-2:28).

“A los alumnos de Secundaria con la traza es muy claro … No es tan importante la ecuación, salen una ecuación con unos numeracos que no sirve de nada …. no sirve de nada ver una ecuación así con estos números tan altos. No se que herramienta puede ser eso para un estudiante de secundaria, no le veo la utilidad” (EL., Entrevista, video 34, 3:30-4:10).. (Entrevistador ¿qué utilidad le podrías sacar de cara a la sinergia pensamiento visual y algebraico?) “Ahí si lo veo más, pero depende que elipse vas a hacer, si es sencilla, perfecto. A los alumnos les tira para atrás los números raros (EL., Entrevista, video 34, 5:14-2:28).

- 3.- La Herramienta 1 “LugarGeométrico” versus Herramienta 2 “EcuaciónLugar” porque coincide con la imagen mental:

“Yo creo, … el comando LugarGeométrico … es bastante útil, pero ya que va … la EcuaciónLugar parece que engloba. También por ejemplo, desde el punto de vista de un profesor, si estoy intentando explicar una Geometría que no es totalmente analítica, me parece más adecuado utilizar la Herramienta “EcuaciónLugar” principalmente por las limitaciones que le estás dando al alumno, decir ¿Cómo lo harías? si en clase hemos estado haciendo construcciones con compás, con regla… intentar trasladar eso a una tecnología. Pues cómo se haría y además obtienes la ecuación, que no la puedes obtener al dibujarla sobre un papel. Entonces yo creo que conecta lo que el alumno hace, puede hacer sobre el papel, con una cosa que en principio no podría calcular de forma sencilla. Y utilizar tecnología para mejorar ese… esa comprensión de las figuras. Entonces, a mi particularmente me gustó mucho la "EcuaciónLugar" (JU., entrevista, video 33, 6:18-7: 47).

En el análisis estadístico jerarquizado implicativo de las resoluciones de los 24 estudiantes en relación a sus valoraciones y a su percepción e imagen mental inicial de los lugares geométricos de los tres problemas, el grafo implicativo indica, en una relación causal con un índice de fiabilidad de al menos un 80%, que los resolutores que perciben (imaginan) el lugar geométrico del P1 y P2 son los que realmente han realizado la resolución mediante el comando LugarGeométrico . RP1-1-- (.85)—PercepLGP1 y RP2-1—(.80)—PercepLGP2. (Figura 6, ver anexo 2)

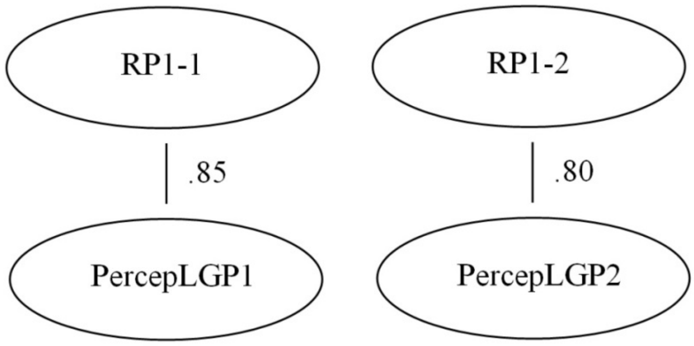


Fig. 6: Relación entre los distintos indicadores

Además, el árbol de similitudes (Fig. 5) entre las tipologías de resolución con la Herramienta 1 "LugarGeométrico" y la Herramienta 2 "EcuaciónLugar" genera 6 nodos significativos asociados en tres grupos, donde se pone de manifiesto que no son capaces de resolver con la Herramienta 2 "EcuaciónLugar" los que lo hacen por traza o utilizan otras formas alternativas de construcción, existiendo un grupo de alumnos que resuelve los problemas mediante traza, dando por válido esta aproximación numérica y no buscando otras soluciones más precisas geométrica y algebraicamente.

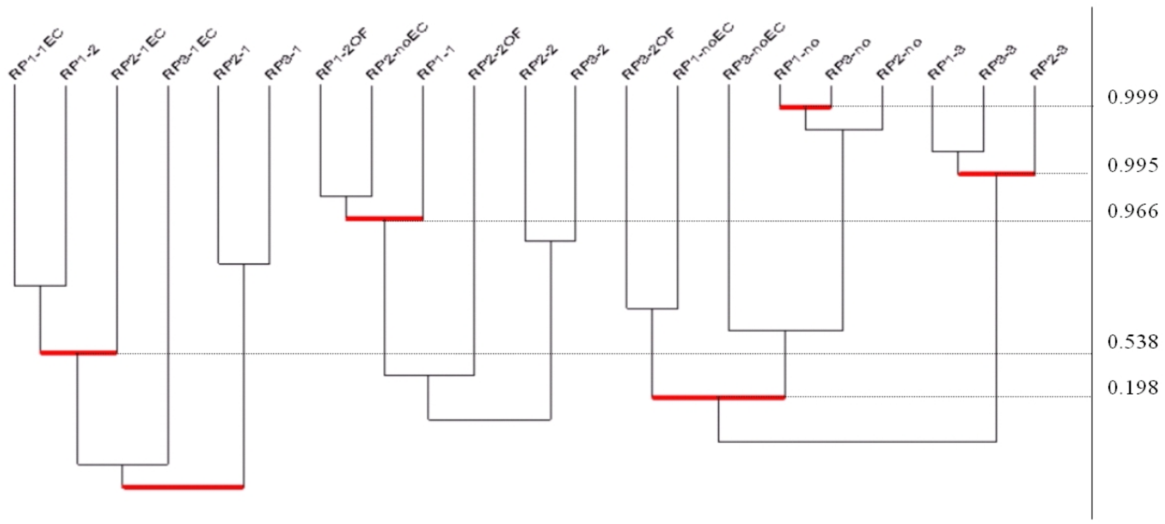


Fig. 5 Árbol de Similitudes.

4.3. Modelización y sinergia entre lo gráfico y lo algebraico

Basándonos en los datos procedentes del segundo nivel de comparación de las herramientas y el análisis de bloqueos relaciones entre tecnología, modelización y contenido matemático pasamos a ver en profundidad algunas de las características matemáticas y didácticas prescritas por el experto en el diseño de la herramienta (para un espacio ETM idóneo) desde el punto de vista del futuro profesor.

4.3.1. Intersecciones

Con el análisis de las intersecciones entre Modelización ∩ Contenido Matemático, Modelización ∩ Tecnología y Contenido Matemático ∩ Tecnología se buscaba identificar y documentar niveles característicos de ejecución, la coincidencia o ausencia de bloqueos, el respectivo uso numérico, gráfico y algebraico de las aproximaciones, calidad de la argumentación y respectivas interacciones. En definitiva cómo se ha utilizado la tecnología para verificar el modelo algebraico.

Las interacciones más destacadas por más de un 70% se aglutinaron en torno a: Modelización ∩ Tecnología y Contenido Matemático ∩ Tecnología.

	Puntos significativos
Modelización ∩ Contenido Matemático	Deconstrucción del problema geométrico, determinando los elementos simples necesarios para la representación de la figura. Traducción de elementos intuitivos en una formalización matemática.
Modelización ∩ Tecnología	Una vez determinados los elementos básicos de la construcción, localizar las herramientas adecuadas de GeoGebra que los representan. Esto puede llevar a una revisión de la modelización.
Contenido Matemático ∩ Tecnología	Interpretación adecuada de los resultados obtenidos por GeoGebra, teniendo en cuenta la posibilidad de representaciones aproximadas, respuestas parciales, casos degenerados … Contraste entre el mundo algebraico y las representaciones numéricas.

Tabla 4: Intersecciones modelización, tecnología, matemáticas.

La intersección Modelización ∩ Tecnología en el grupo se puso más de manifiesto en el problema 1, que es el que resultó más complicado al no tener el resolutor una referencia clara de qué forma definir la dependencia para el lugar geométrico y tratarse de un problema de modelización. También, en el uso de la Herramienta 2, la incompatibilidad de los deslizadores y los valores fijos con la Herramienta "EcuaciónLugar" generó muchos problemas y frustraciones en el resolutor. Una gran parte de los futuros profesores, para superar esta dificultad, usó como estrategia la herramienta compás.

Hacemos notar respecto a la intersección Contenido Matemático ∩ Tecnología que la transcripción de contenido matemático a un programa informático como GeoGebra, o la interpretación de los resultados obtenidos por el programa, no es un proceso trivial. Hay conceptos matemáticos ("sea a un número real", "sea P un punto genérico") que necesitan ser modelizados con las herramientas adecuadas si queremos utilizar GeoGebra. Un caso típico son los números reales que, en la gran mayoría de los lenguajes y sistemas informáticos, son tratados como operadores numéricos ("coma flotante"). Por otra parte, en las respuestas dadas por GeoGebra es necesario tener en cuenta esta aproximación numérica que puede llevar a representaciones aproximadas o a respuestas incorrectas. Precisamente, las herramientas "EcuaciónLugar" o "LocusGC" intentan evitar estas aproximaciones y dar respuestas exactas.

4.3.2. Sinergia entre lo gráfico y lo algebraico

La Herramienta "LocusGC" está basada en técnicas de eliminación algebraica e implementa el "Gröbner Cover Algorithm". Esto permite la eliminación de componentes degeneradas para un amplio rango de lugares geométricos. Además, es una herramienta web que no necesita ningún tipo de instalación, sólo una conexión a internet. "LocusGC" no sólo proporciona dibujos precisos, libres de componentes extrañas, sino que además proporciona ecuaciones e identifica situaciones difíciles de localizar desde el punto de vista gráfico (como la existencia de puntos aislados) (Ver Figura 2). En el grupo de futuros profesores "LocusGC" se percibe como una herramienta que puede propiciar la sinergia entre una intuición gráfica del concepto y una intuición analítica-algebraica.

La insistencia al comparar las Herramientas "EcuaciónLugar" y "LocusGC" acentúa la necesidad del conocimiento del profesor respecto al significado de las discontinuidades que actúan en la construcción del lugar geométrico y cómo quedan expresadas algebraicamente. Hay un porcentaje alto de futuros profesores que no reparan en esta problemática y entre aquellos que si son conscientes se plantea la discusión sobre qué herramienta enseña más a un estudiante de Secundaria (¿es ayudador mostrar de forma ostensible los puntos degenerados?).

La percepción de los futuros profesores sobre la competencia de las herramientas desde el punto de vista de tipos de funcionamiento semiótico-figural, instrumental y discursivo pone de manifiesto algunos aportes útiles para el educador matemático y para el desarrollar de la herramienta en un ETM idóneo. En las herramientas bajo el paradigma de los SGD la resolución intuitiva está cristalizada con frecuencia en una concepción cerrada en la incompletitud y la vaguedad de información está enmascarada mediante mecanismos especiales que producen un sentimiento de inmediatez, coherencia y confianza. Inmediatez en el sentido de evidencia intrínseca y la coherencia y la confianza - en el sentido de la certeza (la sensación de certeza).

5. CONCLUSIONES

En el estudio se ha partido del análisis del ETM personal y del ETM de referencia para precisar los elementos que organizan un espacio de trabajo efectivo para problemas de Lugares Geométricos. Las valoraciones que realiza el grupo del ETM idóneo según las tres herramientas informáticas y según las categorías evaluadas (intuición, exactitud, visualización-modelización algebraica) por parte de los futuros profesores se muestran inestables y altamente dependientes de tipologías de resolución, característica de la tarea y procesos de percepción-visión inicial de los lugares geométricos.

Se constata un salto entre el ETM de referencia definido por los matemáticos expertos que han desarrollado el prototipo "LocusGC" que da importancia a la obtención de una información algebraica exacta y la ejecución y valoración de los futuros profesores. En los ejemplos observados resulta de interés el destacar los bloqueos entre varios planos de interacción en las génesis: plano Discursivo-Instrumental y plano Visual-Figural-Instrumental. Los sujetos que informan más conscientemente sobre este tipo de dificultades son aquellos que han resuelto los problemas por "LugarGeométrico" o por "LugarGeométrico con deslizador". Este nivel de consciencia puede implicar que su ETM personal es más preciso matemáticamente. Además, son estos mismos sujetos los que avanzan en la resolución de los problemas utilizando las otras herramientas (a veces con dificultades). Estos estudiantes demuestran un mayor conocimiento matemático e interés por las herramientas informáticas con potencial didáctico.

Se pone de manifiesto que no basta con el simple manejo técnico de la herramienta "LugarGeométrico", sino que se necesita un conocimiento matemático que permita ser consciente, a su vez, de las limitaciones de la herramienta. "LugarGeométrico" da respuestas parciales y aproximadas, y en determinadas situaciones didácticas es interesante una representación más precisa, que se puede obtener con "EcuaciónLugar". Así obtenemos una representación algebraicamente exacta en situaciones generales, junto con la ecuación del lugar. Tal como han señalado algunos estudiantes, esto permite estudiar problemas "reales" y no limitarnos a problemas "preparados" con soluciones simples.

Sin embargo, este paso del mundo numérico al mundo algebraico no está exento de problemas. La potencia de los algoritmos utilizados en la generación de la curva que contiene el lugar (que de hecho es su clausura algebraica) produce a veces componentes "extraños" que consideramos que no pertenecen realmente al lugar que queremos representar (como en el problema 2) o no permite identificar situaciones asintóticas en la construcción del lugar (problema 3). La Herramienta "LocusGC" pretende cubrir esta problemática pero para comprenderse mejor su eficacia se hace necesario que el estudiante para profesor se haga consciente de los resultados aberrantes (inexactos, imprecisos) debidos a discontinuidades o errores numéricos y cómo manejarlo en un espacio de trabajo "idóneo", lo que requiere mayores conocimientos matemáticos y técnicos en su formación.

REFERENCIAS

Botana, F. (2002) Interactive versus symbolic approaches to plane loci generation in dynamic geometry environments, Lectures Notes in Computer Science 2330, 211-218

Botana, F. (2007) *Bringing more intelligence to dynamic geometry by using symbolic computation*, In Shangzhi Li, Dongming Wang y Jing-Zhong Zhang (Eds). Symbolic Computation and Education (pp. 136- 150).World Scientific, pp. 136-150.

Botana, F. y Abánades, M. A. (2014) Automatic deduction in (dynamic) geometry: Loci computation, Computational Geometry: Theory and Applications, 47 (1) 75-89

Botana, F. y Valcarce, J. (2003) A software tool for the investigation of plane loci, Mathematics and Computers in Simulation 61 (2) 139-152

Coutat, S. & Richard, P. (2011) Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 97-126.

Couturier, R. (2007). CHIC: utilisation et fonctionnalités. En R. Gras; P. Orús; B. Pinaud y P. Gregori (Eds.), *Nouveaux ApportsThéoriques à l´Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp.41-49). UniversitatJaume I: Castellón.

Drijvers, P. Doorman, M., Boon, P., Reed,, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), pp. 213-234.

Gómez-Chacón, I. Mª y Kuzniak, A. (2013) Geometric Work Spaces: Figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment, International Journal of Science and Mathematics Education, DOI: 10.1007/s10763-013-9462-4

Gómez-Chacón, I. Mª y Escribano, J. (2014 aceptado) Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis, Relime, Revista latinoamericana de investigación en matemática.

Gómez-Chacón, I. Mª y Escribano, J. (2011) Teaching geometric locus using GeoGebra. An experience with pre-service teachers. GeoGebra International Journal of Romania (GGIJRO), GeoGebra The New Language For The Third Millennium,2 (1), 209-224.

Gras, R., Peter, P., Briand, H. y Philippé, J. (1997). Implicative Statistical Analysis, In Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock & Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies* (Vol. 2, pp. 412-419). New York: Springer-Verlag.

Guin, D., Ruthven, K. and Trouche, L. (Eds.) (2004).*The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*.New York: Springer.

Kuzniak, A. (2011) L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*s 16 9–24.

Kuzniak, A. (2006), Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences*, des mathématiques et des technologies, 6.2, 167–187.

Montes, A. y Wibmer, M. (2010) Gröbner bases for polynomial systems with parameters. Journal of Symbolic Computation 45 (2010) 1391–1425

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*.Paris: Université Paris 8.

Rabardel, P. y Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with Computers*, 15, pp. 665-691.

GeoGebra wiki, http://wiki.geogebra.org/en/LocusEquation_Command

LocusGC, http://webs.uvigo.es/fbotana/LocusGC/

SDG List, http://en.wikipedia.org/wiki/Interactive_geometry_software

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/ machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), pp. 281-307.

ANEXOS

Anexo 1: Protocolo de resolución

1. Para cada uno de los problemas realiza un protocolo detallado de tu proceso de resolución del mismo. Puedes utilizar el formato que viene a continuación. Ayúdate de imágenes del GeoGrebra para hacer la descripción. Además de hacer el protocolo deberás adjuntar el archivo GeoGebra.

Razonamientos matemáticos, diagramas, operaciones, etc.	Manejo del programa GeoGebra (posibilidades, dificultades, elementos instrumentales que te ayudan), etc…

Anexo 2: Ejemplo de cuestionario online

Cuestionario 1 online: Herramienta, competencia y preferencias
https://docs.google.com/a/ucm.es/forms/d/1AkujIgjD2QeeZh1_cO5EV9Kb08wTqsMrRuG_TAX3G-g/viewform

Anexo 3: Codificación de variables en el Análisis Estadístico Implicativo (SIA)

1. Tipología de resolución de los problemas

1.1. Resolución con la Herramienta 1: LugarGeométrico en GeoGebra

RP1-1 Resolución problema 1 con LugarGeométrico

RP2-1 Resolución problema 2 con LugarGeométrico

RP3-1 Resolución problema 3 con LugarGeométrico

RP1-2 Resolución problema 1 con LugarGeométrico con deslizador

RP2-2 Resolución problema 2 con LugarGeométrico con deslizador

RP3-2 Resolución problema 3 con LugarGeométrico con deslizador

RP1-3 Resolución problema 1 con TRAZA

RP2-3 Resolución problema 2 con TRAZA

RP3-3 Resolución problema 3 con TRAZA

RP1-no No resuelve problema 1

RP2-no No resuelve problema 2

RP3-no No resuelve problema 3

1.2. Resolución con la Herramienta 2= EcuaciónLugar

RP1-1EC Resolución problema 1 con Ecuacion

RP2-1EC Resolución problema 2 con Ecuacion

RP3-1EC Resolución problema 3 con Ecuacion

RP1-2OF 1EC Resolución problema 1 con otras formas, pero correcta

RP2-2 OF

RP3-2OF

RP1-noEC, no resolución

RP2-noEC

RP3-noEC

1.3. Resolución con la Herramienta 3= LocusGC [28]

DF: Alumnos que tienen dificultades en la utilización de la herramienta.

PC: posible respuesta "políticamente correcta", es decir, que haya tenido dificultades pero que no lo reconozca. Es posible que haya "contaminación" por parte del profesor.

[28] En este caso, la separación de los diferentes problemas no es significativa, ya que las dificultades/opiniones/bloqueos tienen que ver con la herramienta LocusGC en general.No se ha incluido el campo "La construcción funciona correctamente" porque pocos estudiantes afirman que sus construcciones funcionan todas correctamente, e incluso en esos casos, la contestación no me parece fiable.

IC: interpretación correcta. Se interpreta correctamente la respuesta obtenida con LocusGC, en comparación con la obtenida mediante “Ecuación Lugar”.
VP: valoración positiva de LocusGC
VMX: valoración de la información extra que proporciona LocusGC, es decir, el mensaje que genera Sage.

2. Tipología de dificultad identificadas conscientemente y explicitadas por los sujetos

2.1. Dificultades en el uso de la Herramienta 1: LugarGeométrico en GeoGebra

D1- Geo Dificultades en la comprensión e interpretación del problema, fase inicial de la resolución del problema.
D2-Geo Dificultades en relación a la génesis visual-figural (visualización)
D3- Geo Dificultades asociadas con la génesis instrumental
D31- Geo Dificultades asociadas con los comandos del software y el significado matemático
D32- Geo Dificultades sobre dependencia de objetos en geometría dinámica
D4- Geo Bloqueo en el control global de las diferentes génesis del trabajo geométrico
D41- Geo Bloqueo del paso del razonamiento discursivo al instrumental
D42- Geo Bloqueo del paso del razonamiento visual al analítico-algebraico.
D43- Geo Bloqueo del paso del razonamiento visual al razonamiento instrumental
D44- Geo Bloqueo en el uso de LOCUS

2.2. Dificultades en el uso de la Herramienta 3: LocusGC prototipo

D1-W Dificultades en la comprensión e interpretación del problema, fase inicial de la resolución del problema.
D2- W Dificultades en relación a la génesis visual-figural (visualización)
D3-W Dificultades asociadas con la génesis instrumental
D31-W Dificultades asociadas con los comandos del software y el significado matemático
D32-W Dificultades sobre dependencia de objetos en geometría dinámica
D4-W Bloqueo en el control global de las diferentes génesis del trabajo geométrico
D41-W Bloqueo del paso del razonamiento discursivo al instrumental
D42-W Bloqueo del paso del razonamiento visual al analítico-algebraico.
D43-W Bloqueo del paso del razonamiento visual al razonamiento instrumental
D44-W Bloqueo en el uso de LocusGC

3. Valoración y Percepción de los futuros profesores sobre la competencia de las herramientas

Herramienta 1: LugarGeométrico en GeoGebra : Val-1-Es (esperado), Val-1-Ex (exacta), Val-1-Satis (satisfecho)
Herramienta 2: = EcuaciónLugar en GeoGebra: Val-2-Es (esperado), Val-2-Ex (exacta), Val-2-Satis (satisfecho)

Herramienta 3: LocusGC prototipo: Val-3-Es (esperado), Val-3-Ex (exacta), Val-3-Satis (satisfecho)

4. Comparaciones entre la competencia de las herramientas. Funcionamiento semiótico-figural, instrumental y discursivo

4.1. Comparaciones entre la Herramienta 1: LugarGeométrico en GeoGebra y Herramienta 2: = EcuaciónLugar

C1-sast = más satisfactoria que la anterior

C2-Int = es más intuitiva que la anterior

C3-Ex = más precisa matemáticamente que la anterior

C4-VIAL = más sinergia entre visualización y lenguaje algebraico

C5-Apre = EcuaciónLugar[locus] mejora la calidad del aprendizaje matemático

4.2. Comparaciones entre la Herramienta 2: = EcuaciónLugar y Herramienta 3: LocusGC Prototipo

C1-w-sast = más satisfactoria que la anterior

C2-w-Int = es más intuitiva que la anterior

5. Percepción inicial de la representación del de Lugar Geométrico

PercepLGP1= Percepción inicial de la representación del Lugar Geométrico del problema 1

PercepLGP2= Percepción inicial de la representación del Lugar Geométrico del problema 1

PercepLGP1= Percepción inicial de la representación del Lugar Geométrico del problema 1

6. Genero

sm s = varon

sf s= muj

7. Experiencia profesional

s-est s = estudiante

spro s= profesional

SIGNES ET OUTILS TECHNOLOGIQUES: OBSTACLES POUR UNE « BONNE » INTERACTION ENTRE LE CALCUL INTEGRAL ET LES LOIS DE PROBABILITE A DENSITE?

Charlotte Derouet, Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot (Paris 7);

DEUX THEMES MATHEMATIQUES ET UN OBJET MATHEMATIQUE COMMUN

Le calcul intégral et les lois de probabilités à densité sont deux thèmes mathématiques abordés en classe de Terminale Scientifique (dernière année de lycée) en France. En probabilités, les lois uniformes dans leur généralité, les lois exponentielles et les lois normales sont introduites. L'étude des lois à densité permet d'étendre certaines notions vues sur les probabilités discrètes, dans les classes antérieures, mais aussi, comme le mentionnait l'ancien programme (BO spécial n°4 du 30 août 2001), il s'agit d' « une application de ce qui aura été fait en début d'année sur l'exponentielle et le calcul intégral ». Bien que ceci ne soit pas précisé dans le nouveau programme, le lien entre calcul intégral et lois à densité est immédiat, notamment en termes de définitions. On définit « l'**intégrale** d'une fonction continue et positive sur $[a; b]$ comme **aire sous la courbe** », d'une part, et « on admet que X[une variable aléatoire, fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de $\mathbb{R}$] satisfait aux conditions qui permettent de définir la **probabilité** de l'événement$X \in J$comme **aire du domaine** :

$\{M(x; y); x \in J \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I», d'autre part. Pour les deux notions (nous nous limitons au cas où la fonction est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ pour le calcul intégral), la référence à l'aire sous la courbe d'une fonction (continue et positive) est présente. Dans notre recherche, nous nous demandons dans quelle mesure le programme permet des interactions entre ces deux thèmes mathématiques. Notre travail s'inscrit dans le cadre théorique des Espaces de Travail Mathématique et essaie de mettre en avant les intersections et les interactions entre les espaces de travail relatifs au calcul intégral et aux lois à densité. Ici, nous allons plus particulièrement nous intéresser aux signes et aux outils technologiques utilisés dans ces deux espaces de travail mathématiques, centrés sur un objet commun (l'aire sous une courbe) mais pour autant mêlant des outils technologiques et des signes différents dans chacun d'eux. Nous ne ferons référence dans notre poster qu'aux espaces de travail idoines à quelques manuels de Terminale S.

Une diversité des signes

Les utilisations des signes et des outils technologiques sont, entre autres, véhicules de connaissances et nécessairement affectent le travail mathématique. L'analyse de différents manuels nous permet de mettre en évidence de fortes différences d'utilisations des signes en calcul intégral et en probabilités à densité bien que l'objet central de ces deux thèmes mathématiques soit des calculs d'aires sous la courbe. Dans notre poster, nous listerons l'ensemble des signes, ou représentations sémiotiques, utilisés dans deux manuels dans les deux chapitres qui nous intéressent. En voici un extrait :

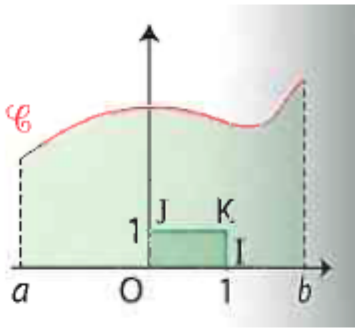
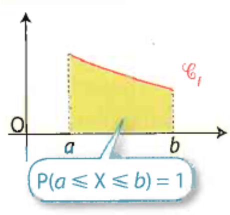
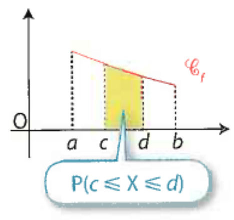
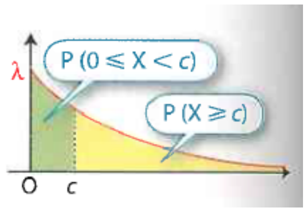
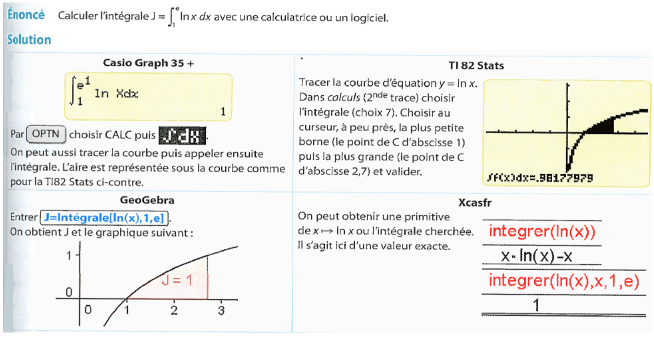
Calcul intégral	**Lois à densité**
f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Signe 1 : L'intégrale de a à b de la fonction f. Signe 2 : $\int_a^b f(x)dx$; $\int_a^b f(t)dt$; ... Signe 3 : L'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe représentative de f. Signe 4 :  Signe 5 : $F(b) - F(a)$, avec F une primitive de f. Signe 6 : $[F(x)]_a^b$	X une variable aléatoire continue à valeurs dans un intervalle I et f une fonction densité (continue, positive sur I et telle que $\int_I f(x)dx = 1$ [cette notation n'est pas utilisée dans les manuels]). Signe 1' : $P(X \in J)$, avec J un intervalle inclus dans I. Signe 2' : L'aire du domaine $\{M(x; y); x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ Signe 3' : $P(X \in J)$; $P(c < X \leq d)$; $P(c \leq X < d)$; $P(c < X < d)$ avec $[c; d]$ un intervalle inclus dans I. Signe 4' : Cas où $I = [a; b]$  Signe 5' : $\int_c^d f(t)dt$ Signe 6' : $P(X \geq c)$ Signes 7' : Cas où $I = [0; +\infty[$ 

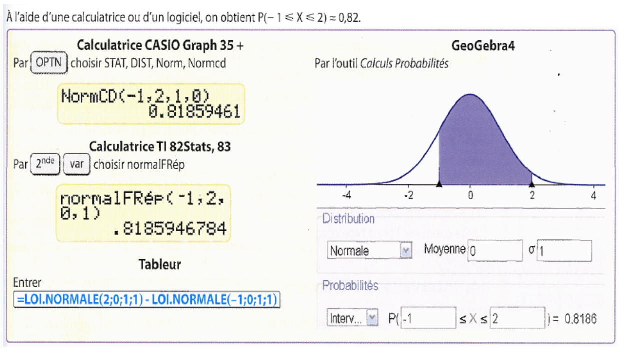
Table 1 : Signes rencontrés dans les manuels Hyperbole (2012) et Math'x (2012)

Ce sont ensuite les dynamiques entre ces signes de registres divers, notamment dans les démonstrations, que nous mettrons en avant, pour révéler ou non des liaisons possibles entre calcul intégral et calcul de probabilités.

Des outils technologiques communs mais des utilisations différentes

Dans ces deux thèmes, nous pouvons aussi remarquer de grandes différences dans les utilisations des outils technologiques. Dans le manuel Math'x, par exemple, nous remarquons que pour calculer une intégrale (à gauche) et calculer une probabilité (à droite), les outils technologiques à utiliser peuvent être différents : par exemple, le logiciel de calcul formel Xcas n'est utilisé que pour le calcul d'intégrale et le tableur n'est utilisé que pour le calcul de probabilité. Mais même dans le cas de mêmes outils technologiques, les utilisations sont différentes : par exemple, les fonctionnalités, de la calculatrice ou du logiciel, mises en jeu ne sont pas de même nature.





Nous prendrons, dans notre poster, l'exemple du calcul de l'intégrale $\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ et du calcul de la probabilité $P(-1 \leq X \leq 2)$ (avec X est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$) qui peuvent être traiter par le logiciel GeoGebra de façon totalement différente suivant que l'élève se situe dans un espace de travail relatif au calcul intégral ou un espace de travail relatif aux lois à densité bien qu'il s'agisse en fait du même calcul.

Des différences qui font obstacles aux interactions entre ETM

Les utilisations de signes et d'outils technologiques affectent et conditionnent le travail mathématique mais si ces systèmes de signes et ces environnement technologiques sont trop restreint à un espace de travail, elles empêchent de bonnes connexions entre espaces de travail. Dans les deux thèmes mathématiques que nous traitons nous pouvons repérer de fortes différences dans les utilisations que ce soit des signes et des outils technologiques. Cela ne crée-t-il pas des espaces de travail qui ont des difficultés à communiquer bien que l'objet central « derrière » soit le même ?

REFERENCES

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 5-32.

DUVAL, R. (1995), Sémiosis et pensée humaine, *Peter Lang, Bern*.

ECO, U. (1988), *Le signe. Histoire et analyse d'un concept*, Bruxelles : Labor.

KUZNIAK, A. (2011), L'espace de Travail Mathématique et ses genèses, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 16, 9-24.

EVALUACIÓN DEL USO DEL PIZARRÓN ELECTRÓNICO COMO ENTORNO TECNOLÓGICO MEDIADOR PARA LA ENSEÑANZA DE TÓPICOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA FACULTAD DE INGENIERÍA.

Ruth Elba Rivera, Maximiliano De Las Fuentes, Elia Leyva y Ana Dolores Martínez.

Facultad de Ingeniería Mexicali, Universidad Autónoma de Baja California, México.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación han provocado una verdadera transformación social y el entorno educativo no puede quedarse al margen. El pizarrón digital interactivo (PDI), surge como una actualización del pizarrón tradicional, por lo tanto es importante aprovechar su funcionamiento como herramienta educativa mediadora de conocimiento. El interés como profesores es evaluar esta herramienta de manera formal y evidenciar su utilidad para abordar temas de cálculo diferencial, comparando la eficiencia de los conocimientos que alcanza el estudiante al abordar conceptos en un esquema de enseñanza tradicional con otro que incorpora el PDI, el cual permite la visualización de dichos conceptos.

Palabras clave: *pizarrón digital interactivo, visualización, graficación, semiótica.*

INTRODUCCIÓN.

La tecnología y el internet han evolucionado de forma arrolladora a la mayoría de las Profesiones, el campo de la Educación no debe quedarse atrás, necesitamos evolucionar e integrar a nuestras aulas dichas herramientas con la finalidad de hacer más eficaz nuestro trabajo. En este marco surge el pizarrón digital interactivo, por sus siglas PDI, como actualización y adaptación del pizarrón tradicional. Por lo que consideramos importante aprovechar este entorno tecnológico y el funcionamiento de esta herramienta educativa como mediador de conocimiento, ¿qué tanto puede influir como artefacto en el trabajo matemático del estudiante? Se podrá manejar este "lienzo digital" en el cual se pueden colocar todo tipo de elementos; como textos, imágenes, animaciones, vídeos, páginas Web, actividades ya creadas procedentes de la red, de editoriales o de los mismos profesores, como un componente esencial en el trabajo matemático del estudiante. Consideramos que si, especialmente si el profesor recibe una adecuada formación en modelos de aplicación didáctica y diseños de estrategias que permitan aprovechar al máximo el PDI.

Nuestro interés como profesores es evaluar esta herramienta de manera formal para tener evidencias de su potencialidad como mediador para abordar temas de matemáticas, en particular de cálculo diferencial. Se tiene información sobre trabajos realizados en esta línea, principalmente sobre el apoyo del Internet para los profesores, por ejemplo Luzón, E. (1997), González P. A., Calderón, S., Hidalgo, R., Romero, C.(2010), por su parte nos dicen que enseñar matemáticas para un futuro experto en Economía, Ingeniería, etc., es difícil, ya que no es considerado un objetivo primordial, por lo tanto se requiere motivar a estos estudiantes con todos los medios de que se dispone y lograr que realicen las conexiones entre las matemáticas y las otras disciplinas que deben conocer según su elección profesional.

Según nuestras indagaciones la utilización del pizarrón digital facilita la comprensión, especialmente en el caso de conceptos complejos dada su potencialidad para utilizar videos, simulaciones e imágenes con las que es posible interaccionar. Permite que los alumnos puedan revisar los conceptos estudiados, dado que la clase o parte de las explicaciones pueden ser enviadas por el profesor a cada estudiante mediante el correo electrónico. Consideramos que este proyecto impacta de manera positiva para mejorar el quehacer profesor y sobre todo en el trabajo matemático de los estudiantes, siempre y cuando se obtenga un aprendizaje significativo.

Los cursos de matemáticas de nivel superior buscan que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos y que puedan ser aplicados en otros contextos diferentes al cual se aprendieron. En ellos, también se espera que los estudiantes desarrollen competencias y habilidades en el manejo de dichos conceptos en sus diferentes representaciones: algebraico, numérico, gráfico e inclusive en el lenguaje natural, que logren también competencias para modelar, plantear y resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje simbólico y formal. Esta acción presupone la plena comprensión de un concepto matemático, cuanto más si la situación de aprendizaje está enmarcada en un contexto físico, de ciencia o de ingeniería.

Al revisar las características de la enseñanza de las matemáticas para ingeniería, es factible percatarse del empirismo con el que los profesores atienden los procesos educativos. La mayoría son profesionales de alguna especialidad en la propia ingeniería, sin haber tenido preparación en el ámbito profesor, consideramos la falta de esquemas de profesionalización e incorporación de nuevas tecnologías, se observa también la carencia de programas de apoyo a los estudiantes.

La mayoría de las profesiones han cambiado sus prácticas supliéndolas por el uso de la tecnología y el internet. Actualmente el marco educativo y social en el que nos situamos requiere continuas adaptaciones. El avance desmesurado e imparable de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) obliga a revisar e introducir nuevos cambios y mejoras en el sistema educativo, por una parte en el análisis de la propia educación, sus concepciones, métodos y técnicas y por otra la necesidad de producir materiales pertinentes para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias, particularmente de las matemáticas, disciplina básica en la formación profesional de la ingeniería. Hay una falta de material educativo digital y los programas informáticos educativos son aún inadecuados.

El pizarrón (o pizarra) digital interactivo, por sus siglas PDI, es una herramienta perteneciente a las TIC. La Pizarra Digital Interactiva puede definirse como un sistema tecnológico el cual incluye un ordenador, un proyector de video y un dispositivo de control de puntero, que permite proyectar en una superficie interactiva contenidos digitales en un formato idóneo para visualización en grupo, con tales contenidos es posible interactuar directamente sobre la superficie de proyección, este sistema se origina como una aplicación de la innovación de pantallas digitales para generar clases más vistosas y atractivas, tanto para profesores como para alumnos. Así mismo aumenta el proceso de interacción y de participación en la clase, con ellos también se utilizan nuevas fuentes de recursos (internet, webquest, video, audio,…etc.) las cuales no son posibles en un pizarrón tradicional. Estas cualidades del PDI brindan un enriquecimiento en la enseñanza y el aprendizaje. En la sociedad del conocimiento el profesor debe adaptar su metodología a las necesidades y recursos actuales, mismos que pueden estar disponibles en el aula a través del PDI, así como la creación de recursos propios integrando objetos multimedia disponibles.

El PDI ofrece al profesor entre otras cosas, la manipulación fácil y rápida de textos e imágenes y tomar apuntes digitales, utilizar la web y sus recursos ante toda la clase, mostrar videos y facilitar el debate, animaciones y simulaciones forman parte también de las posibilidades de la PDI. Utilizar y demostrar diferentes tipos de software, guardar notas para la posterior revisión, usar el correo electrónico para proyectos colaborativos, crear lecciones digitales con imágenes y sonidos. El PDI se puede dotar de interactividad, solo se necesitan adquirir todas las técnicas necesarias para diseñar un plan de introducción e integración efectiva. La Pizarra Digital Interactiva es un recurso de grandes posibilidades educativas para los profesores (Domingo, Cacheiro y Dulac, 2009). En general la PDI proporciona un mayor potencial didáctico y permite la visualización de gráficos.

Se tiene información sobre trabajos realizados en esta línea, principalmente sobre el apoyo del Internet para los profesores, por ejemplo Luzón E, dice (como se cito en González P., A, et al, 2010): "el internet es un universo que contiene ilimitadas oportunidades de aprendizaje siendo, en definitiva, una ayuda excepcional para que el estudiante se independice en su proceso formativo y aprenda cómo aprender".

Las PDI han sido ampliamente utilizadas en varios países por las instituciones encargadas gubernamentalmente de la educación en diferentes niveles, se han publicado artículos sobre las potencialidades de su uso, como lo menciona Gandol et al (2012) "Esta expansión implica un coste sustancial para la compra, mantenimiento y formación del personal, bajo la creencia de que su uso incrementará la motivación y la atención entre los alumnos".

En Villarreal (2006) se diseñó e implementó una estrategia didáctica para abordar el concepto de función, aunque en la evaluación final la diferencia no es significativa entre los grupos de control y experimental, en este último los profesores tuvieron la posibilidad de promover las discusiones, observar los avances de sus alumnos, detectar dificultades y responder dudas individuales. Pero a pesar de los años de implementación y de lo mucho que se ha escrito sobre el potencial de las PDI (Cabero, 2004; Hervás & Toledo, 2010), la investigación sobre su impacto en el aprendizaje todavía es escasa.

Por mencionar otro ejemplo, Solís (2010) realizó una investigación sobre el efecto del trabajo con la PDI respecto a los estilos de aprendizaje en la clase de inglés en primaria, el concluye que es muy interesante indagar si la presentación de palabras y dibujos a través de la PDI fomentan el aprendizaje en inglés. Con respecto de las matemáticas las representaciones de conceptos, propiedades, etc. llamados objetos matemáticos, su visualización es a través de palabras, símbolos e imágenes abstractas que después en la práctica adquieren un carácter real concreto como las medidas que varían en tiempo y espacio. En consecuencia investigar si las PDI al poseer estas capacidades de presentar atractivamente la forma visual de los objetos matemáticos, así como la adición de su capacidad auditiva y quinestésica es un campo fértil para mejorar la labor profesor y lograr el aprendizaje significativo.

De los documentos revisados se han encontrado algunos encaminados en la búsqueda de una plataforma ideal o bien de un software con herramientas que se puedan utilizar en el PDI, un ejemplo es el proyecto TARIMA, desarrollado por profesores de la Universidad de Málaga, España (González P., A. et al, 2010). En este documento se muestra que es posible conformar una plataforma con las herramientas necesarias para apoyo de cursos en el área de matemáticas y Ciencias, en donde se pueda tener acceso a Internet y a software adecuados para el buen desarrollo de los temas. Otra investigación de interés es la desarrollada en la Universidad Autónoma de Guadalajara, en México (Garibay B., G. 2008). En este documento se ponen en evidencia la utilidad y grado de aceptación del PDI, por parte de los profesores de 8 grupos de diversas carreras y un total de 88 alumnos. Los objetivos planteados fueron: evaluar la usabilidad del pizarrón interactivo en el proceso educativo y evaluar la aceptación y agrado de alumnos y maestros hacia el uso de esta herramienta. A la fecha no se han detectado documentos que evalúen al PDI como una herramienta de manera formal y sobre todo que establezcan su utilidad para el desarrollo didáctico de temas difíciles de matemáticas.

La Universidad Autónoma de Baja California (UABC) ha tomado iniciativas alrededor de las evaluaciones a gran escala de sus estudiantes, algunas son externas como el Examen General de Egreso de Licenciatura (EGEL) y en algunas Unidades Académicas también se ha aplicado el Examen Intermedio de Licenciatura (EXIL), de hecho la modificación del Estatuto Escolar de la UABC que se hizo en el año 2006 señala la obligatoriedad respecto de la presentación de exámenes departamentales, de trayecto y de egreso con el propósito de determinar el grado de aprendizaje de los alumnos. Otros son internos, como los exámenes colegiados criteriales diseñados en las áreas de ingeniería, administración y la salud, en todos los casos se busca como fin mejorar la calidad tanto de la enseñanza como del aprendizaje.

Por tanto recabar evidencias de que la PDI contribuye a mejorar y/o incrementar el aprendizaje es una área de oportunidad para contribuir a este primordial objetivo y sobre todo en el área de matemáticas, que es una de las materias que a lo largo del tiempo ha sido catalogada como causa de deserción escolar en los niveles de educación media superior y superior.

El objetivo de la investigación es comparan la eficiencia de los conocimientos que alcanzan los estudiantes al abordar conceptos matemáticos de cálculo diferencial a partir de un esquema de enseñanza tradicional con otro que incorpora el entorno tecnológico, específicamente el PDI, con la finalidad de evaluar dicha herramienta para poder diseñar e implementar estrategias que redunden en la mejora del proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para las ingenierías.

Como objetivos particulares podemos mencionar: el identificar que problemas se pueden presentar al introducir el PDI, como una herramienta de aprendizaje en los cursos de Cálculo Diferencial. Detectar si el PDI permite abordar de forma eficiente el programa de la unidad de aprendizaje, en relación al tiempo proyectado por la Carta Descriptiva como referencial institucional. Determinar la conveniencia del uso del PDI para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para ingeniería. Y la conveniencia para incrementar los índices de aprobación de los estudiantes. Con este trabajo pretendemos comprobar las potencialidades que la tecnología nos ofrece para transformar el trabajo matemático de los estudiantes. Específicamente con la potencialidad que nos brinda el PDI.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Para llevar a cabo la presente investigación hemos tomado como referencias las teorías cognoscitivas de los registros de representación semiótica (Duval, 1995, 1999, 2006; Hitt, 2003, 2006) que mencionan la importancia de la utilización de estos diferentes registros en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos. Este marco es muy útil para describir y analizar las dificultades de los estudiantes en el estudio de conceptos del Cálculo diferencial. La investigación en Matemática Educativa incorpora otras componentes como es la visualización y también otras perspectivas de análisis que permiten avanzar en el acercamiento semiótico, el cual es relevante para nuestro estudio. Queremos destacar el papel de visualización relacionada con la intuición en el razonamiento matemático (Arcavi, 2003), sobre todo porque el abordar conceptos con tecnología resalta las diferencias individuales de preferencia de visualización (Presmeg, 1991, 1995); según Arcavi la visualización se refiere a:

> La capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo y de reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, sobre papel o con instrumentos tecnológicos, con el objetivo de representar y comunicar información, a través del pensamiento y desarrollo de ideas antes desconocidas y una comprensión más elaborada. (Arcavi, 2003, p. 217)

De acuerdo con (Duval, 1995, 1999) se considera que la única forma de tener acceso a los objetos matemáticos es por medio de sus representaciones en forma de sus diferentes registros semióticos. Este hecho hace que el estudio de las representaciones sea tan importante para la comprensión de los objetos de estudio del cálculo. Desde este referente, la comprensión de un concepto se construye por las actividades que implican el uso de sistemas de representación diferentes y que promueven la articulación de modo flexible entre varias representaciones. Esta manera de articular es producida por tres actividades cognoscitivas que conllevan cualquier representación, que son: la representación, el tratamiento y su conversión. El hecho de aprender matemáticas según Duval (1999) implica “la construcción de una estructura cognoscitiva por la cual los estudiantes pueden reconocer el mismo objeto por sus diferentes representaciones y puede hacer conexiones objetivas entre matemáticas deductivas y empíricas” (p. 12).

En nuestra investigación sobre la usabilidad de las distintas representaciones semióticas del concepto de función como parte fundamental del cálculo diferencial, se observa que la forma analítica es la más fácil de identificar para los estudiantes, en comparación a la forma gráfica y aun a la numérica. Los estudiantes logran hacer una buena conexión entre la representación analítica y la representación gráfica, o de la forma analítica hacia la numérica, pero no en forma inversa. Digamos que partiendo de un esquema grafico, les es muy complicado pasarlo al analítico o al numérico. Este hecho nos hace reflexionar y conduce a prestar atención especial al empleo de estos registros.

Para nuestro trabajo definiremos la noción de comprensión visual como el proceso en el cual un sujeto adquiere las representaciones de un objeto de estudio en el registro gráfico y es capaz de tratarlo y convertirlo en otros registros pensando en forma matemática. Esta definición se basa en una noción holística de comprensión definida anteriormente, aunque se ha limitado en forma exclusiva al registro gráfico. Esta limitación ofrece una nueva manera de expresar o de nombrar al estudio de los procesos de visualización.

Con relación al Espacio de Trabajo Matemático (ETM), hemos considerado que para el caso del concepto de función el PDI es un artefacto que apoya a la construcción y visualización de las diferentes formas semióticas de este objeto matemático. El profesor y los textos son los referenciales para dicha construcción. Con estos se logra activar la parte cognitiva de los estudiantes a través de las diferentes actividades utilizando el PDI, desarrollan su intuición, adquiriendo experiencia, la deducción y con ello logran apropiarse de las diferentes representaciones semióticas de la función.

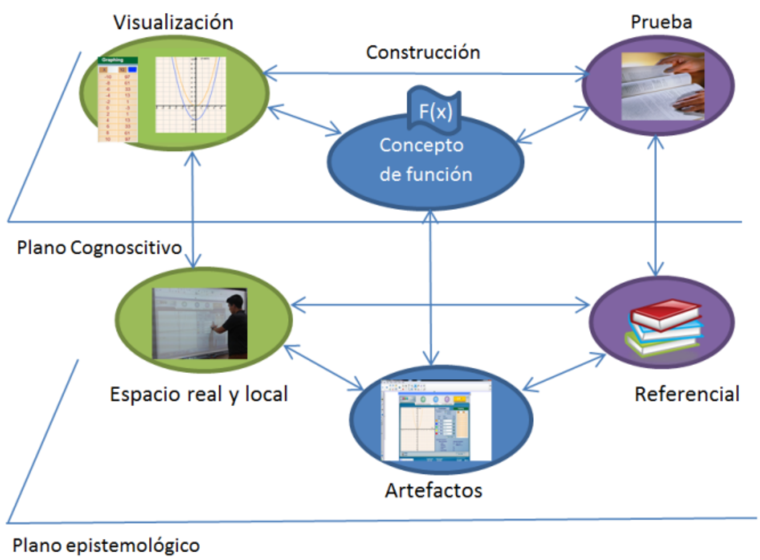


Figura 1: El espacio de trabajo matemático.

Lo anterior se plasma en la figura 1, la cual hace referencia entre la relación de los planos cognitivo y epistemológico (Kuzniak, 2011).

EL MÉTODO.

Esta investigación es de corte descriptivo y comparativo. Se utilizaron cuatro grupos de estudiantes de primer semestre que estaban cursando la unidad de aprendizaje de cálculo diferencial en la Facultad de Ingeniería Mexicali, durante el ciclo 2014-1. Se realizó un experimento de comparación del espacio de trabajo matemático aplicando un Pre-test de conocimientos previos del concepto de función y posteriormente un Pos-test al finalizar la aplicación del PDI para la presentación y manipulación de las distintas formas semióticas del concepto de función.

El estudio fue del tipo descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Se seleccionó el tema de Función de una variable para indagar la eficacia de ser abordado con el entorno tecnológico PDI. Para ello se diseñó un cuestionario exploratorio de los conocimientos previos requeridos para abordar dicho concepto. Aplicándolo antes de la presentación del tema al grupo que utilizó el PDI (pre-test), una vez introducido, trabajado y manipulado el concepto de función, se aplicó de nuevo el mismo instrumento (pos-test).

A continuación se presenta a manera de ejemplo una actividad realizada con los grupos de prueba para ilustrar como se utilizó el PDI para abordar el tema seleccionado de la unidad de aprendizaje.

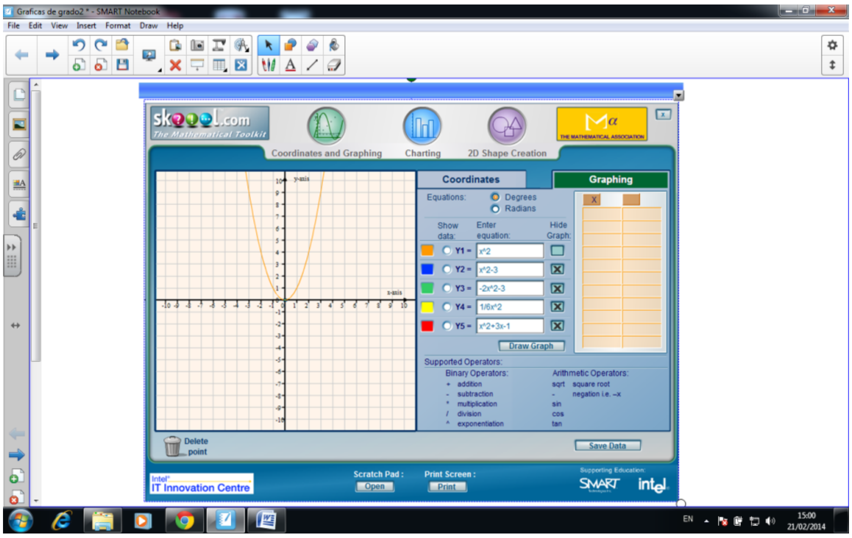


Figura 2. Muestra la grafica de la función base

Unidad de aprendizaje: cálculo diferencial, tema: graficación por parámetros de polinomios, tiempo de actividad: 50 min. La estrategia utilizada para abordar el tema de graficación por parámetros es hacer uso de la herramienta brindada por el PDI llamada *Themathematical Toolkit,* la cual nos permite graficar hasta 5 funciones explicitas en un solo plano y ver la tabla de valores generados para cada una de ellas. La actividad consistió en darle al alumno cinco funciones, en este ejemplo fueron polinomios de 2do. Grado, con diferentes parámetros para que el estudiante partiendo de su espacio de trabajo matemático personal, bosquejara sus gráficas en forma individual y así concluyera cómo dichos parámetros afectan a la representación de esas cinco funciones. Después de 15 minutos de trabajo por parte del alumno se ingresan las funciones en el *toolkit* del PDI y se seleccionó la opción de *hide graph* a la izquierda de cada función. Lo anterior para que ir mostrando las gráficas de una en una. Una vez registradas las funciones el profesor muestra la representación gráfica de la función base $f(x) = x^2$, ver la figura 2.

Posteriormente el profesor asumiendo su rol de facilitador y con miras a generar discusión para que el estudiante se involucre, pregunta a los alumnos como esperan que sea la gráfica de la segunda función, ¿Qué forma suponen tomará dicha grafica?, después de un tiempo de reflexión los alumnos dan sus opiniones y el profesor va presentando la gráfica de la función, y posteriormente muestra la tabla (lado derecho) con los valores obtenidos en la evaluación numérica de dicha expresión, ver la figura 3. En esta parte se invita al estudiante a llevar al análisis el comportamiento de los valores de la función y compararlos con su representación grafica. Estrategia que se considera útil para propiciar que el estudiante se apropie en forma significativa de los objetos matemáticos puestos en juego en esta actividad.

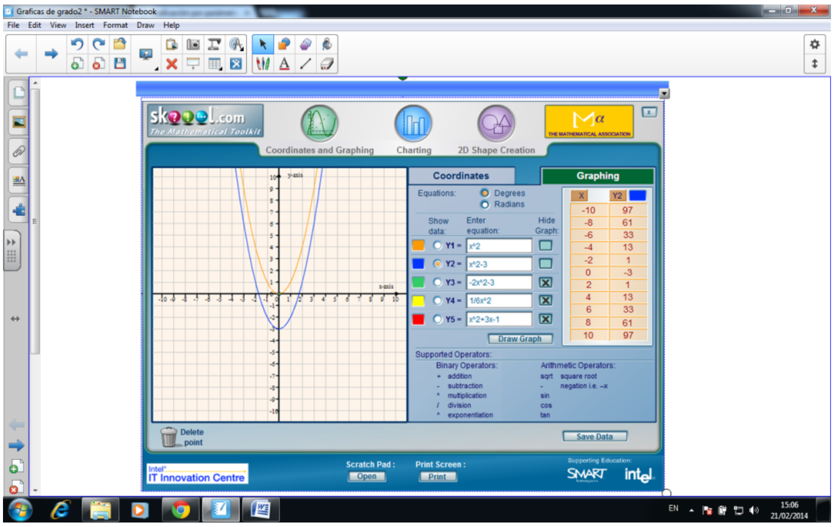


Figura 3. Muestra la función y la tabulación.

El estudiante en este punto deberá poder describir utilizando el lenguaje natural, cuales son las características de las funciones analizadas y podrá compararlas con sus tablas correspondientes, que para este momento de la actividad han sido solo dos funciones. El mismo proceso ocurre para las siguientes funciones, una por una, hasta que finalmente se descubren las cinco gráficas representadas en el mismo plano, ver figura 4.

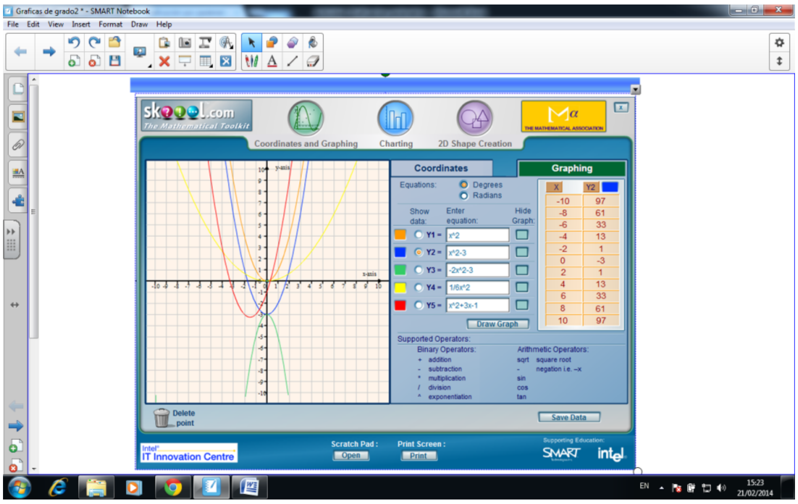


Figura 4. Muestra una gama de cinco funciones en el mismo plano

En esta parte ya el estudiante puede visualizar que sucede a la representación grafica cuando se modifican sus parámetros e igualmente lo que sucede a la secuencia de valores mostrados por la tabla que aparece a su derecha.

RESULTADOS OBTENIDOS EN ESTA ACTIVIDAD.

El alumno se vuelve protagonista y su participación se ve privilegiada al poder interactuar con las diferentes formas semióticas que puede visualizar de forma clara con el PDI, a raíz de modificar los parámetros en la función base. Durante este proceso el profesor toma un rol de moderador y facilitador quien diseña un ETM , en el que va lanzando las preguntas que abren el espacio a la discusión e invitan al estudiante a interactuar, cuestionar, deducir y opinar en relación a los objetos matemáticos aprendidos. Esto muestra también una etapa de socialización del conocimiento en el aula, incluso permite abordar valores importantes como son el respeto, la tolerancia, el orden y el trabajo en equipo.

La manipulación de las diferentes formas de una función, mediante el PDI, genera un espacio de trabajo matemático donde se le facilita al estudiante englobar todas las formas semióticas de una función. Finalmente con el apoyo de esta poderosa herramienta el estudiante se desplaza entre los contextos algebraico, gráfico y numérico de las funciones. Concluyendo así, cómo afectan los parámetros en la forma de las diferentes representaciones de los polinomios en general, logrando un aprendizaje significativo.

Resultados de la Aplicación del Pre-test y el Pos-test.

Como se comentó anteriormente, los espacios de trabajo matemáticos personales de los estudiantes no siempre son los idóneos, a pesar de haber transitado por cursos introductorios de cálculo, se ha observado que no todos tienen el mismo nivel de conocimiento en relación a los objetos matemáticos previos que se requieren para abordar los nuevos conceptos. Para lo anterior se diseñó un cuestionario y una evaluación. El cuestionario contiene 4 reactivos de opción múltiple, en los cuales se evalúan los conocimientos previos. A continuación se presentan dichos reactivos y los resultados encontrados, ver la tabla 1.

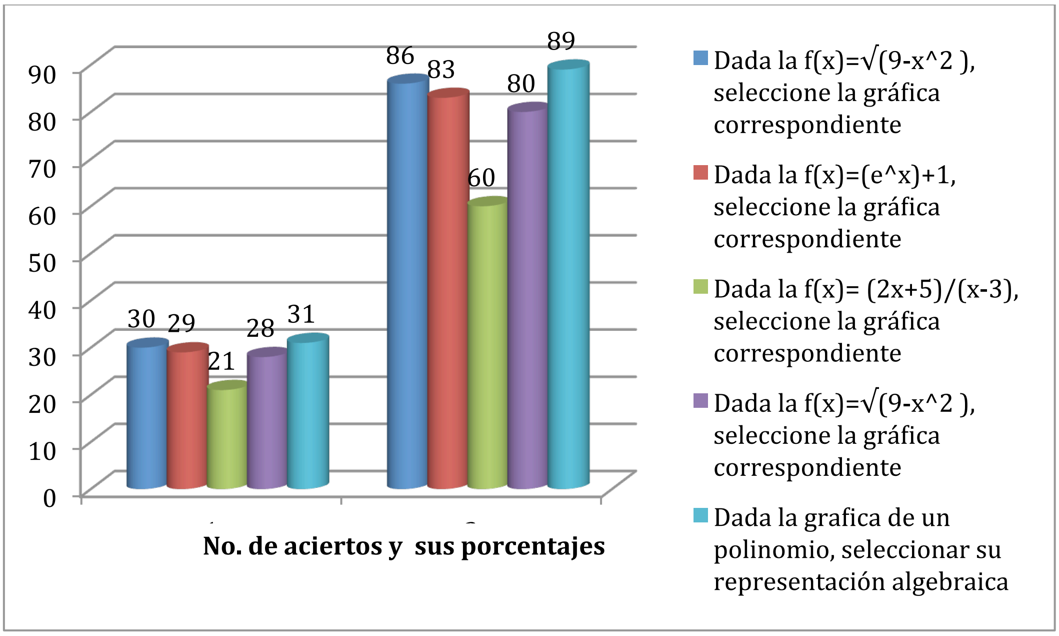
El cuestionario fue aplicado a 36 estudiantes inscritos en la unidad programática de Calculo Diferencial durante el semestre 2014-1, la tabla anterior nos muestra seis columnas, en la primera de la izquierda podemos ver el número correspondiente al reactivo o ítem, la siguiente contiene la descripción de cada reactivo, a continuación aparecen cuatro columnas mas, en ellas se muestra el numero de aciertos o respuestas correctas a cada reactivo del pre-test y del post-test, así como su correspondiente porcentaje.

No. Item	Descripción del Reactivo	No. Aciertos Pret-est	% Aciertos Pre-test	No. Aciertos Pos-test	% Aciertos Post-est
1	Definición de función	20	55.5	30	83.3
2	Definición del Dominio de una función	35	97.2	33	91.6
3	A partir del conjunto de pares ordenados reconocer una función	33	91.6	32	88.8
4	Dada la grafica de una función reconocer su representación algebraica	25	69.4	33	91.6

Tabla 1. Resultados del Pre-Test y del Pos-test de Conocimientos

Se puede observar que existe una gran diferencia entre los resultados del reactivo 1 y el 4, en comparación con la cantidad de aciertos correctos comparados entre el pre-test y el pos-test, dicha diferencia es positiva, lo cual nos indica que los estudiantes mejoraron sus creencias o conocimientos previos de los significados, símbolos o representaciones de función. Se considera que se a partir del uso del PDI, de la interacción con dicho artefacto y de la potencialidad que tiene para la visualización del objeto de estudio, en este caso la función de una variable, el espacio de trabajo matemático personal de los estudiantes se ha modificado.

Posterirmente se les aplicó una evaluación de la unidad completa, la cual contenía entre otros reactivos, cinco que abordaban diferentes funciones. Esta evaluación también se diseño con reactivos de opción múltiple. A continuación se muestra la grafica de resultados que contiene la cantidad de aciertos correctos y los porcentajes respectivos, así como el tipo de reactivo que se evaluó, vea la grafica 1. Esta evaluación no fue exclusiva de funciones polinomiales, sino mas bien abarco una gama de funciones que se fueron revisando con apoyo del PDI. De nuevo los resultados son muy positivos, lo que nos permite intuir si los comparamos con el resto de los grupos que no utilizaron el PDI. Este comparativo se ve en la grafica 2.



Grafica 1.- Resultados de la Evaluación por unidad.

No. Reactivo	Descripción del reactivo	Estrategia que incorpora el PDI	Esquema tradicional de enseñanza	Diferencia
12	Representar gráficamente una función lineal a partir de su expresión algebraica	0.86	0.76	0.10
14	Representar gráficamente una función polinomio a partir de su expresión algebraica.	0.68	0.69	-0.01
15	Representar gráficamente una función racional a partir de su expresión algebraica	0.60	0.60	0.00
16	Representar algebraicamente una función por partes a partir de su gráfica	0.89	0.64	0.25
20	Representar algebraicamente una función trigonométrica a partir de su gráfica	0.80	0.71	0.09
22	Representar gráficamente una función exponencial a partir de su expresión algebraica	0.83	0.64	0.19

Tabla 2. Comparativo de los índices de dificultad e indicadores de logro

En la tabla 2 se muestran los resultados obtenidos al comparar los índices de dificultad e indicadores de logro, entre los estudiantes que utilizaron el PDI y los que estuvieron bajo un esquema tradicional.

RESULTADOS Y OBSERVACIONES

Como se menciono en la parte introductoria de este documento, en la Facultad de Ingeniería Mexicali, se han establecido de manera obligatoria los Exámenes Criteriales, denominados exámenes colegiados. Estos, se aplican al final del periodo semestral a todos los grupos de los cursos de Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Algebra Lineal y Programación. La finalidad de estos es evaluar de forma colegiada a todos los grupos y tener un indicador del rendimiento escolar y en todos los casos se busca como fin mejorar la calidad tanto de la enseñanza como del aprendizaje. Cabe aclarar que dichos exámenes fueron elaborados en forma colegiada por un grupo de profesores especialistas en el área y cuyo contenido temático y formato es conocido por la comunidad estudiantil y profesor de la Facultad.

Por lo anterior hemos utilizado los resultados obtenidos en dicho examen, aplicado al finalizar el semestre 2014-1, para los grupos de prueba y de control y lograr establecer mediante esos datos un comparativo que nos permita medir el logro obtenido por dichos estudiantes.

En la tabla anterior, (tabla 2) se presentan los resultados comparativos obtenidos de la administración del instrumento de medición, mismo que se aplicó a 751 estudiantes al finalizar el curso de cálculo diferencial, 128 de ellos estuvieron bajo un esquema de enseñanza que implicaba el uso del PDI, mientras que el resto abordo el tema de funciones de una variable bajo un esquema tradicional de enseñanza. El cuadro se encuentra organizado por las siguientes columnas: De izquierda a derecha; la primera columna muestra el número de reactivo que le corresponde por su aparición en el Examen, la segunda columna se refiere al indicador de logro (descripción de reactivo a evaluar), la tercer columna presenta el índice obtenido por los estudiantes del grupo de prueba, la cuarta columna muestra el índice que obtuvieron los estudiantes del grupo de control y por ultimo aparece la diferencia entre estos dos índices. Cabe señalar que dichos resultados solo contemplan los indicadores de logro impactados por el uso del PDI y relacionados con los temas de graficación de funciones.

Se hace evidente que para el **reactivo 14**, existe diferencia desfavorable en el índice promedio de dificultad obtenido en el examen por los estudiantes que emplearon el PDI contra aquellos que utilizaron un esquema tradicional de enseñanza, en cuanto a representar gráficamente una función polinomial. Sin embargo en los reactivos 16 y 22 existe diferencia favorable con respecto al índice promedio de dificultad obtenido en el examen por los estudiantes que emplearon el PDI, estos indicadores se refieren a la representación algebraica de una función a partir de su grafica y a la representación gráfica de una función exponencial a partir de su expresión algebraica.

En lo general, se presenta evidencia de diferencia significativa para los reactivos en los que se diseñó la estrategia didáctica con inclusión del PDI, contra los estudiantes que recibieron instrucción en el esquema tradicional.

Por último nos es preciso resaltar que no consideramos estos resultados como concluyentes, debido a que se tienen algunas variables que no podemos controlar como es el caso de los diferentes métodos y creencias o bien los diferentes espacios de trabajo matemático personales de los profesores, y como abordan estos temas, otra variante son los conocimientos previos con que llegan los estudiantes a este curso, ya que proceden de diferentes bachilleratos (nivel medio superior). Tenemos la certeza de que se requiere continuar esta investigación apoyados en las génesis instrumental, semiótica y discursiva, así como en los fundamentos teóricos de los espacios de trabajo matemático, avanzar en la estructuración de los niveles epistemológico y cognoscitivo, los cuales permiten mejorar gradualmente los espacios de trabajo matemático tanto de los estudiantes como los de los mismos profesores. Es necesario también abordar otros objetos de estudio, como ejemplo el concepto de derivada, que como sabemos presenta dificultad a los estudiantes de nuevo ingreso.

Lo que si podemos concluir por esta investigación y apoyados en lo publicado por otros investigadores es que el Pizarrón Digital Interactivo en su papel de artefacto, permite abordar los temas de matemáticas de forma más amena, promueve el razonamiento de los estudiantes, quienes se muestran motivados y comprometidos para realizar tareas y se ve privilegiada la interacción y la visualización de las diferentes formas semióticas de los objetos matemáticos, lo cual permite que el estudiante se vuelva un protagonista, un constructor de su espacio de trabajo matemático personal y no solo un receptor del conocimiento dentro del aula.

REFERENCIAS

Arcavi, A. (2003), The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–24.

Badilla, M.G. (2010). *Análisis y Evaluación de un modelo Socioconstructivista de formación permanente del profesorado para la incorporación de las TIC*. Tesis Doctoral. Estudio de caso "CETEI" del proceso de integración pedagógica de la Pizarra Digital Interactiva en una muestra de los Centros del Baix Llobregat de Cataluña. Barcelona, España.

Cabero, J. (2004). Formación del profesorado en TIC. El gran caballo de batalla. *Comunicación y Pedagogía: Nuevas Tecnologías y Recursos didácticos*, 195, 27-31.

Contreras, L., Bachhoff, E. y Larrazolo, N. (2004). *Educación, aprendizaje y cognición. Teoría en la práctica*. México. Edit. Manual Moderno.

Hernández R., Fernández C., Baptista P., (2006) *Metodología de la Investigación*. México. Cuarta Edición. McGraw-Hill Interamericana.

Gandol, F., Carrillo, E., Prats, M.A. (2011). Potencialidades y limitaciones de lo Pizarra Digital Interactiva. Una revisión crítica de la Literatura. *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*. ISSN: 1133-8482. Barcelona, España.

Garibay B. et al. (2008) El Pizarrón Interactivo Promethean: su uso en las asignaturas de ciencias y tecnología a nivel pregrado. Universidad Autónoma de Guadalajara, México.

González Pareja, A., Calderón, S., Hidalgo, R., Romero, C. (2010). Matemáticas y Nuevas Tecnologías en la Enseñanza Universitaria. Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas), Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Málaga. Servicio Central de Informática. Universidad de Málaga.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24. El espacio de trabajo matemático y sus génesis, traducción J. Lezama, Cicata.

Luzón Encabo, J.M. (1997). *La Informática desde la perspectiva de los educadores. Internet: un nuevo espacio educativo*. Madrid, UNED. Vol. 1. Alonso, M. y Gallego D. (eds.)

Martín Iglesias, J.P. (2010). *La pizarra digital interactiva (PDI) en educación*. Madrid, España. Anaya Multimedia.

Presmeg, N.C. (1991), Classroom Aspects which Influence Use of Visual Imagery in High School Mathematics. In F. Furinghetti (Ed.) Proceedings of the 15th PME, Assisi, June 29 - July 4, 1991, 3, 191–198.

Presmeg, N.C. & Bergsten, C. (1995), Preference for visual methods: an international study. In L. Meira & D. Carraher (Eds), *Proceedings of the 19th PME*, 3, 58–65, Recife, Brazil: PME.

Solís, V. (2010). *Efecto del trabajo con la Pizarra Digital Interactiva respecto a los estilos de aprendizaje en la clase de inglés en primaria*. Tesis de maestría en didáctica de la lengua y la literatura. Facultad de formación del profesorado de la Universidad de Barcelona.

PRAXIS COGNITIVA EN EL AMBIENTE DIGITAL SIMCALC

Leticia Sánchez López & Luis E. Moreno Armella

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Esta contribución aspira a alimentar el desarrollo de la noción de Espacio de Trabajo Matemático, planteando la posibilidad de extender a otros dominios la caracterización de Kuzniak sobre los paradigmas geométricos. La vía para lograrlo es la presentación de un ejemplo en el que se discute el proceso mediante el cual un grupo de estudiantes mexicanos dan significado de manera progresiva a las relaciones entre las gráficas cartesianas distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo asociadas al movimiento rectilíneo uniforme, en interacción con el programa computacional SimCalc MathWorlds.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Nuestra pesquisa enfrenta el problema del papel epistémico y cognitivo de las herramientas digitales en un entorno de trabajo matemático. Nuestro punto de partida para entender cómo pensamos y cómo aprendemos a través de las herramientas digitales es asumir que la acción cognitiva humana (praxis cognitiva) es acción mediada *por* los artefactos y que éstos no son neutros en el sentido cognitivo, epistemológico o cultural. Para hacer viable el proyecto elegimos la herramienta digital SimCalc como principal mediador para que los estudiantes accedieran al estudio del movimiento rectilíneo. El objetivo se concretiza en caracterizar la actividad cognitiva que los estudiantes desarrollan cuando acceden a las representaciones dinámicas que el artefacto digital SimCalc reproduce. De manera específica, queremos explicar de qué forma los estudiantes dan significado a la relación entre las gráficas cartesianas distancia-tiempo, velocidad-tiempo y aceleración-tiempo.

MARCO TEÓRICO

En este apartado presentamos en primer lugar reflexiones relacionadas con ideas centrales que Marx Wartofsky (1979) propuso en el marco de la Epistemología Histórica. La intención es penetrar en la concepción de artefacto y proponer nuestra interpretación sobre los paradigmas geométricos. Lo anterior puede dar luz en la discusión del uso de los medios digitales en el contexto didáctico.

Artefactos

La praxis humana consistió, en primer lugar, en la actividad fundamental de producir y reproducir las condiciones que permitieran la existencia y supervivencia de la especie por medio de la creación de artefactos. El origen de éstos se asocia con la transformación de una parte del ambiente (ramas, piedras, huesos) en una extensión de los órganos humanos que más tarde el hombre convirtió en herramientas (lanzas, arpones, hachas, etc.). Wartofsky extiende la noción de artefactos, ya que los concibe anclados a sus posibilidades de uso y a las habilidades necesarias para su uso, mismas que requieren ser transmitidas y preservadas en un grupo social, por lo que la concepción de artefacto no se limita al objeto físico; también la actividad está incorporada en él y ello le otorga un significado cultural específico, de manera que siempre es posible identificar que un artefacto posee una extensión material y otra simbólica. Wartofsky propone niveles para entender esta dualidad presente en los artefactos. Artefactos primarios, se refiere a la dimensión física; artefactos secundarios, se refiere a la dimensión simbólica, a las habilidades que se desarrollan al usar los artefactos primarios y por último, artefactos terciarios, que crean nuevas formas de mirar el mundo; son sistemas teóricos como las ciencias o las artes. En este sentido, el lenguaje y el sistema decimal, son artefactos culturales que pueden considerarse secundarios en un nivel pragmático o terciarios si pensamos en una obra literaria o en la Teoría de Números como una reflexión teórica del sistema decimal. Ahora bien, la transmisión de las habilidades requiere de la imitación de acciones y es por ello que adquieren un estatus representativo. La anticipación de las conductas de los demás es el detonador de la imitación y ésta implica la acción de presentar de nuevo (re-presentar) lo que está en el otro, el mundo del otro, sea una acción o una emoción. Para Wartofsky (1979, p. 201), “es en efecto, esta habilidad de *representar una acción* por medios simbólicos lo que genera una clase especial de artefactos, que llamaremos representaciones”. Solo es posible acceder a una representación en un contexto de acción e interacción dentro de prácticas sociales. Creemos que esta aproximación es conveniente para entender la forma de interacción de los tres componentes del nivel epistemológico que se consideran en el Espacio de Trabajo Matemático: un espacio real y local como soporte material, con un conjunto de objetos concretos y tangibles; un conjunto de artefactos como herramientas de dibujo y software; un sistema teórico de referencia basado en definiciones y propiedades (Kuzniak y Richard, 2013). En el ejemplo que presentaremos, el conjunto de artefactos involucrados para el estudio del movimiento rectilíneo queda extendido; no focalizamos nuestras observaciones en el software elegido, sino que incorporamos el lenguaje en cualquiera de sus manifestaciones, gestual, oral o escrito, como parte de los artefactos que permitirán que el estudiante accione sobre los objetos matemáticos, al mismo tiempo que emergen nuevas formas de comunicación al nivel alumnos-tecnología y alumnos-ideas matemáticas. Así la propia actividad se vuelve parte de la representación y permite, a la vez, nuevas formas de conceptualización. De una manera especial, una versión del sistema teórico de referencia estará incorporada en el software, pero a su vez éste será parte del espacio real y local, ya que las animaciones producidas son una representación virtual de la realidad a la que los estudiantes podrán acceder a través de las gráficas, fórmulas o tablas generadas a través del software. La otra parte del espacio local y real está formada por las concepciones que tienen los estudiantes sobre el movimiento rectilíneo. Estas concepciones son las huellas de su experiencia sensorial en el mundo físico y de sus historias de vida que se han filtrado a través de la instrucción socio-cultural, que incluye su experiencia académica.

Paradigmas geométricos y re-descripción representacional

Houdement y Kuzniak (2006, citado por Montoya, Henríquez, Menares & Barra, 2012) identifican tres paradigmas geométricos que coexisten en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. La Geometría Natural (GI), la Geometría Axiomática Natural (GII) y la Geometría Axiomática Formalista (GIII). Se refiere a caracterizaciones intrínsecas a los problemas geométricos y que apuntan a que el estudiante aprenda a reconocer, aislar y distinguir las entidades constitutivas de la geometría puesta en juego. A ellos están asociadas formas predominantes de acción, validación y relación entre modelo y realidad. Nuestra postura es que la articulación entre estos niveles de actividad geométrica solo puede alcanzarse mediante un mecanismo de re-descripción representacional que consiste en un proceso de enriquecimiento semántico de las representaciones iniciales. El modelo es propuesto por Karmiloff-Smith (Tomasello, 2000) quien explica que ha sido a través de su capacidad de *representación,* que el ser humano ha logrado escapar de su cuerpo y extender –no reemplazar–su cognición implícita a una *cognición explícita,* por medio del símbolo. En el caso que nos ocupa, el estudio del movimiento rectilíneo, hemos identificado también tres niveles de re-descripción representacional. En el primero, se encuentra la percepción del movimiento, como un fenómeno observable y repetible, al que le son transferidas propiedades y características ancladas aún en las experiencias cotidianas de los estudiantes. Un segundo nivel de simbolización se buscará a través de la mediación con SimCalc, con la pretensión de seguir de cerca el proceso para *desencarnar* la concepción de movimiento y entonces tenga lugar la transición de un tratamiento cualitativo a un tratamiento simbólico a través de las gráficas, fórmulas y tablas. Un tercer nivel que apenas alcanzaremos a vislumbrar en nuestra investigación, está constituido por el sistema axiomático formal que se concretiza en el *Cálculo*, artefacto terciario porque constituye un sistema teórico que permite, entre muchos más hallazgos, un tratamiento sobre el fenómeno del movimiento en un nivel más avanzado de simbolización.

METODOLOGÍA

La investigación que reportamos es de corte cualitativo. Diseñamos un escenario experimental en el que la instrucción matemática se centralizó en un grupo de doce estudiantes que cursaban el segundo año de bachillerato en una escuela pública. Sus edades variaban entre 16 y 18 años. Conformados en equipos de dos o tres integrantes, cada equipo disponía de una computadora portátil con los programas SimCalc. Además se contaba con otra computadora portátil conectada a un proyector, con el objetivo de promover que los alumnos la utilizaran para mostrar su trabajo al resto del grupo y para socializar el uso del programa. Se diseñaron 5 actividades que generaban discusiones sobre el movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado. A través de ellas se buscaba que en los alumnos se generaran de manera gradual procesos de re-descripción de sus representaciones. Al inicio de cada sesión y de manera individual se les entregaban las hojas que describían el desarrollo de la actividad y en las que debían anotar sus respuestas con bolígrafo. En cada sesión se iniciaba la discusión a través de una animación o bien con gráficas generadas por el programa que eran creadas previamente por la primera autora de este artículo. Al final de cada sesión se les entregaba a los alumnos una hoja de tareas para resolver en casa. La técnica utilizada en la recolección de datos fue la observación participante. Ésta se realizó por medio de la videograbación con una cámara fija y dos móviles. Las transcripciones del discurso oral, gestual y las producciones escritas de los estudiantes fueron las fuentes que permitieron interpretar cómo los estudiantes fueron re-describiendo sus intuiciones a través de los sistemas simbólicos a los que accedieron a través del programa. Por medio del programa elegido (SimCalc) los estudiantes podían acceder de forma simultánea a la animación de un personaje moviéndose en trayectoria recta (el Mundo) y a su correspondiente gráfica distancia-tiempo (d-t), velocidad-tiempo (v-t) o aceleración-tiempo (a-t); así como a la representación tabular o algebraica del movimiento, como se muestra en la Figura 1. El profesor decidió a cuál(es) representación(es) tendrían acceso los estudiantes y si las podrían modificar. La dimensión intencional del SimCalc, aquella referida por Wartofsky y que incorpora la actividad (praxis) al artefacto, está concretizada en el poder de simulación, ejecutabilidad, construcción, y simultaneidad que ofrece el software. Los usuarios podían volver evidentes sus intenciones sobre los objetos matemáticos en el entorno digital porque éste a su vez les responde y les conduce a nuevas acciones a través de las funciones que están incorporadas en él.

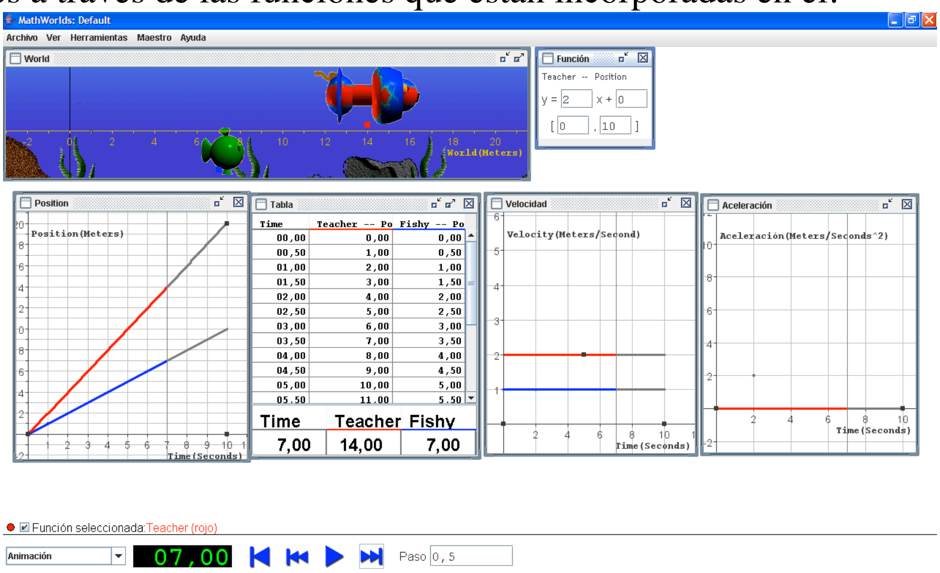


Figura 1: Representaciones del movimiento rectilíneo con SimCalc

ANÁLISIS

Este apartado se conforma por dos secciones. En la primera mostramos algunos elementos que identificamos en el desarrollo de las primeras actividades que trabajamos con los alumnos. Esta discusión nos ayudará a entender la naturaleza, función y transformación de las representaciones a partir del contexto inicial, a través de los recursos originales de los alumnos y que se hicieron visibles en la interacción con el software. Las formas de organización adoptadas se dirigían a construir un Espacio de Trabajo Matemático, entendido como el ambiente pensado y organizado para facilitar el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos. Así, en la última actividad que llamamos *Actividad integradora*, y que nos ocupará en la segunda sección del análisis, los alumnos se enfrentaron a un problema de encuentro de dos móviles. En las transcripciones ocuparemos las letras E o Ei, para referirnos a los estudiantes y la letra I, para referirnos a la investigadora y primera autora de este artículo.

Primera parte del análisis

En México no se han logrado consolidar desde las instancias de gobierno programas educativos que incorporen el uso de las tecnologías digitales en los niveles de educación básica de la escuela pública. Las políticas educativas tan vulnerables sexenio tras sexenio, no permiten la continuidad de proyectos promisorios como han sido Enciclomedia (2000-2006), EFIT y EMAT (Enseñanza de la Física y las Matemáticas con Tecnología). Por ejemplo, en el primer informe de la comisión para investigar y dar seguimiento al primero de los programas mencionados, se afirma que "la evidente desarticulación entre los diferentes instrumentos de monitoreo, control y seguimiento […] demuestran que han existido deficiencias en la administración y operación del programa" (FLACSO, 2008). Es común que los estudiantes de escuelas públicas deban esperar hasta los niveles de instrucción superior para acceder de manera planificada y habitual a plataformas y programas digitales. Este es un primer elemento que conforma el contexto de los estudiantes que participaron en nuestro estudio, poseen habilidades básicas para usar procesadores de texto y hojas de cálculo y sólo 4 refirieron conocer y haber usado programas de graficación como GeoGebra. El segundo elemento del contexto tiene que ver con el papel que asumen los estudiantes como parte de un grupo. No puede aparecer cualquier tipo de conciencia, ésta depende del lugar y el tiempo porque las condiciones históricas y culturales limitan y determinan los modos de subjetividad, las formas de pensamiento y acción que pueden surgir en un momento determinado. Esta conciencia de *ser* social es un primer filtro que también ha sido objeto de nuestra atención en el desarrollo de las actividades con los alumnos. La educación pública en México limita en gran medida la capacidad expresiva de los estudiantes. Los grupos llegan a ser hasta de 60 alumnos en las instituciones públicas de gran demanda. En la experiencia escolar cotidiana, queda devaluado el papel de los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El tercer elemento para definir el contexto inicial lo conforman las concepciones previas de los alumnos en relación con tres ideas: movimiento, velocidad y aceleración. En lo que respecta a la velocidad categorizamos sus ideas en tres niveles que se muestran en la Tabla 1. Las ideas que se muestran en ella son el resultado de discusiones de los estudiantes en parejas y fueron solicitadas antes de iniciar las actividades del proyecto. El análisis apunta a buscar elementos que nos sean de utilidad para identificar y extender las nociones de paradigmas geométricos a otros dominios específicos.

Las ideas de la segunda columna de la tabla se relacionan con un modelo que busca explicar la causa de la velocidad.

Categoría	Atención en la causa	Identificación de variables	Identificación y relación entre variables
Producciones de estudiantes	Es la fuerza de un objeto que permite su movimiento de un lugar. Es la reacción que en conjunto con el movimiento dan un cierto tiempo al objeto y se sabe cuál (sic) veloz es.	Tiempo y distancia en la que se mueve un objeto. Distancia recorrida en cierto tiempo.	Es la relación entre la distancia de un punto a otro y el tiempo que un objeto tarda en recorrerlo.

Tabla 1: Categorización de ideas iniciales de velocidad

Creemos que se trata de una idea encarnada aún en la experiencia cotidiana de los estudiantes, es decir, lo que se mueve, lo hace en una velocidad producida y determinada por una fuerza que modifica su estado; así, a mayor fuerza, mayor es la velocidad que se podrá alcanzar. Esto nos trae a cuenta las primeras reflexiones acerca del estudio del movimiento. Aristóteles se concentra en el estudio del nexo causal del movimiento, no en su curso temporal. Para él la verdad no podía ser alcanzada si no a través de procedimientos que identificaran las causas del ser: “Poseemos conocimiento científico de una cosa solamente si conocemos su causa” (Aristóteles, 1979, p. 203). Es decir, no buscaba una explicación del cómo, sino del por qué. Posiblemente esta postura epistémica tiene origen en la separación que Aristóteles asumía entre la física y la geometría: el físico debía razonar sobre lo real y cuantitativo, y el géometra era quien debería ocuparse de las abstracciones (Koyré, 1981, p.8). Para Aristóteles en el espacio geométrico sólo podían colocarse cuerpos geométricos, no cuerpos reales, lo que es una señal del tratamiento cualitativo que le daría al estudio del movimiento, una limitante epistémica hacia su cuantificación. Este nivel de conocimiento del movimiento que podemos llamar implícito está relacionado con la experiencia física del fenómeno. Como corresponde con la Geometría Natural (GI), existe una relación con la realidad en la que los objetos se definen en correspondencia con la realidad espacial y local del individuo (Montoya *et al*, 2012). Mostramos dos ideas de *aceleración* producidas por los alumnos en las que está presente esta relación con la realidad: 1) *cuando un cuerpo cambia su velocidad y va aumentando de velocidad;* 2) *es un intervalo en el cual el objeto aumenta su velocidad al moverse, cuando un objeto aumenta su velocidad desde su origen*. La relación establecida de aceleración como aumento de velocidad es una concepción encarnada en su experiencia; para ellos la palabra *acelerar* usada cuando viajan en un automóvil, por ejemplo, implica siempre aumento de velocidad. En las ideas de la tercera columna se discriminan las cantidades que determinan la magnitud de la velocidad, pero no se establece la relación que guardan. Sólo una pareja de estudiantes produce una definición más cercana a la definición de aceleración (última columna de la Tabla 1), pero esto no nos proporciona más información sobre el significado que le dan.

En la primera sesión la discusión se centró en las gráficas cartesianas distancia-tiempo en el contexto del movimiento rectilíneo uniforme. En la re-descripción de este tipo de gráficas pretendimos alejarnos de la concepción de ellas como un conjunto de parejas ordenadas y acercarnos a ellas como una representación del movimiento rectilíneo, es decir, queríamos construir una relación simbiótica. La vía de acceso al símbolo (la gráfica) era posible, al imaginar el movimiento de un actor en el Mundo. Se buscaba que emergiera en los estudiantes la conceptualización de una gráfica como el retrato de una experiencia física. Por ejemplo en la primera animación se mostraban dos peces que iniciaban su recorrido en el origen, sus velocidades eran constantes, una mayor que la otra (Figura 2a).

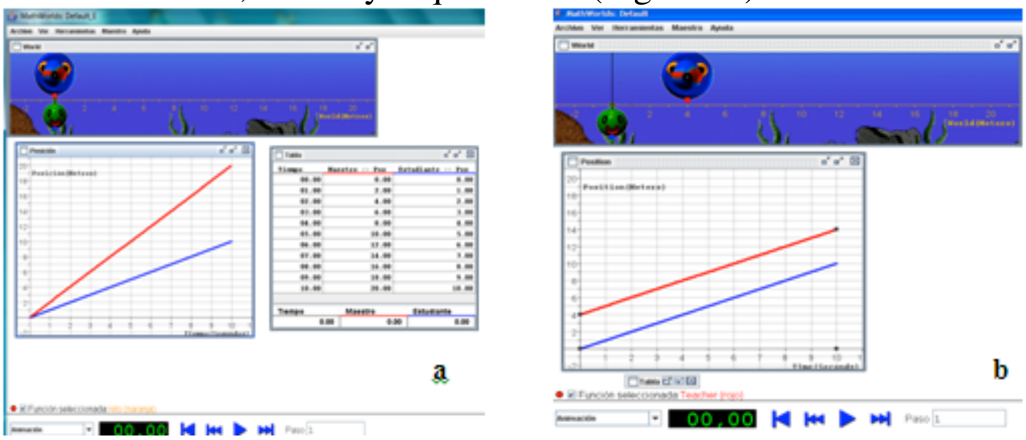


Figura 2. Relación gráfica cartesiana-movimiento

Una discusión interesante surgió al preguntar: Si la gráfica d-t que representa el movimiento de un actor A siempre queda por arriba de la gráfica d-t que representa el movimiento de otro actor B, ¿se puede afirmar que el actor A va a mayor velocidad que el actor B? Al inicio la mayoría de los alumnos responde afirmativamente. Pero en la interpretación de las gráficas a partir de las animaciones los alumnos van identificando elementos que permiten que formulen hipótesis sobre lo que ocurre, estos elementos son las pendientes, la ordenada al origen y las intersecciones de las gráficas d-t.

Otra de las actividades consistió en pedir a los estudiantes que construyeran una animación en SimCalc a partir de la siguiente situación: Caminé de mi casa a la casa de un amigo siguiendo una trayectoria recta. Ésta se encuentra a 20 m de distancia de la mía, toqué la puerta pero al parecer, nadie estaba en casa. Después de 10 s de espera decidí regresar a mi casa, pero caminé más rápido, pues hice la mitad de tiempo que tardé cuando fui. Todos los equipos construyeron sin dificultades mayores sus animaciones, pero cuando se les preguntó por el valor de la velocidad en la tercera parte del recorrido (cuando se regresa), algunos omitieron el signo. Esta fue la respuesta del integrante de un equipo cuando se le preguntó por ello:

I: Supongamos que no tenemos la gráfica y tú me dices que va a una velocidad de dos metros por segundo, ¿cómo me dirías, qué más me tendrías que decir para indicarme para dónde va?

E: Es que siento que no, ¿no? Necesitas ver algo, porque pues si no, no te das cuenta hacia dónde es la trayectoria. O sea lo tiene que ver representado en una gráfica o en una animación o verlo tú físicamente para darte cuenta hacia dónde es la trayectoria ¿no? Si tú dices, si lo pones así nada más por, pues digamos por escrito, pues no te darías cuenta a menos que igual hagas la especificación de que después de esperar los diez segundos, caminas dos metros por segundo, pero de regreso.

La confusión de rapidez con velocidad se trata cuando se accede a la representación algebraica del movimiento del actor. Cuando los alumnos reconocen el signo negativo en la expresión se está propiciando no sólo el acceso a esta representación, sino la construcción de ella misma.

I: y ese menos ¿cómo lo reconocemos en la gráfica distancia tiempo?

E: Porque está inclinada hacia abajo.

I: ¿Por qué?

E: Por su inclinación, hacia abajito. [Usa su mano para representar la forma de la gráfica (Figura 3)].

Figura 3. Una representación para un significado

Esta forma corporal de expresión hace referencia a que la representación del objeto matemático velocidad se está transformando, a través de la gráfica d-t. A las significaciones les brotan las representaciones. La representación no está antes del objeto matemático. Podemos pensar que se va tomando distancia de la experiencia corporal y se accede a otro nivel de simbolización. Este nivel pueda ser comparable con la Geometría Axiomática Natural (GII)

Segunda parte del análisis

En los siguientes apartados se presenta el análisis de cómo un equipo abordó el problema de la Actividad 5, que llamamos actividad integradora:

Dos carros se mueven en la misma dirección en trayectorias lineales adyacentes. El carro A se mueve con velocidad constante, comienza a moverse a 20m del origen y en el segundo 6, se encuentra en la posición 32m. En el segundo 0, la posición del carro B es 0m y su velocidad es 12 m/s. Se sabe que la aceleración del carro B en todo su trayecto es constante y es negativa. Crea una animación para mostrar cuál debe ser el valor de la aceleración del carro B para que los carros estén lado a lado en el segundo 4.

La actividad de los estudiantes al resolver el problema propuesto es el resultado del proceso que comenzó desde la primera sesión de trabajo, pues como lo advertimos (Ver Tabla 1), las representaciones iniciales de los alumnos reflejaban una escasa experiencia y significación de las ideas estudiadas.

Episodio 1 Móvil A. [00:00 a 4:36] E1 toma el control de la computadora en este episodio y crea un actor bajo un modelo lineal para su gráfica d-t. De más de 20 opciones que tiene para elegir la apariencia del mundo, elige la que se llama *Carsz*, en la que los actores toman forma de automóviles.

1 E2: En el segundo seis se encuentra en la posición 32.

2 El: Pero no dice el dominio ¿o sí?

3 E2: No, no. Dice que en el segundo seis se encuentra en la posición 32.

4 E3: El rango es de 0 a 6. [Pausa] No, el dominio es de 0 a 6.

E1 usa las herramientas del programa para obtener la recta que cumpla las condiciones del problema.

5 I: ¿Por qué dibujaron esa recta?

6 El: Porque dice que el carro A se mueve a una velocidad constante y una velocidad constante…

7 E2: Se supone que debería ser una recta horizontal ¿no? [Interrumpiendo]

8 E1: Pero, cuando la gráfica está así o así y pones la gráfica de velocidad, la gráfica es una línea horizontal.

9 E2: Cierto.

10 E3: Y también dice que el o comienza en el metro 20 a partir del origen, está aquí el punto [E3 señala en la gráfica que aparece en la pantalla el punto (0,20) y activa la ventana de las coordenadas del punto para que la profesora lo vea].

11 E1: Esto sería cero coma veinte y dice que en el segundo seis está en la posición 32 y aquí nos dice que en el segundo seis, no se ve mucho, pero está en la posición 32. Tenemos que es una velocidad constante porque es una línea y ahí si sacamos la velocidad de acá, va a dar que es una recta porque es constante. [E1 activa la ventana para obtener la gráfica de la velocidad].

Al inicio de este episodio, la primera observación es que E1 hace explícita la necesidad de mantenerse cercana al problema al elegir un mundo virtual en el que los actores son precisamente carros. Identifican como primer tarea, el representar el movimiento del carro A, a partir de la gráfica d-t. E1 elige un modelo lineal y reconoce (L6) en él la velocidad constante. E2 también ha asociado la idea de velocidad constante a la imagen de recta horizontal (L7), pero en ese momento están hablando sobre la gráfica d-t. Ante la confusión de E2, E1 le aclara la diferencia entre las gráficas d-t y v-t. Podemos reconocer en este episodio un primer nivel de re-descripción de una parte del problema en un formato simbólico a través de las gráficas d-t y v-t del primer móvil. Las gráficas son las primeras representaciones que utilizan.

Episodio 2 Móvil B, primer gráfico. [4:37 a 6:30]

12 E2: Entonces el segundo carro, en el segundo 0 está en el metro cero.

13 El: O sea en el origen.

14 E2: Y su velocidad es 12 metros sobre segundo. [Elige para el móvil B un modelo lineal para construir la gráfica d-t]. Se supone que su velocidad es la pendiente, entonces debería estar ahí. [Activa la ventana de gráfica de la velocidad]

15 E1: Que en su trayecto es constante y es negativa.

17 E2: No, pero es la aceleración.

18 E3: Si tiene aceleración, no puede tener velocidad constante. O sea, su velocidad de cuando empieza es de 12 metros sobre segundo, pero no termina con la misma velocidad, por tener aceleración.

19 E2: ¿Cómo?

20 E3: O sea, si la velocidad es constante, no hay aceleración, no hay cambio de velocidad. Entonces debe existir un cambio de velocidad.

21 E1: Tenemos que buscar una forma en que se crucen en el segundo cuatro. De lado a lado en el segundo cuatro [Lee el texto del problema].

22 E3: No tiene dominio tampoco, ¿verdad?

23 E1: Mm. [Expresando negación]. Pues vamos a poner en segundo, 5. [Se refiere a la construcción del actor]

La primera propuesta de E1 para representar el movimiento del móvil B es por medio de una gráfica d-t de forma lineal. La confrontación con su gráfica v-t, genera entre los integrantes una búsqueda de relaciones entre lo que plantea el problema y lo que ven en la gráfica. Esta búsqueda también se refleja cuando E3 pregunta por el dominio y al no contar con más información proponen elementos para construir la gráfica. Entre los integrantes del equipo van resolviendo cada duda (L17, L19, L23) que surge. Las características del software los *conducen* a que se cuestionen sobre el dominio de la función, pues es necesario la construcción del nuevo actor.

Episodio 3 Móvil B, segundo gráfico. [6:30 a 20:25]

24 E3: Para que la aceleración sea negativa tiene que ser así, ¿no? O así. (Figura 4a, izquierda) pero si empieza en cero y es positiva entonces tiene que ser así (Figura 4a derecha). La cosa es pues, vemos cómo reacciona ¿no?

25 El: Pero el problema es que si lo dejamos así, va a alcanzar la otra línea más rápido. Si lo hacemos al revés (Figura 4b) [Hace un gesto con el dedo, indicando cambio en la concavidad de la curva].

26 E3: Pero ya no sería aceleración negativa.

27 E2: Pero el problema es que tiene que cruzar ¿no? [Toma el lápiz para señalar que es imposible el cruzamiento con los trazos que hicieron en el papel] (Figura 4c).

28 E1: Ajá. Porque se tiene que cruzar hasta el segundo cuatro.

29 E2: La otra está así, entonces debe cruzar así.

30 E1: Porque primero tiene que avanzar muy lento para que en el segundo cuatro los dos se crucen. Si lo hacemos al revés en muy poco tiempo va a alcanzar la línea.

31 E2: A menos que sea así (Figura 4d) [Se ríe, parece que su argumento no es convincente]. Así se intersectan.

32 E3: Pero su aceleración es positiva.

Al inicio de este episodio, el equipo deja el trabajo en la computadora por el trabajo en papel y lápiz. E3 toma la iniciativa y hace dos trazos curvos. No sabe cómo caracterizar con una palabra ese tipo de curvas, pues en ningún episodio lo hace, pero recurre a otro artefacto, las gráficas, para comunicar lo que está pensando. Acto seguido E3 traza los ejes cartesianos con la curva que cree corresponde a las condiciones del problema (Figura 4a, derecha). En ese momento comienza una interesante intervención de los otros integrantes que detienen a la estudiante en su intención de representar la gráfica con el programa (final de L24). Los trazos de E3 se convierten en un medio no sólo para que E3 se exprese, sino para que sus otros compañeros piensen a través de ellos. E1 interpreta icónicamente el trazo de E3, porque para refutarlo se basa en un nuevo trazo que hace y en el que las gráficas d-t de ambos carros no se podrían cruzar. La identificación de un cruce entre ambas gráficas, refiere nuevamente una re-descripción del problema en términos simbólicos. En el extracto se puede reconocer que los estudiantes hablan del cruzamiento de las gráficas (usan el artículo femenino, por ejemplo, lo que nos indica que no se refieren a los móviles). No hay acuerdo, pero E3 sigue convencida de la forma de la gráfica d-t, sin embargo, debe rebasar la representación gráfica para convencer a sus compañeros. E1 borra la propuesta inicial (el modelo lineal) y traza con el programa un modelo cuadrático, que por default tiene concavidad hacia arriba. Enseguida activa la pantalla que presenta la forma algebraica y cambia los parámetros consiguiendo nuevas formas de la parte de la parábola, hasta conseguir con ayuda de sus compañeros el cambio de concavidad. Comienzan entonces de manera arbitraria a cambiar los otros parámetros para conseguir lo que tienen en mente y han materializado en el papel: conseguir que se intersecten en el segundo 4.

Figura 4. Discusión gestual-oral-escrita para determinar la función

Posteriormente E1 expresa una confusión que tiene, pues cree que la velocidad del móvil B debe ser siempre igual que 12 m/s. E3 hace la aclaración que en el texto se plantea que esa es la velocidad inicial de B. Este intercambio de ideas conduce a traer a la pantalla las gráficas de velocidad de los móviles A y B, que hasta el momento no las habían requerido. Ahora las gráficas de velocidad toman una nueva dimensión. A diferencia del primer episodio, la gráfica no sólo tiene la función de comprobar una construcción, sino que propiamente les dará la posibilidad de construir la animación para buscar la solución.

Episodio 4. Validación gráfica por medio de las áreas. [20:27 a 23:10]

33	I: ¿Cómo pueden decir que esa es la gráfica correcta, que se encuentran los dos carros en el segundo cuatro?
34	E3: Eee. Haciendo el área de ¿velocidad? Por ejemplo, hacemos que es… es que no se ve. [Ajusta la escala de la gráfica para poder calcular el área], entonces decimos que en cuatro, aquí son ocho.
35	I: ¿Qué quiere decir ese ocho?
36	E3: Que…que…
37	E2: Que en el segundo cuatro, a partir del origen que es el veinte, se le va a sumar otros ocho, para que sea en el segundo cuatro, entonces va a estar en el 28.
38	I: Y ¿qué tendría que pasar con el otro? (Se refiere al otro móvil)
39	E2: Su área tendría que estar en 28 al llegar a cuatro. Serían 11 menos 3, ocho. Y por cuatro, veintiocho. Sí.

En la Figura 5 se muestran las construcciones consecutivas del equipo. Su construcción final no cumplía con la condición de que la velocidad del móvil B en el segundo 0, fuera 12 m/s, en su construcción era igual que 11m/s. La Figura 5.d fue obtenida por medio de la manipulación de la gráfica de velocidad, que el programa permite. Sin embargo, la construcción está lejos de ser una construcción por ensayo y error. El argumento se basa en el extracto del Episodio 4. La manipulación de la gráfica de velocidad no fue arbitraria, tal como lo muestran las intervenciones de E3 (L37) y E2 (L39); ellos re-describen el significado de las gráficas de velocidad en términos del área bajo los cuadriláteros que forman las curvas con los ejes cartesianos y lo relacionan con las gráficas d-t correspondientes.

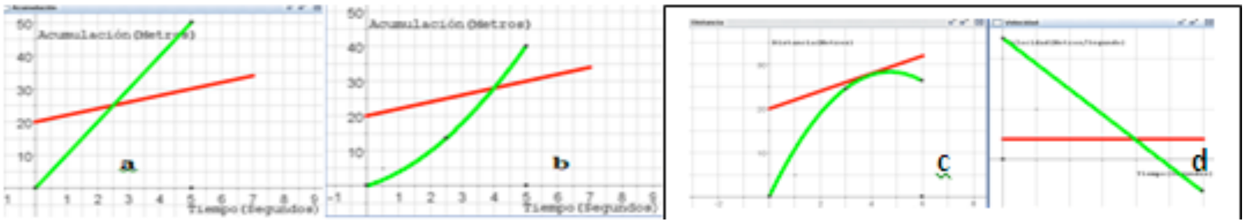


Figura 5. Progresión de las construcciones gráficas

Las ventanas que los integrantes del equipo elegían eran acciones para las cuales el ambiente dinámico del programa, a su vez, ofrecía nuevas posiblididades para adoptar una nueva acción. En L10 se aprecia que los estudiantes adoptaron criterios de validez basados en las representaciones del software. Ante la duda de uno de los integrantes, sobre la forma de la gráfica d-t, otro muestra la gráfica v-t como recurso para aclarar la duda de su compañero. En este sentido consideramos adecuada la extensión que proponen Moreno y Hegedus (2010, p. 31) sobre el proceso de génesis instrumental que consiste en incluir las acciones simultáneas entre el usuario de una herramienta y aquéllas que a su vez, el ambiente ejecuta, así como la internalización del modo en que la herramienta es manipulada, usada por el ambiente y re-utilizada por el usuario en un proceso de re-acciones y re-alimentaciones.

Finalmente, en la discusión grupal se planteó la tarea de encontrar la expresión algebraica de la gráfica d-t del móvil B, ya que anticipadamente fue bloqueada la ventana que muestra la función. Los alumnos pudieron determinar la función a través del cálculo del área bajo la recta que representaba la velocidad del móvil. Esta actividad fue grupal y conducida por la profesora.

CONCLUSIONES

En este documento mostramos algunos elementos de la construcción de un Espacio de Trabajo Matemático para que doce estudiantes pudieran re-describir sus representaciones iniciales en relación con el movimiento rectilíneo en interacción con una herramienta digital. La dimensión intencional inherente a toda herramienta que nos propone Wartofsky hizo evidente la génesis instrumental, ya que la herramienta se hizo funcional en el proceso constructivo del trabajo matemático. Desde la perspectiva de Wartofsky, las herramientas digitales son artefactos que deben entenderse no sólo partir de su uso sino como modelos de modos de actividad en los que son usados y producidos. En el escenario escolar podemos extrapolar esta idea pues podemos suponer que cuando los alumnos interactúan con una herramienta digital como es SimCalc, no sólo pueden aprender a usarla en el sentido técnico, conocer para qué es un comando, cómo agrandar una gráfica, cómo ver la fórmula para la gráfica d-t, etc. Sino que a través del artefacto están accediendo a una dimensión simbólica que abarca toda una teoría que se ha construido históricamente. En este sentido los alumnos están ante una herramienta con una doble dimensión, la material y la simbólica. De acuerdo con el análisis de los datos, los estudiantes experimentaron esta bidimensionalidad del artefacto, ya que no solamente aprendieron la parte técnica del programa, sino que construyeron representaciones a partir de las propias representaciones simbólicas que el programa les mostraba.

También vislumbramos la génesis semiótica basada en los registros de representación que proporciona un sentido a los objetos matemáticos. En cuanto a la génesis discursiva, creemos que los alumnos, al ir de la gráfica d-t a la gráfica v-t y viceversa para plantear el problema final, de alguna manera tuvieron un primer contacto a una versión del Teorema Fundamental del Cálculo. La investigación debe continuar su curso en esta línea.

El uso de herramientas digitales dinámicas puede propiciar que los estudiantes amplíen el campo de sus experiencias, comuniquen lo que ven y aunque inicialmente no lo comprendan, es en su propio discurso en el que reconocen sus concepciones anteriores y tienen la posibilidad de transitar a un estadio de reflexión para alcanzar mayores niveles de abstracción. De esta manera se hace posible que las acciones cognitivas de los alumnos comiencen a ser controladas de manera auténtica por los símbolos, no sólo porque el medio les provee de las representaciones, sino porque ellos, al experimentar en el entorno del software, internalizan las representaciones cuando s*ienten* ese impulso simbólico de usarlas. En el documento nos enfocamos más a referir el uso de las gráficas cartesianas para representar el movimiento rectilíneo, sin embargo la investigación también consideró otras representaciones. Cuando hablamos de funciones lo podemos hacer a través de su representación tabular, que a su vez podemos re-describir mediante una gráfica. Pero debemos enfatizar que una acción tan sencilla conlleva una fuerte transformación conceptual: mediante la representación gráfica podemos hablar adecuadamente de la concavidad de la función, lo cual resulta casi inaccesible si tratamos de hacerlo mediante la tabla de valores. Este tipo de consideraciones nos obligó a tomar cordura sobre lo que debíamos exponer en este documento.

Finalmente, creemos que es pertinente seguir explorando otros ámbitos distintos al de la Geometría, sólo de esta forma como señalan Kuzniak y Richard (2013), podemos encontrar las interacciones entre los dominios específicos y comprender el funcionamiento global del trabajo matemático. Una clave para plantear esta interacción puede encontrarse en el proceso de re-descripción representacional que hemos destacado en este documento.

REFERENCIAS

Aristóteles (1979). *Tratados de Lógica*. México: Porrúa.

FLACSO. (2008). *Informe programa Enciclomedia*. Recuperado 24 de marzo de 2013, http://www.cee.iteso.mx/BE/23/371.3340972%20FLACSO%202008.%20

Informe_Final_Programa_Enciclomedia.pdf

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique des Mathématiques*. *1*(1), 89-116. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Koyré, A. (1981). *Estudios galileanos*. México: Siglo XXI.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2013). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 17, Número Extra 1*.

Montoya, E., Henríquez, C., Menares, R. & Barra, M. (2012). *El Espacio de Trabajo Matemático: una herramienta de análisis*. Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, p. 1-24. Recuperado 20 de marzo de 2013, http://54.232.225.165/semanamatematica/pdf/cursillos2012/emontoya.pdf

Moreno, L. & Hegedus, S. (2010). Accomodating the instrumental genesis framework within dynamic technological enviroments. *For the Learning of Mathematics*. *30*(1), 26-31.

Tomasello, M. (2000). *The Cultural Origins of Human Cognition*. Cambridge: Harvard University Press.

Wartofsky, M. (1979). *Models, representation and Scientific Understanding*. Holland, England, U.S.A.: D. Reidel Publishing Company.

FUNCTIONS IN TECHNOLOGICAL ENVIRONMENTS: FROM MULTI-REPRESENTATIONS TO CONNECTED FUNCTIONAL WORKSPACES

Jean-Baptiste Lagrange
IUFM, University of Reims, France and LDAR, University Paris-Diderot

This paper questions the idea of function on the basis of classroom research at upper secondary level in the Casyopée project (Lagrange, 2010). In this project, students are introduced to functions by working on the same functional dependency in four settings. The underlying theoretical framework is a multi-representation view of functions. In cross-experiments and cross-studies this approach has been confronted with other approaches. This implied to reconsider the idea of function and to examine the potential of the idea of connected functional workspaces for designing and analysing classroom situations around functions especially in technological environments.

Keywords*: Casyopée, Modelling Cycle, Functions, Functional Workspaces, Semiotic systems.*

This paper examines the potential offered by technological environments and associated signs systems in the mathematical work of the student around the notion of function. It does this on the basis of classroom research at upper secondary level, supported by the design and experimentation of the Casyopée software (Lagrange 2010).

Activities on functions mobilize many material or mental artefacts associated with varied semiotic systems. We consider these artefacts as representations, that is to say, entities with which the mathematician or apprentice mathematician interacts and to which he or she assigns a meaning. Semiotic systems are special entities systematizing practices in a given culture.

The work around Casyopée fits into the functional approach to algebra as encouraged by many curricula, while relying on didactical frameworks, especially around the semiotic systems (Duval 1999, Radford 1999), and around functions viewed as co- variations (Thompson 1994). The activities offered to students are considered through a "modelling cycle" where the same functional dependency is studied in four settings: (1) a physical system (2) a dynamic geometry construction modelling the system (3) co- variation between quantities involved in the construction (4) a function defined by a symbolic expression (Minh 2011).

In cross-experiments and cross-studies (Lagrange & Psycharis 2013; Lagrange & Kynigos 2014) this approach has been confronted with other approaches showing that the modelling cycle is adapted to the analysis of situations beyond the work around Casyopée, but also the limits of considering this work in a multi-representation approach. This opens questions discussed in the paper:

- Why and how stay away from a Platonic view of the notion of function?

- What are the benefits of seeing the four settings of the modelling cycle as connected functional workspaces?

In the conclusion, I discuss further work especially on cognition inside and between workspaces.

HELPING STUDENTS TO MAKE SENSE OF MATHEMATICAL SYMBOLISM WITH THE SUPPORT OF THE COMPUTER

Comparing two research projects aiming at using technology to offer students "more learnable" mathematics, Hoyles, Lagrange and Noss (2006) stressed how, in the paper/pencil context, symbolism is a major obstacle for most students.

> Paper/pencil algebraic infrastructures make it necessary for individuals to pay considerable attention to manipulation, and key mathematical topics are only amenable to those who had already been inducted into fluent algebraic representations and calculations. This means that many never engage with the mathematical topic at hand (p. 269).

My main concern at this time was whether, knowing these difficulties and the potentialities of dynamic technologies like dynamic geometry, spreadsheet, etc. for exploration of mathematical notions and problems, mathematical symbolism would survive outside pure professional mathematics. I noted that

> Computer symbolic systems (CAS), have been presented as a means to overcome students' difficulties in paper/pencil manipulations (…) Although promising, this approach has not been, in our view, sufficiently discussed from an epistemological point of view, and its 'viability', that is to say the conditions in which it could be effective in actual classrooms, remains problematic (p. 270).

I explained that the main aim of the Casyopée project I was starting with colleagues and teachers, was to address the challenge of developing a CAS tool that could be effective in secondary classrooms. Relatively to representation, this development was mainly inspired by Duval (1999)'s framework presented in the next section and exploited for discussing a task for students motivated by this approach.

A « REGISTER » APPROACH OF MULTI-REPRESENTATION

For Duval (1999, p.4), "there is no other ways of gaining access to the **mathematical objects** but to produce **some semiotic representations** (…) On the other hand, the understanding of mathematics requires not confusing the mathematical objects with the used representation*s*". According to Duval, rather than opposing material and mental representations, it is necessary to distinguish two types of implementation of representations by the subject, the automatic activation of an artifact (material or mental) that he names organic system, and the intentional exploitation of a semiotic system (Figure 1).

Implicitly, Duval presupposes the existence of mathematical objects. Then in automatic activation, this object itself produces the representation, for instance "proportionality" produces points in a line on a concrete graph, and in intentional use, a semiotic system, that is to say a set of symbols and rules for using them, represents the object (that is to say is used in place of the object). Thus, representing "something" can be thought of in two ways: the activation of a mental or physical device making this “something” work or the conscious use of a semiotic system in place of the “something”.

Activating an organic system or a physical device

Bringing into play a semiotic system

he representation is the outcome of physical action of the “represented”

The representation denotes the represented object

Figure 1. representations and their implementations (from Duval 1999)

For Duval, each semiotic system or “register of representation” has its own specific means of representations and processing. Duval stresses the need for a specific focus of teaching learning on the processes of work inside the registers (treatments) *and* between the registers (conversion). Relatively to functions at upper secondary level, two registers are generally involved, the register of symbolic expressions and the graphic register of curves of functions. Many research studies show that in classroom practices the register of symbolic expressions dominates, and in this register rote treatments dominate over interpretation of expressions and understanding of the rules and purpose of transformations[29]. Conversions are always from mathematical expression to graphs, occurring in standardized tasks like finding the true graph of a function from its symbolic expression.

In this section, I look at the conditions in which technology can help a more versatile use of each of these registers as well as a balance and coordination between these registers, drawing from a classroom situation using Casyopée, studied by Minh (2011)It deals with pre-calculus students and the following task.

Consider the family of functions over the set of

[29] For a recent example, showing how even when using a software like GeoGebra for introducing a function, a teacher does not break with this dominant conception of functions, see Robert & Vandebrouck (2014, p. 264).

real numbers , k being a real

parameter. Study the variations of
depending on k.

This task has been chosen because a pure symbolic solution is not directly accessible through standard techniques, since the root of the derivative cannot be calculated symbolically. An effective standard technique is to study the variations of the derivative, after calculating the second derivative, but this technique is not known by students. Another feature is that the function has three different behaviours depending on *k* (see Figure 2) one on the left for *k* greater than a certain value (e^{-2}), the second between this value and zero, and the third for k negative.

$k \geq e^{-2}$ $e^{-2} > k > 0$ $k \leq 0$

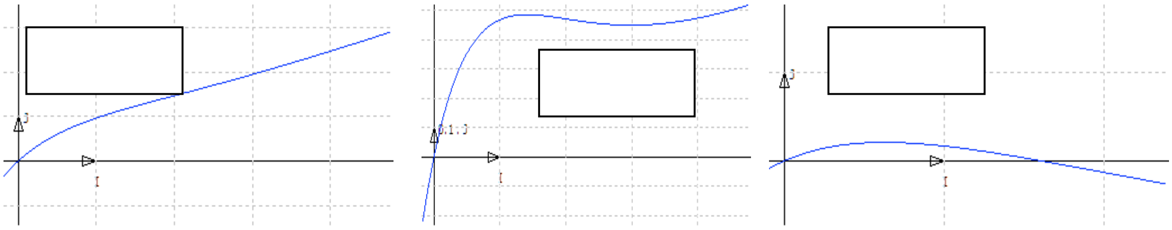


Figure 2. Three behaviours of the function

The important thing is that this value is close to zero, and thus a pure graphical exploration might overlook the intermediate behaviour. It can be expected that most students will first animate the parameter for integer values and then skip this intermediate behaviour. However a close inspection of the graph of the derivative for *k=0* and *k=1* (Figure 3) will give a clue that 'something happens' between these values: passing from 0 to 1, the curve is translated vertically, and then an intermediate value would bring the curve to intersect the x-axis in two points. This idea of a translation is confirmed by the symbolic expression

where *k* is an additive constant. Then, in order to carry out the task, the students have to perform non-routine processes inside the symbolic and the graphic registers, *and* to coordinate explorations and observations in the two registers.

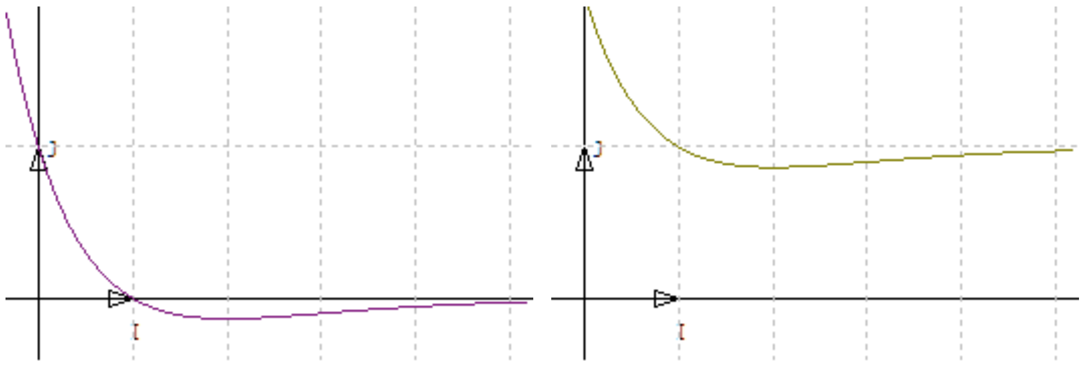


Figure 3. The derivative for k=0 and k=1

Designed as a CAS system especially devoted to functions at this level, Casyopée allows students to perform automatically standard calculation like derivatives and solutions of equations, as well as to graph functions. Piloting the values of k by way of a slider helps to animate the graph of the function, and also to instantiate this parameter inside expressions of the functions. In short Casyopéee is expected to give security for calculation and to favour joint interpretation of graphs and symbolic expressions.

Investigating students' solutions at various stages, we observed three types of answers.

In a first type 1 (Figure), the intermediate behaviour is not detected. The student keeps the default value 1 for the step in the animation of the parameter and does not closely look at the derivative. This type of answers is frequent by beginners not yet acquainted with the management of the parameters in Casyopée and who do have not a flexible use of the derivative.

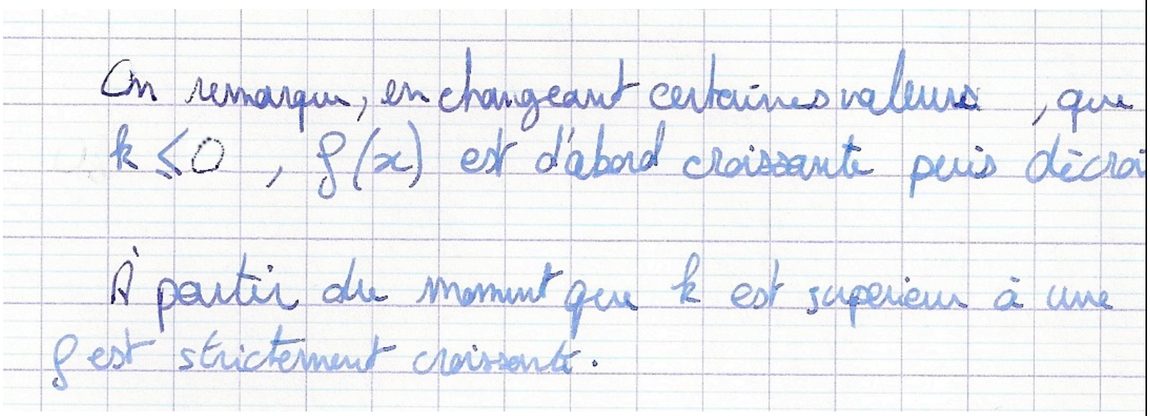
 On remarque, en changeant certaines valeurs, que $k \leq 0$, $f(x)$ est d'abord croissante puis décroi À partir du moment que k est supérieur à une f est strictement croissante.	By changing some values, I observe that if $k \leq 0$, f(x) is first increasin g then decreasin g. After k is higher than a certain value, f is strictly increasin g.

Figure 4. A type 1 answer

In a second type of answer (Figure 5) the student realizes that it is easier to observe the graph of the derivative as compared to the graph of the function. Animating the graph with a smaller step of the parameter, she detects the intermediate behaviour, but she dwells in the graphic register, and then she cannot find the critical value (Figure 5).

	When k is higher than a certain value, f is increasing. When k is between 0 and a certain value, f is, decreasing, then increasing. When k is lower or equal to 0, f is

→ quand k est supérieur à une certaine valeur, f est croissante. → quand k se situe entre 0 et une certaine valeur, f est croissante, décroissante puis croissante. → quand k est inférieur ou égal à 0, f est croissante puis décroissante.	increasing then decreasing.

Figure 5. A type 2 answer

In a third type of answer (Figure 6), the student finds the critical value e^{-2} by asking Casyopée for the solution of $f'(2)=0$ (Figure). Analysing her approach, we identify four steps:

- she observes on the graph that the derivative is always maximum for x=2,
- coordinating the symbolic form of the derivative and its graphic representation, she notes that *k* is an additive constant and then the animation translates the graph vertically,
- she figures out that to find the critical value, she has to "bring the graph" onto the x-axis, which is not possible by animating for decimal values of the parameter,
- she solves symbolically by way of the equation in *k* f'(2)=0.

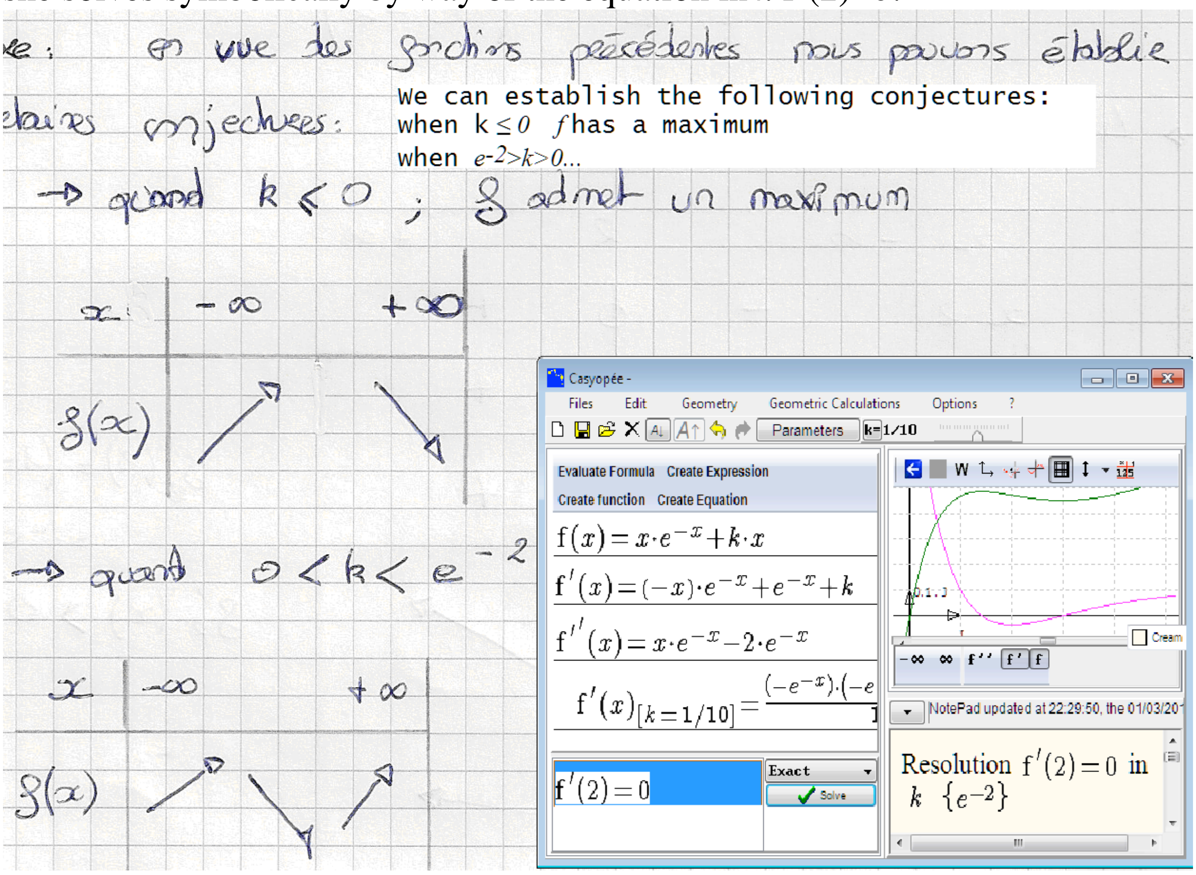


Figure 6. A type 3 answer

This third type of answer is observed by students mature with the use of Casyopée (Minh, ibid). It is evidence of a very effective coordination between the symbolic and the graphic register. Casyopée provides means that make this coordination effective. It does not in itself give the students this capacity for coordinating registers. This capacity is the result of a process of students' growing awareness of Casyopée's functionalities *and* of the idea of functions as expressed in several registers. This is a process of *instrumental genesis* (Lagrange 1999) that Minh (2011) observed by students all along two years of studying pre-calculus.

ALTERNATIVE REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS

Duval's framework is very rich and many researchers draw on, especially when dealing with digital representations. As said before, it presupposes that "ideal" mathematical objects (notions, ideas, concepts…) exist. As shown above, Duval's registers of representation were productive in the development of a tool for helping students deal with tasks about functions. However, it was only a first stage and I regretted in Hoyles, Lagrange and Noss (2006) that

> Casyopée works on functions given by symbolic representations and till now provides no enactive representation for non-symbolic functional exploration and limitations in the students' experimental activity, especially when modelling phenomena. (p. 282)

I also pointed out the need to develop features allowing students to work with enactive non- symbolic representations. Short after writing this, I had the opportunity to work with colleagues on an extension of Casyopée in a project whose name was "Representing Mathematics with Digital Medias" (Lagrange & Kynigos 2014). With regard to Casyopée, one goal was to explore new, non standard representations of functions. We had also to carry on "cross studies" of digital tools developed inside the project. In this section I report first on new ways of representing functions introduced in this extension of Casyopée, and then on other views coming from the "cross studies".

Modelling dependencies in a physical system

One outcome of the work on Casyopée in ReMath and after was a broadened view on functions in the students' mathematical activity. The idea of modelling dependencies in the physical world was thought of as a way to allow students to work with enactive non-algebraic representations of phenomena and to pass fluidly between algebraic and non-algebraic representations. More precisely, the Casyopée team imagined a "modelling cycle" organising models of a dependency in specific settings. Figure 7 illustrates this cycle with the example of the "amusement park ride" that I will use in this sub-section.

Basically, dependency is a human experience involving items in a *physical device*. In this setting, one item moves and another follows. I consider *dynamic geometry* as a second settings and the product of an evolution: human beings used drawings since the prehistoric times to "represent" features of the physical world and they made them evolve to allow accurate work related to physical devices; recently *dynamic geometry* added the particular capacity of "representing" dependencies:

when the user drags an object on the screen, another object follows on the screen. Passing from a physical device to a dynamic geometry figure is in no way trivial, since it implies the identification of relevant features of the device and of their geometrical dependencies.

Quantities constitute a third setting for working about dependencies. According to Thompson (2011, p.37), a *quantity is* the outcome of a process of "conceptualizing an object and an attribute of it so that the attribute has a unit of measure". Thompson (ibid.) stresses the role played by quantitative reasoning in students' operations of generalizing, and of the role that generalizing plays in students' development of algebraic reasoning. He offers a number of '*dispositions'* that can aid students' construction of algebraic reasoning from quantitative reasoning. Among these, consistent with the school level the Casyopée project is intended for, I retain reasoning with *magnitudes*, that is to say attributes of objects considered independently of the unit in which they are measured. As Thompson (1994) says "one way to think of the evolution of today's many ways to think of functions is as the current state of a long battle to conceptualize our world quantitatively and then this world of quantities or magnitudes, often overlooked in secondary curricula, is a key representational setting for students' access to functions. Especially, in this setting, distinguishing functional dependency from co-variation, and identifying an independent variable are crucial challenges. As a fourth setting, *functions defined by a symbolic expression*, like those considered in the previous section, is the outcome of a historical process of emergence of functions as an individualized mathematical entity by mathematicians like Descartes, Newton and Leibniz as a tool for building infinitesimal calculus.

The extension of Casyopée

The extension of Casyopée carried out in the ReMath was intended to provide an environment supporting these various representations and their connections. It consisted in adding first a dynamic geometry window and second, representations of measures and of their covariation in a "geometric calculation tab". The existing part of Casyopée remained in an enhanced form, under the denomination of "symbolic window". The "geometric calculation tab" was designed as a unique feature, allowing to explore covariations between couples of magnitudes, to export couples that are in functional dependency into the symbolic window and then to define a function modelling the dependency, likely to be treated with all the available tools. In order to help students in modelling dependencies, this can be done automatically (Lagrange 2010). We will refer to this functionality as "automatic modelling" below[30].

For the Casyopée team, the goal was that students meet functions from meaningful questions and under connected representations in these four settings. An

[30] For a detailed presentation of this functionality and Casyopée's other capabilities, please see the documentation downloadable from the web site. http://www.casyopee.eu/

example is the “amusement park ride” situation.

A wheel rotates with uniform motion around its horizontal axis. A rope is attached at a point on the circumference and passes through a fixed guide. A car is hanging at the other end.

The motion is chosen in order that a person placed in the car feel a smooth transition at high point and abrupt at low point and then, in the classroom, the focus is on the identification of these different transitions on a physical model *and* on a mathematical function modelling the movement of the car. It is expected that students associate the transition at the highest position of the car with a turning point of the function and the transition at the lowest position with the non differentiability of the function at the corresponding point. The dynamic figure and the expression of the movement as a dependency between magnitudes are essential parts of the modelling activity, helping to make sense of the relationship between the physical model and the mathematical function.

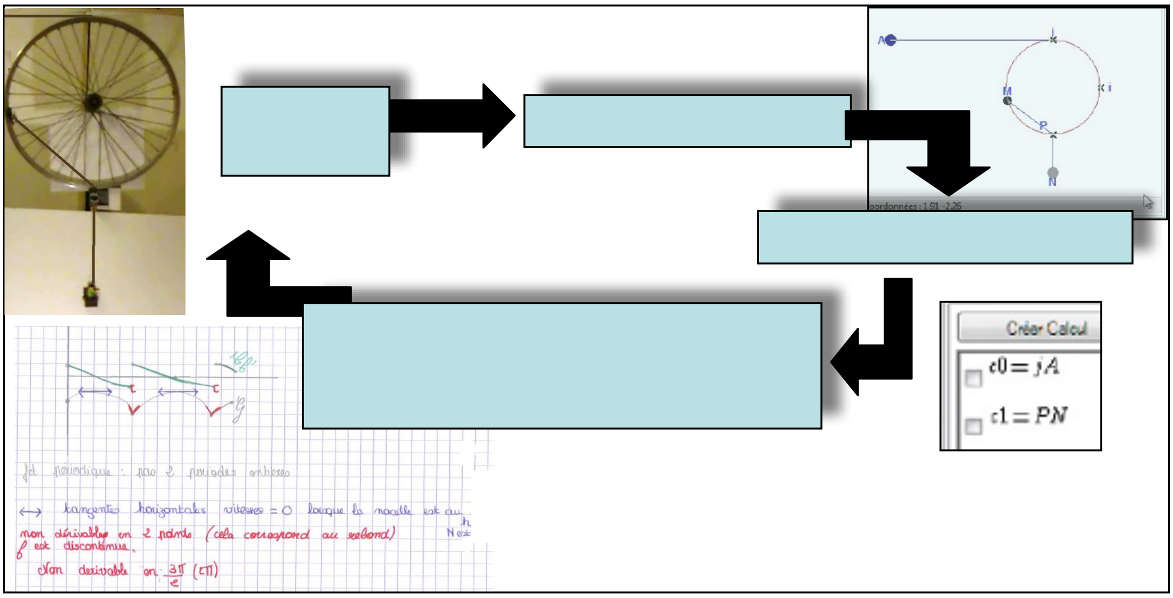


Figure 7 An example of a modelling cycle

A classroom observation

The situation was carried out with a 12th grade class (17-18 years old students) in a 90 mn session. The problem was given in “real life” settings, the students being able to manipulate a scaled device. The students were first asked to describe to describe what is happening at the lower point and whether it is different as compared to the high point. They were encouraged to refer at how a person in the car would ‘feel’ the difference and to draw a graph to explain their answer. Then they were told that, during the session, they have to build a mathematical model in order to better investigate the phenomenon.

The first step of modelling consisted in building a dynamic geometry figure in Casyopée, replicating the device. The following indications were given to the students: the rope is attached to the wheel in a mobile point M and the guide is on the fixed point P. The car is in N (figure 7). The wheel is supposed to be put into rotation by pulling on a horizontal rope jA. This implies not trivial constructions for the point ıe lower point, there is a drop shot

M in order that the circular distance IM is equal to the linear distance Aj, and for the point N in order that MP+PN is constant. The students had to use Casyopée first to implement a dependency between magnitudes modelling the dependency in the figure, then to obtain a function defined by a symbolic expression thanks to "automatic modelling", to get the derivative and should notice and finally to identify precisely the points of non differentiability.

I report on this situation in five steps: (1) the students' spontaneous model of the physical situation (2) how they built a dynamic geometry model (3) how they choose the dependant and independent variables and how they interpreted this choice (4) how they worked on the function obtained via Casyopee's automatic modelling (5) how their understanding of the physical situation progressed after working on the symbolic expression of the function.

Students' spontaneous model

At the beginning of the session, after presenting the situation and demonstrating by animating the scaled model, the teacher asked the students to describe what is happening at the lower point and whether it is different as compared to the high point. Figure 8 illustrates a typical answer. Students said that at the high point, the car stops and they had some difficulties to explain what is happening at the lower point. The more common expression, drop shot, is not accurate because it means that the car is arriving at a certain speed, stops and starts up again at a lower speed. Students illustrated by a graph of a piecewise linear function. Actually they thought that because the wheel rotates uniformly, the car's movement should be piecewise uniform.

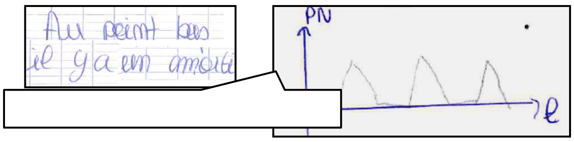


Figure 8: Students' spontaneous model

Building a dynamic geometry model

This was a difficult part. Students' poor practical knowledge in trigonometry explains why they needed help to define M in order that the circular distance IM equalled the linear distance Aj. It seems more surprising that they found difficult to define N in order to make MP+PN=2 (the length of the rope). After the teacher indicated that PN is known when MP is known, some students used a circle centred in P with a radius of 2-MP and defined N as an intersection point with the y-axis, and others directly defined N with the coordinates
$(0; y_P-(2-MP))$.

Choosing the variables

Generally the students had no difficulties to operate the choice with the software. However, their expression was sometimes confused when explaining the choice. For instance a pair of students wrote in the report: “We choose distance Aj as the (independent) variable” and added “Aj is a function of the coordinates of N”.

Working on the function obtained via Casyopee’s automatic modelling

The students obtained the derivative by using Casyopée’s automatic modelling under the form $x \to \frac{-\cos x}{\sqrt{2\cdot\sin x+2}}$. Casyopée issued warnings because this function is not defined everywhere. Students ignored the warnings and obtained a graph with wrong vertical segments (pink in Figure 9).

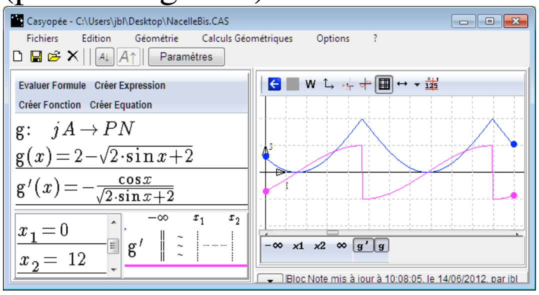


Figure 9: A graph of the derivative with wrong vertical segments

The teacher drew students’ attention on these segments and they recognised that there should be discontinuities of the derivative corresponding to the low points. The teacher asked them to compute the position of these discontinuities. No students did this from the formal definition of the derivative. They rather came back to the physical device or to the dynamic geometry figure, looking for the value of jA corresponding to the lower point of the car. After they found these values and excluded them from the definition of the derivative, they got a correct graph (Figure 10).

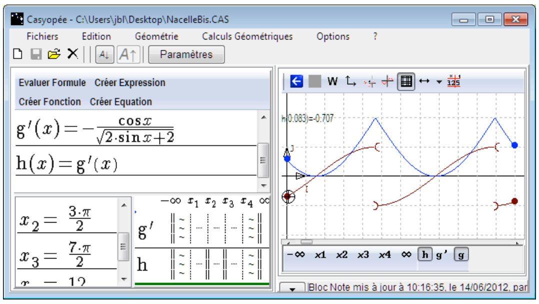


Figure 10: A correct graph of the derivative

Students’ understanding of the physical situation after working on the function obtained via automatic modelling

Students’ understanding was much better in the last phase. They identified the derivative and the car’s speed, saying that the speed is null at the high point corresponding to a horizontal tangent on the graph of the movement. Implicitly, they recognised that at the lower point the car starts up again briskly at the same speed, speaking of “rebound” corresponding to non differentiability points, rather than of “drop shot” implying softer stop and restart. This is evidence that the students connected features of the mathematical function with a phenomenon experienced in the physical word. Clearly students got a broad view on this function, coordinating many aspects or representations, without dominance of one representation. The symbolic formula was an aspect between others, the pole of the derivative giving a specific insight, complementary to the discontinuity on the graph, and the feeling of “rebound” at the lower position of the car.

Other insight coming from a Remath “cross study”

The experimentation of several situations based on the above ‘modelling cycle’ comforted the team in the productivity of the enlarged view on functions on which Casyopée’s extension is based. A “cross study” carried out in ReMath provided additional unexpected insight. ReMath aimed at investigating contextual elements influencing research about math education and technology, and to progress towards theoretical integration. A method in Remath was “cross studies”: each piece of software developed in the project was “cross-experimented” by two teams and this cross experimentation was followed by a “cross-case analysis” (Lagrange & Kynigos 2014), one team being in charge of the design and development of the piece of software. Here I consider the Cruislet cross study that associated a Greek team and the team developing Casyopée.

The Greek team was influenced by a constructionist framework. They designed Cruislet as a navigation microworld in which users direct planes across the Greek geography by issuing navigation instructions in either graphical/Cartesian or spherical/polar coordinate systems, in direct stepwise mode or by way of Logo programming. The modalities of employing exposed by the Cruislet team were consistent with their theoretical perspective. For instance, the team implemented a “guess my flight” situation based upon the use by students of a procedure that made one plane perform a flight to an arbitrary position while another reached a dependent position, each of its coordinates being a linear function of the same coordinate of the first one. Using this procedure first as a black box and then decoding the procedure in order to propose similar challenges, students could make sense of the situation by investigating the co-variation of the planes and conceiving the first plane’s position as an independent variable and the second plane’s position as a dependent variable.

The Casyopée team encountered difficulties to make sense of Cruislet’s features for educational task, and especially did not recognize the potential of a situation like “guess my flight” to allow students to approach function, a central domain of interest for the Casyopée team. Again the Casyopée team’s view of function was not broad enough: the domain of co-variation at stake in Casyopée is 2D geometry and the functions are polynomial, rational or transcendental one variable real functions rather than multilinear functions. It helped to see that it would be pointless and counter-productive to consider *a* notion of function transcending all possible representations.

Functions: a broad plurality of representations rather than a single concept

Duval's idea of considering several register of representations, stressing the necessity of educating students both in the treatments inside registers and in the conversion between registers was productive in the first phase of development of Casyopée, since it helped to build a tool and situations of use breaking with current narrow tasks and dominant conceptions of functions.

However, given the big variety of representations that we had to deal with in the extension of Casyopée and in the cross-studies, I came to consider unproductive the Platonic view of function as a single mathematical object, acting in different settings and denoted by all these dissimilar representations. Actually, the idea of analytic function, as invented by Descartes, Newton and Leibnitz dominates at secondary level, and teachers' and students' conceptions of functions are strictly dependent on an symbolic view of functions. It means that even when they consider situations where geometrical or physical dependencies are involved, these dependencies are used as a "faire-valoir" (complementary or contrasting character in a play) rather than actual functions. There is then a danger that in the implementation of situations like the "amusement park ride" above, too much emphasize is put on symbolic facts to the detriment of the other interpretations[31].

It seems then more productive to think of functions as a constellation or a network of many representations, each rooted in a particular practice, no one dominating and with more or less strong connections between them rather than connections to a single object. This seems consistent with Radford's (1999) view that a « representation does not appear as a pointer to an abstract idea but as the contextual instantiation of social modes of knowing as expressed and contained in signs". Especially considering the case of functions, Radford critics a narrow view of functions and stresses that linking representations cannot be made without a common context.

> The learning of functions is seen as the capability of a student to move from one representation to another (tables, graphics, algebraic formulas, etc.). These "external" representations are seen as the expression of the same concept —that of function. In my view, each semiotic system (tables, graphics, etc.) leads to a particular concept.(…) What this means is that a contextualization among representations will be needed to link them, and this requires a different pedagogical action. (p. 149)

Mathematical and functional workspaces

Above, I described how it is possible to think of functions as a plurality of representations, each related to a specific setting. It is important to reflect on these settings, since a representation does not exist alone and as Radford (1999) says, being acquainted with representations and making links between these requires a contextualisation. For me, a representation can be seen as a tool used with other

[31] See footnote 29 for an example.

artefacts to work in a specific domain or workspace. Mathematical workspaces (Kuzniak & Richard 2014) generalize geometrical workspaces. A workspace is what allows individuals to work on a mathematical task. In a workspace signs or language have their own existence as specific artefacts, rather than as "representations" of ideal objects. For students, the work aims both at knowing better the objects (what the problem is about), at mastering the artefacts (material and symbolic) and at using wisely a relevant framework of reference (i.e. a set of properties allowing explanation, deduction or inferences).

It is important for mathematics educators to organize mathematical workspaces offered to their students, paying attention to (1) the internal relationships between the three poles, objects, artefacts and framework of reference inside a workspace and (2) the means they provide to students for connecting these workspaces. Retrospectively the work carried out about functions in the Casyopée project and illustrated by the above example can be thought of as an instance of this organization, including the design of specific (technological) artefacts insuring internal consistency and easing the connection between workspaces. Table 1 recapitulates the different poles for the workspaces involved. Since the physical device cannot be qualified of "mathematical", the noun functional workspace will be used for all settings.

Poles\workspaces	Physical device	Dynamic figure	Magnitudes	Algebra and calculus
Object	Mechanical dependency	Co-variation of geometrical objects	Co-variation of measure, variables	Mathematical Functions
Artefacts	Device, language	Primitives of construction, dynamicity, geometrical language	Language, specific symbolic expressions	Mathematical symbolism and language
Framework of reference	Mechanical constraints	Geometrical properties	Quantification	Algebra and calculus theorems

Table 1: Four workspaces

FUNCTIONAL WORKSPACES

After introducing workspaces as a way to make sense of representations in the Casyopée project, and as a means to break with a Platonist view of functions, the goal of this section is to extend the reflection to another similar research study, in order to test the relevance of this introduction on a wider basis.

The research question in the "enlarging-shrinking alphabet" study (Lagrange, Psycharis 2013) was how a computer environment could help students to understand dependencies and express them in formal notation. It is then consistent with Casyopée's aim. However it has been conducted at a different school level (6^{th} grade), with a different software environment, and functions considered here are linear rather than polynomial or transcendental. Turtleworlds, the computer environment, was chosen in order to prompt students to construct relationships and figures according to the rules of proportionality *and* to allow formal expression of these relationships. It consists of three components: Canvas, Logo and Variation Tool. The elements of a geometrical construction in the canvas are expressed by way of a Logo procedure. After a procedure depending on variables is defined and executed with a specific value, the Variation Tool provides a slider for each variable. For instance, a correct procedure to draw a 'letterN' could be:

to letterN :r fd :r rt 135 fd :r*1.41 lt 135 fd :r end[32]

Since, in the above example, the procedure properly expresses the proportional relationship between the sides of the letter, dragging the :t slider enlarges or shrinks the letter while conserving the shape.

The task was to construct enlarging-shrinking models of capital letters with one variable corresponding to the height of the respective letter. In a first phase, the students were given a procedure with two variables

to letterN :r :t fd :r rt 135 fd :t lt 135 fd :r end

The students were encouraged to explore with various values of :r and :t using both sliders. In a second phase they were invited to change into a one variable procedure, drawing a correct letter for all values of :r. In a third phase they had to look for a general 'method' to prevent distortions applicable to other angles.

Lagrange & Psycharis (2013) report on an observation of two students (A. and C.) in the second phase. They considered the relation of the two values as "200 plus forward 40" which they used in the construction of the respective original pattern of N. Thus, they substituted the variable :t with the functional expression (:r+40). When A. moved the slider: r to the value 220, the figure was distorted and C. conjectured directly for the changes in the functional expression ("we need to add 50"). This way students continued to work with additive relations (e.g., :r+50, :r+45) but moved from constant differences to adjusted differences according to the different values of the independent variable. However, successive dragging on the variation tool confirmed that the use of an additive algebraic expression constituted an erroneous strategy for constructing an enlarging-shrinking model of N holding for "all values of :r". This is how students moved to a multiplicative strategy under the supervison of a researcher (R.)

R. : Since the one [i.e. the vertical segment] is 100 and the other one [i.e. the slanted segment] is 145. What is the relation between 145 and 100?

C.: It [i.e. the slanted length] is neither half. It is half … let's say plus 45.

Researcher: Half?

C.: Not exactly. [After a while] One and 45 which we have already put here [i.e. the expression :r+45].

R.: If this is one time and half bigger than the tilted one. How much is it?

A.: :r plus one and a half.

[32] 1.41 is approximatively |1/cos(135°)|, fd : forward, lt : left turn, rt rigth turn.

C.: [to A.] No, it would be two times and a half then. It's :r plus half. It is one time and half bigger.

A.: :r plus half.

C.: [Thinks for a while] :r times one and a half. Lets' try it [C. then goes straight to the Logo editor and types the linear relation as 1.5*:r for the slanted length.]

After experimentation with changing the values of the functional operator they accepted as value 1.42.

The observation shows that the functional relationship expressing proportionality is really at stake here, the students struggling to give up with additive relationship, at first with ambiguous utterances, then correcting in a fractional expression (one and a half), translating into a multiplicative relationship (1.5*:r) and finally adjusting thanks to the feedback of the figure. The specific challenge is to formulate a dependency between the length of the vertical segments and the length of the slanted segment in a formal form allowing its expression in a Logo procedure.

Students work in four functional workspaces similar to those identified in the Casyopee experiment above. The physical system of reference is an (evocated) letter conserving its proportions at different sizes. The geometric figure is a path of the turtle in three segments with a given angle between them. In phase 1, the path depends on two variables and in the next phases, the challenge is to program the path in order that it depends on one variable while conforming to the goal that it represents the letter N. Magnitudes like angles and lengths are involved. An algebraic expression occurs to express the dependency inside the LOGO procedure.

While activating the sliders and working on the Logo procedure, the students consider together the physical system, the geometrical figure, the dependency between magnitudes and an algebraic expression of this dependency. Their task is actually to understand the constraints of the physical system as a dependency linking two magnitudes and to find an expression for this dependency in order to write a procedure using a single variable.

Here also, physical situation, dynamic figure, magnitudes and formalism offer four different workspaces. As a difference with the Casyopée experiment above, the progression of functional meanings is not seen as a progression through the settings: there is no cycle. Students have constantly to jump for one workspace to the other. Similarly, there is no one to one correspondence between the settings and the three components of the computer environment. As a difference with Dynamic Geometry, the figure can be manipulated only by way of sliders (of the variation tool) that act on measures. The Logo procedures can be viewed as functions associating the figure to one or more variables, kinetically controlled via the sliders. However, the procedures do not express directly the functional relationship between lengths which is at stake. The actual expression of this relationship is within the procedure, embedded in commands for the turtle.

Distinguishing four similar workspaces in the two experiments helps to evaluate choices made in the design of both experiments and software. In Casyopee, starting from a purely algebraic environment, a dynamic geometry window has been appended, and linking algebra and geometry implied conceiving a space to work on magnitudes. Physical systems were considered in order to take advantage of functional dependencies experimented in the physical world and « embodied » in human cognition. This is a rather epistemological view of the workspaces' organisation. The Turtleworlds experiment is based on the constructionist aim to help students access « meaningful » algebraic forms. This is rather a cognitive view that does not clearly distinguish the spaces in which students have to work. Comparing the two experiments, one can say that in Casyopée, on the one hand the workspaces are well identified, but on the other hand the activity is somewhat rigidly organised as a (circular) path along the workspaces. In the Turtleworlds experiment, the activity is less constrained and more motivated, but there is a chance that students never clearly identify the objects, artefacts and frameworks of reference in which they work: for instance, here it is not clear what the letter :r represents, a magnitude or an algebraic variable.

CONCLUSION

This paper offered connected workspaces as an alternative to multi-representation for the domain of functions. This view departs from a Platonist conception of functions as a single ideal object. It helps also to recognize representations not as entities existing for themselves, but rather as artefacts co-existing with others artefacts helping to work on specific objects and controlled by specific frameworks of reference. This is productive to appreciate and contrast experiments involving computer environments. In this paper, reflecting on functional workspaces was done retrospectively, in order to make sense of experiments and software designed with another agenda in mind. I expect that the idea of connected functional workspaces will in the future, also help task and software design, as well as a priori analysis.

Cognition is another topic for further reflection. How do students working in functional workspaces access to meaningful views about functions? Kuzniak & Richard (2014) propose to add a cognitive layer, connected to a workspace by specific geneses, one being the genesis of mathematical instruments introduced by researchers like Lagrange (1999) under the inspiration of cognitive ergonomics. For me, the question at stake is how students working on specific objects with specific artefacts develop an understanding of a specific framework of reference. I would then consider that in each workspace, an instrumental genesis is at stake, constructing "instruments" from material artefacts (technological or not), as well as from other semiotic artefacts (discursive or figurative). Especially in the domain of functions, linking the instruments built in geneses of a plurality of workspaces is important. Presmeg (2006) offered to think of semiotic chains as a way to bridge a gap between activities of everyday practices and mathematical activities and to organize a process in which "goals, discourse patterns, and use of terms and symbols, all move towards that of classroom mathematical practices in a way that has the potential to preserve essential structure and some of the meanings of the original activity." Clearly, this kind of process is at work in both "amusement park ride" and "enlarging-shrinking alphabet" situations above. Characterising these processes as a way to connect workspaces is a promising direction.

REFERENCES

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds), *Proceedings of the twenty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, vol 1, pp. 3-26.

Hoyles C., Lagrange, J-B. & Noss, R. (2006). Developing and evaluating alternative technological infrastructures for learning mathematics. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds.) *New mathematics education research and practice* (pp. 263-312). Rotterdam: Sense Publishers.

Kuzniak, A. & Richard, P.R. (2013). Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 17, Numero Extra. 1.*

Lagrange, J.B., Kynigos, C. (2014). Digital technologies to teach and learn mathematics: Context and re-contextualization. *Educational Studies in Mathematics,* 85(3), 381-404.

Lagrange, J.-B (2010). Teaching and learning about functions at upper secondary level: designing and experimenting the software environment Casyopée. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 41(2), 243-255.

Lagrange, J.B. (1999) Complex calculators in the classroom: theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *Int. Journal of Computers for Mathematical Learning* 4(1), 51-81.

Lagrange, J. B. & Psycharis, G. (2013) Investigating the Potential of Computer Environments for the Teaching and Learning of Functions: A Double Analysis from Two Research Traditions. *Technology, Knowledge and Learning*. Springer On line first.

Minh, T. K. (2011). *Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel : situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves*. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot. Available at http://tel.archives-ouvertes.fr/

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2) 163–182.

Radford, L (1999) Rethinking Representations In F. Hitt & M. Santos (Eds), *Proceedings of the twenty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mexico.

Robert, A., Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignantsdu secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en didactique des mathématiques,* 34 (2-3) 239-245.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in* *mathematics education*. WISDOMe Mongraphs (Vol. 1, pp. 33-57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, I: Issues in mathematics education* (Vol. 4, pp. 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

UN POINT DE VUE MULTIDIMENSIONNEL SUR LES OUTILS ET LES INSTRUMENTS DANS LES ESPACES DE TRAVAIL MATHEMATIQUE

Jean-Philippe Drouhard et Alain Kuzniak

Universidad de Buenos Aires, Argentine et Université Paris Diderot, Paris, France

jpdrouhard@ccpems.exactas.uba.ar et alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

Résumé. Dans cette communication, nous questionnons la place et le rôle des outils et instruments dans le travail mathématique. Après avoir fait une distinction entre artefacts, outils et instruments, nous introduisons un point de vue multidimensionnel sur la question des instruments en pointant des différences entre instrument sémiotique, instrument notionnel et instrument artefact. Nous réservons le terme d'instrument mathématique aux outils dont la maîtrise cognitive permet un travail mathématique complet. Pour illustrer ces distinctions, nous étudions les arbres pondérés en probabilités comme exemple d'objet initialement purement sémiotique, le calcul algébrique littéral comme exemple d'outil symbolique, le théorème de Thalès comme objet du référentiel théorique et, enfin, le compas comme artefact matériel.

INTRODUCTION

Comme l'indique l'appel à communication du symposium, les Espaces de Travail Mathématique permettent de cristalliser des manières de faire et des cheminements de pensée qui apparaissent dans la résolution des problèmes de mathématiques proposés dans l'enseignement. L'activité mathématique se donne à voir à travers l'usage, plus ou moins coordonné, d'artefacts, de signes et d'éléments du référentiel théorique constitutifs du plan épistémologique. La question sera précisément de comprendre, ou tout au moins de décrire, le processus de coordination entre tous ces objets aux statuts et rôles différents dans la constitution de l'activité mathématique. Notre but n'est pas d'épuiser le sujet mais d'en proposer une exploration à partir de quelques exemples mettant en évidence différents usages des objets et outils mathématiques dans les ETM idoines actuels.

La question des objets et des approches

Au-delà même de la redoutable question épistémologique de savoir ce que peuvent être les objets en mathématiques (Caveing, 2004), la complexité de l'étude de ces objets vient de la variabilité de leur emploi et de leur statut dans le travail mathématique. Ainsi un outil de résolution peut devenir un objet mathématique d'étude à part entière. Par exemple, une division particulière qui sert à résoudre un problème de partage devient une opération générique dont on étudie les propriétés. De même, les nombres décimaux utilisés pour approcher une racine carrée deviennent les éléments d'un ensemble de nombres $\mathbb{D}$ qui devient alors le centre de l'étude. Cette évolution d'un outil vers un objet mathématique a été théorisée en didactique des mathématiques par Douady (1986) et mise au service de l'apprentissage mathématique sous le terme de dialectique outil-objet.

L'origine des objets intervenant en mathématique est très diverse. Certains ont, comme nous venons de le signaler, d'abord été des outils. D'autres apparaissent sous la forme de signes ou bien de théorèmes. Certains objets relèvent du monde matériel et tangible, d'autres de systèmes sémiotiques ou bien d'ensembles structurés de propriétés articulées de manière logique dans un discours de preuve cohérent.

Cette diversité dans la nature des objets explique, pour partie, la profusion des théories avancées en didactique pour tenter de les comprendre. Certaines prennent appui, de manière classique, sur l'épistémologie et la psychologie et d'autres, de manière plus récente, sur l'ergonomie en adaptant, à travers la notion de tâche, les résultats issus du traitement du labeur ouvrier au travail intellectuel de l'élève dans la salle de classe.

L'approche que nous suivrons dans cette article s'inscrit dans le cadre général des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) et elle s'appuie également sur les apports de l'épistémographie des savoirs pour la didactique que Drouhard a développé pour une étude spécifique de l'algèbre (Drouhard, 2012). Elle privilégie un regard multidimensionnel sur les objets mathématiques : un point de vue sémiotique et linguistique articulé sur les signes constitutifs de l'objet ; un point de vue instrumental articulé sur l'usage d'un certain nombre d'artefacts et enfin un point de vue orienté vers la preuve discursive où l'objet apparaît comme une notion mathématique intégrée dans un corpus théorique qui sert de référence.

ARTEFACT, OUTIL, INSTRUMENT

Privilégier l'étude du travail mathématique en didactique des mathématiques conduit nécessairement à s'interroger sur l'appropriation des différents outils mathématiques. Mais comme nous venons de le voir, les mots se bousculent dans ce domaine et les différents usages des objets mathématiques peuvent renvoyer à des notions qui ne sont pas évidentes à distinguer comme celles d'artefacts, d'outils ou d'instruments. Il est donc nécessaire de préciser ce triptyque artefact, outil, instrument dans le cadre de notre étude.

Définitions traditionnelles

L'emploi courant du terme *artefact* en didactique des mathématiques est certainement dû à l'influence de Rabardel (1995) qui l'a introduit pour désigner, conformément à l'usage des préhistoriens ou des archéologues, un objet transformé par l'homme pour une certaine fin. Il s'agit d'un terme a priori neutre dont les usages restent à définir notamment dans une perspective technologique.

Plus finalisée par rapport à la réalisation de certaines tâches, apparaît la notion d'*outil* : un gâteau est un artefact mais ce n'est pas un outil. Pour entrer dans les nuances, certains auteurs estiment qu'un outil n'est pas nécessairement transformé pour réaliser la tâche pour laquelle il va être utile, ainsi une pierre peut-elle être utilisée comme serre-livres. Ce type de cas d'usage opportuniste est relativement rare en mathématiques par contre il peut apparaître chez les élèves qui ne connaissent pas nécessairement les règles du jeu autorisées dans la résolution d'un problème.

Les valeurs sémantiques du mot *instrument* sont très variées mais dans son acception standard dans le domaine scientifique, il s'agit d'un objet fabriqué pour permettre de réaliser une technique ou favoriser une opération (observation, mesure...). Dans le langage ordinaire, on peut donc y voir un outil particulier et performant dont la conception et la réalisation sont le fruit d'une anticipation importante.

Instruments et outils pour le travail mathématique

La notion d'instrument a acquis une signification particulière dans les travaux didactiques à la suite de l'influence de Rabardel et plus largement de l'importation de certains concepts de la théorie de l'activité. Dans cette perspective, le terme d'instrument acquiert une valeur cognitive et résulte d'une construction de schèmes par le sujet mis en activité sur des objets. Pour reprendre la distinction de Rabardel, l'instrument n'est pas un « donné » mais doit être élaboré par le sujet. Un instrument est alors formé de deux composantes : un artefact, matériel ou symbolique, et des schèmes d'utilisation associés. Ces schèmes peuvent résulter d'une construction propre au sujet ou dans un cadre plus général d'une appropriation de schèmes sociaux d'utilisation. Une formulation particulièrement claire de ses multiples relations dans le cadre de la théorie de l'activité a été donnée sous la forme d'un triangle par Engeström. Ce dernier utilise aussi deux niveaux d'artefacts et finalement d'instruments : le premier fait directement référence aux artefacts mêmes et le second renvoie à un point de vue réflexif sur leur usage (Engeström, 1999).

Dans la suite de cet article et chaque fois que cela sera utile, nous réserverons le terme d'*outil* aux objets du plan épistémologique ayant un usage potentiel déterminé dans le cadre de la résolution d'un problème. L'emploi du mot *instrument* sera privilégié dès lors qu'une interaction existera entre un sujet (élève, étudiant ou professeur) et l'outil qu'il faudra mettre en œuvre pour résoudre effectivement la tâche proposée.

Une vision multidimensionnelle

Pour tenter de comprendre l'usage dynamique et effectif des outils et instruments dans le travail mathématique, nous nous appuierons sur le point de vue multidimensionnel introduit par Drouhard (2012) dans son épistémographie des savoirs mathématiques. En relation avec les différents pôles du plan épistémologique et les différentes dimensions du travail mathématique, il est possible de considérer trois types d'outils et d'instruments : des outils sémiotiques comme les algorithmes de traitement dans les registres de représentation sémiotique ; des outils notionnels comme les théorèmes nécessaires pour valider certains raisonnements; des artefacts matériels comme les calculatrices. En un sens proche d'Engeström, Drouhard introduit un second niveau avec la notion de méta-instruments qui réfèrent à des savoirs stratégiques sur les usages des autres instruments.

Ce point de vue multidimensionnel sur la notion d'outils et d'instruments rejoint ainsi les préoccupations de chercheurs utilisant le cadre des ETM en didactique de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca et Mena-Lorca, 2012). Ces derniers ont développé la notion d'artefact symbolique pour décrire l'usage particulier dans le raisonnement mathématique de certains théorèmes comme le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de Pythagore ou bien de techniques algébriques comme les règles de factorisation ou de développement.

La question étudiée

Nous faisons l'hypothèse que la prise en compte du caractère multidimensionnel des instruments mathématiques permet de préciser et de comprendre la nature des interactions existant dans les ETM entre chacun des éléments du plan épistémologique en relation avec les genèses associées : genèse sémiotique, instrumentale et discursive. Nous illustrerons cette approche par l'étude de la fonction et des usages dans l'espace de travail de différents objets utilisés en mathématiques. Il s'agira plus particulièrement d'expliciter leur rôle dans la circulation du savoir mathématique conçu à travers la modélisation des Espace de Travail Mathématique retenu dans Kuzniak et Richard (2014) qui met en exergue trois plans principaux d'interaction [Sem-Ins], [Ins-Dis] et [Sem-Dis]. Nous essaierons notamment de voir dans quelle mesure certains de ces objets peuvent intervenir en tant qu'instrument dans toutes ces interactions et constituer de ce fait ce que nous appellerons un instrument mathématique.

Pour cette étude, nous avons retenu les arbres en probabilités comme exemple d'objet outil initialement purement sémiotique, le calcul algébrique littéral comme exemple d'outil symbolique pour favoriser le calcul, le théorème de Thalès en géométrie comme objet du référentiel théorique et, enfin, le compas comme artefact matériel.

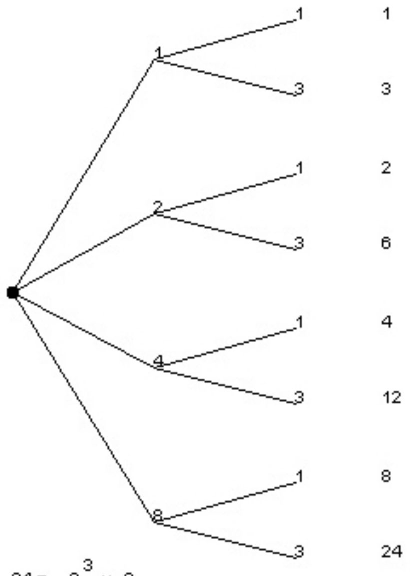
ARBRES PROBABILISTES OU LA COMPLETUDE DU TRAVAIL MATHEMATIQUE IDOINE

Dans cette section, il s'agit ici d'explorer le statut particulier de l'arbre probabiliste considéré comme un objet de type diagramme dans le travail mathématique scolaire à la fin du secondaire en explicitant son rôle éventuel d'instrument sémiotique puis d'instrument mathématique dans le sens introduit dans le paragraphe précédent. L'introduction des arbres comme outil de résolution de problèmes probabilistes dans l'enseignement secondaire français a commencé au début des années 90. Elle s'est faite progressivement à partir d'initiatives lancées par les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) qui y voyaient là une manière originale et efficace de traiter certains problèmes de probabilité. Des arguments en faveur de cette introduction sont donnés dans Parzysz (1993) et une analyse détaillée de l'impact possible de cet outil a été développée par Dupuis et Rousset-Bert (1996). Depuis cette période pionnière, les arbres ont bénéficié d'une reconnaissance institutionnelle puisqu'on les trouve officiellement inscrits dans les programmes scolaires actuellement en vigueur.

Les arbres dont il est question sont des *arbres probabilistes* qui dérivent des *arbres ensemblistes* de façon à favoriser les solutions et les calculs dans les problèmes impliquant les probabilités conditionnelles. Il y a ainsi une évolution d'un premier type de représentation essentiellement descriptif à un second type qui remplit des fonctions de preuves et dont un des enjeux soulevés par ses introducteurs initiaux était d'en faire un registre sémiotique au sens de Duval (1993).

Comme le souligne Parzysz, les arbres ont longtemps fait l'objet d'un usage spontané avec des règles de fonctionnement implicites laissées à l'initiative de leur utilisateur. Il s'agit alors essentiellement d'un outil de modélisation qui permet de représenter et de mémoriser des situations ensemblistes de dénombrement portant sur des choix d'où les bifurcations qui représentent les alternatives.

Un exemple classique en France de ce type d'usage est celui du dénombrement des diviseurs d'un nombre dont on connaît la décomposition en facteurs premiers : l'association d'un arbre de choix à cette situation permet aisément de trouver ce nombre une fois qu'il est clair que l'opération arithmétique correspondante est une multiplication. En termes peirciens, l'arbre introduit ici est un objet indiciel qui permet de donner certains résultats mais dont le statut dans l'ensemble mathématique n'est pas clairement identifié et admis (il ne s'agit pas d'un légisigne global). Grâce aux travaux didactiques entrepris dans les années 90, on assiste progressivement à la transformation de ce diagramme initial en outil mathématique autonome dont nous allons montrer qu'il permet un travail mathématique complet au sens des ETM car en plus de son rôle sémiotique, il sera possible de fonder une validation discursive sur le seul emploi des arbres.



$24 = 2^3 \times 3$

Cette transformation d'un pur diagramme représentatif en un instrument de preuve passe par différents états intermédiaires (arbre de choix et d'occurrence, arbre pondéré, arbre probabiliste à marges) pour atteindre le statut d'instrument mathématique avec des règles de calcul ad-hoc.

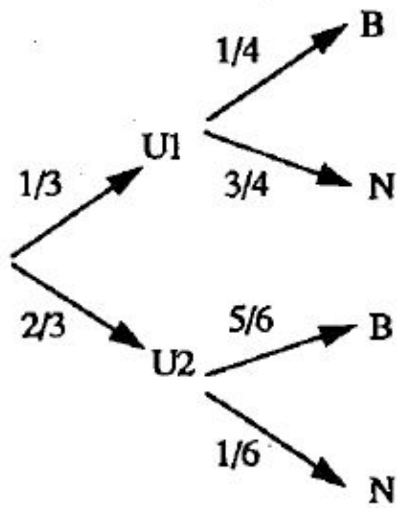
Les arbres probabilistes ont pour principal domaine d'application les problèmes mettant en œuvre des probabilités conditionnelles. Le problème standard est le problème (A) décrit grâce à un modèle d'urne.

- (A) On dispose d'un dé bien équilibré et de deux urnes contenant des boules blanches et des boules noires. On jette le dé. Si le résultat obtenu sur le dé est 1 ou 2, on tire une boule au hasard dans l'urne U1. L'urne U1 contient ¼ de boules blanches et ¾ de boules noires. Si le résultat obtenu sur le dé est 3 ou 4 ou 5 ou 6, on tire une boule au hasard dans l'urne U2. L'urne U2 contient 5/6 de boules blanches et 1/6 de boules noires.

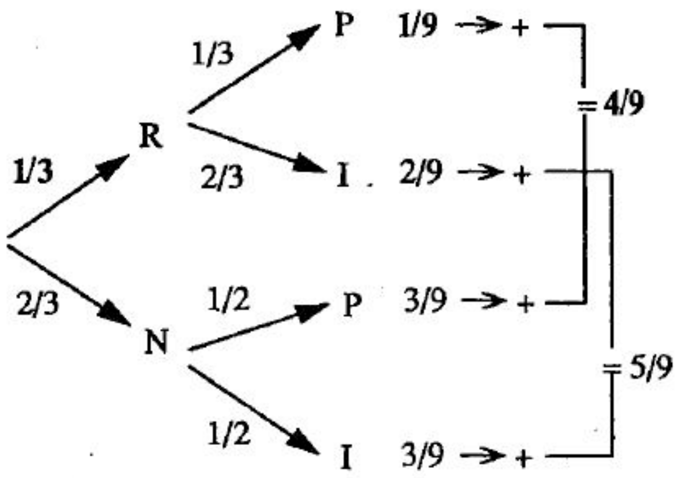
- Quelle est la probabilité que la boule ainsi obtenue soit blanche ?
- Si on sait que la boule obtenue est blanche, quelle est alors la probabilité qu'elle provienne de l'urne U1 ?

D'autres formes de problèmes relevant de ce modèle existe. Il s'agit soit d'habillage artificiel (on prend au hasard différents billets dans deux porte-monnaie choisis eux-mêmes aléatoirement) soit de problèmes sur des tests médicaux de dépistage de maladie ou de tests d'évaluation de la qualité de la production d'une usine avec des produits défectueux ou non.

À ces problèmes standards peuvent être associées deux représentations, une en tableau qui a perdu de son importance dans l'enseignement secondaire français, même si son usage reste envisagé dans les programmes, et l'autre en arbre qui a été institutionnalisée dans les derniers programmes.



L'arbre acquiert ainsi un statut symbolique et instrumental qui permet de donner le résultat. Une des questions que pose ce statut est de savoir si le résultat obtenu est considéré comme valable dans l'Espace de Travail Probabiliste ainsi créé, autrement dit si on peut fonder une démonstration sur le résultat donné par un arbre. En terme peirciens, a-t-on un signe symbolique à la fois légisigne et argument ? En effet, généralement, l'arbre est traditionnellement accompagné, dans l'enseignement, d'un discours utilisant les symboles qui justifie chacune des étapes. Pour s'autonomiser et apparaître complet en tant qu'outil mathématique, il est nécessaire de préciser les règles de calcul sur un arbre qui permettent d'obtenir les valeurs recherchées. C'est à ce travail que se sont appliquées Dupuis et Rousset-Bert (1996), ce qui les a conduit à introduire ce qu'elles appellent un arbre « à marges » où les



calculs figurent en bout des branches et ceci avec deux marges de façon à gérer implicitement la formule de Bayes pour répondre à la question 2 du problème (A).

Les études montrent que cet outil suppose un apprentissage spécifique. De plus, comme pour tout travail sémiotique, il y a un risque de perte de sens comme l'illustre par exemple le cas du problème précité des portefeuilles où l'équiprobabilité est déclarée par des élèves sur toutes les feuilles des branches (Nechache, 2014). De fait, une erreur initiale dans le codage de l'arbre ne se retrouve pas aisément et peut entraîner aussi des erreurs du côté du professeur. Il y a alors le risque bien identifié d'enfermement symbolique.

D'autres limites sont liées à l'objet lui-même qui est associé à une technique dont la portée peut paraître relativement limitée en mathématiques avancée. Dans le cadre de l'ETM idoine propre à l'enseignement supérieur, il y un conflit entre les arbres et les écritures symboliques propres au paradigme axiomatique. De fait, les arbres disparaissent du paysage et des ETM idoines proposés dans le supérieur et leur usage est même proscrit par certains enseignants. Cette disparition est moins pertinente dans des sections plus techniques comme, par exemple, celle des techniciens de santé.

Comme nous l'avons noté les arbres probabilistes ont été officiellement introduits dans l'enseignement secondaire français actuel (2010). Leur introduction est graduelle et suit la construction sémiotique que nous avons dégagée avec d'abord un outil de modélisation parmi d'autres (arbres, diagrammes, tableaux) en classe de seconde (Grade 10) puis un lien étroit, en classe de première, avec les arbres de choix dans le cas d'un tirage de Bernoulli. Les arbres servent alors de support à loi binomiale et même à définir les coefficients binomiaux vus comme le nombre de chemins donnant p succès dans une épreuve à n tirages. Enfin, l'institutionnalisation comme un outil mathématique complet faisant partie de l'ETM idoine s'effectue en Terminale où les arbres pondérés sont les outils de représentation privilégiés pour étudier les probabilités conditionnelles. Leur statut d'instrument légitime est explicité dans les programmes de terminales scientifiques (Grade 12) en 2012 par le travail qu'il est nécessaire d'effectuer avec eux:

- Outil de représentation : On représente une situation à l’aide d’un arbre pondéré ou d’un tableau.
- Règle d'usage : On énonce et on justifie les règles de construction et d’utilisation des arbres pondérés.
- Rôle de preuve : Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve. Il est ajouté que :
- Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n’est pas un attendu du programme, mais la mise en œuvre de cette formule doit être maîtrisée.

Cette institutionnalisation des arbres comme outil légitime du travail mathématique en probabilité entraîne leur usage dans les manuels et dans les classes avec un certain nombre de variations sur leur statut suivant les classes et le manuels. Ainsi, certains manuels introduisent des règles de construction et des règles de fonctionnement d'un arbre en les mettant parfois en relation avec le substrat ensembliste.

Par exemple dans le manuel Transmath p. 353 (Aimani et ali, 2012), trois règles sont données

- 1. La somme des probabilités sur les branches partant d'un même noeud est 1 (loi des noeuds).
- 2. La probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin (loi des chemins).
- 3. La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des événements associés aux chemins qui mènent à E.

Par la suite, dans le même manuel, les solutions d'exercices proposées font explicitement référence à ces règles. Ainsi une rhétorique interne au registre des arbres se met en place et l'arbre devient instrument à part entière de l'ETM idoine proposé.

Cette première étude montre la création récente d'un instrument sémiotique qui se transforme ensuite en instrument mathématique de l'ETM idoine. Cet instrument permet la représentation d'un type de problème, il constitue aussi un instrument de calcul et, in fine, il est reconnu comme un support légitime de preuve. Il permet ainsi *a priori* un travail mathématique complet dans l'ETG idoine du lycée et des études didactique en cours (Nechache, thèse en cours) s'attachent à observer l'usage effectif de cet instrument et son influence notamment au niveau des ETM personnels des élèves.

3. CALCULS ALGEBRIQUE ET SYMBOLIQUE

La question que nous aborderons dans cette partie est la suivante : peut-on considérer le calcul algébrique et, plus largement, le calcul symbolique comme des instruments mathématiques et, si oui, de quoi s'agit-il précisément ? Pour pouvoir répondre à ces questions, nous utiliserons des éléments de l'analyse épistémographique (Drouhard, 2012) spécifiquement dédiée à l'étude de l'algèbre. Ce qui nous permettra de préciser de manière rigoureuse le statut épistémologique de ce que l'on entend par *algèbre* et *calcul algébrique et symbolique* puis de déterminer alors ce que sont les outils et instruments dans ce domaine.

Objets et savoirs algébriques

Les relations entre les objets algébriques se situent dans des dimensions non réductibles les unes aux autres. Ainsi, par exemple, l'inéquation dans $\mathbb{R}$, $18x^2 < 8$ comporte une première dimension purement sémiolinguistique associée à la représentation des objets considérés : l'écriture « $18x^2 < 8$ », considérée comme une suite de caractères et identifiée par les guillemets. Le traitement de cette écriture s'inscrit dans un ensemble de savoirs sur les systèmes sémiotiques de représentation (en particulier, et essentiellement, des registres de représentation sémiotique). Ils sont nécessaires pour pouvoir représenter les objets sur lesquels on travaille, et en interpréter et en transformer les représentations. Ici par exemple, il faut, entre bien d'autres choses, identifier la règle de priorité qui fait que l'écriture « $9x^2$ » dénote le produit de 9 par x^2 et non le carré de $9x$.

Mais le traitement d'une telle inéquation par un humain ne peut se réduire à des jeux d'écriture dans la dimension sémiotique (contrairement à ce que peut faire un logiciel de calcul formel). Il faut également prendre en compte la dimension notionnelle et référentielle des objets bien définis en mathématiques (ici par exemple, l'intervalle réel]-2/3 ;2/3[) ainsi que leurs propriétés ou relations (ici le fait que le carré d'un nombre réel est positif, ou que la multiplication est distributive sur l'addition dans $\mathbb{R}$ et plus généralement les propriétés de corps ordonné de $\mathbb{R}$). Les savoirs notionnels sont nécessaires pour pouvoir travailler avec ces objets. Ces savoirs sont forcément formulés d'une façon ou d'une autre, mais ils ne dépendent pas du registre d'expression employé. Qu'on le dise en français, en anglais, en espagnol ou en langage formel (« $\forall x\ (x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0)$ »), cela ne change rien au fait que le carré d'un nombre réel soit toujours positif.

Enfin, indépendamment d'un traitement instrumental des expressions algébriques avec une calculatrice formelle, les procédures générales que l'on peut mettre en œuvre pour réaliser les tâches souhaitées se constituent en artefact symbolique: ici par exemple, la factorisation nécessaire pour transformer « $9\ x^2–4$ » en « $(3x+2)(3x-2)$ ». Il existe donc une troisième dimension instrumentale qui va nécessiter un certain nombre de savoirs sur les outils du travail mathématique pour mener à bien, en pratique, le travail mathématiques. Ce sont, en quelque sorte, les modes d'emploi et les précautions d'usage de ces outils. Les savoirs instrumentaux se distinguent ici des deux autres types de savoirs, sémiotiques et notionnels, par le fait que leur énoncé s'accompagne toujours de la mention d'un but (plus ou moins explicitement) comme : « Pour résoudre une équation qui ne se ramène pas immédiatement à un cas connu, on a souvent intérêt à la mettre sous forme factorisée ». Il s'agira donc de savoirs seconds plus stratégiques que nous avons identifié dans la définition des outils et instruments (voir plus haut).

L'algèbre et les outils et instruments du travail algébrique

Nous pouvons maintenant répondre à la question controversée de la nature de l'algèbre et caractériser la spécificité épistémologique de l'algèbre dans les mathématiques en identifiant les outils et instruments du calcul algébrique. Elle consiste à considérer que le travail algébrique se déploie dans l'entièreté des trois dimensions du plan épistémologique (notionnelle et référentielle, instrumentale et sémiolinguistique). Pour le dire de manière plus imagée et indépendante de notre cadre théorique, l'algèbre est à la fois une science des nombres et de leurs structures, un art de la résolution des problèmes numériques, et un ensemble de systèmes de représentation sémiotiques permettant d'exprimer d'une part les problèmes numériques et leur résolution et d'autre part les nombres que ces problèmes mettent en jeu.

Ce triple point de vue sur le travail algébrique sera selon nous nécessaire pour analyser de manière didactiquement pertinente une tâche algébrique. Ainsi le travail sur l'inéquation :

$18\, x^2 < 8$

ne peut se réduire ni à l'écriture «8 $x^2 < 8$», ni à l'inégalité entre les deux fonctions $f(x) = 18x^2$ et $g(x) = 8$ (pas plus qu'à l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}\,;\ 18x^2 < 8\}$) ni à l'ensemble des procédures menant à sa résolution. Au contraire, on doit considérer que l'inéquation en question est formée des trois composantes à la fois, et que le travail algébrique se situe dans ces trois composantes indissociables.

Qu'utilise-t-on pour résoudre une inéquation dans le cas d'un travail mathématique de type algébrique ? On applique :

- des règles de calcul littéral, qui ne sont pas autre chose que des jeux d'écritures (des « transformations de mouvement »),
- des propriétés mathématiques (telle que le fait que le produit de deux nombres négatifs est positif),
- et des considérations stratégiques plus ou moins contraignantes, par exemple le fait que pour factoriser une différence telle que « $18x^2 - 8$ » on a fortement intérêt à commencer par une mise en facteurs communs (aboutissant à « $2(9x^2 - 4)$ ») avant d'appliquer la différence de deux carrés (aboutissant à « $2((3x + 2)(3x - 2)$ »).

On retrouve ici les trois dimensions de l'analyse en terme d'ETM et d'épistémographie. Cela nous amène à considérer que les outils du travail algébrique, que l'on utilise pour opérer sur des objets algébriques tridimensionnels, doivent eux aussi être considérés comme tridimensionnels. Plus précisément, les trois dimensions des outils et instruments du travail algébrique correspondent aux trois dimensions des objets algébriques sur lesquels ces outils opèrent :

- la dimension sémiolinguistique des outils et instruments du travail algébrique (ce que, par commodité, on appellera «outils sémiotiques») est celle des transformations de type : « $18x^2 > 8$ » → « $18x^2 - 8 > 0$ » (Drouhard et Panizza, 2012).
- la dimension notionnelle et discursive associée à la preuve (ce que, par commodité, on appellera «outils notionnels») est celle des propriétés mathématiques utilisées comme outil de résolution,
- la dimension instrumentale même des outils et instruments (ce qu'on appellera «méta-instruments») est celle des stratégies d'emploi des instruments, suggérant par exemple un ordre d'emploi des instruments, qui renvoie à un savoir second sur l'usage des instruments.

Pour résumer, nous considérons donc les instruments du travail algébrique comme des objets mathématiques (dans leur trois dimensions) ayant un rôle d'outil dans le plan épistémologique et « instrumentalisés » par un travail cognitif du sujet qui les utilise en reprenant ici la distinction outil/instrument que nous avons retenu plus haut. Bien entendu, à chaque étape du travail algébrique, telle ou telle dimension sera privilégiée par le sujet et on pourra alors parler d'outil ou d'instrument *sémiotique*, *notionnel* ou *d'ordre méta*. Autrement dit, nous proposons de considérer que les instruments sont des objets qui se déploient a priori dans un espace tridimensionnel mais que leur *usage* à un moment donné par un sujet donné réalisant une tâche donnée peut se situer dans une seule des trois dimensions.

Signalons que l'on peut étendre la notion de travail algébrique en « travail symbolique » qui correspond à la partie des mathématiques dans laquelle le travail sur les écritures (des registres des langages formels) joue un rôle essentiel (mais non exclusif) – en fait, la quasi-totalité des mathématiques au-delà de l'algèbre élémentaire.

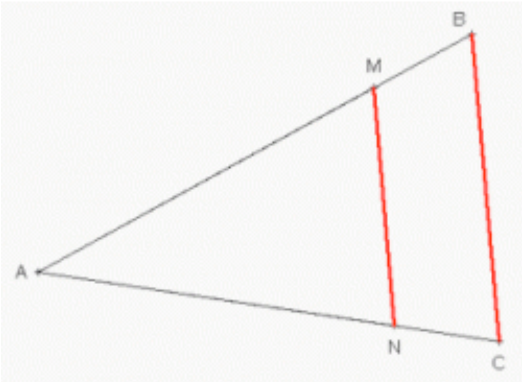
INCOMPLETUDE DU TRAVAIL MATHEMATIQUE

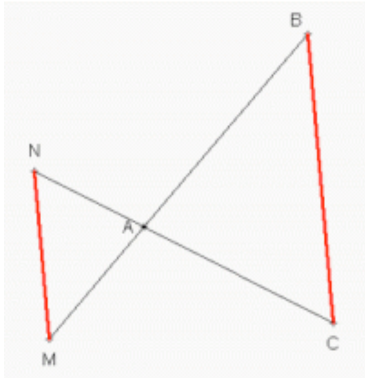
Dans cette partie, nous allons envisager deux exemples d'un usage réducteur d'outils mathématiques et qui, de ce fait, entraîne un travail mathématique que nous qualifierons d'incomplet. Le premier exemple, le théorème de Thalès, concerne un outil notionnel emblématique du référentiel théorique dans le travail géométrique scolaire. Le second s'attache à un des artefacts matériel les plus familiers de la géométrie, le compas.

Thalès ou la clôture sémiotique

De part son importance dans les curricula de l'école secondaire, le théorème de Thalès bénéficie d'une abondante somme de travaux tant en didactique qu'en épistémologie. En langue française, nous retenons particulièrement le travail collectif publié par les IREM en 1995 qui permet notamment de décrire, à travers les âges, les différentes formes et usages de ce théorème dans l'enseignement. Dans la tradition euclidienne, le théorème de Thalès précise les relations existant entre des projections sur deux droites parallèlement à une direction, il est associé à un diagramme figural utilisé comme support du raisonnement pour justifier des parallélismes ou bien des similitudes de figures. Une des particularités de ce théorème est de jouer sur deux domaines mathématiques, celui de la géométrie et celui du numérique. Son usage comme outil de calcul est particulièrement développé dans le paradigme de la Géométrie I pour envisager des applications pratiques notamment dans le cas de la mesure des angles et des grandeurs inaccessibles.

Dans l'enseignement français, à partir des années 80, l'utilisation du théorème de Thalès, se réduit progressivement aux seuls triangles avec deux configurations types : l'une dite *triangle* et l'autre *papillon*.





L'*outil notionnel* Thalès qui était au centre d'un travail discursif de preuve tend à changer de nature par suite de l'importance croissante accordé au *diagramme* Thalès dans le travail attendu. Dans les tout derniers programmes et dans les manuels scolaires, on constate une évolution vers un usage de la configuration de Thalès vue comme une sorte de diagramme de calcul à trous qui permet d'exercer les activités de calcul numérique sur les fractions ou les nombres décimaux. Ainsi un objet théorique initialement conçu comme un outil pour la démonstration se transforme en un outil sémiotique prétexte et support pour des calculs. Le travail attendu des élèves se situe désormais presque exclusivement dans le plan (Sem-Ins) de l'ETM après un changement de domaine puisque l'on a quitté la géométrie pour entrer dans le numérique (Nechache, 2014). Cette fermeture du travail mathématique sur un seul de ces plans verticaux nous conduit à parler de clôture sémiotique. Le glissement de domaine peut se poursuivre car on note également une évolution du type de tâches demandées aux élèves qui conduit aussi à utiliser le support Thalès pour introduire des équations algébriques, certains des nombres apparaissant sur les diagrammes associés à Thalès étant remplacées par des inconnues.

Le compas ou les usages contradictoires d'un artefact matériel

Dans le cadre scolaire élémentaire, le compas est clairement un artefact matériel introduit dans l'espace de travail de la géométrie (Géométrie I) avec le rôle spécifique d'outil pour la construction des cercles. Par contre dans un cadre non scolaire, une grande diversité de compas existe en fonction des applications particulières de cet outil à des champs d'activités humaines non nécessairement mathématiques : compas d'épaisseur, compas du tanneur, compas d'artillerie... L'outil initial se complexifie pour répondre aux attentes de ces utilisateurs particuliers et il permet ainsi la mesure et le calcul des proportions. Le compas est alors associé non seulement au tracé du cercle mais aussi au travail sur la mesure des longueurs et ceci à la différence de son emploi dans la théorisation euclidienne de la Géométrie II. En effet, rappelons que dans ce cadre il s'agit d'un compas imaginaire « rétractile » et qui ne permet donc pas de reporter les longueurs et encore moins de calculer des rapports. C'est la notion de cercle vu comme l'ensemble des points équidistants d'un point donné qui devient première dans cette géométrie et le compas dans ce cadre perd son statut d'outil de construction pour s'amalgamer à la notion de cercle défini comme une figure et non plus comme un dessin.

Ainsi, en Géométrie I, l'apprentissage de la notion de cercle est centré sur le compas et sur la maîtrise de l'agilité gestuelle nécessaire à la maîtrise de cet outil dans un processus classique d'instrumentalisation d'un artefact matériel. Par contre, en Géométrie II, l'accent est mis sur la reconnaissance des propriétés du cercle liées à l'équidistance et ceci de manière conflictuelle avec les usages antérieurs du compas. Des activités de transition spécifiques comme celle de Fenichel et Taveau (2009) doivent être conçues pour surmonter ou mettre en évidence le nouvel usage du compas.

Les élèves disposent d'une feuille de papier où figurent un point rouge A et un point bleu B, ils doivent construire quinze point situés à la distance AB de A. Différents outils dont l'usage mathématique a déjà fait l'objet d'activités sont mis à leur disposition: compas, règle, ficelle.

Cette activité filmée par les auteurs permet d'observer les difficultés qu'ont les élèves pour résoudre cette situation avec des usages divers du compas et sans relation étroite avec les attentes usuelles propres à cet instrument.

Au collège, dans une situation de classe étudiée par Bulf (2014), après avoir donné la définition du cercle, le professeur demande aux élèves de construire des cercles dans un espace plus grand que celui de la feuille de papier (celui de la cour de l'école). Il met à la disposition des élèves des ficelles mais ces derniers ne font alors aucune association avec la définition du cercle et ils ne donnent aucun rôle bien clair à la ficelle dont l'apparition dans l'Espace de Travail Géométrique apparaît presque incongrue. Faute d'une préparation suffisante les élèves échouent dans cette activité, ou procèdent par pure approximation. Il leur est en effet demandé d'utiliser une ficelle comme artefact géométrique avec emploi identique à celui du compas mais autre que celui qui lui est généralement attribué dans le monde rée. Il s'agit là de ce qui est désigné généralement par le nom de catachrèse, qui renvoie à un usage transgressif de l'outil, comme d'utiliser un téléphone portable pour enfoncer une punaise. Ceci suppose de la part des élèves une maîtrise du but visé, mais aussi un changement du contrat didactique usuel.

Pour résumer, en géométrie, du fait du changement de paradigme associé au travail sur cercle, le rôle premier du compas et, plus généralement, des outils de dessin, comme artefact matériel doit faire place à un rôle plus complexe d'*artefact symbolique* permettant d'identifier et de vérifier les propriétés attachés aux figures associées à ces outils. On passe d'un travail mathématique expérimental où le rôle du compas est central à un travail de démonstration où son rôle doit devenir second jusqu'à l'effacement. De ce fait, divers blocages et malentendus seront associés au compas avec, d'une part, les difficultés de la maîtrise gestuelle en Géométrie I et, d'autre part, son emploi ambigu lors de la transition de paradigmes géométriques associée à un changement du statut épistémologique des objets tels que, en particulier ici, le cercle.

CONCLUSION

Dans cet article, nous avons réservé le terme d'outil aux objets du plan épistémologique de l'ETM ayant un usage défini dans le cadre des mathématiques. Sous ce terme générique, il est possible de distinguer des artefacts matériels, des outils notionnels qui sont les théorèmes et les propriétés et enfin des outils sémiotiques définis à partir de diagrammes, de symboles ou d'objets tangibles ayant un rôle de signe. Nous avons parlé d'*instrument* dès lors qu'une interaction existait entre un sujet (élève, étudiant ou professeur) et l'outil pour résoudre effectivement une tâche proposée. De ce fait, les différentes dimensions –instrumentale, discursive, sémiotique– des ETM avec leur genèses propres nous ont permis d'analyser chacune des transformations cognitives particulières d'un outil donné en instrument. De cette manière, il nous a été possible d'avoir un point de vue multidimensionnel sur la question des instruments en pointant des différences entre instrument sémiotique, instrument notionnel et instrument artefact. Nous avons précisé le terme d'instrument mathématique en le réservant aux outils dont la maîtrise cognitive permettait un travail mathématique complet jouant sur les différentes dimensions cognitives du travail dans son ensemble.

Une fois dégagées ces précisions terminologiques et conceptuelles, nous avons utilisé cette approche multidimensionnelle pour comprendre la nature très particulière du calcul algébrique qui se caractérise par une proximité très forte des différentes dimensions du plan épistémologique. Les différents objets – arbres probabilistes, théorème de Thalès, compas – que nous avons étudiés dans cet article nous ont permis de montrer la grande flexibilité instrumentale des outils introduits en mathématiques et donc la nécessité d'une prise en compte précise de leur rôle pour en assurer un emploi adéquat dans leur domaine d'usage. Ainsi, un objet purement sémiotique comme un arbre peut, à la suite de certaines transformations, devenir un instrument mathématique remplissant toutes les fonctions attendus pour ce type d'instrument. A l'inverse, un instrument mathématique traditionnel tel que le théorème de Thalès peut perdre ce statut à la suite d'un appauvrissement des tâches scolaires nécessitant son usage et se réduire à un instrument sémiotique et un outil de calcul. Enfin, l'étude d'un outil traditionnel comme le compas nous a permis d'illustrer la transformation d'un pur artefact matériel en artefact symbolique lié au changement de paradigme géométrique, qui fait passer d'un univers d'objets réels tels que les dessins concrets au monde des figures abstraites. Ce changement entraîne une transformation de l'usage même du compas qui peut être source de malentendus didactiques et de blocages dans le travail de l'élève.

L'éclaircissement des différentes fonctions et usages des outils et instruments dans le cadre des ETM devrait permettre une étude plus fine du travail mathématique nécessaire pour résoudre des situations mathématiques complexes et guider un enseignement prenant en compte la diversité cognitive de ce travail.

REFERENCES

Aimani, S., Bonneval J.M., Devynck J.-B. & Yvonnet, P. (2012). *Manuel de Terminale S. Collection Transmath*. Paris: Nathan.

Bulf, C. (2014). Présentation au séminaire national de didactique des mathématiques. *Université de Bordeaux*.

Caveing, M. (2004). *Le problème des objets dans la pensée mathématique*. Paris : Vrin.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2). 5-32.

Drouhard, J-Ph. (2012). L'épistémographie, un outil au service de la didactique des mathématiques. In M. Abboud-Blanchard & A. Flückiger (Eds.). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques (Année 2011)*. IREM de Paris 7 – Université Paris Diderot. pp. 129-133.

Drouhard, J-Ph., Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In Coulange, L., Drouhard, J.-Ph., Dorier, J.-L., Robert, A. (Comp.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp.209-235). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Dupuis, C. & Rousset-Bert, S. (1996). Arbres et tableaux de probabilités : analyse en terme de registre de représentation. *Repères Irem* 22. 51-72.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 5.,* 37-65.

Engeström, Y. (1999). Learning by Expanding: An Activity - Theoretical Approach to Developmental Research. Web: http://lchc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/.

Fenichel, M. & Taveau, C. (2009). Enseigner les mathématiques au cycle 3. Le cercle sans tourner en rond. DVD. CRDP Créteil.

IREM (1986). *Autour de Thalès*. Paris: Irem de Paris Diderot.

Kuzniak, A. (2011). L'Espaces de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*. 9-24

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espaces de Travail Mathématique. Points de vue et perspectives. *Relime, numéro spécial sur les espaces de travail*. Web: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/Publications

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2012). Circulaciones y génesis en el Espacio de Trabajo Matematico. *Communication au symposium ETM3. Montréal.*

Nechache, A. (2014). Comparaison de la démarche de validation dans les Espaces de Travail idoines en géométrie et en probalités. *Communication au colloque ETM4. Madrid*

Parzysz, B. (1993). Des statistiques aux probabilités. Exploitons les arbres. Repères Irem 10. 93-104.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Coli

INTUICIÓN Y MOVIMIENTO: HACIA UNA REDESCRIPCIÓN DE LAS IDEAS INTUITIVAS DEL CÁLCULO

María Teresa Dávila-Araiza & Luis Moreno-Armella

Cinvestav - IPN

El cálculo corresponde al estudio de la variación y la acumulación, pero en la enseñanza ha terminado por ser confundido con una versión del análisis matemático, una disciplina cuyas metas últimas no coinciden con las del cálculo. Las formalizaciones con base en el concepto de límite no extienden de modo natural las intuiciones de los estudiantes sobre variación, cambio y movimiento; hay una fuerte tensión entre lo intuitivo y lo formal que los estudiantes resienten. Consideramos, en consecuencia, que es necesaria una organización de las ideas nucleares del cálculo que sea coherente con aquellas intuiciones. Organizaciones locales conceptuales y la tecnología digital dinámica pueden ser un camino viable para sistematizar y formalizar gradualmente las intuiciones.

INTRODUCCIÓN

En este escrito describiremos avances de un trabajo de investigación que se propone realizar un estudio de la naturaleza de las tensiones existentes entre las intuiciones primigenias del cálculo y esa estructura más formal, llamada Análisis Matemático, que arroje luz sobre la necesidad y posibilidad, en la enseñanza, de introducir el cálculo con un enfoque intuitivo e *híbrido*, que tome provecho de la tecnología digital y del tratamiento intuitivo de infinitesimales y de límites. Más precisamente, presentaremos reflexiones teóricas y epistemológicas en torno a la tensión entre lo intuitivo y lo formal, que resaltan la importancia de los vínculos entre intuición y simbolización en la construcción del conocimiento matemático y en el desarrollo del cálculo. Es importante resaltar que nuestro trabajo no plantea que se deje de lado la formalización ni el rigor en la enseñanza del cálculo, sino que aboga por la importancia de diseñar mecanismos de acceso a una formalización que resuene con las intuiciones del cálculo y permita abrir una ruta de exploración del pensamiento matemático a partir de las ideas de variación y acumulación.

Mostraremos datos experimentales que sugieren que la tecnología digital dinámica podría fungir como puente entre la intuición de los estudiantes y los sistemas simbólicos matemáticos. Introduciremos, además algunos ejemplos de organizaciones locales, no como propuestas didácticas acabadas, sino como cristalizaciones de las reflexiones de nuestro trabajo que pueden ser posteriormente refinadas.

TENSIÓN EN EL ENFOQUE TRADICIONAL DEL CÁLCULO

El cálculo es una asignatura que representa un gran reto para los estudiantes. Los altos índices de reprobación en esta disciplina nos dicen que hay algo que no está del todo bien en la manera como tradicionalmente se ha abordado su enseñanza. El cálculo continúa enseñándose en un orden fijo (números reales, funciones, límite, continuidad, derivada…) que corresponde a la reconstrucción lógica (no a una cognitiva) de los conceptos que el tiempo evidenció como centrales para dicha reconstrucción, no para su entendimiento primigenio. Este programa educativo no toma en cuenta que las intuiciones ya presentes en la mente del estudiante pueden entrar en disonancia con aquellas formulaciones que corresponden más bien al análisis matemático. Desde hace algún tiempo profesores e investigadores del campo de la didáctica de las matemáticas han percibido este tipo de fenómeno, pero muchas veces han hecho una interpretación sobre los resultados de las investigaciones que parece sugerir que el estudiante es culpable de no poder acceder a las nociones formalizadas del análisis desde sus ideas informales, intuitivas. Como se concluyó en el artículo de Roh (2008):

> . . . la mayoría de los estudiantes no adoptaron el punto de vista formal sobre límites. Cottrill et al. (1996) reportaron que muy pocos estudiantes comprendieron la definición formal de límite, y que ninguno en su estudio aplicó la definición formal de límite a situaciones específicas. (p. 218)

Algo similar afirma Artigue (1998) sobre la definición formal de función:

> Parece bien establecido que los criterios utilizados por los estudiantes para comprobar el carácter funcional de un objeto matemático no corresponden necesariamente a la definición formal de la noción de función. . . (p. 42)

Nuestra interpretación de sus resultados, es diferente. Tal vez esa incomprensión de lo formal nos está sugiriendo que hay que apuntar en otra dirección, es decir, no hay que lamentar que los estudiantes no puedan hallar una correspondencia formal y operativa entre sus intuiciones y las organizaciones aritmetizadas sino, más bien, hay que buscar una organización que corresponda a dichas intuiciones y experiencias con situaciones de variación y acumulación, puesto que *se trata de que entiendan las ideas introductorias del cálculo, no del análisis*. Los resultados de las investigaciones, hasta el momento, muestran que el análisis matemático no suministra tal organización y más bien se erige como una barrera para la mayoría de los estudiantes. Sin duda, como expresó Luzin en 1932 (como se cita en Demidov y Shenitzer, 2000, p. 80), lo que habían hecho Weierstrass, Cantor y Dedekind era estupendo, respondiendo brillantemente a una dinámica propia de las matemáticas (nunca exenta de la fuerza de gravedad de la matriz sociocultural dentro de la cual tienen lugar sus desarrollos matemáticos) pero que habían roto los nexos profundos con las intuiciones primeras del cálculo.

Los cursos de cálculo mantienen una organización heredada del análisis que, sin duda, puede justificarse en términos históricos pero no como respuesta a problemas de enseñanza. La problemática natural del cálculo, como objeto de la didáctica, quedó oculta tras una cortina de rigor, definiciones estáticas y símbolos que no les *hablan* a los estudiantes, ni siquiera a través del profesor. Siempre es oportuno recordar las palabras de Thom (1973, p. 202):

> El verdadero problema al que se enfrenta la enseñanza no es el del rigor, sino el problema

del desarrollo del significado y la existencia de los objetos matemáticos.

No puede formalizarse en el vacío, en ausencia del significado. Intentar lo contrario, constituye un problema didáctico ¿Por qué es tan difícil verlo? La ideología no oculta los problemas, los deforma: nos hace mirar en la dirección equivocada. Hablamos de una ideología que atraviesa una estructura formal, casi platónica, en el camino de los estudiantes.

ALGUNOS RASGOS DE LA COGNICIÓN HUMANA

Conocer algunos rasgos de la cognición humana puede arrojar luz sobre el problema de la tensión entre lo intuitivo y lo formal. Byers (2011, pp. 121-122) narra las experiencias de la neuroanatomista Jill Bolte Taylor, cuando sufrió, en 1996, un derrame cerebral. La Dra. Taylor explica, como resultado de su experiencia, que el hemisferio derecho (el cerebro holístico) aprende cinestésicamente: mediante los movimientos y sensaciones del cuerpo. En cambio, el hemisferio izquierdo (el cerebro analítico) descompone la información que recibe en cada vez más finos detalles. Añade la Dra. Taylor: "*el hemisferio izquierdo piensa en lenguaje*". Esta forma de explicar el funcionamiento del cerebro (que aquí solo hemos insinuado) permite entender que nuestro funcionamiento cognitivo es híbrido: simultáneamente sintético (holístico) y analítico. Por su parte, desde una perspectiva evolutiva, Donald (2001, pp. 137-157) explica que cognitivamente estamos dotados de dos modos computacionales: analógico (intuitivo) y simbólico. Ganamos la mayor parte de nuestras experiencias primarias de maneras no simbólicas, por el hábito de nuestro sistema nervioso de formar impresiones (holísticas), pero también podemos conocer de manera simbólica, a través del lenguaje, de los sistemas simbólicos que construimos por ser seres incrustados en una red cultural. Pero aunque la cognición se extienda en gran medida mediante el lenguaje (los símbolos) nunca ha perdido sus raíces corpóreas.

La intuición y la capacidad de simbolizar son dos partes inseparables de la cognición humana. Sería incorrecto entonces, preguntarse cómo la mente analítica nos da acceso al cálculo; la pregunta correcta sería: ¿Cómo podemos hacer que las "dos mentes" (intuitiva y simbólica) de los estudiantes colaboren para que estos puedan acceder al cálculo? Antes de seguir, es bueno explicitar que el vocabulario que estamos empleando en estas líneas tiene un carácter más bien figurativo, pero con fundamentos. Lo que nos interesa señalar es un hecho específico de nuestra capacidad cognitiva que, con frecuencia, se deja de lado y que sin embargo ha marcado nuestro desarrollo cultural. El número y la forma, por ejemplo, son resultado de la naturaleza híbrida de nuestro funcionamiento. Holísticamente percibimos numerosidad (vemos elementos discretos), pero es dentro de los sistemas simbólicos donde vive el concepto de número. En general, no podremos soslayar que las organizaciones conceptuales, nuestros mapas simbólicos, tienen *un* origen en nuestras miradas holísticas pero, como los mapas del territorio físico, actúan como *mediadores*. Nuestras experiencias nunca son directas, siempre tienen lugar a través de artefactos de mediación, muy especialmente, los de naturaleza simbólica. Somos seres cognitivamente híbridos.

LAS MATEMÁTICAS Y LOS SÍMBOLOS

Basta entrar a un salón cuando ha terminado la clase de matemáticas para entender que esa actividad tan humana es, en esencia, una que no puede tener lugar sino *mediante* símbolos. Si entrásemos al salón en el transcurso de la clase, podríamos darnos cuenta de que los símbolos no son solamente los que han quedado escritos en el pizarrón; el instructor/a y los alumnos mueven sus manos, inclinan su cabeza, producen gestos cuando tratan de comunicarse con los demás. Es toda la capacidad semiótica de las personas la que entra en juego al intentar explicar una idea, al intentar responder una pregunta. Los objetos matemáticos son el resultado de procesos iterativos de redescripciones de nuestras experiencias e intuiciones en el mundo humano, donde hay día y noche, donde la temperatura cambia durante el día, donde hay carreras de caballos y se acumulan intereses. Los estudiantes tienen experiencias e intuiciones con la variación y el cambio por vivir en el mundo en que vivimos y pueden simbolizarlas hasta cierto nivel (con palabras, con dibujos, con movimientos de las manos), y, aunque todavía se está lejos de un concepto matemático formal, no debemos negarlas; podemos partir de ellas, refinarlas.

A lo largo de la historia de la humanidad, una vez que ha sido posible alcanzar un nivel de representación, da inicio un proceso iterativo en el que las representaciones y aquello que estas cristalizan (inicialmente intuiciones, experiencias) co-evolucionan y se refinan unas a otras. El proceso iterativo de redescripción puede alejarnos de las experiencias primarias, dando lugar a la sensación de que esta iteración se inicia directamente en el mundo simbólico, como se asume muchas veces en el salón de clase; sin embargo, no hay que olvidar las palabras de Donald (2001, p. 156): es en las experiencias (o intuiciones) donde se encuentra la raíz del significado de los símbolos.

Las personas damos significado a un símbolo cuando lo podemos relacionar con nuestras experiencias o intuiciones (Moreno-Armella, 2013), esta idea se cristaliza en la noción de *organización local* (Moreno-Armella, 2014) que es "un ambiente donde una idea general está encarnada en un contexto particular, más familiar para los estudiantes". Las organizaciones locales tienen el propósito de proveer al estudiante de experiencias matemáticas cercanas a sus intuiciones que le ayuden a redescribirlas a sistemas simbólicos matemáticos y así, gradualmente refinarlas y desarrollar significado. En las organizaciones locales, como mostraremos más adelante, se tiene un conjunto de supuestos intuitivos para el estudiante que actúan como un *sistema axiomático local* mediante el cual se justifican las acciones matemáticas que se realicen, evitando así el enfrentamiento prematuro del estudiante a todo el aparato formal que tradicionalmente se considera necesario asimilar previo al estudio de un concepto matemático. Consideramos que la idea de organización local puede ser un elemento importante en la enseñanza, pues hace viable el estudio de resultados e ideas generales del cálculo sin necesidad de incorporar, en un inicio, las maneras de justificación formal que históricamente son posteriores, y cognitivamente también. *Las organizaciones locales son un camino alterno para el acceso inicial al cálculo*.

EN LA BÚSQUEDA DE OTRAS RUTAS DE APRENDIZAJE

El desarrollo de las matemáticas llevó en un cierto momento a desterrar la intuición física y generó una ruptura entre los orígenes del cálculo y la posterior formalización que corresponde al análisis. Kaput (1979) lo expresa con las siguientes palabras:

> Virtualmente todo el Cálculo básico (el estudio del cambio) adquiere su significado primario a través de una colección básica de metáforas del movimiento. Estas metáforas controlan la notación. Por ello escribimos lo que se refiere a límites usando flechas y usamos palabras cargadas de imágenes como “diverge,” “converge,” “creciente,” “constante” y “transforma”. Sin embargo las definiciones matemáticas formales asociadas con estas notaciones, siendo atemporales, nada tienen qué ver con el movimiento. (p. 289)

Las definiciones formales de límite (con ε y δ) y de función son atemporales; ahí nada se mueve, el tiempo y el movimiento no tienen ninguna relación con esas definiciones. Ya en 1932, la ruptura entre la intuición y la formalización había sido señalada por el matemático Luzin:

> Veo las cuestiones de la fundamentación de Análisis infinitesimal sin tristeza, enojo o irritación. Lo que hicieron Weierstrass y Cantor fue muy bueno. Así tenía que hacerse. Pero si ello se corresponde con lo que tenemos en nuestra consciencia [intuición], eso es otro asunto. Me asalta la brutal contradicción entre las fórmulas intuitivamente claras del cálculo integral con el incomparablemente artificial y complejo trabajo invertido en las justificaciones y demostraciones. (Como se cita en Demidov & Shenitzer, 2000, p. 80)

Esta tensión se trasladó a la enseñanza generando problemas didácticos (ver Ímaz y Moreno, 2010).

De las palabras de Luzin y Kaput nos gustaría rescatar dos características esenciales del cálculo que no parecen formar parte de la asignatura aritmetizada que hoy se enseña con su nombre, pero que parecen sí estar presentes en la mente del estudiante: intuición y movimiento. Uno de los trabajos recogidos en Roh (2008) resalta la persistencia en los estudiantes de una idea intuitiva de límite, ligada al movimiento, que se niega a abandonar sus mentes, tal vez, en ausencia de una formalización que la extienda:

> Tal imagen dinámica de límites [aproximarse, acercarse] se vuelve un concepto imagen que los estudiantes continúan usando incluso después de que aprendieron la definición rigurosa de límite (Przenioslo 2004). (p. 218)

Ímaz y Moreno, Luzin, Kaput están diciendo lo mismo: hay una ruptura entre las formalizaciones aritméticas y las ideas intuitivas del cálculo. Y los estudiantes resienten cognitivamente esta ruptura. Pero, ¿cómo estudiar, entonces, las ideas del cálculo sin comenzar prematuramente con la idea aritmética de límite?

Las nociones y supuestos epistemológicos del cálculo nacieron del estudio de la variación, de la acumulación y del cambio, no de la aritmética y la lógica. El cálculo está vinculado a las intuiciones y experiencias que se tienen con los fenómenos de cambio en el mundo físico, por ejemplo, sin pretender ser exhaustivos:

Las funciones eran modelos del movimiento, de fenómenos cambiantes, elaborados para estudiar el mundo físico.

Las funciones eran continuas porque los fenómenos que modelan eran continuos, como el movimiento.

Se asumía que en las funciones (continuas), *variaciones infinitesimales de la variable independiente provocaban variaciones infinitesimales de la variable dependiente*, que se puede redescribir gráficamente en el hecho de que función continua, localmente es plana, horizontal; o en un contexto aritmético como el segundo axioma de L'Hôpital (Ímaz & Moreno, 2010, p. 23): *si A es una cantidad finita y a es un infinitesimal, comparado con A, entonces, en los cálculos A+a puede sustituirse por A*.

Una curva se podía considerar como una poligonal de infinitos lados de longitud infinitesimal. Esta idea intuitiva también estaba presente en el trabajo de Newton, y se puede redescribir como: la trayectoria de un cuerpo en movimiento es rectilínea en intervalos de tiempo *muy pequeñitos* (localmente).

En el aula podemos usar estas nociones y supuestos intuitivos para introducir las ideas del cálculo dentro de organizaciones locales como las que presentaremos enseguida.

El número *e*

La siguiente organización local es una reconstrucción de la manera como Euler estudió el número *e*, base de los logaritmos naturales.

El área bajo la hipérbola $y=1/x$ entre 1 y $a>0$ se define como el logaritmo natural de a (Figura 1).

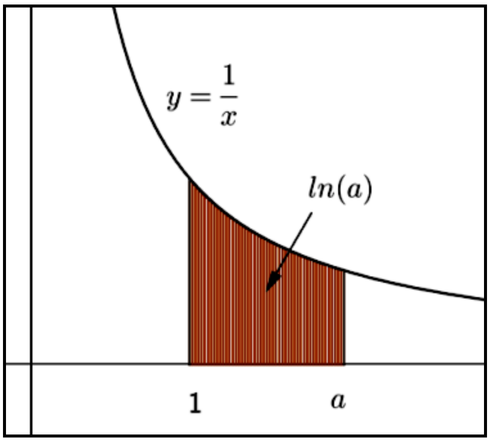


Figura 1: Logaritmo natural de *a*

Ahora, tomemos el área bajo la hipérbola en un intervalo "pequeñito", entre 1 y $1+w$, donde w es un infinitesimal. Como la función $1/x$ es continua, su variación en dicho intervalo es infinitesimal. Eso significa que en el tramo entre 1 y $1+w$, la gráfica es horizontal. Bajo esta interpretación de las ideas de Euler, la región bajo $y=1/x$, entre 1 y $1+w$ se ve como un rectángulo (Figura 2).

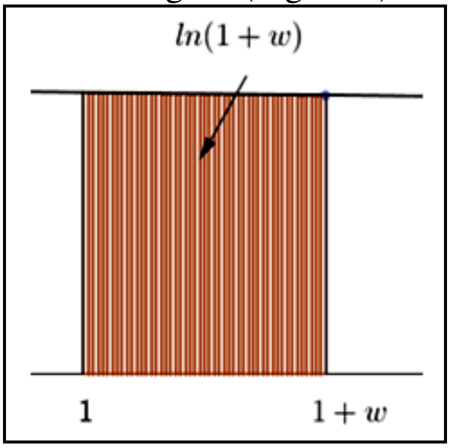


Figura 2: Rectángulo infinitesimal

El área del rectángulo de la Figura 2 es $ln(1+w)$, por ser el área bajo la curva entre 1 y $1+w$. Y también su área es w porque su base mide w y su altura es 1. Entonces:

$$w = \ln(1+w)$$

Luego,

$$e^w = 1+w$$

Así,

$$e = (1+w)^{(1/w)}$$

Como w es infinitesimal, lo podemos escribir como $1/N$ con N un número natural infinitamente grande ("hipernatural"). Así que e se puede expresar como:

$$e = (1+1/N)^N$$

Derivada de la función *ln*(*x*)

Con un procedimiento similar al anterior, podemos encontrar la derivada de la función $ln(x)$. En la Figura 3, el área sombreada corresponde a $ln(x+H)-ln(x)$.

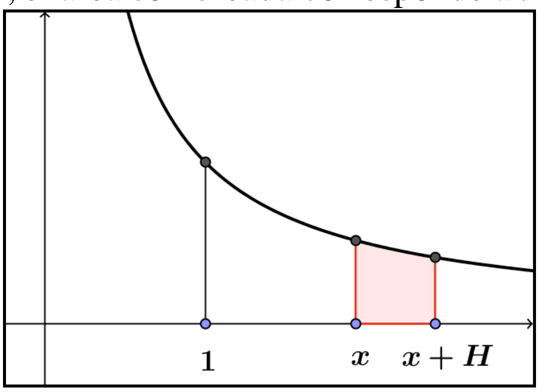


Figura 3: Área entre *x* y *x+H*

Ahora, si H es un número infinitesimal, se puede considerar que la curva es plana en el intervalo *[x, x+H]* porque la función es continua. La región sombreada de la Figura 3 será, entonces, un rectángulo de base H, altura $1/x$ y área H/x (Figura 4).

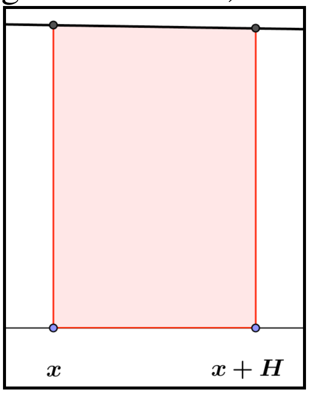


Figura 4: Rectángulo infinitesimal

Por otro lado, como el área de la región sombreada era $ln(x+H)$-$ln(x)$:

$$ln(x+H) - ln(x) = \frac{H}{x}$$

Luego,

$$\frac{\ln(x+H) - \ln(x)}{H} = \frac{1}{x}$$

Al ser H un infinitesimal, el cociente que estamos calculando corresponde a la derivada:

$$\frac{d}{dx} ln(x) = \frac{1}{x}$$

En las organizaciones locales presentadas, empleamos como axiomas la definición de continuidad, que un número infinitesimal se puede expresar como 1/N, la definición de logaritmo como área y la extensión de las operaciones algebraicas a números infinitesimales e hipernaturales. Cabe mencionar que no es el interés principal de esta organización local realizar una demostración rigurosa (con el rigor del análisis) de los resultados presentados, sino realizar un acercamiento intuitivo tomando provecho de ideas que pueden ser cercanas a intuiciones de los estudiantes.

La organización local del número de Euler se presentó en un curso de cálculo para profesores del nivel educativo medio superior que cursaban estudios de maestría[33] entre marzo y agosto de 2013. En este curso se discutieron ideas y resultados del cálculo, mediante límites e infinitesimales, de manera intuitiva, visual y operativa. En la clase final del curso se pidió a los profesores que reconstruyeran la demostración de que $e = (1+1/N)^N$ para N natural infinitamente grande. Las respuestas de los profesores sugieren que esta organización local es viable. Encontramos que prácticamente pudieron reconstruir la demostración y justificar sus procedimientos, empleando nociones y supuestos como: la noción de continuidad (localmente horizontal), expresión de un número infinitesimal como 1/N, extensión de las operaciones aritméticas y algebraicas, etc. Un ejemplo de ello es la

[33] En el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional Cinvestav-IPN

demostración que realizó Daniel (Figura 5), la cual complementamos con un fragmento de la justificación que hizo de manera verbal, no escrita, sobre el hecho de que el área bajo la hipérbola, en un intervalo infinitesimal, se pueda ver como un rectángulo:

> Esta rayita [la franja que comienza en x=1], que realmente tiene anchura infinitesimal, si hiciera zoom, este punto [extremo izquierdo de la franja] corresponde al 1 y este [extremo derecho], a 1+w, con w infinitesimal… Nos apoyamos de la definición de evaluación infinitesimal de una función continua, que dice que si nosotros variamos la variable independiente una cantidad infinitesimal, entonces la función también va a variar infinitesimalmente, entonces podemos verlo como que la función es paralela al eje x. O sea que podemos ver que esta franjita es como un cuadradito que tiene base w y altura… el valor de la función en 1.

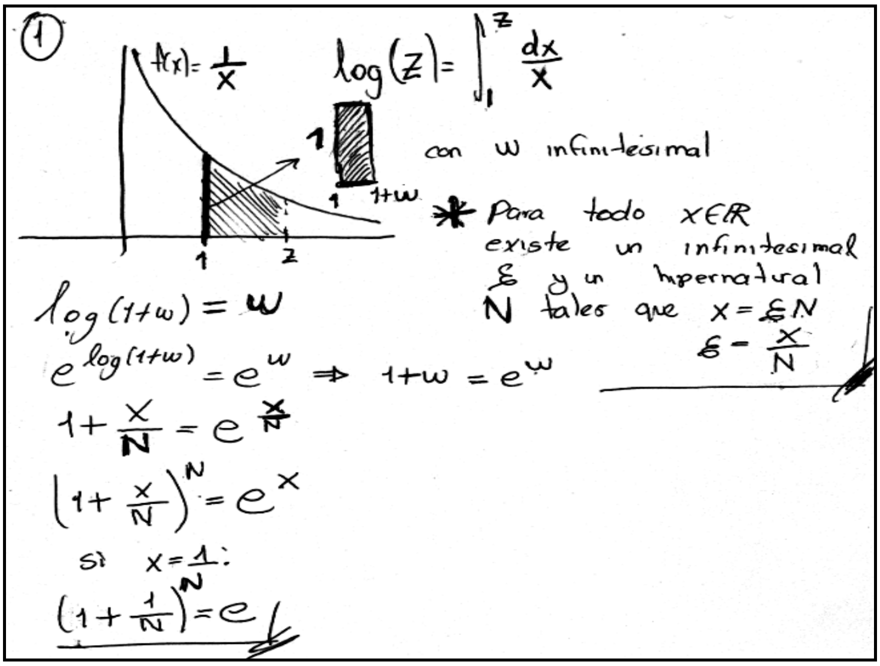


Figura 5: Demostración de Daniel

Con otro grupo de maestría[34], formado por profesores de nivel medio superior, realizamos un estudio piloto para explorar sus intuiciones sobre continuidad. El estudio consistió de dos cuestionarios que los profesores contestaron individualmente. En el primero se les preguntó si consideraban continuas la superficie de una puerta y la trayectoria de un avión que ven pasar por el cielo durante 5 segundos; también se les pidió que, sabiendo que a las 8:00 am la temperatura era de 15° y a las 11:00 am de 18°, estimaran la temperatura a las 8:10 am y 10:55 am. En el segundo cuestionario se presentaron las gráficas de algunas funciones (entre ellas una parábola) y sus expresiones algebraicas (adaptadas de Tall & Vinner, 1981, p. 166), se preguntó cuáles de las funciones eran continuas y se pidió explicar por qué. Analizaremos las respuestas de dos profesores, E1 y E2, al

34. En Cinvestav-IPN, entre septiembre de 2013 y febrero de 2014.

cuestionario 1 y sobre la continuidad de la parábola del cuestionario 2. Los datos sugieren que algunos profesores poseen intuiciones sobre continuidad, movimiento y variación consistentes con las enlistadas páginas atrás.

En la Figura 6 se muestra la respuesta de E1 sobre la continuidad de la trayectoria de un avión. Para analizar el movimiento del avión (su trayectoria), ella imagina que el intervalo de tiempo durante el cual observa al avión está compuesto por lapsos muy pequeños. Esta intuición parece cercana a la consideración de una curva como una poligonal.

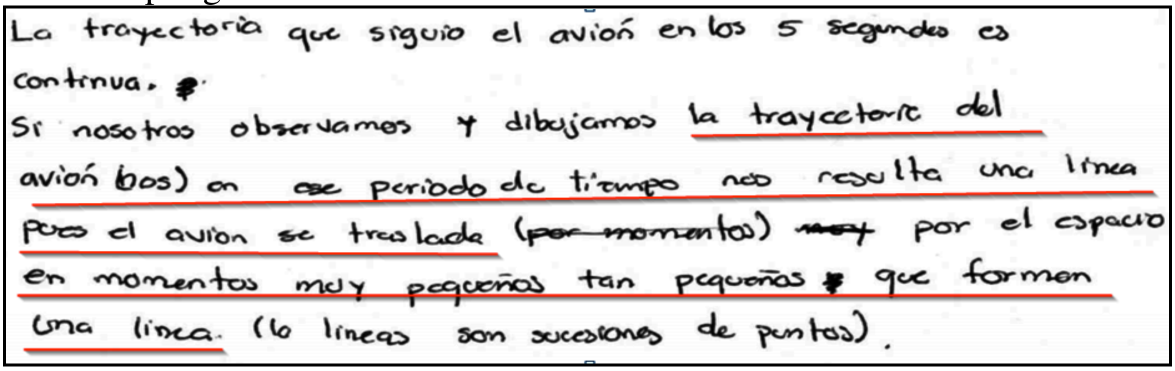
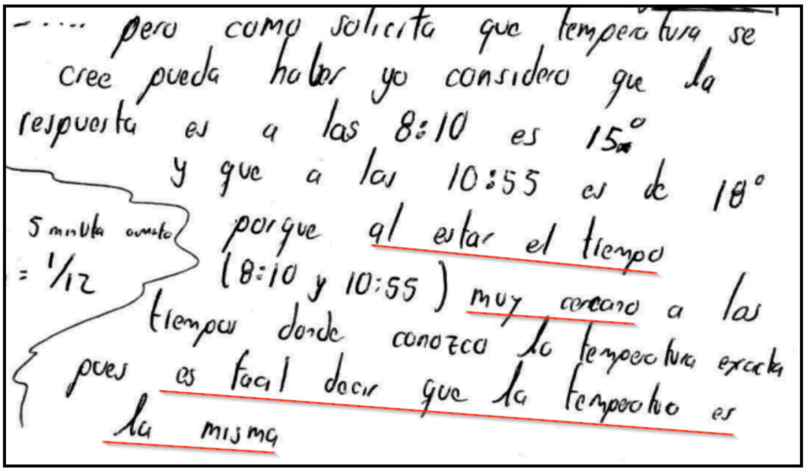

La trayectoria que siguio el avión en los 5 segundos es continua.
Si nosotros observamos y dibujamos la trayectoria del avión (bos) en ese periodo de tiempo nos resulta una linea pues el avion se traslada ~~(por momentos)~~ ~~muy~~ por el espacio en momentos muy pequeños tan pequeños que formen una linea. (la lineas son sucesiones de puntos).

Figura 6: La trayectoria de un avión (E1)

La respuesta de E2 (Figura 7) sobre el cambio de la temperatura, nos indica que él considera que al haber variaciones pequeñas de tiempo no hay, prácticamente, variación en la temperatura. Esto parece consistente con una noción intuitiva de continuidad relacionada con variaciones infinitesimales.


-.... pero como solicita que temperatura se cree pueda haber yo considero que la respuesta es a las 8:10 es 15° y que a las 10:55 es de 18° porque al estar el tiempo (8:10 y 10:55) muy cercano a los tiempos donde conozca la temperatura exacta pues es facil decir que la temperatura es la misma

5 minuto = 1/12

Figura 7: Cambio de la temperatura (E2)

Las respuestas de E2 sobre la continuidad de la puerta (Figura 8) y de la parábola (Figura 9), sugieren que su intuición física de continuidad es coherente con su intuición de continuidad de una gráfica, como si hubiera extendido su intuición de un contexto a otro. En ambos casos resalta la ausencia de interrupciones, cortaduras, rupturas y saltos como característica esencial de la continuidad. Además, en ambas respuestas la continuidad parece estar vinculada al movimiento.

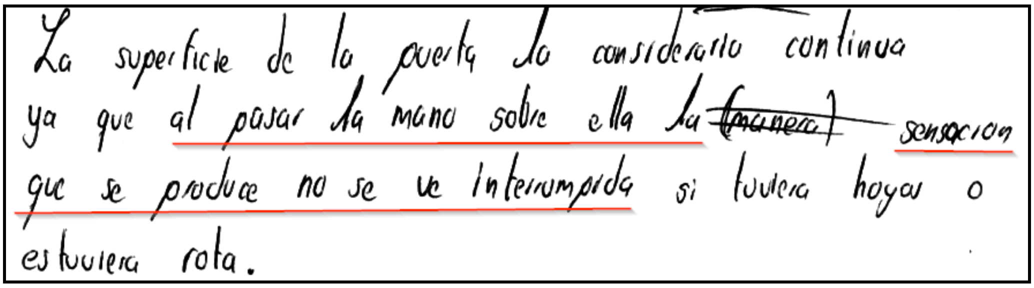

La superficie de la puerta la consideraría continua ya que al pasar la mano sobre ella la ~~manera~~ sensación que se produce no se ve interrumpida si tuviera hoyos o estuviera rota.

Figura 8: Continuidad de la superficie de una puerta (E2)

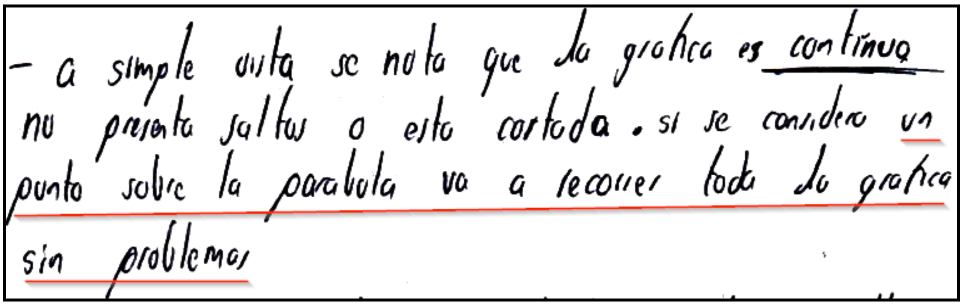
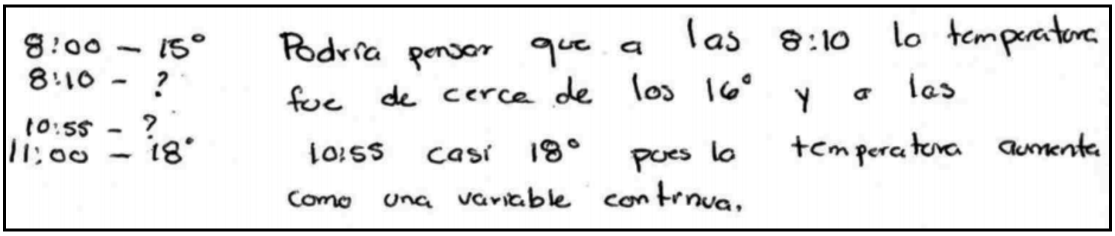

- a simple vista se nota que la gráfica es continua no presenta saltos o esta cortada. si se considera un punto sobre la parabola va a recorrer toda la grafica sin problemas

Figura 9: Continuidad de la parábola (E2)

En las Figuras 10 y 11 se puede observar que la intuición de E1 sobre la continuidad de la temperatura (Figura 10) es consistente con su intuición de continuidad de la gráfica de una función (Figura 11), y que ambas son consistentes con una idea intuitiva de función continua (variaciones infinitesimales de x generan variaciones infinitesimales de y). En la Figura 10, E1 estima que la temperatura tiene valores cercanos en lapsos cercanos. En la figura 11, E1 considera continua a la parábola porque “muy cerca por la izquierda y la derecha de x es el mismo valor de y”.


8:00 – 15°
8:10 – ?
10:55 – ?
11:00 – 18°

Podria pensar que a las 8:10 la temperatura fue de cerca de los 16° y a las 10:55 casi 18° pues la temperatura aumenta como una variable continua.

Figura 10: Continuidad en la temperatura (E1)

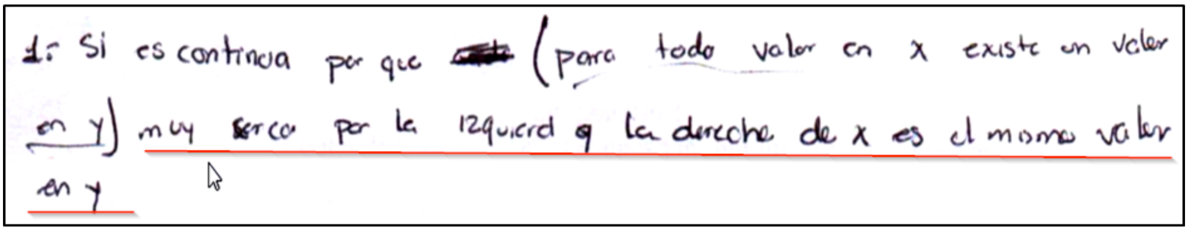

1: Si es continua por que (para todo valor en x existe un valor en y) muy serca por la izquierd y la derecha de x es el mismo valor en y

Figura 11: Continuidad de una función (E1)

Consideramos que las intuiciones, como aquellas descritas arriba, se pueden aprovechar y refinar mediante el trabajo con organizaciones locales y tecnología digital. La experiencia dinámica (de E2) de deslizar la mano sobre la mesa y no sentir interrupciones, se puede redescribir a la experiencia análoga de deslizar ininterrumpidamente un punto sobre una curva en GeoGebra. En este ambiente dinámico se puede representar el movimiento que E1 y E2 revelaron como componente de sus intuiciones sobre continuidad. Aunque esto no es equivalente a una presentación formal de la continuidad de una función, es un buen punto de partida para desarrollar un significado de este concepto; que expresado formalmente (con ε y δ) resulta casi indescifrable para el estudiante. También, la exploración intuitiva (de E1) de la trayectoria del avión en lapsos pequeñitos, se podría refinar al redescribirla al supuesto de que una curva se puede considerar como un polígono de lados infinitesimales, el cual se puede explorar en un medio digital. GeoGebra permite hacer una redescripción de ideas infinitesimales a través de sus herramientas de zoom y la manipulación de la longitud de segmentos como se muestra a continuación. Esto no es nada desdeñable.

La curva como polígono

En GeoGebra se puede redescribir digitalmente *una función como un polígono de lados de longitud infinitesimal*. Sobre la curva (Figura 12) podemos colocar un segmento *ds,* correspondiente a un segmento *dx* de longitud variable. Para un tamaño suficientemente pequeño de *dx* será posible deslizar *ds* (al deslizar *dx* sobre el eje *x*) de manera que su rastro siempre quede contenido en la curva "a simple vista". El estudiante podría visualizar, como en la Figura 12, que cualquier parte de la curva se puede ver como un segmento de longitud *ds*. Es probable que al hacer zoom sobre la gráfica, el segmento *ds* ya no se vea contenido en ésta, pero si se vuelve a ajustar la longitud de *dx,* se podrá ver nuevamente el segmento *ds* contenido en la curva; pudiendo repetir el proceso tantas veces quiera y con otras curvas.

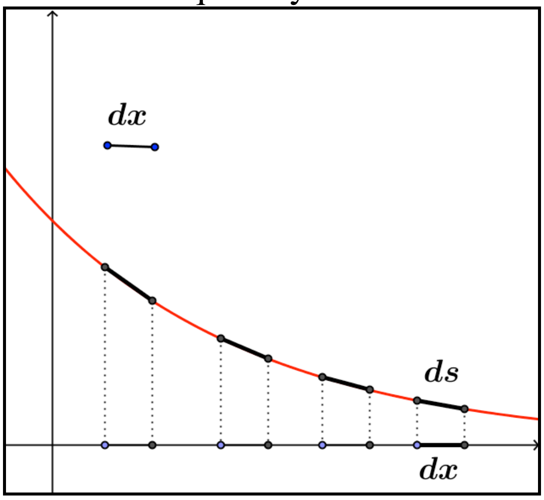


Figura 12: *ds* contenido en la curva

OTRAS ORGANIZACIONES LOCALES

En seguida presentaremos algunos ejemplares de organizaciones locales basadas en el trabajo de Moreno-Armella (2014), con la intención de mostrar algunas reflexiones que la tecnología digital dinámica hace posibles en torno a conceptos del cálculo. Tales organizaciones locales pueden ser un buen punto de partida para el diseño de actividades didácticas que ayuden al estudiante principiante en el estudio del cálculo a sistematizar gradualmente las ideas nucleares de esta disciplina.

Teorema fundamental del cálculo

La idea básica del teorema fundamental del cálculo se puede redescribir mediante dos organizaciones locales, donde la relación entre la derivada y la integral queda incrustada en el estudio de dos casos concretos: la construcción de la función derivada y de la función integral, para las funciones $ln(x)$ y $1/x$, respectivamente.

Función pendiente

La función derivada se puede cristalizar en una organización local dentro de un medio como GeoGebra. Dada una función, por ejemplo $ln(x)$, podemos generar en tiempo real una aproximación de la gráfica de su función derivada ($1/x$) gracias a las propiedades representacionales y dinámicas del medio. Para construir la gráfica de la función que aproximará a la derivada, definimos un punto variable Q de coordenadas $(x(C), tan(\alpha))$, donde $x(C)$ es la abscisa del punto C y α es el ángulo de inclinación del segmento ds (Figura 13). Al mover el punto C, el punto Q dejará como rastro la gráfica de una función que nos da la pendiente del segmento ds: la "función pendiente". Mientras más pequeño sea dx, y por ende ds, la función pendiente se aproximará más a otra función (a la función derivada de $ln(x)$). Si el estudiante sabe que la derivada de la función $ln(x)$ es $1/x$, o conoce la gráfica de $1/x$, podría conjeturar que la función pendiente se aproxima a la función derivada $1/x$.

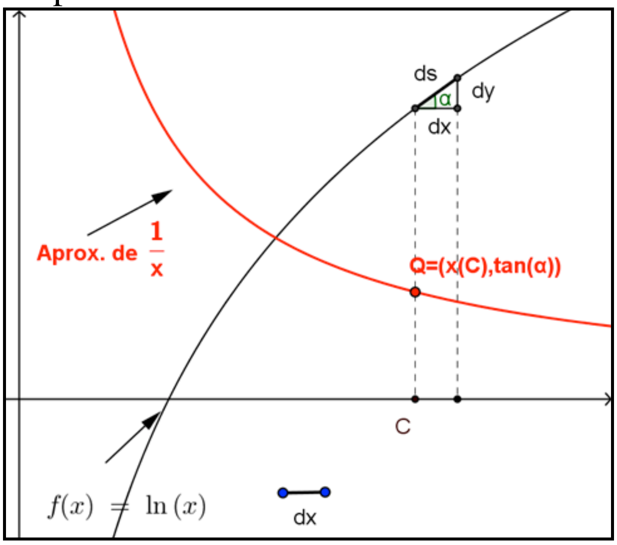


Figura 13: Construcción de la función pendiente

La cognición humana está siempre mediada por artefactos materiales y simbólicos, y estos no son epistemológicamente neutros, pues condicionan los procedimientos, ideas, formas de validación, etc. que se pueden realizar al llevar a cabo una actividad cognitiva mediada por ellos. En este caso, por ejemplo, para valorar si la función pendiente construida es una buena aproximación a la función derivada, podemos graficar la función *1/x* y observar cómo se van pareciendo cada vez más ambas gráficas, al hacer *dx* más y más pequeño (observar Figura 14).

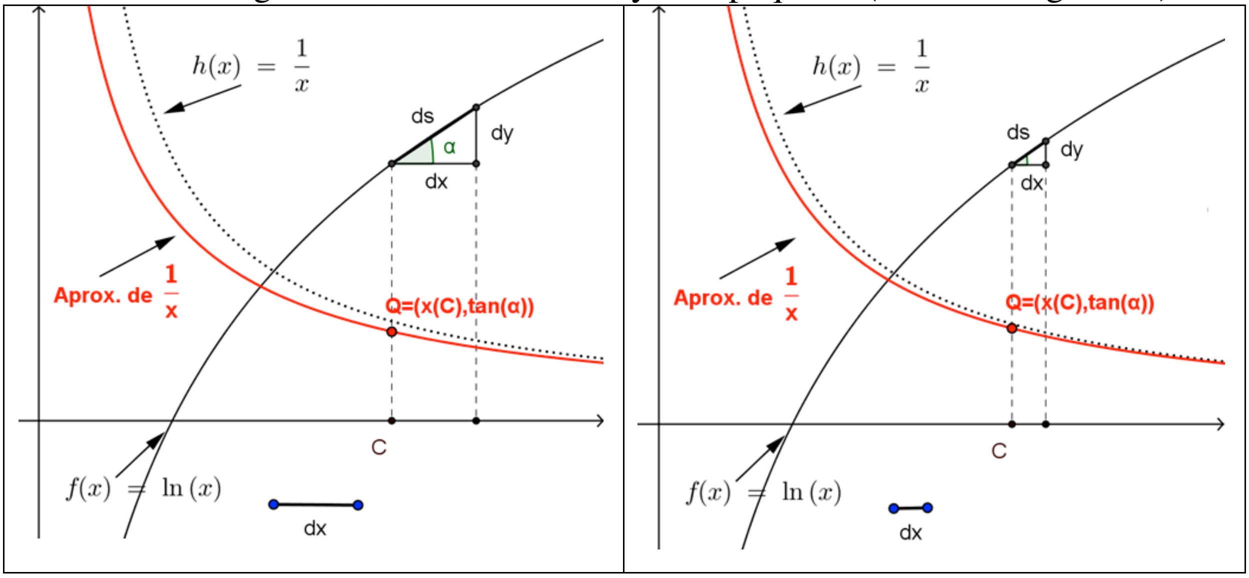


Figura 14: Aproximación a la función derivada

La función área

El concepto "integral de una función" también puede ser explorado en un medio digital. A partir de la función *1/x,* como derivada de *ln*(*x*), podemos recuperar la función *ln*(*x*) (tomando el caso de la constante de integración con valor cero). En la Figura 15, el punto *R=(x(A),Área)* es el generador de la *función área* pues tiene como coordenadas la abscisa del punto *A* y el valor del área aproximada bajo la gráfica de *1/x* en el intervalo *[1,x(A)]*. El punto A es variable. El valor del área bajo la curva es aproximada por *n* rectángulos de base *(x(A)-1)/n*.

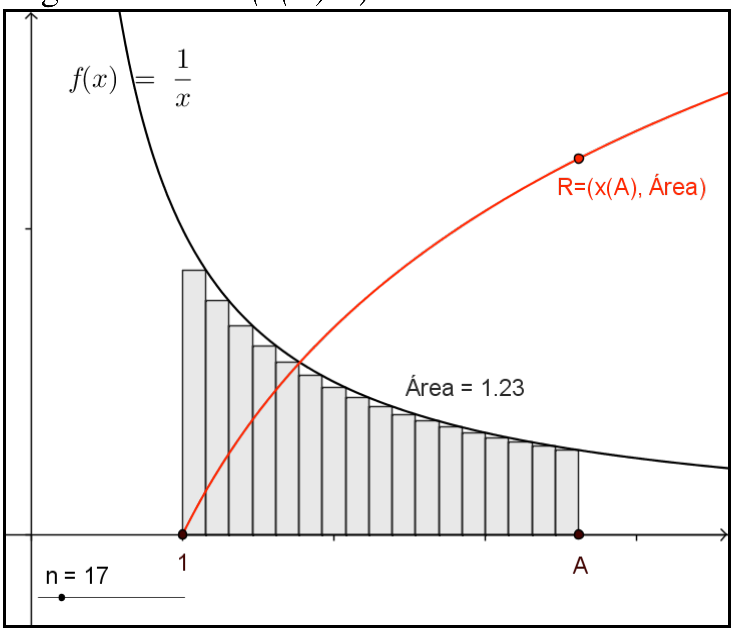


Figura 15: Construcción de la función área

Dado que en la organización local para la función derivada se observaron vinculadas las gráficas de las funciones $y=1/x$ y $\ln(x)$, se puede guiar al estudiante a que conjeture que la gráfica, a la cual se aproxima cada vez más la función área, corresponde a la función $ln(x)$. La conjetura toma fuerza si se traza la gráfica de la función $ln(x)$ y se aumenta gradualmente el número de rectángulos, pues se podrá observar cómo las gráficas se van acercando, cada vez más, conforme n crece (Figura 16).

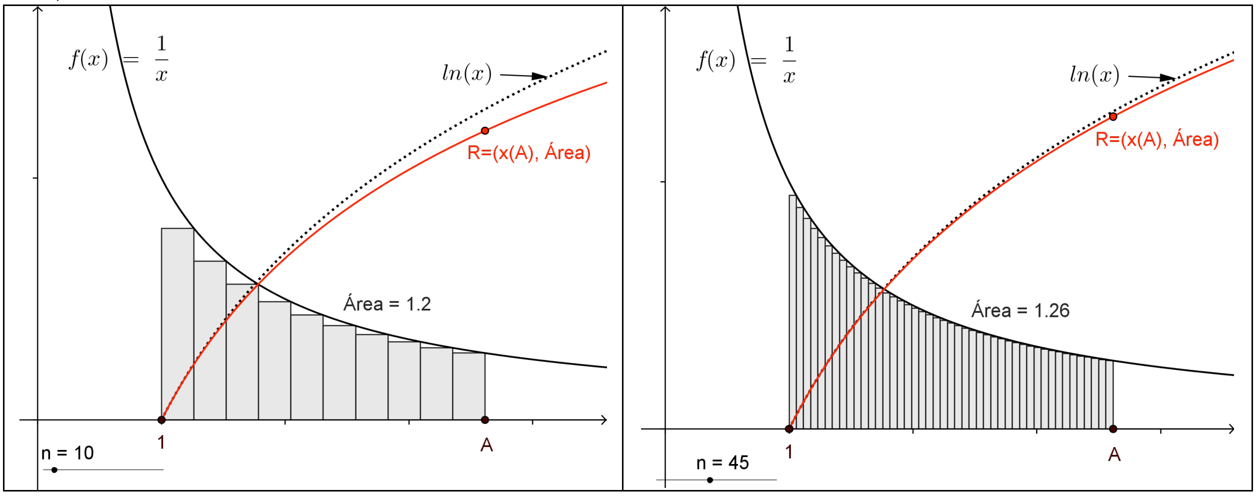


Figura 16: Aproximación de la función integral

Consideramos que las organizaciones locales para la función derivada y la función integral, estudiadas en conjunto, pueden ayudar a los estudiantes a darle significado a la derivada como la función que proporciona pendientes y a la integral como función que da el valor del área bajo la curva hasta cierto valor $x(A)$, y especialmente a vincular la derivada y la integral como procesos inversos, lo cual es la idea nuclear del teorema fundamental del cálculo.

CONCLUSIONES

En la enseñanza del cálculo existen fuertes tensiones entre las intuiciones sobre variación y cambio, y las formalizaciones aritméticas que se presentan en los cursos: tensiones *entre nuestra mirada sintética y nuestra mirada analítica*. Los estudiantes tienen intuiciones sobre variación y cambio pero no pueden redescribirlas como representaciones formales que son más propias del análisis que del cálculo. Hace falta un camino que conecte, de manera más natural, las primeras intuiciones y facilite una organización de éstas, sin que dicha organización tenga que corresponder, en un principio, al análisis matemático como está descrito, por ejemplo, en *Principles of Mathematical Analysis* (Rudin, 1964). Consideramos que las reflexiones presentadas pueden ser retomadas para el diseño de actividades didácticas, que tomen provecho de las organizaciones locales y la capacidad expresiva de GeoGebra para proveer al estudiante de experiencias que amplíen y refinen sus intuiciones, permitiendo una redescripción que favorezca la apropiación de los conceptos del cálculo.

Dentro de la teoría de Espacios de Trabajo Matemáticos (Kuzniak y Richard, 2014), el problema que abordamos sobre las tensiones entre lo intuitivo y lo formal también podría ser estudiado. El enfoque tradicional para la enseñanza del cálculo tiene implícito un ETM de referencia influenciado por el análisis matemático. Consideramos que este ETM obstaculiza las tres génesis del ETM de los estudiantes, ya que ellos no desarrollan el significado esperado para las representaciones formales de los conceptos, ni logran los niveles de rigor y formalidad esperados en sus demostraciones, razonamientos y procedimientos. Creemos que esto se debe a que el ETM de referencia no promueve procesos graduales de redescripción de las ideas intuitivas de los estudiantes a los sistemas simbólicos matemáticos. Con respecto a las organizaciones locales, estas se podrían considerar y estudiar como ETM, tanto de referencia (diseñadas por el profesor) como personales (todo lo que construye el estudiante de su actividad cognitiva). En este sentido, las organizaciones locales conjugadas con tecnología digital dinámica pueden constituir puentes que permitan al estudiante alcanzar las tres génesis estudiadas en los ETM.

Una trayectoria hacia la objetivación trazada mediante un camino digital. Esta parece ser, hoy día, la meta.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del Análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *1*(1), 44-55.

Byers, W. (2011). *The blind spot: Science and the crisis of uncertainty*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Demidov, S. S. & Shenitzer, A. (2000). Two letters by N. N. Luzin to M. Ya. Vygodskii. *The American Mathematical Monthly*. *107*(1), 64-82.

Donald, M. (2001). *A mind so rare: The evolution of human consciousness*. New York: W. W. Norton & Company.

Ímaz, C., & Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del Cálculo. Las trampas del rigor*. México: Trillas.

Kaput, J. J. (1979). Mathematics and learning: Roots of epistemological status. En J. Lochhead & J. Clement (Eds.), *Cognitive process instruction* (pp. 289-303). Philadelphia, Pennsylvania: The Franklin Institute Press.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Relime, numéro spécial sur les espaces de travail*. Web: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/Publications

Moreno-Armella, L. (2013). Intuición y rigor: una danza interminable. En C. A. Cuevas et al. (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa* (pp. 85-105). México: Pearson.

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM-The international journal on mathematics education*, *46*(4), 621-633. doi: 10.1007/s11858-014-0580-4.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(3), 217-233.

Rudin, W. (1964). *Principles of mathematical analysis* (2da. ed.). New York: McGraw-Hill.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-159.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Development in mathematical education*. *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (pp.159-209). Cambridge: Cambridge University Press.

PROSPECTIVE HIGH SCHOOL TEACHERS' COORDINATED USE OF DIGITAL TECHNOLOGIES TO EXTEND MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING REASONING

Manuel Santos-Trigo
Cinvestav-IPN, Mexico

Matías Camacho-Machín
Universidad de la Laguna, Spain

We analyse and discuss the extent to which the coordinated use of digital technologies (YouTube videos, wolframalpha-Computational Knowledge Engine, Wikipedia, and the GeoGebra dynamic environment) helps prospective high school teachers engage in problem solving activities that involve problem formulation, representation, exploration and communication of results. Eight prospective high school teachers participated in a problem-solving course during one semester. A task that involves folding a sheet of paper is used to analyse and discuss how they relied on each tool affordances to formulate questions and explore different ways to represent and answer them. Results indicate that the participants not only relied on different concepts to construct dynamic models of tasks; but also they had an opportunity to explore new questions and interpret results that later were used to outline an instructional route to implement the task.

Keywords: *Problem Solving, Teacher training, Prospective teachers of Mathematics, Digital technologies, Dynamic Geometry*

INTRODUCTION

The notion or construct Mathematical Work Space is important to analyse what type of mathematical knowledge students construct as a result of being involved in problem solving activities. Elaborating on the nature of mathematics knowledge or epistemic content level provides important information to explain what mathematics and how students learn it. Students' cognitive level becomes key ingredients to define a learning space for fostering their learning and constructing mathematical knowledge. Kuzniak, Parzyszy and Vivier (2013) pointed out that problems are a means to guide or orient students in the development of mathematical ideas and problem solving skills. A "problem situation" as these authors call it, is an adequate framework for students to use their previous knowledge and conceptions in order to acquire new mathematical knowledge. To fully engage in a mathematical discussion, the mediating problem situation has to be meaningful for those students. In addition, it is important that the problems provide opportunities for learners to engage in mathematical discussions to wide contexts and develop transference strategies. The concept of *open problem* is considered key for students to conjecture possible solutions, to develop inductive reasoning, to test and validate mathematical relations. Whilst working with this kind of problems, the goal for the students is to find a genuine and personal solution of the problem using her/his own resources. They argue that a problem situation should be meaningful for students; provide opportunities for learners to engage in mathematical discussions and involve or be situated in different contexts.

- In the case of an open problem the question is to find a genuine and personal solution, with one's own means, the general solution can be out of reach of the students (and possibly the teacher);
- In the case of a problem situation the question is, starting from a specific problem, to elaborate a more general knowledge (concept, process...) which is intended to be institutionalised, socially acknowledged and mastered by all the students (Kuzniak, Parzysz and Vivier, 2013, p. 417).

Thus, it is recognized that mathematical tasks are key elements for teachers to guide, foster, and analyse the students' processes involved in comprehending and constructing mathematical knowledge. "The purpose of a task is to initiate mathematically fruitful activity that leads to a transformation in what learners are sensitise to notice and competent to carry out" (Mason and Johnston-Wilder, 2006, p. 25). Similarly, Blume (2013) pointed out that "…tasks are the substance for the cognitive activities of leaners. For teachers, tasks are a crucial element to orchestrate lessons and to clarify the aims of instruction as solving these tasks requires the competencies that students are to acquire" (p. 3). What is the role of using technology in problem solving approaches? We argue that the use of digital technology could offer teachers and learners an opportunity to extend ways of reasoning about the problems. In addition, representing and exploring mathematical tasks through the use of digital technologies bring in new challenges for teachers that include the development of an expertise in the tools use in order to identify and analyse what changes to mathematical contents and teaching practice are fostered through its use.

In this context, Hedgedus and Moreno-Armella (2009) stated that the incorporation of digital technologies in school practices requires that teachers develop new habits of mind to gradually transform instructional approaches. They recognize that the use of digital technologies in classrooms extends ways of reasoning about problems; and also demands a new curriculum organization. …"technology is here to transform thinking, and not to serve as some prosthetic device to prop up old styles of pedagogy or curriculum standards" (p.398).

Thus, a technology approach in learning environments requires that teachers get engaged in problem solving activities to develop ways of reasoning and knowledge to represent and explore mathematical tasks. Ren (2014) pointed out "the accelerated development in technology makes more acute the shortage of instructor knowledge about the effective use of technologies; good teachers who are well prepared are always in short supply" (p. xi). Santos-Trigo and Ortega-Moreno (2013) pointed out that the systematic and coordinated use of digital technologies allows problem solvers to connect several fundamental ideas via key concepts. For example, the concept of perpendicular bisector becomes instrumental to generate all conic sections in dynamic models involving simple geometric figures such as triangles and rectangles. In this report, we focus on characterizing the type of reasoning that prospective high school teachers construct and show as a result of using systematically digital tools in problem solving activities. Thus, a research question that guided the development of the present study was:

How do prospective high school teachers incorporate and use a set of technology affordances (dragging, measuring, loci, etc.) to construct and explore tasks via dynamic models and the extent to which they rely on their problem solving experiences to design instructional routes?

According to Leung (2011, p. 326) "affordance is of particular importance when considering mathematical tasks that involve the use of technology since interaction with the technology should be a critical epistemic element in such tasks". We recognize that for technology to be fully incorporated into teachers practice it is important that teachers develop a technological base-knowledge that allows them to fuse mathematical content, pedagogy and digital technology into their actual practice. This knowledge includes not only the development of some expertise to represent and explore mathematical tasks in terms of the tools affordances; but it is as well important to analyse and discuss what types of mathematics representations, explorations, arguments and analysis of the tasks can be furthered in classrooms by means of the systematic use of tools. Mishra & Koehler (2006) pointed out that "teachers need to know not just the subject matter they teach but also the manner in which the subject matter can be changed by the application of technology" (p. 1028). Here, we focus on a task that prospective teachers worked on two sessions of three hours each. The task was formulated whilst the participants examined a sheet of paper as a source to pose mathematical questions and problems. It should be noticed the chosen task is representative of the class of tasks that were implemented in the problem-solving course during one semester.

A CONCEPTUAL FRAMEWORK: AN INQUIRY APPROACH

The developments and availability of digital technologies have been transforming the ways people communicate, obtain information and develop disciplinary knowledge. In addition, it opens up diverse ways to represent, explore, and solve mathematical task. Consequently, new routes emerge for learners to construct and comprehend mathematical knowledge. In particular, the use of digital technologies can facilitate the design of dynamic-representation environments in which students/teachers actively engage in discussions that let them to pose questions and to identify and explore behaviours of mathematical objects. That is, the construction of dynamic models of tasks provides learners an opportunity to observe mathematical behaviours of objects as a result of moving some elements within the same models. In addition, learners also could share and discuss their ideas with others with communication technologies or consult online information to contrast or extend their mathematical concepts comprehension.

Kuzniak and Rauscher (2011) recognize that in the process of developing mathematics or solving problems, experts might rely on different media including visual, diagrams and formal approaches to get insights, represent ideas, or to validate results. Thus, the coordinated use of digital technologies might add several opportunities for problem solvers to engage in mathematical thinking or to comprehend and construct mathematics ideas. For example, dynamic representations could become a platform or point of departure for students to formulate and explore mathematical situations. For instance, Figure 1 shows a dynamic configuration (please double click on the movie icon) involving two simple figures and movable point C (red point) along segment AB. The idea is that learners could observe that a family of equilateral triangles and squares appears as a result of moving point C along segment AB. That is, they are not asked to answer a particular question initially; but to pay attention to, for instance, the area variation of the figures as a result of moving point C.

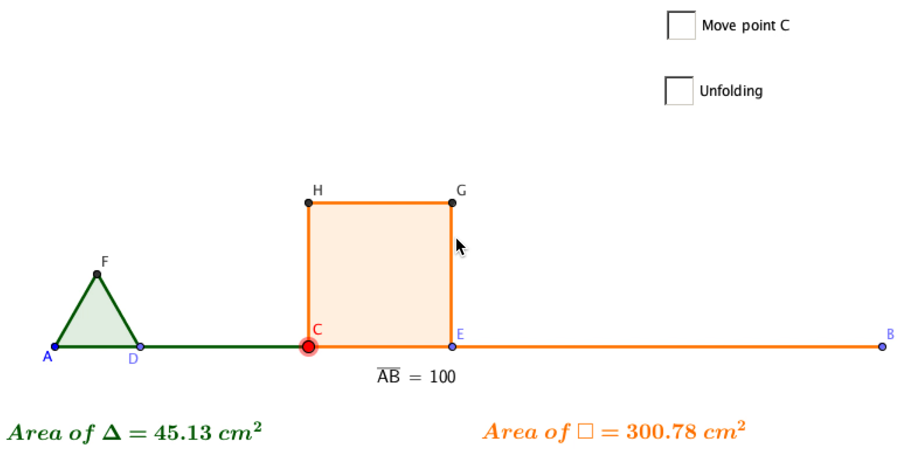
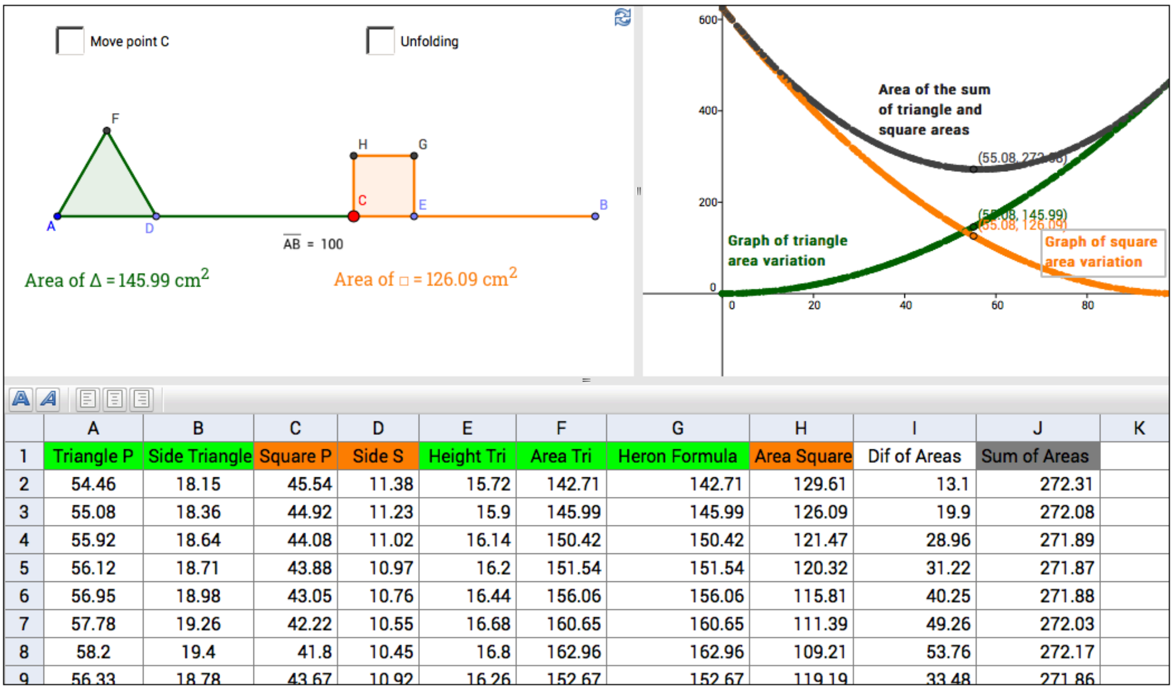


Figure 1: A dynamic representation involving a family of equilateral triangles and squares.

In this context, the goal is that prospective teachers eventually pose a question or a mathematical problem that will be solved further. For instance, they can observe that point C divides segment AB in two segments (AC and CB). And these segments are used to construct an equilateral triangle ADF and a square CEGH. Then, for each position of point C there will be an equilateral and a square and students can formulate questions regarding the attribute behaviours of the family of generated figures.

Figure 2 shows graphic representations of the areas of the family of equilateral triangles and squares generated as a result of moving point C along segment AB (http://www.geogebratube.org/student/m90726). The orange graph represents the area variation of the family of squares, the green graph is the area variation of the family of triangles, and the black graph shows the variation of the sum of the triangle and square areas. It is important to mention that the graphs of area variation of the figures are obtained without making explicit, at this stage, the corresponding algebraic models. Thus, possible questions to pose and explore include: At which position of C on segment AB the area of triangle ADF is equal to the area of square CEGH? Or at what location of point C the sum of the triangle and square areas reaches a minimum value? In this task, the idea is to show that within a dynamic configuration learners can pose and explore questions that in a paper and pencil environments are given to them. In addition, in the table approach, learners have an opportunity to focus on main attributes involved in the task and also to introduce other relationships such as the difference of the areas to identify a position for point C where areas of both figures coincide. A main ideas embedded in this approach is the concept of limit since the solution is approach through a refinement of the interval to locate point C.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Triangle P	Side Triangle	Square P	Side S	Height Tri	Area Tri	Heron Formula	Area Square	Dif of Areas	Sum of Areas	
2	54.46	18.15	45.54	11.38	15.72	142.71	142.71	129.61	13.1	272.31	
3	55.08	18.36	44.92	11.23	15.9	145.99	145.99	126.09	19.9	272.08	
4	55.92	18.64	44.08	11.02	16.14	150.42	150.42	121.47	28.96	271.89	
5	56.12	18.71	43.88	10.97	16.2	151.54	151.54	120.32	31.22	271.87	
6	56.95	18.98	43.05	10.76	16.44	156.06	156.06	115.81	40.25	271.88	
7	57.78	19.26	42.22	10.55	16.68	160.65	160.65	111.39	49.26	272.03	
8	58.2	19.4	41.8	10.45	16.8	162.96	162.96	109.21	53.76	272.17	
9	56.33	18.78	43.67	10.92	16.26	152.67	152.67	119.19	33.48	271.86	

Figure 2: A coordinated representation and exploration of the area variation of involved figures

Vahey, Knudsen, Rafanan, and Lara-Meloy (2013) pointed out that the use of dynamic-representation environments in mathematics classrooms provides opportunities for problem solvers to engage in mathematical thinking through the use of multiple representations to explore or examine mathematical objects behaviours. In this process, prospective high school teachers and students can focus their attention to particular relations and foster the development of meaningful narrative to explain and support them. Similarly, Roschelle, Courey, Patton, and Murray (2013) stated that with the use of digital materials, the teachers' role should include activities that engage students in "(a) making sense of students' thinking, (b) helping learners to express multiple approaches to solving mathematical problems, (c) using representations and technologies insightfully to explore mathematical meaning, (d) structuring extended conversations with students around mathematical ideas, and (e) developing their own ability to reflect articulately on their own sense making" (p.

31). Thus, the aim in using digital technology is to empower learners with affordances that amplify and enhance their ways to construct knowledge. “The point of setting tasks for learners is to get them actively making sense of phenomena and exercising their powers and their emerging skills” (Mason and Johnston-Wilder, 2006, p. 69). Thus, tasks are the vehicle for students to focus on fundamental mathematical ideas that are developed through one’s own actions and social interactions. Contexts are also important for setting the tasks in which teachers and students engage in mathematical thinking. With the use of digital artefacts, teachers and learners become active participants in the learning process since these artefacts offer a rich diversity of opportunities to represent and explore the tasks from perspectives. It is also important to recognize that the tool itself does not provide the media or ways needed for learners to efficiently use it in problem solving activities; it involves an appropriation process in which users transform an artefact into an instrument. This tool appropriation depends on cognitive schemata that teachers and students develop while using the tool to represent and explore the problem. Trouche (2004) pointed out that “an instrument can be considered an extension of the body, a functional organ made up of an artifact component (an artifact, or the part of an artifact mobilized in the activity) and a psychological component” (p. 285). The artefact’s characteristics (ergonomics and constraints) and the schemata developed by the users during the activities are important for them to transform the artefact into a problem-solving instrument. In this respect, Trouche (2004) related the problem solvers’ psychological component to the construction of a scheme with three functions: “a *pragmatic* function (it allows the agent to do something), a *heuristic* function (it allows the agent to anticipate and plan actions), and an *epistemic* function (it allows the agent to understand what he is doing)” (p. 286). Indeed, these three functions become essential to construct dynamic models of problems.

PARTICIPANTS AND PROCEDURES.

Eight high school prospective teachers participated in the problem-solving course that was part of our master program in mathematics education. All participants had completed a university degree with major in mathematics and were taking the first semester of a master program in mathematics education. The course included two weekly sessions of three hours each during one semester. The participants consistently worked on each task individually, in small groups and collectively as plenary group discussion. Individual contributions were discussed initially between pairs and later on, results were presented and discussed within the community including the instructor. For this report, we focused on a task that the group worked at the end of the semester (the last two sessions).

The instructor showed a video (Figure 3, http://youtu.be/LwjbFll5Udo) where a sheet of paper was folded and the participants were asked to pose questions based on what they observed. That is, there was not a given problem statement, the participants needed to formulate it. Thus, data for the analysis came from a written report handed in individually, then by pairs' reports, and as a video of the plenary discussion. The individual report and the initial pair's report were handed in at the end of the session and all pairs also had an opportunity to revise and incorporate observations made during the plenary discussions into a new version of the report (sent it through email).

The presentation and analysis of results were structured in terms of phases that accounted for how the participants contributions evolved from individual participation to collective reflection.

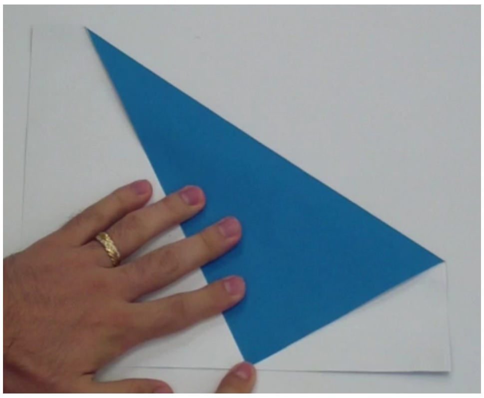


Figure 3: A sheet of paper is folded, what questions could you pose involving objects that appear in the figure?

It is important to mention that each task, implemented during the sessions, was analysed by the research team previous to its application. The team included two mathematics educators, two mathematicians and four doctoral students in mathematics education. The idea was to identify potential solutions that helped guide and orient (through questions) the students' work (Santos-Trigo, Camacho-Machín and Olvera-Martínez, 2014). The folding sheet task was taken from a calculus textbook and adjusted to a version where the use of GeoGebra tool was important. The prior analysis of the task was based on identifying key problem solving episodes to transform routine tasks into a set of learning activities (Santos-Trigo and Camacho-Machín, 2009.)

Table 1 shows main activities implemented during the study and the information gathered through individual, pairs, and plenary discussion.

Type of contribution	Problem posing activity	Evidence and Data
Individual Phases I and II: question formulation and sense making activities	Watching the video to pose a set of questions	Individual report handed in at the end of the first session
Pairs' discussion during the first and second sessions Phase II: Exploration and task solutions	Focusing on ways to respond to posed questions: both analytic and dynamic approaches	Pairs' report handed in at the end of the session and a revised version sent after the second session
Plenary session Phase III: Looking back and task extensions	Presentation of each pair work and group discussion	Focusing on the domain and generalization of results.

Table 1: Summary of main activities developed during the two problem solving sessions.

PRESENTATION OF RESULTS AND DISCUSSION

To present and discuss main results, we identify important phases shown during the development of the problem solving sessions. In each phase, we added a short commentary to pinpoint relevant features to characterize how the participants reasoned about the problem.

Phase 1: Formulation of questions

The participants worked on the task individually for 20 minutes, they posed many questions. In general they observed that the folded sheet included two right triangles and a quadrilateral and the questions they posed where about the behaviours of the areas involving those figures or their positions when the vertex is moved along the side.

Figure 4 is a typical representation used by the participants to pose their questions. All the questions were written at the board and the goal was then to discuss what questions they could pursue or respond. At this stage, they discussed the questions in pairs and focused their attention to how each question could be answered. It is important to mention that students initially relied on the YouTube video to verbalize their questions and when they put them in writing, they did not include all pertinent labels to refer to problem information. For example, Figure 4 does not include explicitly the rectangle vertices.

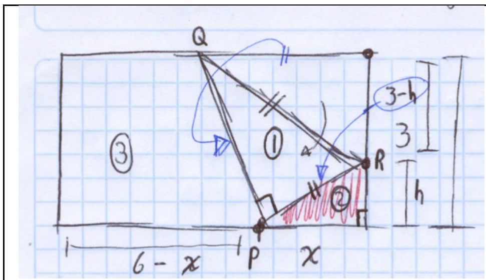


Figure 4: representing the folding situation

8. When does polygon 3 get its maximum area?

1. At which point should I situate vertex P to get three right triangles?
2. When is the area of triangle 2 equals to zero?
3. In which interval can point P be located?
4. What happens to area of triangle 1 when the area of triangle 2 is a minimum?
5. How does diagonal QR change for different positions of P?
6. What is the domain for point P to form two triangles?
7. How does segment QR (folding line) behave?

Commentary. In phase I, the participants, in general, did not look under what conditions their questions could be answered; instead they seemed to focus on what they visualized in terms of the resulting figures and their positions as point P moves along the side. That is, they posed questions without examining whether the situation provided data or information to respond to those questions. It was later, when they worked in pairs and tried to answer the questions that they realized that in order to make sense of the questions, it was important to identify relevant data and ways to express some relationships. In addition, the participants did not explicitly describe the folding sheet procedure to formulate the question; rather they relied on the video or on a representation they sketched of the situation in order to pose the questions.

Phase II. Making sense of questions and looking for relationships.

The participants examined in pairs the proposed questions. Some pairs used a sheet of paper to model and explore the behaviour of the mathematical objects. Here, they assigned values to sides of the sheet of paper (3 and 6 units) and began to find some relations and properties of the formed figures. Based on representation (Figure 5) they observed that: (i) Segment DH becomes the hypotenuse of right triangle HGB and segment ID becomes segment IG (Figure 5); (ii) the area of triangle could be expressed in terms of one variable (Figure 6); and (iii) when vertex G moves along side AB of the rectangle, then a family of right triangles emerged and at some positions the triangle disappeared. At this stage, two pairs decided to find an algebraic expression for the triangle area and two pairs began to construct a dynamic model of the task.

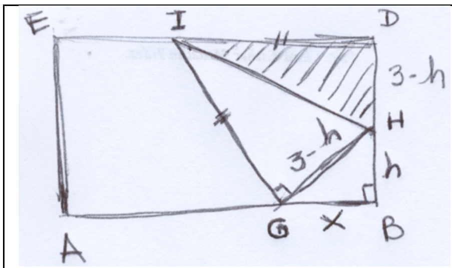


Figure 5: Representing the task

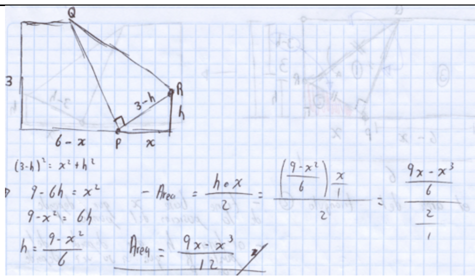
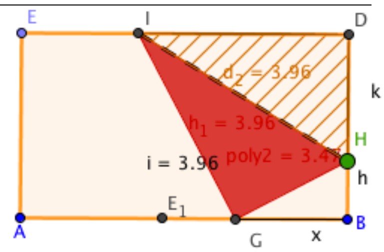


Figure 6: Expressing the area of right triangle in terms of one variable

Commentary. It was important to observe that during the pairs' discussion, whilst the participants analysed the set of questions, they focused on finding out what information and/ or data they needed to answer those questions. When some of the pairs introduced a notation and data in their representation of the task, they observed that triangle GBH (Figure 7) included all information needed to determine its area. That is, the consideration of a particular case, a sheet of paper with dimensions 3 by 6 units, became important for them to focus on particular relationships. Then, a task that all agreed to formulate and pursue was stated as:

A sheet of paper ABDE is folded in such a way that one of its vertex (D) will lie on the side that is opposite to that vertex (Figure 7). Thus, there will be different folding lines depending on the position of vertex D on side AB. For example, vertex D becomes point G to form triangle GBH. If the length of side DB is 3 dm. explore what happens to the area of triangle GBH when point G is moved along side AB?	 Figure 7: Posing the task

Phase III. The construction and exploration of the area function using an algebraic approach and a dynamic model.

In this phase, two pairs that decided to approach algebraically the task focused on expressing the area of the right triangle in terms of the variable x. Their goal was to find an algebraic model to express the area of triangle GBH. To this end, they recognized that the length of segment GH was 3- h, and they used the Pythagorean theorem to express h in terms of x. That is, $h = \frac{-x^2}{6} + \frac{3}{2}$, and the area of triangle GBH as $A(x) = \frac{-x^3}{12} + \frac{3x}{4}$. Then they used the Wolframalpha tool[35] to graph the function and to find its local maximum (Figure 8 and 9).

(http://www.wolframalpha.com/share/clip?f=d41d8cd98f00b204e9800998ecf8427e4es2su16aq&mail=1)

[35] WolframAlpha (http://www.wolframalpha.com) is an online computational knowledge machine that includes Computer Algebra Systems.

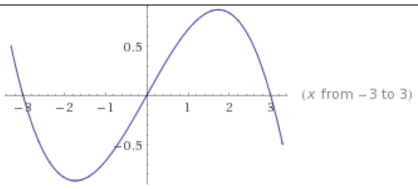


Figure 8: Graphing the function area of triangle GBH.

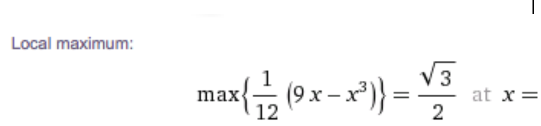


Figure 9: Finding maximum value ($\frac{\sqrt{3}}{2}$) of the function at point $\sqrt{3}$ using the Wolframalpha tool.

The contributions of these pairs were discussed later during the plenary session and the presenters were questioned on the meaning of the graphic representation in accordance to the context of the task. The discussion led the group to address the issue of the domain of the function. The two pairs that decided to construct a dynamic model of the task showed two ways to build the model. **One** was constructed by considering two sliders that represented the dimensions of the sheet (rectangle). The values of the sliders could change by moving a point on the slider. Then they located point G on side AB and constructed the perpendicular bisector of OD that is the folding line. Figure 10 shows the complete model of the task.

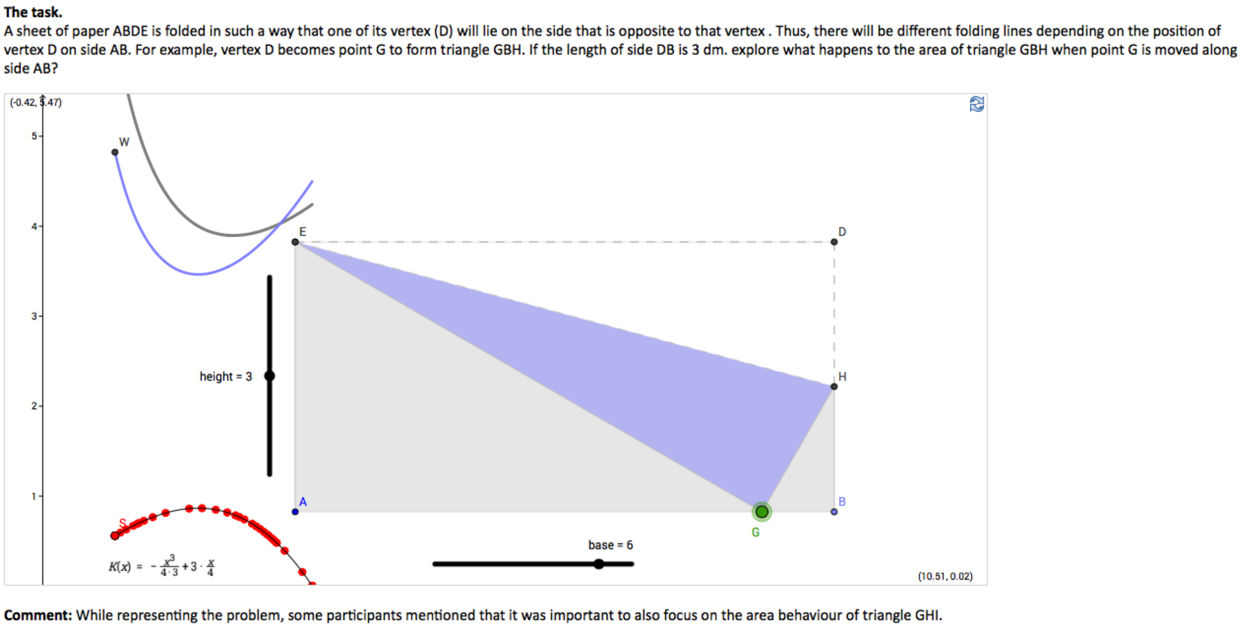


Figure 10: A dynamic model of the task.

It is important to mention that the initial statement of the task did not include the two dimensions of the sheet of paper. One dimension was enough to find the algebraic model for the area of triangle BHG. However, to determine the domain for moving point G the second dimension was necessary and the use of the slider became useful to explore the area behaviour of a family of rectangle, just by changing the rectangle dimensions via the sliders.

In http://www.geogebratube.org/student/m60052 the model can be explored by moving point G. The red graph corresponds to the area variation of triangle GBH, the blue graph the area variation of triangle GHE an the black graph is the length variation of the folding segment HI as point G is moved.

It also can be observed that point G can be moved on segment AB from a point located at 3 units from point A to a point located at $\sqrt{27}$ from point A. Thus, with this model, all questions posed in phase I could be responded.

The **other** dynamic model involved a similar construction; but now situating the movable point on segment BD and using the circle tool to identify point G (Figure 7).

Commentary: An important issue that emerged immediately when the participants focused on the construction of a dynamic model of the task was to determine the domain to move point G on segment AB. They observed that for a certain position of point G on segment AB the folding line disappeared and to explain this, they need to find the interval for moving point G so that the folding process could be done. In addition, the dynamic model led them to focus on the variation of others involved figures (lengths of folding segment HI and polygon AGIE). Figure 11 shows the graph representation of those parameters.

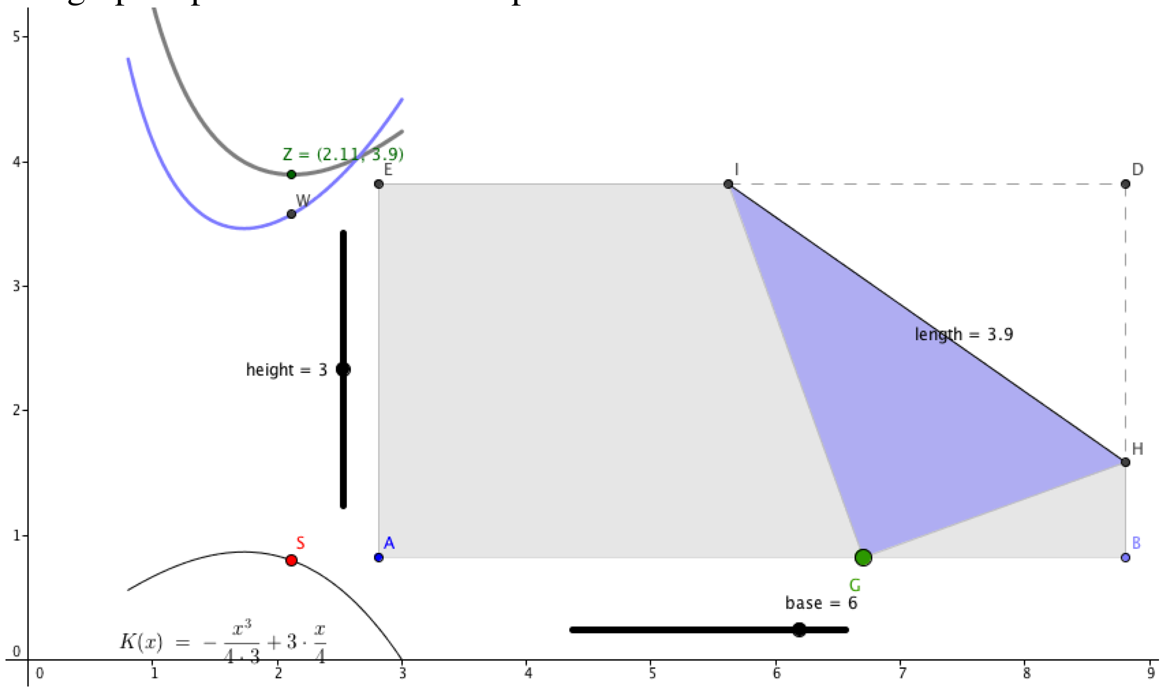


Figure 11: Exploring the variation of length of segment HI and area of polygon AGIE

DISCUSSION OF RESULTS

During the plenary discussion, all the pair's contributions were presented and examined. All participants recognized that the problem's formulation is a key issue that often teachers do not address or make explicit in their class activities. In this process, it became important to develop several ways to look at the situation that goes beyond identifying superficial features. For example, focusing on the folding line led the participants to recognize not only information or data to find the algebraic area model of triangle GBH (Figure 5); but also to think of the perpendicular bisector of

GD to draw the folding segment (Figure 10). The perpendicular bisector became instrumental not only to draw the dynamic model of the task, but also to graph the area behaviour of the family of triangles formed when point G was moved along segment AB. Another issue that emerged here was the importance of linking the problem representation with the context of the task. For instance, those who worked on the algebraic model immediately relied on the *WoframAlpha* tool to draw the corresponding graph and then found its maximum value without making explicit the particular domain of the function. During the discussion, they were asked to explain the graph behaviour in terms of the task context and then they realized that for some points on segment AB, the graph did not make sense in terms of the folding process and focused their attention on defining the function domain. Those pairs that presented the dynamic models recognized that situating the movable point G on side AB not only led them to introduce the perpendicular bisector into the model; but also to visualize a possible domain or interval for moving point G. That is, the domain of point G was contextualized. It was also argued that the use of sliders to draw the rectangle allows considering and examining the area behaviour of a family of rectangles as a result of changing the sliders' lengths. In addition, the dynamic model of the task provides affordances to focus on the behaviour of others embedded figures. Figure 10 shows the area behaviours of triangle GHE.

Elements of an Instructional Route to Implement the Task

A key question that emerged during the plenary discussion was: How should we take into account the information associated with all approaches that appeared during the solution of the task? This question led the participants to sketch a possible didactic route to structure a lesson to further implement in their practicum.

(1) All participants coincided that a lesson should engage students in activities that foster problem solving formulation and the use of YouTube videos can foster not only the students problem posing approaches; but also ways to discuss different statements of the same tasks. Here, they recognized the importance of paying attention to or looking at the situation in terms of mathematical objects and their properties. What figures do you see when the sheet is folded? Can you calculate their areas/perimeters? What data do you need? Addressing these types of questions could help learners focus on ways to find mathematical relations among objects attributes (lengths, perimeters, areas, etc.).

(2) The participants recognized that students, during the class, should be encouraged to express verbally and in writing all questions they formulated. These questions should be examined and contrasted in terms of what concepts are involved and data needed to answer them. The goal here is to identify those questions or problems that the group should follow up and solve.

(3) The group also recognized and valued the importance for students to look for different ways to solve or answer the posed question. It was clear that both dynamic and analytic approaches play an important role in developing problem solving strategies. Thus, during the class session, some students should focus on constructing a dynamic representation of the problem via the use of a dynamic

geometry environment. Others should work on representing the problem algebraically. At the end, both groups should present their approaches to the task and discuss advantages and limitations associated with both approaches. For example, the construction of a dynamic model demands that students think of the problem in terms of geometric meaning to represent the problem. And this representation becomes important for students to visualize the objects or parameters behaviour as a result of orderly moving another object within the configuration.

(4) Finally, the participants agreed on incorporating problem solving activities that include looking for extensions or generalization of the task. For example, when a task involves analysing properties or relationships associated with particular figures or initial data, a questions to ask is: What happens when the dimensions of the sheet become a and b units respectively? In addition, it is also important to reflect on the extent to which methods used to construct dynamic and algebraic models can be used to approach new problems. That is, to some extent the ways to represent and explore the problems should become a method to approach a family of problems.

In terms of the mathematical work-space frame, we argue that the coordinated use of digital technology opens new routes for prospective teachers to conceptualise problem situations as an opportunity to formulate conjectures and to explore different ways to identify, present, and support mathematical relations and results.

CONCLUDING REMARKS

Mathematical tasks are essential to foster learners' development of mathematical thinking. The coordinated use of digital technologies offers learners an opportunity to engage in mathematical thinking. For example, the use of an online-video was instrumental to introduce a situation involving the folding of a sheet of paper. The situation provided the context for the participants to look at and examine the situation in order to formulate questions. Later, the proposed questions were analysed in terms of identifying possible ways to respond to each one and the use of others digital tools became relevant to represent and explore those questions. The participants recognized that the analysis of algebraic models that involves the use of a tool requires making sense of results and tasks contexts. In addition, dynamic models seem to favour learners' engagement in making sense activities throughout the model's explorations. Dynamic models of the task that the participants constructed became a platform to explore not only different forms to represent emerging relations, but also ways to extend and interpret results in terms of the context or the initial statement of the tasks. In such a process, it was possible to generate graphic behaviour of particular relations such as the triangle area variation without defining the algebraic model. In addition, concepts like the perpendicular bisector and loci of points were relevant to explain and justify such relationships. Finally, the online-video, Wolframalpha results and dynamic models are available online and learners can access them any time for their analysis and continual mathematical discussion. That is, the coordinated use of several digital technologies offers diverse opportunities for learners not only to communicate and discuss mathematical task and ways to formulate problems; but also to represent and explore the tasks from diverse angles and perspectives.

ACKNOWLEDGEMENT

This report is part of the activities associated with two research projects: Plan Nacional I+D+I del MCIN, Reference EDU2011-29328 and Conacyt-Mexico, Reference 168543.

REFERENCES

Blume, W. (2013). Introduction: Content related research on PISA. In M. Prenzel, M. Kobarg, K. Schöps and S. Rönnebeck (Eds.), *Research on PISA. Research outcomes of the PISA research conference 2009*. NY: Springer.

Hegedus, S.J. and Moreno-Armella, L. (2009) 'Introduction: the transformative nature of 'dynamic' educational technology', *ZDM Mathematics Education*, Vol. 41, pp.397–398.

Kuzniak, A., Parzysz, B. and Vivier, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in teacher training. *The Mathematics Enthusiast*, 10, 1&2, pp.407-440.

Kuzniak, A. and Rauscher, J-C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics*, 77, pp. 129-147.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathematique et ses geneses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, pp.9-24.

Leung, A. (2011). An epistemic model of task design in dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education*, 43: 325-336.

Mason, J. and Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St. Albans: Tarquin Publications.

Mishra, P. and Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teacher College Record*, 108(6), pp. 1017-1024.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies*. Paris: Armand Colin

Ren, Y. (2014). Foreword. Information and communication technologies in education. In J. M. Spector, M. D. Merrill, J. Elen, and M.J. Bishop (Eds.), *Handbook of research on educational communications and technology*, pp. vii-xi. . Fourth Edition. NY: Springer.

Roschelle, J., Courey, S., and Murray, E. (2013). Dynabooks: Supporting teachers to engage all learners in key literacies. In C. Mouza and N. Lavigne (eds.), *Emerging*

Technologies for the Classroom, Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies. NY: Springer Science+Business Media New.

Santos-Trigo, L. M. and Camacho, M. (2009) Towards the construction of a Framework to deal with routine problems to foster mathematical Inquiry. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (PRIMUS)*. Vol 19(3), pp. 260-279.

Santos-Trigo, M. and Ortega-Moreno, F. (2013). Digit technology, dynamic representations, and mathematical reasoning: extending problem solving frameworks. *Int. J. Learning Technology*, Vol. 8, No. 2, pp. 186-200.

Santos-Trigo, M. and Camacho-Machín, M. (2013) A Problem Solving Framework that enhances the use of computational technology. *The Mathematics Enthusiast Journal*. Vol 10(1 & 2) pp. 279-302. ISSN 1551-3440

Santos-Trigo, M.; Camacho-Machín, M. and Olvera-Martínez, C. (2014) Preservice High school teachers' construction and exploration of dynamic model of variation phenomena. In Carreira, S., Amado, N., Jones, K., & Jacinto, H. (Eds.) (2014). *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving*, pp. 96-107. Faro, Portugal: Universidad de Algarve.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of computers for Mathematical Learning* 9(3): 281-307.

Vahey, P., Knudsen, J., Rafanan, K., and Lara-Meloy, T. (2013). Curricular systems supporting the use of dynamic representations to foster students' deep understanding of mathematics. In C. Mouza and N. Lavigne (eds.), *Emerging Technologies for the Classroom, Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies*. NY: Springer Science+Business Media New.

COORDINACION DE REGISTROS Y CONSTRUCCIONES MENTALES EN UN AMBIENTE DINAMICO PARA EL APRENDIZAJE DE TRANSFORMACIONES LINEALES

César Fabián Romero Félix, Asuman Oktaç

Cinvestav - IPN

Presentamos algunos avances de una tesis de doctorado sobre el aprendizaje de transformaciones lineales del plano en ambientes gráficos dinámicos. El enfoque de esta investigación es describir las construcciones mentales logradas en un aprendizaje apoyado en representaciones dinámicas y las relaciones entre el uso de los registros de representación y las estructuras y mecanismos mentales descritos por la teoría APOE (Arnon et al., 2014). Se diseñó e implemento un proceso de enseñanza guiado por una descomposición genética que toma en cuenta la articulación de registros y las ventajas de las representaciones dinámicas. Mostramos algunas observaciones realizadas a partir de cuestionarios y entrevistas sobre las construcciones mentales logradas y relaciones con el uso de registros.

INTRODUCCIÓN

El presente reporte muestra avances de una investigación doctoral sobre las construcciones mentales desarrolladas en el aprendizaje de las transformaciones lineales del plano en un entorno de aprendizaje dinámico creado con GeoGebra para estudiantes universitarios. Partimos de la idea de que "el registro de representación en el que se inicia el estudio de algún objeto matemático afecta el nivel de comprensión que se puede llegar a obtener de él" (Soto, Romero & Ibarra, 2012, p. 47) y que para el caso de las transformaciones lineales, el registro gráfico podría ser conveniente.

Conjugando elementos de las teorías de representaciones semióticas de Duval (1999) y la teoría APOE (Arnon et al., 2014), se diseñó una propuesta de enseñanza basada en una *descomposición genética* que toma en cuenta las especificidades de las representaciones para las transformaciones lineales del plano. Dicha propuesta pretende minimizar las complejidades inherentes a los registros de representación formales, así como evitar y superar diversas dificultades de aprendizaje reportadas por otros investigadores. Partiendo de construcciones gráficas dinámicas y favoreciendo la articulación de registros, se espera obtener concepciones independientes de los registros, concepciones que puedan ser utilizadas para cualquier representación.

Se describen en este reporte algunas observaciones acerca de las construcciones mentales logradas por estudiantes que pasaron por el proceso de instrucción propuesto. Dichas construcciones son descritas a partir de un examen diagnóstico, observaciones de clase, examen posterior a la enseñanza y entrevistas basadas en el desempeño durante el examen. Además, se presenta un análisis preliminar de las relaciones entre el uso de representaciones dinámicas, la coordinación de registros y el aprendizaje conceptual en términos de abstracción reflexiva. Aunque no basamos nuestro análisis en el marco de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) encontramos algunos paralelismos entre el punto de vista aquí presentado y el de ETM que permitirían un análisis y discusión que enriqueciera a ambos. Especialmente se podrían analizar las observaciones entre el uso de representaciones y las construcciones mentales de APOE con respecto a las Génesis de los ETM: semiótica, instrumental y discursiva (Kuzniak & Richard, 2014).

ELEMENTOS TEÓRICOS

Teoría APOE

La teoría APOE (Arnon et al., 2014) describe la construcción del conocimiento matemático, en términos generales, como una progresión de estructuras mentales lograda a través de los mecanismos de abstracción reflexiva.

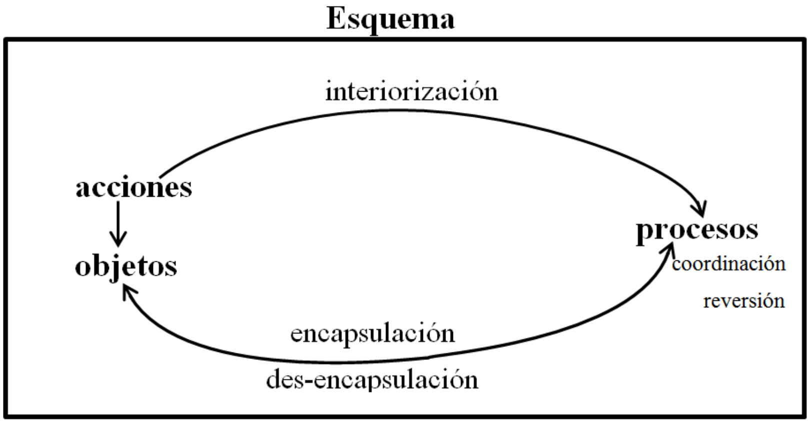


Figura 1: Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18)

El diagrama de la Figura 1 representa la progresión mencionada; ésta es descrita (Arnon et al., 2014. pp. 18-26) como cíclica y auto-retroalimentada. Las *acciones* son manipulaciones de *objetos* ya existentes, realizadas de manera externa al sujeto manteniendo siempre los mismos pasos, en el mismo orden. Un ejemplo típico de esta estructura es el del caso de la función: un individuo con sólo la concepción acción de función se vería limitado a evaluar aquellas funciones de las que conoce su fórmula y a realizar actividades en las que se utilice sólo valores específicos de la función, por ejemplo, sumar funciones significaría sólo la suma de las imágenes de pares de valores fijos.

Las acciones pueden ser *interiorizadas* a *procesos* y con ello dejan de ser necesarios los estímulos externos para poder realizarlas. Se obtiene también control interno sobre las partes de la acción; se puede imaginar u omitir pasos y revertir el orden de éstos mentalmente. El mecanismo de interiorización es logrado comúnmente a través de la repetición y la reflexión sobre las acciones. Una vez teniendo procesos, estos pueden *coordinarse* para formar nuevos procesos, por ejemplo el proceso de duplicación (multiplicar por dos) se puede coordinar con el proceso de números naturales para obtener el proceso de números pares.

La *encapsulación* se refiere al mecanismo con el que se logra aplicar acciones a lo que antes era un proceso; con ella los procesos dejan de ser acciones interiorizadas y llegan a ser entes por sí mismos, *objetos*. Para el caso de transformación lineal, la encapsulación permite realizar composiciones y también poder ver a las transformaciones como elementos de algún conjunto y con ello formar un espacio vectorial de transformaciones lineales (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012).

La formación de concepciones matemáticas es descrita en las descomposiciones genéticas como una progresión de procedimientos de abstracción reflexiva, por ejemplo una iteración del ciclo de la Figura 1. En ellas se describe de manera detallada el posible desarrollo de las estructuras mentales partiendo de algunas supuestas construcciones previas hasta alcanzar la concepción deseada, comúnmente una concepción objeto. Según nuestra apreciación, las descomposiciones genéticas podrían tomarse también como guías para el establecimiento de ETM de referencia (Kuzniak & Richard, p. 4).

Elementos de la teoría de representaciones semióticas y de representaciones dinámicas

La teoría de Duval (1999) se dirige principalmente a aquellos sistemas de signos que pueden ser clasificados como registros de representación; en palabras del autor:

> Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis.
>
> La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado... Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar.
>
> El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada… Naturalmente, existen reglas de tratamiento propias de cada registro.
>
> La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial. (Duval 1998, p. 4)

Los registros de representación utilizados generalmente para representar los conceptos del Álgebra Lineal son: el registro de la lengua natural, el gráfico, el matricial y el de la escritura simbólica (Pavlopoulou, 1993), este último conocido también como registro algebraico (Soto et al., 2012; Ramírez, Romero & Oktaç, 2013).

Algunas de las representaciones usadas en la enseñanza propuesta no corresponden con las usadas habitualmente: las representaciones dinámicas obtenidas a través de GeoGebra. La diferencia más importante para nosotros es que las representaciones dinámicas permiten representar objetos que no podrían representarse en un ambiente estático, nos referimos a los objetos variables, como la "c" en la expresión "$3c+2$" o la "V" en $V \in R^2$. Con el avance de la tecnología nos encontramos en una etapa de representaciones dinámicas continuas (Moreno, Hegedus & Kaput,

2008) y por ello podemos representar gráficamente objetos variables, que en el registro algebraico pueden ser representados por letras; estos no pueden ser representados en registros estáticos pues al intentarlo acabamos representando a objetos fijos. Teniendo estas representaciones dinámicas continuas en el registro gráfico podemos, por ejemplo, construir un vector en pantalla primeramente como un vector fijo (representación estática) pero, al arrastrar el extremo de tal vector, se puede convertir en un vector variable.

CARACTERÍSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación de la que parte este artículo se trata de una tesis de doctorado en desarrollo, basada en una adaptación del ciclo de investigación APOE (Arnon et al., 2014) con la intención general de describir el aprendizaje de las transformaciones lineales del plano en un ambiente tecnológico como el descrito. En esencia, se están siguiendo las tres etapas de investigación propuestas para investigaciones en APOE, expuestas en el siguiente diagrama.

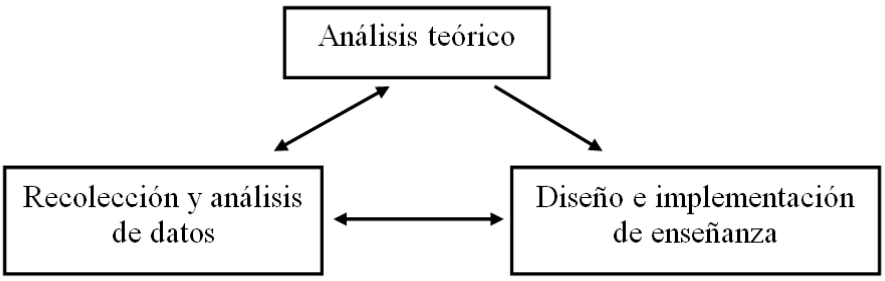


Figura 2: Ciclo de investigación (adaptado de Arnon et al., 2014)

El diseño de enseñanza no fue realizado directamente con el ciclo ACE propuesto por APOE (Arnon et al., 2014, p. 57). Sin embargo, consideramos que la propuesta de enseñanza es compatible con el ciclo de investigación de APOE al promover activamente el desarrollo de las construcciones mentales guiadas por una descomposición genética preliminar.

La descomposición genética está basada en análisis de libros de texto, investigaciones previas (principalmente Soto et al., 2012; Roa-Fuentes & Oktaç 2010) y experiencia práctica. Ésta se caracteriza por el desarrollo de acciones en un contexto gráfico dinámico y la coordinación de registros (Ramírez et al., 2013) desde los inicios del desarrollo conceptual para lograr construcciones independientes de las representaciones.

De tal manera, se propone desarrollar concepciones acción y proceso para las propiedades de linealidad inicialmente dependientes de los registros utilizados. Posteriormente, mediante la articulación de los registros gráfico y algebraico, los procesos dependientes a estos serían coordinados en nuevos procesos que puedan ser utilizados en cualquier registro. Se espera que estos nuevos procesos independientes de los registros sean más apropiados que los procesos mono-registro para ser coordinados como proceso de transformación lineal y posteriormente encapsulados y relacionados con otros objetos.

Se seleccionaron estudiantes de ingeniería matemática del Instituto Politécnico Nacional para participar en la investigación, pues su perfil de estudiantes, las instalaciones de su institución, y el estilo del profesor encargado del grupo facilitaban la puesta en práctica del diseño de enseñanza.

Previo a la enseñanza se aplicó un pre-test para evaluar las construcciones existentes de los estudiantes. Durante las clases hubo etapas de trabajo individual y discusión en grupo sobre el problema general de clasificar las transformaciones del plano en dos categorías, las lineales y las no lineales.

La enseñanza se implementó en seis sesiones. Los ejercicios de clase y tareas extra-clase se presentaron a los estudiantes en una página web (http://goo.gl/r29KMh) para facilitar su acceso; estos incluyeron actividades con applets de GeoGebra así como actividades para resolver *a mano* y preguntas para discutir en clase. Se crearon ambientes dinámicos en los que los estudiantes tuvieran la oportunidad de construir el concepto de transformación lineal gráficamente, a través de la interacción con sus representaciones para resolver problemas. Las actividades que los estudiantes tenían que realizar favorecían además la coordinación de los registros gráfico y algebraico, estableciendo conexiones entre ambas representaciones y buscando constantemente pasar de un registro a otro para resolver problemas.

En general, los applets con los que trabajaron los estudiantes comparten varias características: representan por separado los planos del dominio y co-dominio de las transformaciones; se puede manipular un vector del dominio mientras GeoGebra calcula la imagen de tal vector bajo alguna transformación mostrándola en el co-dominio y opcionalmente mostrando el rastro del vector manipulado así como de su imagen o la imagen de la región del dominio; se puede modificar la transformación de manera gráfica o algebraica.

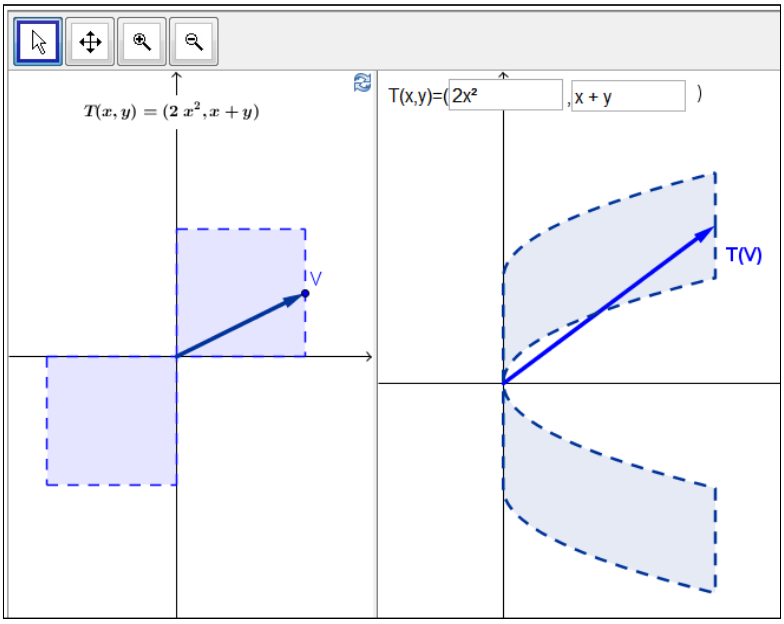


Figura 3: Ejemplo de applet sobre transformaciones lineales

En las primeras actividades los applets fueron utilizados en exploración libre para observar las propiedades de linealidad, para definir éstas por separado y clasificar las transformaciones del plano. Posteriormente se realizaron actividades en las que los estudiantes tuvieran que utilizar las construcciones para decidir si algunas transformaciones eran lineales o no. Finalmente, los estudiantes tenían que manipular las transformaciones, gráfica o algebraicamente, para lograr algún efecto gráfico particular en la imagen de una región fija.

A lo largo de las actividades, los estudiantes tenían que utilizar el registro algebraico para describir y definir las propiedades de las transformaciones, para justificar sus respuestas o para resolver algún problema planteado gráficamente. Por medio de esta articulación de los registros se buscaba facilitar la coordinación de las construcciones mentales ligadas a cada registro para lograr construcciones más robustas e independientes de los registros.

Posterior a la etapa de enseñanza se aplicó un examen diseñado para identificar las concepciones desarrolladas por los estudiantes. Basados en el desempeño de los estudiantes a lo largo de la enseñanza y en el examen final, se clasificó a los estudiantes según las posibles concepciones desarrolladas y se diseñó una entrevista para comprobar los análisis a priori de los exámenes. El objetivo de la entrevista era validar las construcciones mentales previstas en la descomposición genética y analizar los niveles de éxito en el aprendizaje con respecto a las construcciones logradas por cada estudiante.

CONCEPCIONES DE TRANSFORMACIÓN LINEAL EN UN AMBIENTE DINÁMICO

Para este reporte nos concentramos en las concepciones acción y proceso de las propiedades de linealidad y en la concepción proceso de transformación lineal. Presentamos también la manera en la que proponemos se lleve a cabo la interiorización para ambos casos.

Concepciones de la propiedad 1: T(k·V)=k·T(V)

Concepción Acción

Aunque desde el punto de vista matemático no hay diferencia entre las concepciones gráficas y algebraicas, encontramos diferencias en el plano cognitivo debido a las particularidades de los registros. Las acciones se refieren a manipulaciones específicas de entes externos; en el caso de las matemáticas se trata de las representaciones y por lo tanto las manipulaciones dependen de los tratamientos disponibles. De esta manera, podemos distinguir acciones diferentes según las representaciones y tratamientos que involucren.

La concepción **acción gráfica** se refiere a la conservación de colinealidad y proporcionalidad, la segunda incluyendo el sentido de las flechas, para algún par de vectores fijos y sus imágenes tras la aplicación de una función. Para esta concepción el sujeto necesita observar la representación de los vectores del dominio y de sus imágenes (flechas), sean generadas por él o no. Cuando los dos pares de flechas se le presentan, puede decidir si se conservan la colinealidad y proporcionalidad.

En uno de los problemas del examen se les presentó a los estudiantes un par de vectores colineales, V y $2{\cdot}V$, y sus imágenes bajo una transformación, F_1, las cuales no eran colineales; y se les preguntó si la transformación era lineal o no lineal a partir de esos datos. La respuesta del estudiante C se observa en la siguiente imagen.

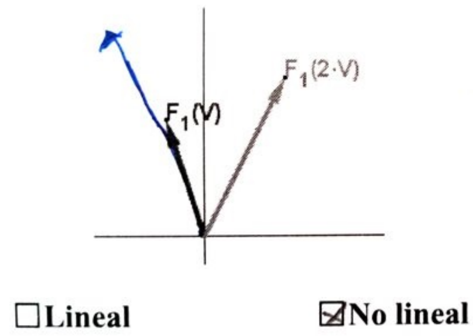


Figura 4: Uso de concepción acción gráfica de la propiedad 1

El estudiante C muestra una concepción acción de la propiedad 1, ya que ante el estímulo externo, los pares de vectores, pudo evaluar el cumplimiento de la propiedad y comparar con los datos del problema. Encontramos en la entrevista que inicialmente calcula cuál debería ser la imagen de $2{\cdot}V$ mentalmente y compara ese resultado con el presente en los datos del problema; con eso decide que la transformación no es lineal. Posteriormente, para justificar su respuesta, grafica junto a los datos el vector $2{\cdot}F_1(V)$ que debería coincidir con $F_1(2{\cdot}V)$ para cumplir la propiedad, explicando las características que debería tener, con lo que muestra los pasos de la acción realizada.

La concepción **acción algebraica** de la propiedad 1 parte de la expresión simbólica de una transformación: su fórmula. La acción consiste en evaluar la imagen de un múltiplo específico de un vector fijo así como el mismo múltiplo de la imagen del vector original, por ejemplo: evaluar $T(2{\cdot}(1,1))$ y $2{\cdot}T(1,1)$. De manera similar a la concepción gráfica, un sujeto con esta concepción puede decidir si se cumple o no la propiedad 1 para alguna situación fija. El sujeto seguiría los pasos de calcular la imagen de un múltiplo y compararla con el mismo múltiplo de la imagen del vector inicial para averiguar si son iguales.

Aunque se puede desarrollar la concepción algebraica a partir de la gráfica y viceversa, no se puede asumir la existencia de una a partir de la otra; se necesita realizar conversiones no triviales y reflexionar sobre los invariantes para lograrlo. Ejemplificamos esto con otra respuesta del estudiante C, dada en un examen diagnóstico previo a la enseñanza multi-registro que proponemos.

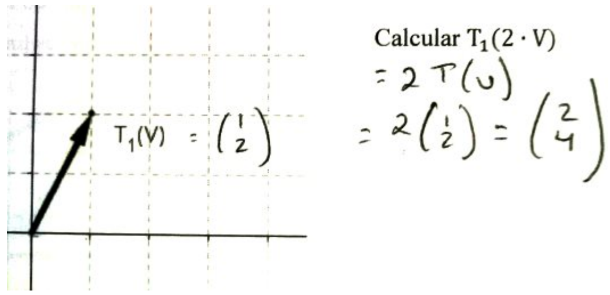


Figura 5: Conversión al registro algebraico para usar la concepción acción

En el problema se tiene la imagen de un vector fijo, bajo una transformación lineal T_1 de fórmula desconocida. Se esperaba que encontrara la imagen de un múltiplo realizando tratamientos gráficos, asociados a la concepción acción gráfica. El estudiante C decidió convertir las representaciones al registro algebraico, suponiendo que la graduación de la gráfica corresponde a unidades de medida, para poder utilizar su concepción algebraica de la propiedad 1. Dadas las expresiones utilizadas, no parece necesitar la concepción gráfica y por lo tanto suponemos que pueden existir independientemente.

Concepción proceso

Cuando se interiorizan las acciones se logra una concepción proceso, como se describió anteriormente. Para la propiedad 1, esto significa pensar que la igualdad $T(k \cdot V)=k \cdot T(V)$ se cumple para todos los vectores del dominio de la transformación T. Esto requiere el uso de variables; en el caso de la igualdad anterior, se necesita que V represente a todos los vectores del plano, no sólo a uno. La representación de variables no es trivial, en algunos casos incluso si se usan las mismas expresiones, los estudiantes podrían estar representando objetos fijos; por ejemplo, un solo vector de coordenadas desconocidas.

En varias preguntas similares a la de la Figura 4 se exploró durante la entrevista si podría existir una transformación no lineal que mantuviera los mismos datos, para averiguar si consideran el cumplimiento de las propiedades para todos los vectores del dominio. Se observa la concepción **proceso algebraica** en estudiantes que declaran que el cumplimiento de la igualdad algebraica para un número finito de vectores y escalares no es suficiente para afirmar que la transformación cumple la propiedad, mientras que los estudiantes con sólo concepción acción suelen hacer lo contrario.

Aquellos estudiantes con un dominio suficiente del registro algebraico pueden incluir en sus expresiones cuantificadores universales para declarar explícitamente el cumplimiento de la ecuación para todos los vectores y escalares del espacio vectorial; de tal manera, no incluir los cuantificadores no necesariamente implica la falta de la concepción proceso, puede significar sólo el desconocimiento u omisión de las reglas de formación de proposiciones algebraicas (o predicados lógicos).

La concepción **proceso gráfica** de la propiedad 1 corresponde también a la generalización de los invariantes a todo el dominio de la transformación. El estudiante puede imaginar y asumir que se conserva la colinealidad y proporcionalidad para todos los pares de vectores del plano. Puede intentar probar la conservación de las propiedades gráficas para algunos vectores fijos o para alguna región del plano, pero eventualmente llega a afirmar que la transformación conserva las propiedades para todos los vectores del dominio.

En ambos casos, la universalidad de los invariantes forzosamente implica una concepción proceso ya que en términos prácticos no se puede comprobar que se conserven las propiedades (gráficas o la ecuación) para cada uno de los vectores del plano ya que esto involucra infinitos pasos. El sujeto tiene que imaginar (suponer) el cumplimiento de la propiedad para una cantidad infinita.

Concepciones de la propiedad 2: T(U+V)=T(U)+T(V)

Concepción Acción

Esta concepción parte del tratamiento de suma de cada registro y la evaluación de funciones. Igual que en el caso anterior, las concepciones gráficas y algebraicas serán distintas por el tipo de tratamientos; el tratamiento de suma es también distinto en los registros gráficos y en el algebraico (Soto et al., 2012).

El tratamiento de suma gráfica es conocido comúnmente como *regla del paralelogramo*. Influenciada por ese tratamiento, la concepción **acción gráfica** de la propiedad 2 conlleva identificar la suma de dos vectores, la diagonal del paralelogramo que generan, con la diagonal del paralelogramo de sus imágenes. Esta concepción se observa en el estudiante C al resolver un problema, decidiendo si la transformación F_3 es lineal, conociendo sólo la imagen de dos vectores y de la suma de estos.

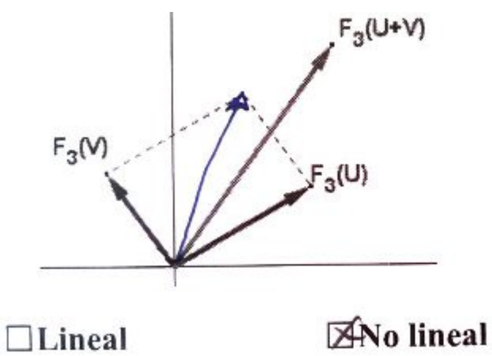


Figura 6: Uso de concepción acción gráfica de la propiedad 2

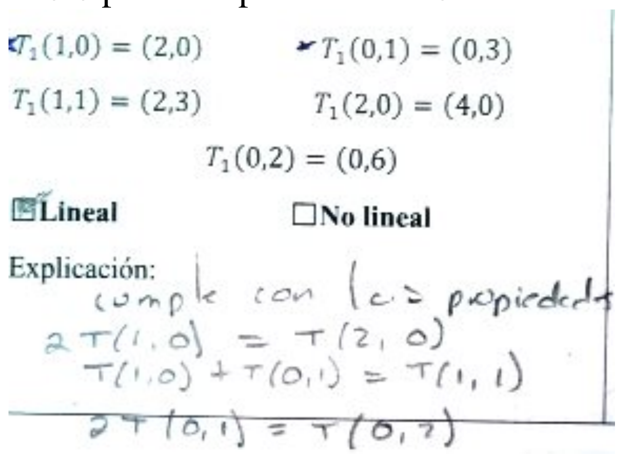
De manera análoga a su respuesta anterior, el estudiante C realiza los pasos de la concepción acción: conocidas las imágenes de U y V, calcula la imagen de su suma como la suma de sus imágenes, utilizando la regla del paralelogramo. Debido a que el resultado de sus operaciones no coincide con los datos presentes, concluye que la transformación no es lineal ya que no cumple con la propiedad 2. En general, la concepción acción gráfica evalúa solo para vectores fijos la regla del paralelogramo; puede incluir varios pares de vectores pero siempre se refiere a una cantidad finita.

La concepción **acción algebraica** se desarrolla posteriormente de la concepción gráfica de la propiedad 2 y requiere de las concepciones algebraicas de vector, el tratamiento de suma por coordenadas y, como en el caso de la otra propiedad, la evaluación de funciones utilizando la expresión algebraica; para actuar sobre ellas de manera similar y llegar a evaluar la suma de dos vectores fijos como la suma de sus imágenes.

Un estudiante con esta concepción deberá poder comprobar la ecuación $T(U+V)=T(U)+T(V)$ para una T específica y vectores U y V fijos. Esto realizando las evaluaciones, por separado, de cada lado de la igualdad y después comparando los resultados.

Concepción Proceso

La concepción **gráfica** de la propiedad 2 requiere poder imaginar que para todos los paralelogramos permanece invariante la imagen de la diagonal como la diagonal de la imagen de los vectores originales. Por otro lado, la concepción **algebraica** necesita imaginar que la suma de coordenadas es distribuida para todos los pares de vectores bajo la transformación. Para ambos la concepción proceso implica el rechazo de datos finitos como criterio suficiente para afirmar que se cumple la propiedad 2. De esta manera, podemos suponer que en el caso del problema que se muestra en la Figura 7, el estudiante C utilizó concepciones acción de las propiedades de linealidad al responder que una transformación es lineal porque cumple las propiedades sólo para tres pares de vectores.


$T_1(1,0) = (2,0)$ $T_1(0,1) = (0,3)$

$T_1(1,1) = (2,3)$ $T_1(2,0) = (4,0)$

$T_1(0,2) = (0,6)$

☒ Lineal ☐ No lineal

Explicación:
cumple con las propiedades
2T(1,0) = T(2,0)
T(1,0) + T(0,1) = T(1,1)
2T(0,1) = T(0,2)

Figura 7: Uso consecutivo de las concepciones acción algebraicas

El estudiante C, y algunos otros que dieron la misma respuesta, afirmaron durante la entrevista que los datos del problema eran suficientes para afirmar que la transformación fuera lineal. No buscaron información sobre los demás vectores del plano ni afirmaron de alguna manera que se pudiera deducir que para el resto de vectores del plano se cumplían las propiedades de linealidad durante la entrevista.

Concepción Proceso de Transformación Lineal

Las concepciones descritas hasta ahora corresponden a las propiedades de linealidad por separado. El concepto de transformación lineal se refiere a las dos propiedades en conjunción, pero encontramos manifestaciones de su uso por separado desde el nivel de acción; al igual que en investigaciones previas (Roa-Fuentes & Oktaç, 2010).

Antes de proceder con la coordinación de las propiedades en una sola concepción de transformación lineal, en nuestra propuesta es necesario coordinar las versiones gráficas y algebraicas de cada propiedad (proceso) por separado. Es decir, llegar a concepciones proceso que funcionen en ambos registros para cada propiedad. Aun no se tienen datos para describir la manera específica en que la coordinación sería llevada a cabo mentalmente, en parte debido a que el mecanismo de coordinación de procesos aún está siendo investigado (Arnon et al., 2014, p. 24). Lo que podemos prever de esta coordinación es que necesita de la habilidad de articular los registros gráfico y algebraico, pues será necesario realizar conversiones para establecer la equivalencia de las propiedades en los registros.

Una vez que se tienen las concepciones proceso de las propiedades de linealidad, que incluyan a ambos registros, suponemos una progresión cognitiva similar a la propuesta por Roa-Fuentes y Oktaç (2010) aunque con las diferencias mencionadas anteriormente. La progresión continúa con la coordinación de las propiedades de linealidad en un solo proceso y posteriormente con una concepción proceso de combinación lineal. Se obtiene entonces un proceso de transformación lineal que permite evaluar el cumplimiento simultáneo de las propiedades de linealidad y como resultado final la evaluación de una combinación lineal como la combinación lineal de las imágenes, para todos los vectores del plano y todos los escalares.

CONCLUSIONES

En investigaciones previas se han reconocido posibles ventajas y desventajas al estudiar diversos conceptos del álgebra lineal apoyados en representaciones dinámicas. Sin embargo, en tales investigaciones la descripción del aprendizaje se mantiene en términos semióticos o epistemológicos y aporta poco sobre el desarrollo cognitivo de los estudiantes. Tomando en cuenta esa situación, intentamos equilibrar el análisis con una hipótesis sobre la interacción entre las problemáticas semióticas y cognitivas del aprendizaje matemático.

Entre los problemas estudiados desde la teoría de representaciones semióticas destacan el de la confusión de los objetos matemáticos con sus representaciones (Duval, 1999), la complejidad intrínseca de los registros formales (Pavlopoulou, 1993) y la importancia de la coordinación de registros (Ramírez et al., 2013). Tomando en cuenta esas problemáticas se deduce que un uso inapropiado de los registros de representación puede inhibir la aprensión conceptual ya que se puede acabar manipulando representaciones vacías (Soto, et al., 2012, p. 47), que para el sujeto no significan nada más que las reglas para usarlas o manipularlas. La presentación típica de esta situación es que los estudiantes pueden manipular expresiones algebraicas sin dificultad y resolver problemas, sin mostrar entendimiento alguno sobre los conceptos que los símbolos deberían representar. En nuestra investigación, encontramos algunas manifestaciones de esta situación y tratamos de añadir a la explicación semiótica del problema un análisis del fracaso del desarrollo de construcciones mentales en términos de abstracción reflexiva.

Las representaciones algebraicas pueden obstaculizar la abstracción reflexiva

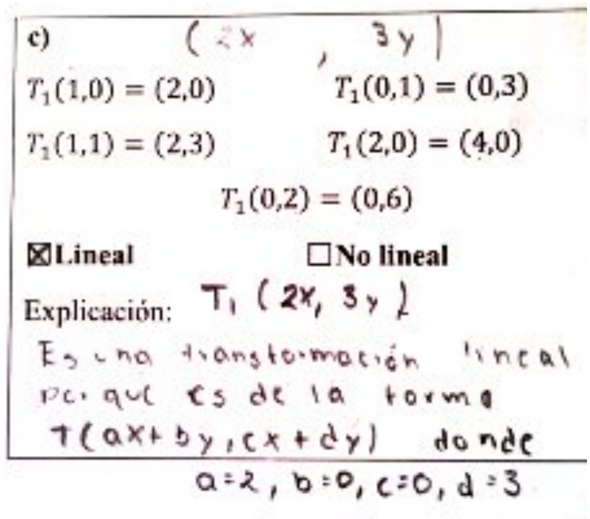
Cuando un estudiante puede manipular expresiones algebraicas de manera satisfactoria pero no muestra haber desarrollado las estructuras mentales descritas por APOE, nos parece que se debe a que no se está realizando en realidad la abstracción reflexiva. El dominio operativo de un registro formal se puede lograr prácticamente sin desarrollar significados para los objetos que en éste se representan; debido a la estructura formal del registro y a la abundancia de tratamientos algorítmicos en éste. Los sujetos en esta situación pueden mantenerse en procesos de abstracción pseudo-empírica; pensar sólo en los estímulos externos (los símbolos) y en las propiedades añadidas a estos pero que son inseparables de ellos (Dubinsky, 1991; Glasersfeld 1995). Sin reflexionar en un nivel superior, no pueden abstraer esas propiedades de manera que puedan separarlas de los símbolos y se mantienen en uno de los obstáculos más grandes señalados desde la teoría de representaciones semióticas; tratan a las representaciones como si fueran los objetos.

Las ventajas operacionales de los tratamientos algebraicos, y de los registros formales en general, se vuelven desventajas cuando los estudiantes intentan aprovecharlas en lugar de utilizar (o desarrollar) las concepciones de los objetos representados para resolver problemas. Probablemente motivados por el éxito al resolver algunos problemas de manera rápida, por el tipo de aprendizaje con el que han tenido más experiencia, o por alguna de las raíces del *obstáculo del formalismo* (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000), los estudiantes intentan primero encontrar una manera algorítmica para resolver los problemas que se les presentan, aun en los casos en los que una respuesta o estrategia conceptual sería mucho más rápida.

La situación anterior se observó con dos de los estudiantes del grupo, el mencionado estudiante *C* y el estudiante *I*. En varias ocasiones intentan adivinar o construir las expresiones algebraicas de transformaciones para decidir si son lineales o no, o para encontrar imágenes de algunos vectores. En el caso de las transformaciones lineales, la imagen de los vectores solicitados se encontraría fácilmente utilizando las propiedades de linealidad, pero no intentan ese tipo de estrategias pues con la información presentada en el registro algebraico les resulta preferible encontrar la respuesta a través de tratamientos. Cuando se les pide analizar la información en el registro gráfico (dinámico o no) ya sea que ellos realicen las conversiones o el entrevistador lo haga, por iniciativa propia cambian el tipo de estrategia a utilizar y empiezan a utilizar concepciones en lugar de tratamientos o memorizaciones.

Otra situación que muestra la misma problemática es la memorización de la fórmula general para las transformaciones lineales de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$, $T(x, y)=(a{\cdot}x+b{\cdot}y, c{\cdot}x+d{\cdot}y)$; se puede responder a diversos problemas de transformaciones lineales sin tener siquiera una concepción acción de las propiedades de linealidad usando esta fórmula general. El estudiante I, intentó este tipo de respuestas en varias ocasiones; su habilidad para formar expresiones algebraicas le permitía aproximar o encontrar una fórmula para los datos de varios problemas y utilizaba ésta como argumento para decidir si una transformación era lineal o no.

De la Figura 8 deducimos que él no utiliza las propiedades de linealidad porque solo evalúa que la fórmula que propone se derive de la fórmula general; ni siquiera compara las imágenes de los vectores para probar las propiedades en los datos presentados. La técnica utilizada no es por sí misma despreciable, se buscaba llegar a preferir esa técnica en algunas situaciones, pero para seleccionar las situaciones convenientes son necesarias las concepciones de las propiedades de linealidad y la concepción proceso de transformación lineal. Usar la técnica de manera arbitraria provoca errores como el realizado por *I*, que no consideró la existencia de una infinidad de otras fórmulas no lineales que cumplen los mismos datos.


c) (2x , 3y)

$T_1(1,0) = (2,0)$ $T_1(0,1) = (0,3)$

$T_1(1,1) = (2,3)$ $T_1(2,0) = (4,0)$

$T_1(0,2) = (0,6)$

☒ Lineal ☐ No lineal

Explicación: $T_1(2x, 3y)$

Es una transformación lineal porque es de la forma $T(ax+by, cx+dy)$ donde $a=2$, $b=0$, $c=0$, $d=3$

Figura 8: Fórmula general mal utilizada como argumento de linealidad

Finalmente queremos proponer las ideas planteadas aquí como una posible situación para analizar los planos verticales planteados a partir de las relaciones entre las génesis de ETM y el desarrollo del plano cognitivo basado en procesos de abstracción reflexiva.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education. Springer.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalsiu, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. A Variety of Studies from 1987 until 1995. En J.-L. Dorier (ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 85-124). The Netherlands: Kluwer Academic Press.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa II*, pp. 173-201.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del valle. (Traducido por Myriam Vega Restrepo).

Glasersfeld, E. von (1995). Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning. Recuperado de http://eric.ed.gov/

Kuzniak, A. & Richard, P. (en prensa). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Relime, número especial*. Recuperado de: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/Publications

Moreno, L., Hegedus, J. & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68 (2), 99-111.

Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive* 5, 67-93.

Ramírez, O., Romero, C. F. & Oktaç, A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez. & Y. Morales (Eds.), *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (pp. 537-547). República Dominicana.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13 (1), 89-112.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199–232.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. & Hillel, J. (1999). Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The Case of Linear Transformations, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(1), 7-41.

Soto, J. L., Romero, C. F. & Ibarra, S. E. (2012). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Québec, Canada: Loze-Dion éditeur.

TEMA 3.

GÉNESIS Y DESARROLLO DEL TRABAJO MATEMÁTICO: EL PAPEL DEL PROFESOR Y LAS INTERACCIONES

Inés Mª Gómez-Chacón, Universidad Complutense de Madrid, España

Isabel Romero, Universidad de Almería, España

José Carrillo, Universidad de Huelva, España

1. DESCRIPTOR INICIAL DEL TEMA

Este tercer tema se centra en el rol de los docentes y las interacciones en la creación de un ETM idóneo y de ETMs personales eficientes. En la clase, el profesor ajusta y equilibra la dinámica del ETM. Se tratará de dar respuesta a cómo gestionar las interacciones del trabajo matemático en el aula. Es un reto integrar de forma holística distintas dimensiones: cognitiva, didáctica, técnica, afectiva y cultural, en el análisis de estas interacciones y en la construcción del pensamiento matemático. De forma específica se reflexiona en la formación del profesorado y el rol de los formadores en este desarrollo. Propuestas desde diversas perspectivas en este tema pueden ayudar a una comprensión mayor del proceso de génesis poniendo simultáneamente en escena estudiantes y profesores.

2. CONTRIBUCIONES

En primer lugar, agradecemos la contribución de Iliada Elia, Universidad de Chipre, Josep Mª Fortuny, Universidad Autónoma de Barcelona y Asuman Oktac, Cinvestav, México, por las sugerencias y evaluaciones realizadas, que han supuesto un inestimable impulso en la fase preparatoria a la celebración del coloquio y apoyo a la coordinación.

Autores/Título	**Contenido matemático**	**Especificidades**
Philippe R. Richard, Michel Gagnon, Josep Maria Fortuny *Gestion interactive de problèmes en géométrie pour le développement des compétences des élèves et l'acquisition du savoir mathématique*	Resolucion de Problemas Geometría	Teoría ETM y otras Proyecto de Investigación
García López, Mª del Mar, Romero Albaladejo, Isabel Mª, Gómez-Chacón, Inés Mª *Actitudes matemáticas y trabajo geométrico*	Geometría	Teoría ETM, genesis Actitudes matemáticas Procesos de argumentación
Francisco Javier Olvera, Olimpia Figueras, Gregoria Guillén *Reelaboración del espacio de trabajo matemático de profesores de primaria sobre geometría de los sólidos*	Geometría	Teoría ETM Autoregulación desarrollo profesional Objetos mentales y procesos matemáticos

José Carrillo, Eric Flores-Medrano, Luis C. Contreras, Nuria Climent *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. Un modelo analítico para estudiar el conocimiento del profesor*	No centrado en un área específica Ejemplos variados	Modelo teórico Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Conocimiento del profesor
Diana Vasco y Nuria Climent *Análisis del conocimiento de un profesor de álgebra lineal bajo el enfoque del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)*	Algebra Lineal	Modelo teórico Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Conocimiento del profesor
Eric Flores, Dinazar I. Escudero, Miguel A. Montes, José Carrillo *Dos acercamientos para la caracterización del conocimiento que tiene un profesor acerca del aprendizaje en matemáticas*	No centrado en un área específica	Modelo teórico (MTSK) Categorías Pedagogical content knowledge Mathematical proficiency
Miquel Ferrer, Itziar García-Honrado y Josep Maria Fortuny *Valoración de la calidad de la enseñanza generada en la discusión en gran grupo de un problema de semejanza.*	Geometría	ETM-génesis Gestión de clase Modos de actuación docente
Constantino de la Fuente Martínez, Inés Mª Gómez Chacón , Abraham Arcavi *Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor y las interacciones en tareas de investigación matemática con estudiantes de Secundaria (16-18 años)*	Resolución de problemas Demostración	Design Research Tareas de Investigación
Antonio Codina Sánchez, Isabel Mª Romero Albaladejo *Espacios de Trabajo Matemático y Enseñanza Virtual, ¿una relación posible en la formación de maestros?*	Varias áreas Aritmética/ Geometría	Interacción entre ETM Evaluación
C. Miguel Ribeiro, Maria Cinta Muñoz-Catalán, Maria del Mar Liñán *Discutiendo el conocimiento matemático especializado del profesor de infantil como génesis de aprendizajes futuros*	Aritmética	Modelo teórico (MTSK).Conocimiento de la estructura matemática Maestro de Ed Infantil
Elizabeth Montoya-Delgadillo, Jaime Mena-Lorca, Arturo Mena-Lorca *La estabilidad epistemológica del profesor debutante en el Espacio de Trabajo Matemático*	Geometría/ Álgebra	ETM- Idóneo Circulación entre génesis
Monica Panero, Ferdinando Arzarello, Cristina Sabena *Practices of Italian teachers with the derivative concept : a problematic meeting of Algebra and Analysis in secondary school*	Álgebra / Análisis	Paradigmas ETM Teoría Antropológica de lo didáctico Gestión
Olimpia Figueras, Patricia Flores y François Pluvinage *Los ETM en la enseñanza de los ángulos*	Geometría	ETM
Miguel Delgado, Carlos Armando Cuevas, Magally Martinez *Un espacio de Trabajo matemático virtual en la formación inicial de profesores de matemáticas*		

HORIZONTES COMUNES

Las contribuciones a este tema no sólo han tenido como modelo teórico ETM, sino que han utilizado otros modelos teóricos de comprensión del conocimiento del profesor y del rol del profesor en el aula. De forma más específica, el modelo de ETM, tanto a nivel teórico como metodológico, se ha tenido en cuenta en ocho comunicaciones para el análisis de los modos de actuación del profesor, análisis de génesis del trabajo geométrico y en formas de gestión del aula. También se ha tomado en consideración en temáticas en las que anteriormente no se había utilizado. Estos temas se refieren al estudio de procesos de autorregulación y análisis de formas de trabajo (colaborativo, tareas de investigación, medio virtual).

El modelo teórico Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) ha sido utilizado para profundizar en el conocimiento de la estructura matemática y en el establecimiento de categorías del Pedagogical content knowledge. En las cuatro comunicaciones expuestas son de reseñar las ejemplificaciones realizadas a distintos niveles de enseñanza (universitario, secundaria e infantil) y la variedad de conocimientos matemáticos (Algebra Lineal, Aritmética, etc.).

Sólo una de las comunicaciones (Panadero et. al.) ha basado su reflexión en la complementariedad entre la Teoría Antropológica de lo didáctico y los ETM para el análisis de gestión didáctica.

Y finalmente, la aproximación teórica y metodológica de Design Research ha sido utilizada para el estudio del rol del profesor y las interacciones con los estudiantes en el tema de trabajo con ejemplos y contraejemplos en una demostración matemática en un proyecto de investigación matemática (PIM). Se ha tratado de dar respuesta a cuestiones referidas a la interacción profesor-estudiante, como la siguiente: ¿qué conocimiento matemático y sobre la enseñanza puede desarrollar en el profesor? Y, desde el análisis de las producciones de los estudiantes, ¿qué principios de intervención puede proporcionar el profesor para conseguir un espacio de trabajo matemático idóneo?

HORIZONTES TRANSVERSALES Y TEMAS ABIERTOS DE INVESTIGACIÓN

Cuestiones y líneas específicas

Como resultado de las contribuciones de los participantes en este tema, se identifican cuatro líneas de avance en la investigación:

- Profundización en la caracterización del ETM idóneo. En este sentido, algunos elementos de un ETM idóneo deben ser especificados (con respecto a quién/qué es apropiado, cómo se manifiesta y cómo se puede obtener información sobre él). ¿Posee el modelo ETM una naturaleza estática o dinámica en la mirada a una situación específica?
- Exploración del modelo ETM a través de la lente de episodios de clase (propósito, criterio de elección de los episodios; métodos de análisis;

implicaciones).

- Dialécticas entre diferentes entornos en el trabajo del profesor (ETM-MTSK): objeto de estudio en cada entorno; propósitos; concepciones en el papel del profesor, el conocimiento que él/ella posee / debe poseer / demuestra y el modo en que él/ella construye este conocimiento. Se sugiere que los planos verticales de ETM pueden ser útiles como punto de encuentro entre marcos.
- Compatibilidad del trabajo colaborativo con el modelo ETM. En torno al trabajo colectivo en la clase, se plantearon cuestiones como las siguientes: ¿es posible utilizar el marco de ETM para analizar el trabajo del grupo? ¿podemos considerar la existencia de un grupo ETM?

Algunas primeras conclusiones

Debido a la complejidad de las cuestiones que surgieron y a su naturaleza interrelacionada, el debate sobre ellas tuvo lugar de manera no lineal, y bastantes puntos no pudieron tratarse. Sin embargo, si se dio prioridad a la reflexión del rol del profesor en la articulación de los Espacios de Trabajo Matemático para el aula. Para el análisis del conocimiento del profesor, se intentó ver qué articulación se podría producir entre el modelo de ETM y el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, y entre los Espacios de Trabajo de Referencia, Idóneo y Personales.

A continuación se recogen algunas ideas producidas por el grupo y enlazadas entre sí, tanto de manera visual como discursiva.

Se partió del modelo (Fig. 1) planteado por Kuzniak (2011), donde se pone de manifiesto la articulación entre el plano epistemológico (la actividad en su dimensión puramente matemática) y el plano cognitivo con sus tres procesos cognitivos implicados en la actividad matemática.

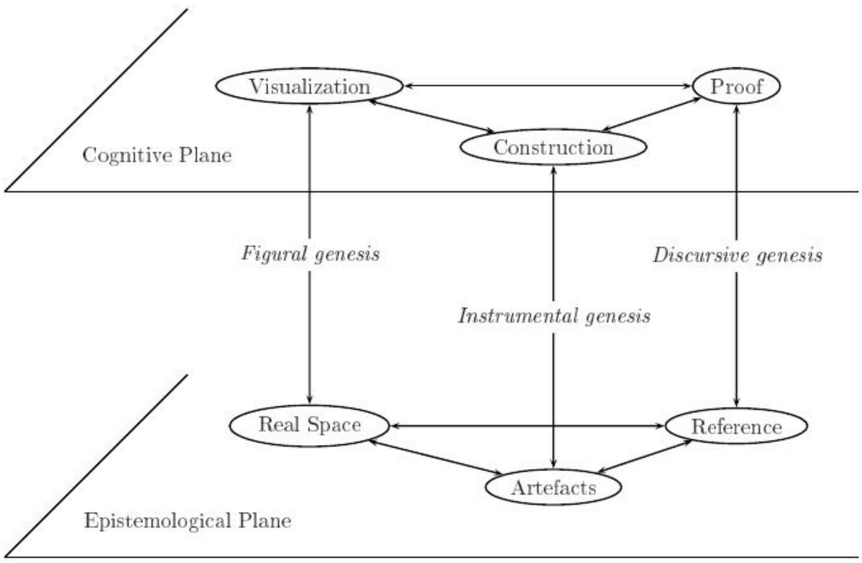


Figura 1: Diagrama de trabajo matemático: planos y génesis

La Figura 2 intenta expresar las ideas surgidas en el debate de manera cohesiva. Presenta la articulación que se podría producir en un análisis de episodio de clase entre el modelo de ETM y el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge.

Hacemos notar que se ha planteado una transformación del diagrama de la Figura 1, tomando la imagen de prismas (Figura 2) para mostrar la concepción de que la epistemología y los planos cognitivos son una herramienta analítica de procesos del trabajo matemático que actúan de manera integrada.

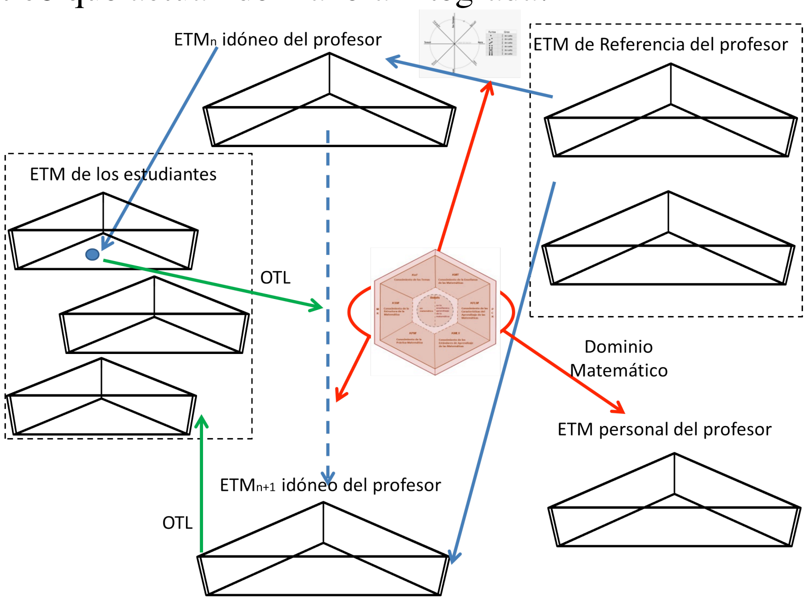


Figura 2: Integración de los modelos ETM y MTSK

Partimos de una situación didáctica que el profesor propone a sus alumnos en el entorno del aula. En este entorno, el ETM Personal del estudiante es parte de una compleja red compuesta por el ETM Personal de los miembros del aula, incluyendo a sus compañeros y al profesor. La situación inicial se puede ver como una oportunidad de aprendizaje que influye en el ETM Personal de cada estudiante de un cierto modo. Los estudiantes tienen ETM Personales con diferencias y puntos en común. El hecho de que compartan características comunes permite al profesor planificar para el conjunto, así como valorar en conjunto el resultado de una intervención. El hecho de que existan diferencias entre los sujetos implica la posibilidad de enriquecer los ETMs Personales de distintos modos. Por ejemplo, el profesor puede observar el bloqueo en el trabajo de algún estudiante y pedir a otro que no lo tenga que hable sobre ello; o él puede ver un buen potencial de génesis de un estudiante y pedirle que lo comparta con el resto. Además, los estudiantes que trabajan de forma colaborativa en parejas o en entornos virtuales influyen en el ETM Personal de sus compañeros. Las comunicaciones de García, Romero y Gómez-Chacón, y Codina y Romero ahondan largamente en las contribuciones que hacen a la evolución del trabajo matemático la interacción con el profesor y los compañeros, así como los factores actitudinales.

Así, desde la situación didáctica anterior, surgen significativas oportunidades de aprendizaje (OTL) mientras los estudiantes trabajan sobre ella en el aula. Es trabajo del profesor detectar estas oportunidades y conducirlas de manera productiva. Para ello, el profesor debe adaptar el ETM idóneo a las diferentes oportunidades cuando surgen (por ejemplo, introducir un nuevo recurso para salir de un bloqueo o un nuevo concepto para nombrar una idea que surge en el grupo). Para este propósito, el modelo ETM se presenta adecuado y presenta una naturaleza dinámica sobre la que debe reflejarse, no sólo al principio y final de la situación didáctica, sino también en la OTL particular que esta puede brindar en el entorno dado (se puede ver en la comunicación de Ferrer, García y Fortuny el desarrollo de estas ideas).

Por otro lado, el modo en el que profesor se puede beneficiar de la mencionada OTL depende del ETM de Referencia[36] del profesor (ver comunicaciones de Ribeiro, Muñoz y Liñán; Montoya, Mena y Mena; de la Fuente, Gómez-Chacón y Arcavi). En algunas contribuciones de este Tema 3, la debilidad del ETM de Referencia del profesor ha sido mostrada en diferentes temas matemáticos y diferentes niveles curriculares, tanto en profesores en formación como en servicio (ver comunicaciones de Figueras, Flores y Pluvinage; Olvera, Figueras y Guillén; Panero, Arzarello y Sabena). En la adaptación del ETM de Referencia al ETM Idóneo (en cada paso) el profesor pone en juego su conocimiento. Uno puede buscar este conocimiento usando el modelo MTSK (conocimiento especializdo del profesor de matemáticas) (ver comunicaciones de Carrillo, Flores, Contreras y Climent, Escudero Montes y Carrillo; Vasco y Climent; Ribeiro; Muñoz y Liñán). Hay una relación sólida entre el ETM Personal del profesor y su conocimiento matemático (MK, que es uno de los dominios de MTSK).

En síntesis, esta discusión ha puesto de manifiesto análisis y elementos a tener en cuenta en el rol del profesor en el diseño y gestión del ETM idóneo de la clase. El conocimiento del profesor desempeña un papel central en dichas tareas, de modo que modelos analíticos que pongan el foco en la especificidad de la matemática nos ayudarán a comprender cómo se configura dicho ETM idóneo. En el análisis de los episodios discutidos, el modelo MTSK ha servido como una herramienta para comprender el conocimiento del profesor que sustenta sus acciones y explicar en gran parte acciones que conlleva el establecimiento del ETM idóneo del profesor.

[36] El ETM de Referencia ha sido considerado en un sentido amplio, desde el que parte del conocimiento matemático a los diferentes niveles institucionales hasta su concreción en la mente de una persona, es decir, el profesor.

TOPIC 3

GENESIS AND DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL WORK: THE ROLE OF THE TEACHER AND THE INTERACTIONS

Inés Mª Gómez-Chacón, Universidad Complutense de Madrid, Spain

Isabel Romero, Universidad de Almería, Spain

José Carrillo, Universidad de Huelva, Spain

1. INITIAL DESCRIPTOR OF THE TOPIC 3

This third topic focuses on the role of teachers and interactions in the creation of an Appropriate Mathematical Working Space and efficient Personal Mathematical Working Spaces in the classroom. The teacher adjusts and balances the dynamics of the MWS. We will try to answer to the question of how to manage the interactions of the mathematical work in the classroom. It is a challenge to holistically integrate different dimensions: cognitive, educational, technical, emotional and cultural, in the analysis of these interactions and the construction of mathematical thinking. Specifically, we reflect on teacher training and the role of trainers in this development. Proposals from various perspectives on this issue can help to further understand the genesis process, putting in scene students and teachers simultaneously.

2. CONTRIBUTIONS

First of all, we would like to thank Iliada Elia, University of Chipre, Josep Mª Fortuny, Universidad Autónoma de Barcelona, and Asuman Oktac, Cinvestav, México, for their contribution. Their suggestions, assessments and support for the coordination of the preparatory phase of the Symposiun have given an invaluable boost to the colloquium.

Lecturer **Title**	**Mathematical topic**	**Especifics**
Philippe R. Richard, Michel Gagnon, Josep Maria Fortuny Gestion interactive de problèmes en géométrie pour le développement des compétences des élèves et l'acquisition du savoir mathématique	Problem solving Geometry	MWS theory and others Research project
García López, Mª del Mar, Romero Albaladejo, Isabel Mª, Gómez-Chacón, Inés Mª Actitudes matemáticas y trabajo geométrico	Geometry	MWS theory-genesis Mathematical attitudes Argumentation processes
Francisco Javier Olvera, Olimpia Figueras, Gregoria Guillén Reelaboración del espacio de trabajo matemático de	Geometry	MWS theory Self-regulation Professional

profesores de primaria sobre geometría de los sólidos		development Mental objects and mathematical processes
José Carrillo, Eric Flores-Medrano, Luis C. Contreras, Nuria Climent Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. Un modelo analítico para estudiar el conocimiento del profesor	No specific subject Varied examples	Theoretical model Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Teacher´s knowledge
Diana Vasco y Nuria Climent Análisis del conocimiento de un profesor de álgebra lineal bajo el enfoque del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK)	Linear Algebra	Theoretical model Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Teacher´s knowledge
Eric Flores, Dinazar I. Escudero, Miguel A. Montes, José Carrillo Dos acercamientos para la caracterización del conocimiento que tiene un profesor acerca del aprendizaje en matemáticas	No specific subject	Theoretical knowledge (MTSK) Pedagogical Content Knowledge Mathematical proficiency
Miquel Ferrer, Itziar García-Honrado y Josep Maria Fortuny Valoración de la calidad de la enseñanza generada en la discusión en gran grupo de un problema de semejanza.	Geometry	MWS theory-genesis Classroom management Modes of teaching performance
Constantino de la Fuente Martínez, Inés Mª Gómez Chacón, Abraham Arcavi Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor y las interacciones en tareas de investigación matemática con estudiantes de Secundaria (16-18 años)	Problem solving Demonstration	Design Research Research tasks
Antonio Codina Sánchez, Isabel Mª Romero Albaladejo Espacios de Trabajo Matemático y Enseñanza Virtual, ¿una relación posible en la formación de maestros?	Various subjects Arithmetic/ Geometry	Interaction among Mahtematical Working Spaces Assessment
C. Miguel Ribeiro, Maria Cinta Muñoz-Catalán, Maria del Mar Liñán Discutiendo el conocimiento matemático especializado del profesor de infantil como génesis de aprendizajes futuros	Arithmetic	Theoretical model (MTSK) Knowledge of Mathematical Structure Pre-school teacher
Elizabeth Montoya-Delgadillo, Jaime Mena-Lorca, Arturo Mena-Lorca La estabilidad epistemológica del profesor debutante en el Espacio de Trabajo Matemático	Geometry/Algebra	Appropriate MWS Circulation between genesis
Monica Panero, Ferdinando Arzarello, Cristina Sabena Practices of Italian teachers with the derivative concept :	Algebra / Análisis	MWS paradigms Anthropological

a problematic meeting of Algebra and Analysis in secondary school		theory of the didactic Management
Olimpia Figueras, Patricia Flores y François Pluvinage Los ETM en la enseñanza de los ángulos	Geometry	MWS theory
Miguel Delgado, Carlos Armando Cuevas, Magally Martinez Un espacio de Trabajo matemático virtual en la formación inicial de profesores de matemáticas		

3. COMMON HORIZONS

The contributions to this topic not only have MWS as a theoretical model, but they have used other theoretical models for understanding teachers' knowledge and the role of the teacher in the classroom. More specifically, the MWS model, both at the theoretical and methodological level, has been taken into account in eight communications for the analysis of the teacher´s modes of action, genesis of GWS and classroom management. It has also been considered in topics in which it had not been used before. These issues relate to the study of processes of self-regulation and the analysis of modes of mathematical work (collaborative, research assignments, virtual environments).

The theoretical model Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK) has been used to deepen the understanding of the mathematical structure and the categorization of pedagogical content knowledge. In the four communications presented, we highlight the instantiations performed at different levels (university, secondary and pre-school), as well as the variety of mathematical topics (Linear Algebra, Arithmetic, etc.).

Only one submission (Panadero et. Al.) has based its reflection on the complementarity between the Anthropological Theory of Didactical and MWS for the analysis of classroom management.

Finally, the theoretical and methodological approach of Design Research has been used to study the role of teacher and interactions with students on the topic of working with examples and counterexamples in mathematical demostration in a mathematical research project (MRP). We have tried to answer questions regarding the teacher-student interaction, such as: what mathematical knowledge and knowledge about teaching can the teacher develop? And, from the analysis of students´ productions, which principles for intervention can the teacher provide in order to achieve an Appropriate MWS?

4. CROSS HORIZONS AND OPEN RESEARCH ISSUES

4.1. Issues and lines of inquiry

From the contributions of the participants in this topic, four lines of inquiry were identified:

- Further characterization of the Appropriate MWS. In this sense, some of the elements of the Appropriate MWS need to be specified (with respect to who/what is it appropriate; how is it manifested, and how can we obtain information about it). Does the MWS model have a static or a dynamic nature in looking at a specific situation?
- Exploration of the MWS model through the lens of classroom episodes (purpose; criteria for choosing the episodes; methods of analysis; implications)
- Dialectics between different frameworks on the work of the teacher (MWS-MTSK): object of study for each framework; purposes; conceptions on the role of the teacher, the knowledge he/she possesses /should possess / puts into play, the way he/she constructs this knowledge. It is suggested that vertical planes of MWS can serve as a meeting point between frameworks.
- Compatibility of collaborative work with the MWS model. Some questions arose around collective work in the classroom: is it possible to use the MWS framework to analyze group work? Can we consider the existence of a Group MWS?

4.2. Some preliminary conclusions

Due to the complexity of the questions that arouse and their interrelated nature, the discussion around them took place in a non-linear way, and many points could not be addressed. However, the reflection on the teacher's role in articulating Mathematical Working Spaces for the classroom was prioritized. For the analysis of the teachers' knowledge, we attempted to see which could be an articulation between the MWS model and the Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge (MTSK) model, as well as between Reference, Appropriate and Personal Working Spaces.

Following, we present some of the ideas advanced within the group, linked together, both visually and discursively.

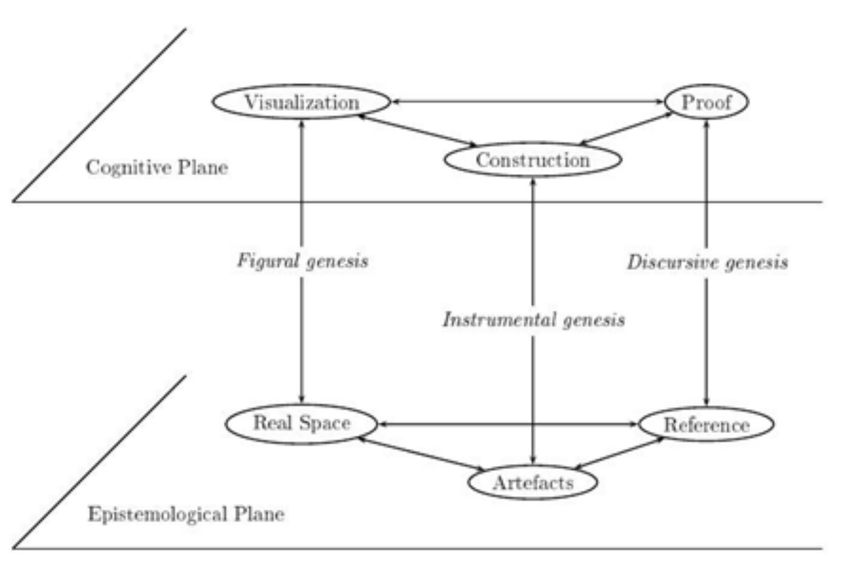


Figure 1: Diagram of Mathematical Work: planes and genesis

The starting point was Kuzniak´s model (2011) (Fig. 1), that shows the articulation between the epistemological plane (the activity in its purely mathematical dimension) and the cognitive plane, with the three cognitive processes that are implied in the mathematical activity.

Figure 2 tries to explain the ideas arisen in the debate in a cohesive way. It presents a possible articulation between MWS and MTSK models for the analysis of a classroom episode. We highlight a transformation from the diagram of Figure 1, using the image of reduced prisms (Figure 2) to illustrate the conception that the epistemological and cognitive planes are an analytical device for the processes of mathematical work that act in an integrated manner.

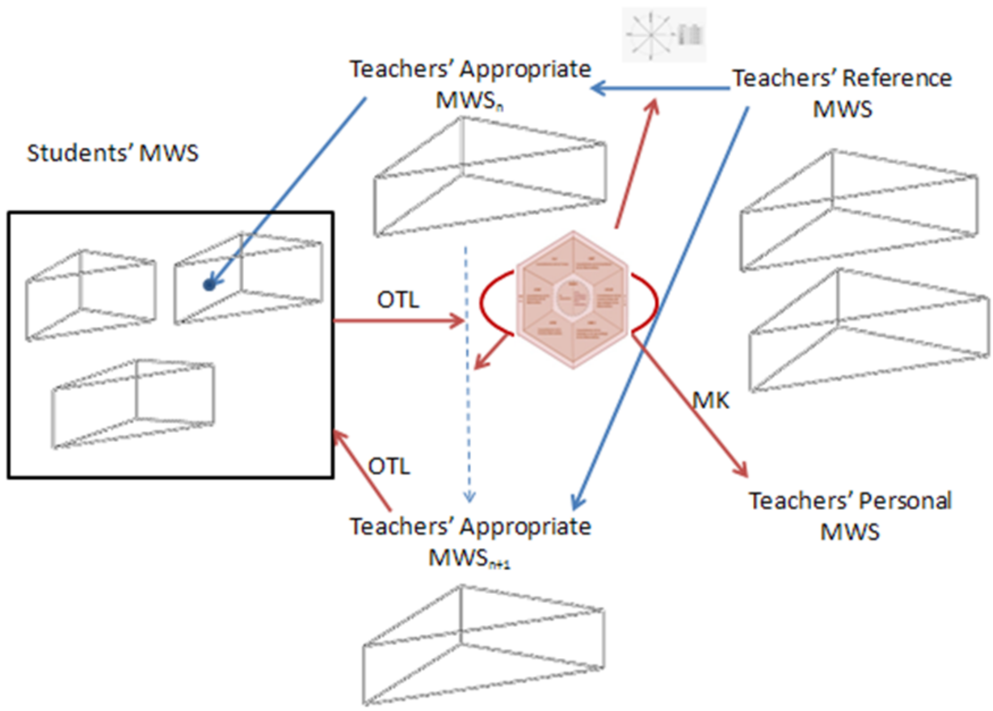


Figure 2: Integration of MWS and MTSK models

We depart from a didactical situation that a teacher proposes to his/her students in a classroom setting. In such a setting, a student´s Personal MWS is part of a complex network composed by the associated Personal MWSs of the classroom members, including the student's mates and the teacher. The initial situation can be seen as a learning opportunity that will influence each student's Personal MWS in a certain way. The students have Personal MWSs with differences and commonalities. The fact that they share commonalities allows the teacher to plan for the whole, as well as to globally assess the results of an intervention. The fact that there are differences among subjects implies the possibility of enriching Personal MWSs in various ways. For example, the teacher can observe a blockage in the work of some students and ask other students who don´t have it to discuss about it; or he/she may see a good potential in the particular genesis of a student and ask him/her to share with the rest. Also, students working collaboratively in pairs or in virtual environments influence the personal MWSs of their mates. The communications by García, Romero and Gómez-Chacón, and by Codina and Romero delve into the contributions of the interaction with the teacher and the mates, and of attitudinal factors, to the development of mathematical work.

From the former didactical situation, a number of opportunities to learn (OTL) arise while students work on it in a classroom. It is the role of the teacher to detect these opportunities and to manage them in a productive way. In order to do so, the teacher needs to adapt the Appropriate MWS to the different learning opportunities as they arise (for example, introducing a new resource to step out of a blockage or a new concept to name an idea that arises in the group). Therefore, the Appropriate MWS has a dynamic nature and needs to be reflected upon, not only at the beginning and end of a didactical situation, but also at the particular OTL that this situation may bring at a given setting. The development of these ideas can be seen at the communication by Ferrer, García and Fortuny.

On the other hand, the way a teacher takes profit of the above mentioned OTL depends on the teacher´s Reference MWS[37] (see the communications by Ribeiro, Muñoz and Liñán; Montoya, Mena and Mena; de la Fuente, Gómez-Chacón and Arcavi). In some of the papers of this Topic 3, the weakness of teachers´ Reference MWS was shown for different mathematical topics and at different curricular levels, both in pre-service and in-service teachers (see the communications by Figueras, Flores and Pluvinage; Olvera, Figueras and Guillén; Panero, Arzarello and Sabena). In the adaptation of the Reference MWS into the Appropriate MWS (at any step) a teacher puts his/her knowledge into play. One can look at this knowledge using the MTSK (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge) model (see the communications by Carrillo, Flores, Contreras and Climent; Flores, Escudero, Montes and Carrillo; Vasco and Climent; Ribeiro, Muñoz and Liñán). There is a solid relationship between a teacher's personal MWS and his/her mathematical knowledge (MK, which is one of the domains of MTSK).

In summary, this discussion has revealed some analysis and elements to be considered in the teacher's role in the design and management of the Appropriate MWS in the classroom. Teacher´s knowledge plays a central role in these tasks; therefore analytical models that put the focus on the specificity of mathematics will help us to understand how this Appropriate MWS is configured. In the analysis of the discussed episodes, the MTSK model has served as a tool to understand the teacher's knowledge underlying their actions and to largely explain actions involved in the establishment of the teacher´s Appropriate MWS.

[37] The Reference MWS has been considered in a wide sense, from that coming from mathematical knowledge and from various institutional levels, to its concretization in the mind of a person, namely, the teacher.

THEME 3 :

GENESE ET DEVELOPPEMENT DU TRAVAIL MATHEMATIQUE: ROLE DE L'ENSEIGNANT, DU FORMATEUR ET DES INTERACTIONS

Inés Mª Gómez-Chacón, Universidad Complutense de Madrid, Espagne

Isabel Romero, Universidad de Almería, Espagne

José Carrillo, Universidad de Huelva, Espagne

1. DESCRIPTEUR INITIAL DU THEME 3

Ce nouveau thème questionnera notamment le rôle des enseignants et des interactions lors du façonnage d'un ETM idoine certes cohérent mais aussi efficace. Comment se gèrent les interactions autour du travail mathématique dans les classes? Cela peut être fait de façon

holistique en intégrant différents points de vue (cognitif, pédagogique, affects, culturel). En classe, ces interactions entre professeurs et élèvent induisent un équilibrage dynamique des ETM. Le rôle de la formation des enseignants et des formateurs sera discuté. Naturellement, les études proposées sur ce thème pourront proposer d'autres manières de décrire ce processus de genèse mettant en scène élèves et professeurs.

2. CONTRIBUTIONS

Tout d'abord, nous remercions Iliada Elia, Université de Chypre, Josep Maria Fortuny, Université Autonoma de Barcelone et Asuman Oktac, CINVESTAV de Mexique pour leur évaluations et suggestions dans la phase préparatoire du Symposium.

Auteurs and Titre	**Thème mathématique**	**Particularités**
Philippe R. Richard, Michel Gagnon, Josep Maria Fortuny Gestion interactive de problèmes en géométrie pour le développement des compétences des élèves et l'acquisition du savoir mathématique	Résolution de problèmes Géométrie	Modèle des ETM et lien avec d'autres théories Projet de recherche
García López, Mª del Mar, Romero Albaladejo, Isabel Mª, Gómez-Chacón, Inés Mª Actitudes matemáticas y trabajo geométrico	Géométrie	Modèle des ETM Genèses, Attitudes mathématiques, Processus de raisonnement
Francisco Javier Olvera, Olimpia Figueras, Gregoria Guillén	Géométrie	Modèles des ETM Développement

Reelaboración del espacio de trabajo matemático de profesores de primaria sobre geometría de los sólidos		professionnel Objets mentaux et processus mathématiques Autorégulation
José Carrillo, Eric Flores-Medrano, Luis C. Contreras, Nuria Climent Mathematics Teachers Specialised Knowledge Un modelo analítico para estudiar el conocimiento del profesor	Non axée sur un domaine spécifique Des exemples variés	Modèle théorique utilisé: Mathematics Teachers Specialised Knowledge (MTSK) Connaissances des enseignants
Diana Vasco y Nuria Climent Análisis del conocimiento de un profesor de álgebra lineal bajo el enfoque del Mathematics Teachers Specialised Knowledge (MTSK)	Algèbre linéaire	Modèle théorique: Mathematics Teachers Specialised Knowledge (MTSK) Connaissances des enseignants
Eric Flores, Dinazar I. Escudero, Miguel A. Montes, José Carrillo Dos acercamientos para la caracterización del conocimiento que tiene un profesor acerca del aprendizaje en matemáticas	Non axée sur un domaine spécifique	Modèle théorique (MTSK) Catégories Pedagogical content knowledge Mathematical proficiency
Miquel Ferrer, Itziar García-Honrado y Josep Maria Fortuny Valoración de la calidad de la enseñanza generada en la discusión en gran grupo de un problema de semejanza.	Géométrie	Théorie ETM -genèses Gestion de classe Modes d'action du professeur
Constantino de la Fuente Martínez, Inés Mª Gómez Chacón, Abraham Arcavi Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor y las interacciones en tareas de investigación matemática con estudiantes de Secundaria (16-18 años)	Résolution des problèmes Preuve	Design Research Tâches de recherche
Antonio Codina Sánchez, Isabel Mª Romero Albaladejo Espacios de Trabajo Matemático y Enseñanza Virtual, ¿una relación posible en la formación de maestros?	Plusieurs domaines Arithmétique / Géométrie	Théorie ETM Interaction Évaluation
C. Miguel Ribeiro, Maria Cinta Muñoz-Catalán, Maria del Mar Liñán Discutiendo el conocimiento matemático especializado del profesor de infantil como génesis de aprendizajes futuros	Arithmétique	Modèle théorique: (MTSK) La connaissance de la structure mathématique Maître de l'éducation préscolaire
Elizabeth Montoya-Delgadillo, Jaime Mena-Lorca,	Géométrie /	ETM- Idoine

Arturo Mena-Lorca La estabilidad epistemológica del profesor debutante en el Espacio de Trabajo Matemático	Algèbre	Circulation entre les genèses
Monica Panero, Ferdinando Arzarello, Cristina Sabena Practices of Italian teachers with the derivative concept : a problematic meeting of Algebra and Analysis in secondary school	Algèbre / Analyse	Théorie ETM Théorie anthropologique de la didactique Gestion
Olimpia Figueras, Patricia Flores y François Pluvinage Los ETM en la enseñanza de los ángulos	Géométrie	Théorie ETM
Miguel Delgado, Carlos Armando Cuevas, Magally Martinez Un espacio de Trabajo matemático virtual en la formación inicial de profesores de matemáticas		

3. HORIZONS COMMUNS

Dans les contributions pour ce thème, le modèle des ETM n'a pas été le seul à être considéré et il a été utilisé et mis en perspective avec d'autres modèles théoriques visant la compréhension des connaissances des enseignants et l'étude du rôle de l'enseignant dans la salle de classe. Plus précisément, huit communications ont utilisé les ETM comme modèle théorique et méthodologique pour l'analyse des modes d'action de l'enseignant, l'analyse des genèses du travail géométrique et la gestion de classe. En particulier, il a été pris en compte dans l'étude des processus mathématiques et des processus d'autorégulation ainsi que dans l'analyse et l'identification de certaines formes de travail (travaux de recherche, formes collaboratives, usage des environnements virtuels).

Le modèle théorique *Mathematics Teachers Specialised Knowledge* (MTSK) a été utilisé pour approfondir la compréhension de la structure mathématique et de certaines catégories du *Pedagogical Content knowledge*. Dans les quatre communications qui ont utilisé ce cadre, les exemples présentés l'ont été à différents niveaux d'enseignement (Universitaire, Secondaire et de Primaire) et ont porté sur enseignement des connaissances mathématiques variées (Algèbre linéaire, Arithmétique, etc.).

Une seule contribution (Panadero et al.,.) a fondé sa réflexion sur la complémentarité entre la Théorie Anthropologique du Didactique et le Modèle des ETM pour l'analyse de gestion de la classe.

Enfin, l'approche théorique et méthodologique du Design Research a été utilisée pour étudier le rôle de l'enseignant et les interactions avec les élèves sur le thème des exemples et des contre-exemples dans une preuve mathématique dans le projet de recherche mathématique (PIM) (De la Fuente et Gómez-Chacón). Les auteurs ont essayé de comprendre l'interaction entre l'enseignant et des étudiants à partir de questions comme celle-ci : Quelles connaissances mathématiques se développent favorablement grâce à l'interaction du professeur avec les élèves? Puis, à partir des analyses des productions des étudiants, ils ont étudié la question : Quels principes donner à l'enseignant pour que son intervention favorise la réussite un espace travail mathématique approprié?

3. HORIZONS TRANSVERSAUX ET QUESTIONS DE RECHERCHE OUVERTES

Questions et orientations spécifiques

Dans les contributions des participants à ce thème 3, quatre lignes de recherches ont été identifiées :

- Approfondir la compréhension de la natures des ETM idoines. Pour cela, définir doivent les éléments être spécifiés : par rapport à qui est-il approprié ? Comment cela se manifeste-t-il et quelles informations donner et observations faire sur ce sujet? Le modèle d' ETM a-t-il une nature statique ou dynamique pour l'analyse d'une situation spécifique ? Comment rendre compte de cette dynamique quand elle existe?
- Exploration des ETM à travers l'observation d'épisodes de classe : objectifs, critères de choix des épisodes, méthodes d'analyse, conséquences...
- La dialectique entre différentes approches théoriques sur les travaux du professeur (ETM-MTSK) : objets d'études propres à chaque cadre; conceptions sur le rôle de l'enseignant, sur les connaissances du professeur ; comment les utilise-t-il ; utiliser les plans verticaux du diagramme des ETM comme un point de rencontre entre les cadres.
- Comment concevoir le travail collaboratif dans classe dans la perspective des ETM. En relation avec cette question du travail collectif dans une classe, diverses questions ont été soulevées : Est-il possible d'utiliser le cadre d'ETM pour l'analyse du travail de groupe ? Peut-on considérer l'existence d'un ETM personnel collectif dans le cas d'une classe?

4. QUELQUES CONCLUSIONS

En raison de la complexité et des connexions entre les questions soulevées, la discussion a eu lieu de manière non linéaire et de nombreux points n'ont pu être traités.

La priorité a été donnée à la réflexion sur l'articulation entre le modèle des ETM et celui du Mathematics Teacher's Specialised Knowledge pour l'analyse des connaissances des enseignants. Il a notamment été tenté de voir ce qui pourrait être produit par l'usage conjoint de ces deux modèles. De même, quelle est l'articulation qui se produit entre les espaces de travail de référence, idoines et personnels ?

Voici décrites quelques idées produites par le groupe et appuyées visuellement sur des diagrammes.

Le modèle de départ (Fig. 1) a été celui des ETM proposé par Kuzniak (2011) où est montrée l'articulation entre le niveau épistémologique (l'activité dans sa dimension purement mathématique) et le niveau cognitif avec les trois processus cognitifs impliqués dans l'activité mathématique.

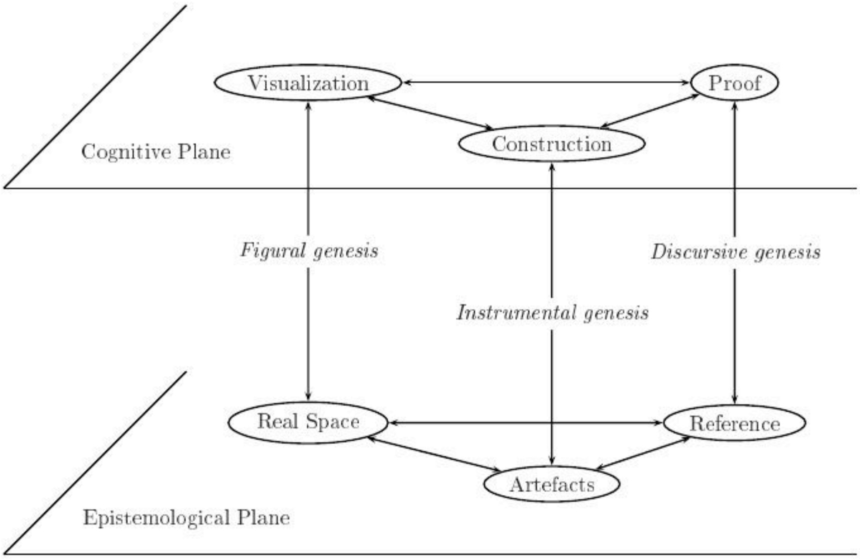


Figure 1: Diagramme de plans et genèse de travail mathématiques

La Figure 2 essaie d'exprimer de façon cohérente ce que pourrait être une analyse d'un épisode de classe utilisant à la fois le modèle des ETM et le modèle des Mathematics Teacher's Specialised Knowledge.

Dans la Figure 2, nous avons introduit des prismes pour symboliser la Figure 1 et nous avons essayé de développer l'idée que les plans cognitifs et épistémologiques donne un outil pour l'analyse des différents processus à l'oeuvre dans le travail mathématique.

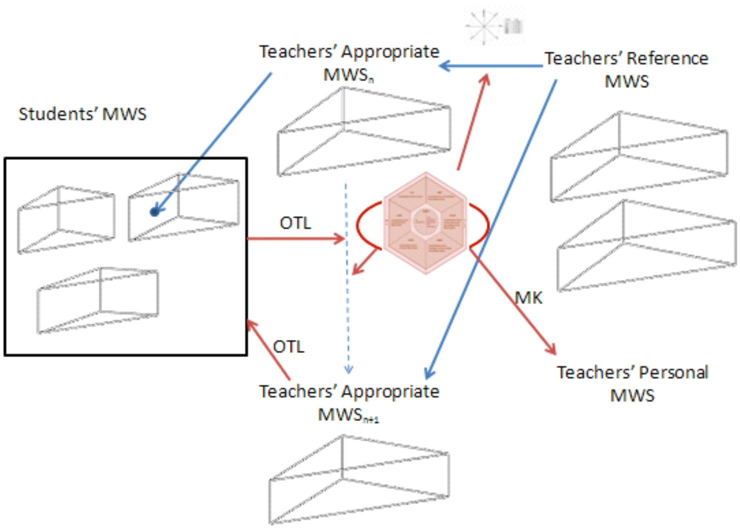


Figure 2: L'intégration des deux modèles ETM et MKT

Nous partons d'une situation didactique d'enseignement que l'enseignant donne à ses élèves. Dans la salle de classe, les ETM personnels des élèves font partie d'un réseau complexe composé des ETM personnels de chacun des membres de la classe, élèves et professeur y compris.

La situation initiale peut être considérée comme une occasion d'apprentissage qui influe sur l'ETM personnel de chaque élève d'une certaine manière. Les étudiants ont des ETM personnel différents avec certains points communs. Ces caractéristiques communes permettent à l'enseignant de planifier sa mise en commun en valorisant l'apport de chacun. Le fait qu'il existe des différences entre les élèves implique la possibilité d'enrichir les ETM personnels de différentes manières. Par exemple, l'enseignant peut identifier un blocage dans le travail d'un étudiant et demander à un autre élève n'ayant pas eu cette difficulté d'échanger avec le premier 'élève ; ou il peut encore identifier un potentiel de bonne réponse chez un élève et lui demander de partager son idée avec le reste de la classe.

En outre, les étudiants qui travaillent en binômes et dans des environnements virtuels peuvent influencer les ETM personnels de leurs pairs (les communications de García Romero y Gómez-Chacón, Codina y Romero approfondissent longuement cet aspect). L' étude de García, Romero et Gómez-Chacón explore le comportement des élèves du secondaire dans l'espace de travail de géométrique. Dans les transitions qui se produisent entre la genèse instrumentale et discursive, elles soulignent les apports des attitudes du professeur pour le développement de l'interaction dans travail mathématique.

La situation didactique précédente donne des occasions propices d'apprentissage (OPL) quand les élèves sont mis au travail sur cette situation dans la classe. Le travail de l'enseignant est de détecter ces opportunités et les conduire de façon productive. Pour ce faire, l'enseignant doit développer des ETM appropriées aux différentes opportunités qui se présentent comme introduire une nouvelle ressource pour sortir d'un blocage ou de la difficulté de nommer un nouveau concept issu des travaux produits par le groupe.

Pour cela, le modèle de ETM est bien adapté et il offre un caractère dynamique qui se refléte non seulement au début et à la fin de la situation de l'enseignement, mais aussi dans une OPL particulière comme on peut le voir dans la communication de Ferrer, García y Fortuny.

La manière dont l'enseignant peut utiliser une OPL dépend de l'ETM de Référence[38] de l'enseignant (rvoir les communications de Ribeiro, Muñoz and Liñán; Montoya, Mena and Mena; de la Fuente, Gómez-Chacón and Arcavi). Dans certaines contributions du Thème 3, la faiblesse de l'ETM de référence de l'enseignant a pu été montré sur différents thèmes mathématiques et dans différents niveaux scolaires et

[38] Le ETM référence a été considéré dans un sens large, dont une partie de la connaissance mathématique à différents niveaux institutionnels jusqu'à ce que sa réalisation dans l'esprit pièces d'une personne, ce est à dire l'enseignant par example.

aussi dans la formation d'enseignants (étudiant-professeur et aussi professeur en exercice) (Figueras, Flores et Pluvinage; Olvera, Figueras et Guillén; Panero, Arzarello et Sabena).

En s'appuyant sur son ETM de Référence pour développer l'ETM idoine, l'enseignant met en jeu sa connaissance. Nous pouvons essayer d'identifier ces connaissances en utilisant le modèle MTSK (connaissance spécifique du professeur de mathématiques) (Carrillo, Flores, Contreras y Climent, Escudero Montes y Carrillo; Vasco y Climent; Ribeiro; Muñoz y Liñán). Il existe une forte relation entre l'ETM Personnel de l'enseignant et ses connaissances mathématiques (MK, qui est l'un des domaines de MTSK).

En résumé, cette discussion a donné des éléments à prendre en compte pour l'analyse du rôle de l'enseignant dans la conception et la gestion de l'ETM idoine de la classe. Les connaissances du professeur jouent un rôle central dans ces questions et il est nécessaire de disposer de modèles pour comprendre comment est configuré l'ETM idoine Dans l'analyse des épisodes présentés, le modèle de MTSK a servi comme un outil pour comprendre les connaissances de l'enseignant mises en œuvre dans son action d'enseignement et qui participent de la mise en place d'un ETM idoine par le professeur

PROCESOS DE ARGUMENTACIÓN DE ESTUDIANTES DE SECUNDARIA: INFLUENCIAS COGNITIVAS Y ACTITUDINALES

García López, Mª del Mar, Universidad de Almería

Romero Albaladejo, Isabel, Universidad de Almería

Gómez-Chacón, Inés Mª, Universidad Complutense de Madrid

Este estudio profundiza en el comportamiento de estudiantes de Secundaria (14-15 años) en el espacio de trabajo geométrico, en las transiciones que se producen ente las génesis instrumental y discursiva. Mediante un estudio a nivel macro y a nivel micro, se indaga en las contribuciones que hacen a la evolución del trabajo matemático la interacción con el profesor y los compañeros, así como los factores actitudinales, al trabajar con Sistemas de Geometría Dinámica. Los resultados muestran que los estudiantes desarrollan su dimensión actitudinal y volitiva que les permite un desarrollo intelectualmente más autónomo en matemáticas, así como una interacción con el contexto que influye en las oportunidades de aprendizaje de los procesos de argumentación y prueba, tanto para el alumno como para el profesor.

Palabras clave*: Geometría, Espacio de Trabajo Matemático, GeoGebra, Actitudes Matemáticas, Procesos de argumentación, Secundaria*

INTRODUCCIÓN

El presente estudio está motivado por una serie de fenómenos de aprendizaje reiteradamente producidos en el trabajo con Geometría elemental, en el paso de la Geometría Natural (o Geometría I) a la Geometría Axiomática Natural (o Geometría II), en situaciones naturales en Secundaria (12 a 16 años). Como han reseñado distintos autores al analizar los curricula y manuales de Secundaria (De la Torre y Pérez, 2008; Kuzniak, 2010; Tanguay, 2014), para que los estudiantes adquieran los procesos de demostración, no basta con presentar demostraciones aisladas o una Geometría II fragmentada, a través de "islotes deductivos" (Kuzniak, 2010).

En el contexto de España, De la Torre y Pérez ponen de manifiesto que la geometría programada institucionalmente para Secundaria propugna un paso de la Geometría I a la Geometría II que no está suficientemente articulado. Asimismo, estudios realizados en formación de profesores de Secundaria constatan el carácter incompleto del ciclo de trabajo geométrico del alumnado (Gómez-Chacón y Kuzniak, 2013). Para dominar todo el ciclo de razonamiento, los estudiantes deben dominar al mismo tiempo las técnicas aplicadas en tres génesis -figurativa, instrumental y discursiva- y mostrar un grado de flexibilidad cognitiva en el uso de diferentes facetas del trabajo geométrico.

Con base en estos resultados, se planteó un experimento de enseñanza destinado a investigar el papel que juegan los Software de Geometría Dinámica (SGD), en concreto GeoGebra, en propiciar la transición de la génesis figural a la discursiva en alumnado de Secundaria. Profundizamos en el comportamiento de estudiantes de 14-15 años en el plano 2 (Ins-Dis) de trabajo geométrico, asociado a una génesis instrumental y discursiva. Para ello se ha realizado un estudio a nivel macro y nivel micro de lo acaecido en dos aulas de matemáticas en un instituto de Secundaria público. Se tratará de ver las contribuciones que tienen en el éxito de los estudiantes la interacción con la profesora y los compañeros, junto con las transformaciones a nivel actitudinal que se producen por la introducción de GeoGebra en el aula.

De forma general, podemos afirmar que la introducción de GeoGebra en el aula produjo transformaciones en el ETG de los alumnos, así como en sus actitudes y en el clima de aula. En consonancia con lo que reseñan estudios precedentes con respecto al papel que juegan los SGD en el plano 3 de los ETG (Coutat, 2006; Coutat & Richard, 2011), el análisis macro de las sesiones nos permite afirmar que la mayoría de alumnos (alrededor del 75%) avanzaron rápido con la instrumentalización y también consiguieron progresos notables con la instrumentación, de forma bastante autónoma. Se produjo así una evolución paulatina y con pocos obstáculos en la génesis instrumental que les permitió mejorar la génesis visual y fortalecer el Plano 3 (Ins-Fig). Asimismo, se corroboró la influencia positiva a nivel actitudinal que los SGD ejercen sobre el alumnado de estas edades, tanto en el fomento de su interés y predisposición, como en el desarrollo de sus actitudes matemáticas: perseverancia en las tareas, actitud inductiva, precisión y rigor (Gómez-Chacón, 2011; García, 2011). En nuestro caso, los alumnos trabajaron con gusto, al tiempo que iban adquiriendo autonomía, precisión, sistematicidad y confianza en sus habilidades. Ello les llevaba a perseverar en sus intentos de resolver las tareas, lo que incrementaba sus posibilidades de éxito, estableciéndose así un círculo virtuoso actitudinal-cognitivo.

Respecto al trabajo en el plano 2 (Ins-Dis), la influencia del software perdió protagonismo a favor de la interacción con la profesora y los compañeros en la realización de la génesis discursiva. Como veremos a lo largo del documento, las transiciones entre las génesis instrumental y discursiva suponen un proceso complejo que los estudiantes realizan a distintos ritmos y con distinto nivel de éxito. El papel del profesor es clave para orquestar estas transiciones y ajustar un ETG adecuado en el aula. En este sentido, el software puede constituir un apoyo importante, siempre que el profesor sea capaz de articular sus potencialidades a nivel instrumental y afectivo. En el terreno cognitivo, puede propiciar que los alumnos utilicen la instrumentación para enlazar convenientemente elementos figurales y discursivos. En el terreno afectivo, puede hacer uso de las actitudes favorables al trabajo matemático que el software propicia en el alumnado y que sostienen un proceso de una demanda cognitiva considerable para el alumnado de estas edades.

MARCO TEÓRICO

Dada la complejidad del tema, se abordaron una serie de consideraciones teóricas para establecer un marco interpretativo consistente: la integración de la tecnología en el trabajo geométrico, los procesos de argumentación y demostración y la dimensión emocional-actitudinal.

Pensamiento Geométrico: Génesis de razonamiento instrumental y discursivo

El marco de los Espacios de Trabajo Geométrico (ETG) (Houdement y Kuzniak, 2006 y Kuzniak, 2011), junto a la aproximación instrumental (Artigue, 2002), se han utilizado para describir la complejidad que implica la aplicación de la tecnología a las tareas geométricas.

La idea de la interacción de los estudiantes con la herramienta está basada en la teoría ergonómica de Rabardel (1995), donde son clave los conceptos de instrumento, esquema de acción y génesis instrumental. En el presente estudio, siguiendo a Artigue (2002), hacemos hincapié en la necesidad de la génesis instrumental que transforma el artefacto en instrumento en dos direcciones. En la primera dirección, la génesis instrumental se dirige hacia el artefacto, dotándolo progresivamente de potencialidades, y transformándolo eventualmente para las aplicaciones específicas; llamamos a esto la "instrumentalización" del artefacto. En la segunda dirección, la génesis instrumental se dirige hacia el sujeto, y conduce al desarrollo o a la apropiación de los esquemas de la acción instrumentada, los que progresivamente constituyen las técnicas que permiten una respuesta eficaz a las tareas dadas. Esto último es lo que propiamente se llama "instrumentación".

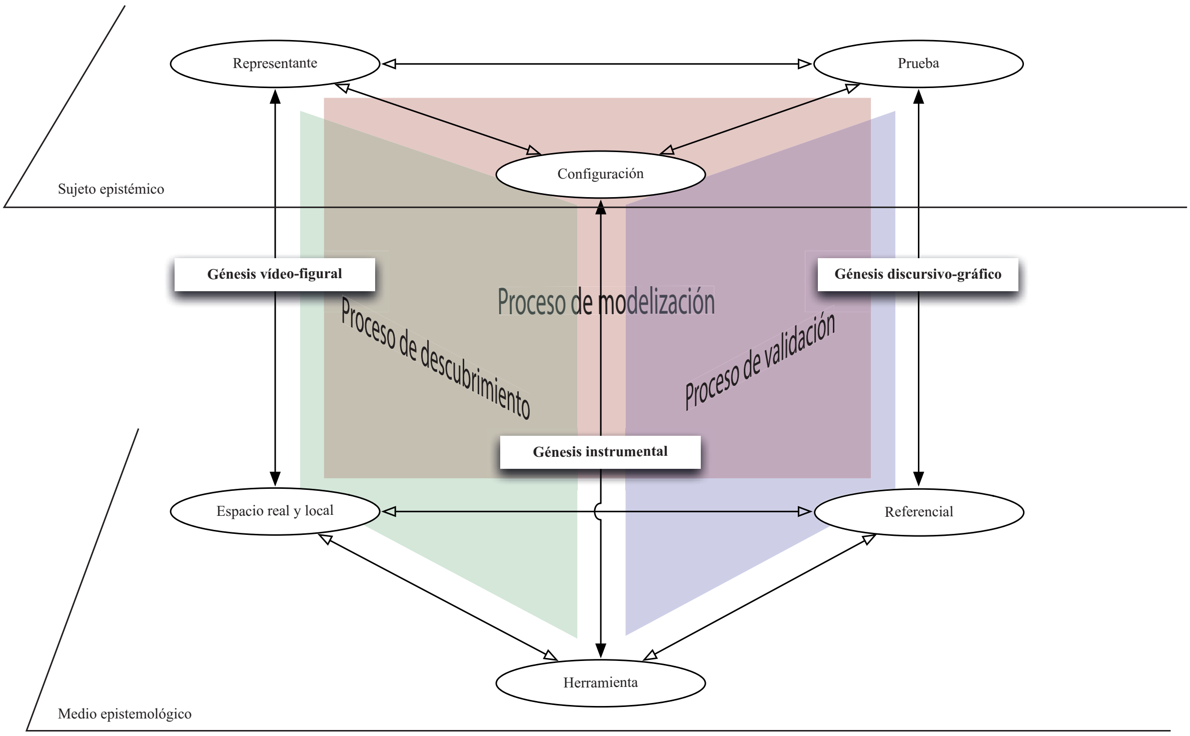


Figura 1: Espacio de trabajo geométrico, génesis y planos verticales en el ETM idóneo (Kuzniak y Richard, 2014)

Además, desde la perspectiva de enseñanza de nuestro estudio, hemos enriquecido este marco enfatizando dos funciones del lenguaje, la función referencial y la función de expansión discursiva (Duval, 1995). Entendemos la noción de expansión discursiva incluyendo la noción de inferencia figural [1] (Richard, 2004b) y el razonamiento discursivo-gráfico [2] que se desarrolla en las relaciones que se producen en un razonamiento instrumentado.

En el marco interpretativo que proponemos, una parte esencial se sustentará en el marco de ETM, dando lugar a un referente teórico para integrar el espacio de trabajo local y el espacio de trabajo personal de los estudiantes. Para el contexto específico de la Geometría en ambientes tecnológicos, Coutat y Richard (2011) caracterizaron los planos verticales del ETG idóneo, apoyándose en la idea de los procesos: validación, modelización y descubrimiento (Fig. 1). Estos procesos constituyen las manifestaciones de las competencias matemáticas del sujeto en el momento de su trabajo geométrico de descubrimiento, comunicación y razonamiento.

En nuestro estudio nos centraremos en el plano vertical asociado a las génesis instrumental y discursiva: Plano 2 (Ins-Dis). En este plano, el proceso matemático clave es la prueba o demostración basada en el experimento o en la argumentación deductiva pura. Si se sacan conclusiones a partir de datos proporcionados por los instrumentos, vamos a hablar de una prueba experimental. Será deductiva, si la demostración se basa en un referencial teórico y los instrumentos se utilizan para ilustrar o para construir configuraciones geométricas. Al hablar de prueba es pertinente señalar las características del tipo de prueba al que nos referimos, que ha sido utilizado como categorías en nuestro análisis. Hemos seguido la clasificación de Balacheff (1987, 2000) establecida desde una perspectiva en la que los procesos de prueba no se reducen a la elaboración de pruebas formales. El autor distingue diferentes tipos de pruebas que agrupa en dos clases: las pruebas pragmáticas y las pruebas intelectuales. Las primeras son aquellas que se basan en acciones efectivas que concretan o llevan a cabo el contenido de una proposición; cuando esto no es posible, entonces la validación sólo puede ser intelectual. La producción de pruebas intelectuales requiere la expresión lingüística de los objetos; el lenguaje representa un papel crucial en la transición de pruebas empíricas a pruebas intelectuales. En nuestro caso las categorías diferencian de demostraciones empíricas o inductivas, en las que consideramos:

- Empirismo naïf: Verificación en ejemplos cualesquiera.
- Experimento crucial: Verificación en un ejemplo “general” que permita descartar alguna conclusión alternativa.
- Ejemplo genérico: Justificación abstracta basada en un ejemplo representante de su clase.

Y las demostraciones deductivas, en las que se diferencia entre:

- Experimento mental: Demostración con la ayuda de un ejemplo.
- Cálculo sobre enunciados: Basada en manipulación o transformación de expresiones literales.
- Transformativa: Basada en operaciones de transformación de objetos y anticipación de resultados.
- Axiomática: Basada en los elementos del sistema axiomático.

Partimos del hecho, puesto de relieve por Tanguay (2005) y Tanguay y Geeraerts (2012), de que el paso de la argumentación a la demostración necesita de una verdadera "descentración" en el sentido piatgetiano, mediante la que el estudiante "«reconsidère la primauté de ce qui est en jeu, la validité des enchaînements devant prendre le pas sur la vérité des propositions sans toutefois l'occulter…» (Tanguay y Geeraerts, 2012, p. 9).

En el presente estudio trataremos de poner de relieve los factores (cognitivos, relacionales y actitudinales) en el proceso de concebir, transformar y utilizar el instrumento para el proceso demostrativo. Este proceso se desarrolla en términos de comportamiento y conocimiento. Buscamos precisar como los sujetos construyen los esquemas de uso de artefactos para la tarea a realizar.

Dimensión emocional-actitudinal y trabajo matemático

Consideramos que el afecto juega un papel importante en la conversión del artefacto (en nuestro caso SGD) en un instrumento matemático, ya que una actitud positiva o negativa hacia los ordenadores, por ejemplo, puede influir en cómo se desarrollan los esquemas cognitivos e instrumentales.

Este artículo forma parte de una serie de trabajos en los que se ha profundizado en las estructuras conceptuales subyacentes a los procesos de visualización o de modelización matemática en interacción con la dimensión emocional durante el uso de SGD en el aprendizaje matemático (Gómez-Chacón, 2011, 2012,y 2014; Gómez-Chacón y Escribano, 2014). A partir del estudio del Espacio de Trabajo Personal se han identificado distintas rutas afectivas-cognitivas productivas. En relación a la identificación emocional de los sujetos en este estudio considerarán dos aspectos: las actitudes y la dimensión de atmósfera emocional de la clase.

La razón para priorizar el tema de las actitudes es que, cuando nos centramos en la vivencia emocional de la materia por parte del estudiante, nos estamos refiriendo a un conjunto complejo de elementos emocionales: atribuciones de causalidad, autoconcepto matemático, actitudes y creencias en matemáticas, etc. La percepción de dificultad, el rechazo o el aprecio a las matemáticas serían algunos ejemplos de actitudes entendidas como predisposiciones evaluativas que condicionan al sujeto para percibir y reaccionar de un modo determinado. Sin embargo, en su actuación, un profesor debe diferenciar entre actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas Pensamos que es conveniente establecer esta diferencia, ya que el estímulo para la valoración de esta disciplina y el interés por el aprendizaje de la materia es muy diferente del cultivo del gusto y la preferencia en el modo de utilizar capacidades mentales importantes para el trabajo matemático.

En este artículo se ha adoptado la definición multidimensional de la actitud, en la que reconoce tres componentes: respuesta emocional, de creencias y de comportamiento hacia el objeto. Se denominará actitudes hacia la Matemática a la valoración y al aprecio de esta disciplina y al interés por esta materia y por su aprendizaje, y subrayan más la componente afectiva que la cognitiva; aquélla se manifiesta en términos de interés, satisfacción, curiosidad, valoración, etc. Y por actitudes matemáticas se entenderán aquellas que tienen un carácter marcadamente cognitivo y se refieren al modo de utilizar capacidades generales, como la flexibilidad de pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, etc., que son importantes en el trabajo en matemáticas (Gómez-Chacón, 2000 y 2011).

La razón de considerar la dimensión de atmósfera emocional de la clase, viene justificada por estudios previos sobre afecto y razonamiento (Gómez-Chacón, 2000), en los que se identificó la visualización geométrica y los procesos de argumentación como aspectos clave de esta interacción. El potencial de la ruta afectiva productiva demostró ser al menos parcialmente inherente al individuo, aunque también se puso fuertemente de manifiesto el efecto de las condiciones sociales y culturales, en las que la interacción estudiante-profesor es clave.

Coutat y Richard (2011), en uno de sus estudios sobre el rol de las figuras dinámicas en la adquisición de propiedades geométricas, ponen de manifiesto el enriquecimiento del concepto clásico "milieu" de Brousseau (1998) respecto a la centralidad de las interacciones sujeto-milieu (contexto) en un ambiente de SGD, destacando las componentes físicas (materiales) e intelectuales (Coutat y Richard (2011, p. 102). Desde esta perspectiva de un contexto tanto material como intelectual, la interacción sujeto – milieu se considera más allá de situaciones didácticas y es el sujeto quien propicia la evolución de su conocimiento.

En nuestro estudio partimos de esta concepción de contexto (milieu) donde la caracterización de la competencia afectiva de sujeto en ámbito de SGD se define como la capacidad que depende de una apropiada codificación de las estrategias de información-conocimiento y de las habilidades cognitivas e instrumentales (Gómez-Chacón, 2012: 60).

En la dimensión de atmosfera emocional de la clase consideramos clave los estados afectivos y las características afectivas de los sujetos. Los actos emocionales juegan un papel en el desarrollo y regeneración de las obligaciones y expectativas que regulan la actividad en cada situación durante la instrucción matemática. Se tendrá en cuenta cómo los estudiantes desarrollan su dimensión actitudinal y volitiva que les permite un desarrollo intelectualmente más autónomo en matemáticas, así como procesos en los cuales se constituyen el "milieu" (normas sociomatemáticas) que influyen en las oportunidades de aprendizaje de los procesos de argumentación y prueba, tanto para el alumno como para el profesor.

ESTUDIO

Este estudio se enmarca dentro de otro más global, formulado como un experimento de diseño y orientado a mejorar la práctica educativa. Se llevó a cabo en un instituto público de educación secundaria, en el que era profesora la primera autora de este artículo. En él se investigó la evolución de la competencia matemática y de las actitudes en estudiantes de Secundaria al trabajar contenidos geométricos con GeoGebra (García, 2011).

Para ello se diseñaron un total de 25 sesiones, distribuidas en dos secuencias. La primera estuvo dedicada al trabajo con Polígonos con lápiz, papel e instrumentos de dibujo tradicionales (13 sesiones). La segunda se dedicó al trabajo con Teselaciones del plano con GeoGebra (12 sesiones). En ambas secuencias, los alumnos trabajaron de forma colaborativa sobre tareas contextualizadas, concebidas para propiciar el paso de la Geometría I hacia la Geometría II. Alrededor de la mitad de las actividades de cada secuencia fueron diseñadas con el propósito de afianzar el plano 3 (Ins-Fig), mientras que el resto pretendía, a partir de esta base, trabajar los inicios de la génesis discursiva: plano 2 (Ins-Dis).

Participantes y métodos

El grupo de estudio estaba constituido por dos clases de 3º de ESO, con 24 y 22 estudiantes, respectivamente. Cada pareja de estudiantes contaba con un ordenador en el aula y trabajaba de forma colaborativa. Del total de alumnos, se seleccionó una muestra intencional de 12 (seis estudiantes de cada grupo-clase) para estudiarlos más en profundidad y, de éstos, se escogieron cinco alumnos para un estudio de casos. Los estudiantes de la muestra y del estudio de casos se seleccionaron tratando de cubrir los distintos perfiles actitudinales y cognitivos presentes en las dos clases. Se consideraron merecedores de especial interés aquellos estudiantes que mostraban inadecuadas algunas de las dos variables consideradas: rendimiento y actitudes, o ambas insuficientes, dado que se trataba de informar de la posible mejora de esta situación previa debida al uso de Geogebra. No obstante, también pareció conveniente seleccionar unos pocos estudiantes con un perfil previo adecuado, con el fin de describir en qué modo afectaba o influía el uso del software en estudiantes que no solían mostrar dificultades matemáticas.

Actitudes / Rendimiento	Inadecuadas	Adecuadas	Buenas
Insuficiente	A2, A3*, A7*, A9*	A5, A11	
Suficiente	A6	A1, A8*, A12	A10*
Bueno			A4

Tabla 1. Perfiles de los estudiantes de la muestra seleccionada y estudio de casos (*)

La evolución del alumnado a nivel cognitivo se analizó en términos del desarrollo de su competencia matemática, que incluía las competencias de Representar, Uso de Herramientas y Recursos y Argumentar-Demostrar. Las dos primeras están asociadas al plano 3 (Ins-Fig) y las dos últimas al plano 2 (Ins-Dis). Además, se estudió la evolución de las actitudes, tanto de las actitudes hacia la matemática (Bazán, 1997), como de las siguientes actitudes matemáticas: flexibilidad de pensamiento; espíritu crítico; perseverancia; precisión y rigor; creatividad;

autonomía; y sistematización (Gómez-Chacón, 2011).

En la siguiente tabla se exponen los instrumentos empleados para la recogida de información, atendiendo al conjunto de estudiantes y al tipo de información recogida sobre actitudes y competencias:

	Instrumentos	Actitudes	Competencias
Total de estudiantes	Cuestionarios "Actitud hacia las mates" y "Me Interesa tu Opinión"	✓	
	Diarios de la profesora grupales	✓	✓
	Entrevistas grupales	✓	✓
	Buzón de sugerencias	✓	✓
	Protocolos escritos de resolución de cada tarea		✓
	Archivos de Geogebra		✓
Muestra de doce estudiantes y Estudio de cinco casos	Cuestionarios "Actitud hacia las mates" y "Me Interesa tu Opinión"	✓	
	Diarios de la profesora individuales	✓	✓
	Buzón de sugerencias	✓	✓
	Parrillas de Observación	✓	✓
	Protocolos escritos de resolución de cada tarea		✓
	Archivos de Geogebra		✓
	Grabaciones de audio (solo para estudio de casos)	✓	✓

Tabla 2. Instrumentos triangulados por conjuntos de estudiantes para los análisis de actitudes y competencias

Los instrumentos expuestos en la Tabla 2 permitieron realizar un doble análisis: cuantitativo y cualitativo. Para el análisis cuantitativo realizado, de tipo estadístico, se usaron los software SPSS 15.0 y Excel. Dichos análisis se realizaron para las respuestas de todos los estudiantes a los cuestionarios y para los datos recogidos en las parrillas de observación de actitudes y competencias de los estudiantes pertenecientes a la muestra seleccionada. Para el análisis cualitativo de los datos se recurrió al software Atlas.ti 5.0, que facilitó la organización de la información para detectar categorías, elementos y procesos emergentes. Dicho software, específico para el análisis cualitativo de textos, imágenes, archivos de audio y vídeo, se empleó para los estudiantes pertenecientes al estudio de casos. Esta herramienta permitió integrar la información obtenida de los instrumentos empleados para la toma de datos, reconstruyendo así el desarrollo de las sesiones en las que los estudiantes realizaron las tareas con Geogebra. Una vez reconstruida cada tarea, éstas fueron codificadas por la primera autora, utilizando como códigos los indicadores incluidos en las parrillas de observación de actitudes y de competencias, junto con cuatro códigos relativos a los factores más influyentes para el desarrollo de actitudes y/o competencias de los estudiantes en cada segmento (GeoGebra, Interacción Alumno-Alumno, Interacción Alumno-Profesora y Tarea). La codificación fue contrastada por un experto en análisis cualitativo y manejo del software Atlas.ti.

Para el estudio micro se optó por análisis cualitativo de episodios de clase siguiendo el volcado (Tabla 3 y 4) y las categorías: trabajo de los estudiantes; transiciones en el Plano 2; interacciones entre los alumnos y de éstos con la profesora; y actitudes matemáticas. Este análisis fue realizado por las tres investigadoras, sometiendo a discusión los resultados para identificar consistencias e inconsistencias.

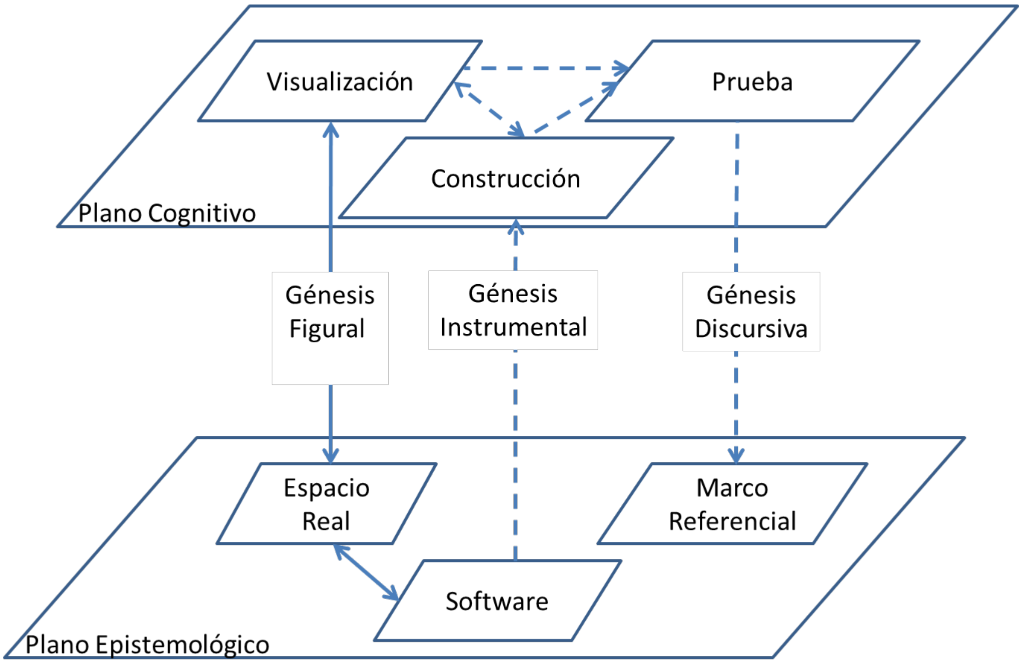


Figura 2: Transiciones Plano 3 (Fig-Ins)-Plano 2 (Ins-Dis)

Objetivos

Nuestros resultados generales permiten avanzar los siguientes supuestos para ser explorados a nivel macro y a nivel micro:

-Supuesto 1: El trabajo con GeoGebra fortalece el plano 3 (Fig-Ins), actuando como base para el inicio en la génesis discursiva, planteada de arriba a abajo. Los alumnos realizan un avance desde los niveles inferiores de demostraciones empíricas a niveles superiores a distinto ritmo y con distintos resultados. GeoGebra favorece la expansión gráfica y del registro figural proporcionando soporte para el razonamiento discursivo. Se parte del supuesto de que en la génesis figural se puede producir un tipo de expansión gráfica del registro figural que permite enlazar unidades significativas del dibujo en un proceso gráfico, en forma de descripción, de explicación o de razonamiento.

-Supuesto 2: La interacción social, con la profesora y con los compañeros, es un factor clave para que se produzca la transición entre las génesis. Los SGD (GeoGebra) proporcionan bastante autonomía los alumnos para trabajar en el plano 3 (Fig-Ins). Por sí solos, estos sistemas (en concreto, GeoGebra) no propician un paso a la génesis discursiva, aunque sí constituyen una herramienta valiosa sobre la que el profesor puede apoyarse para que la clase trabaje el plano 2 (Ins-Dis).

-Supuesto 3: En la superación de dificultades en la transición a los planos 3 al 2 interviene fuertemente la condición actitudinal del alumnado respecto a la dimensión instrumental y la interacción con SGD.

RESULTADOS A NIVEL MACRO

Tanto a nivel grupal como para el estudio de casos, se encontró que las actitudes Gusto por la matemática (GM), Confianza en la propia habilidad (CO), Perseverancia (PE) y Autonomía (AU)), junto con los atributos del software y las interacciones señaladas en la Figura 3, destacaron entre las restantes objeto de estudio por ejercer una influencia notoria en el desarrollo de los procesos de argumentación y demostración. Por esta razón, centraremos el análisis de resultados en estos factores.

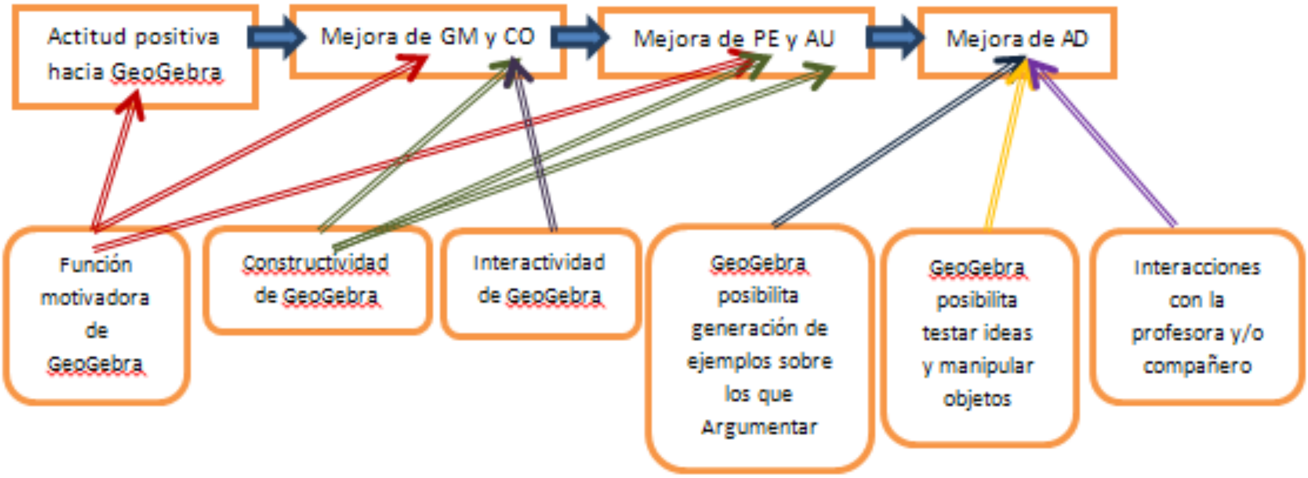


Figura 3. Factores influyentes en el desarrollo de los procesos de argumentación y demostración

Desarrollo de las actitudes hacia las matemáticas: Gusto por la matemática y confianza en la propia habilidad

A nivel grupal, el análisis de los dos cuestionarios acerca de la actitud hacia las matemáticas con y sin GeoGebra, revelo que el 80% de los estudiantes mejoraron su gusto hacia las matemáticas y confiaron más en sus posibilidades de éxito al trabajar con el software, confirmándose este resultado al triangular la información procedente de los otros instrumentos.

Para la muestra de estudiantes y el estudio de casos, se obtuvieron resultados similares en el gusto por la matemática (97% estudiantes) y en la actitud de confianza (86% estudiantes) al trabajar con GeoGebra, frente al trabajo con lápiz y papel, en el que un 29% y un 37% de estudiantes manifestaron estas actitudes, respectivamente. Estos resultados venían claramente marcados por la actitud de los estudiantes hacia la tecnología (78.3% de ellos afirmó que su uso les había motivado para trabajar en matemáticas). GeoGebra actuó como factor motivador por razones que los alumnos expresaron en las entrevistas y el buzón de sugerencias, entre las que destacamos las siguientes: la concepción de la matemática como contenido ameno ("Que las matemáticas no siempre son aburridas y utilizando los ordenadores podemos divertirnos y aprender más" A25), la rapidez e inmediatez ("Es más rápido comprender las mates con el ordenador" A18), los modos de calificación ("Se valora más el trabajo y es más justo que evaluar con un examen" A19).

Desarrollo de las actitudes matemáticas: Perseverancia y Autonomía

Para el total de estudiantes, el análisis de los diarios de la profesora y de las entrevistas señaló una evolución notable de las actitudes perseverancia (PE) y autonomía (AU) con el software. Partiendo de evidencias de ellas casi nulas con lápiz y papel, se llegó a observarlas en torno al 80% de las sesiones en las que realizaron las tareas con GeoGebra. Esta evolución, aún más acentuada, se obtuvo para la muestra de estudiantes y el estudio de casos. El análisis de sus parrillas, tareas y audios evidenció que en el 99% y el 86% de las sesiones mostraron PE y AU, respectivamente, al trabajar con GG; mientras que lo hicieron en el 36% y el 39% de sesiones con lápiz y papel.

La perseverancia (PE) fue la actitud que más mejoró y las razones reveladas en el análisis con Atlas.ti y aducidas por los alumnos son la función motivadora del software y su constructividad, es decir, la posibilidad de hacer y construir de un modo rápido y sencillo. En palabras de un alumno: "Con el ordenador si te sale algo mal lo intentas otra vez, porque tardas poco tiempo, si lo estuvieras haciendo con LP a la tercera vez que te sale mal, ya lo dejas" (A4).

También evolucionó notablemente la actitud matemática de autonomía (AU). Por un lado, en estudiantes que no trabajaban de modo autónomo por falta de motivación en matemáticas, a los que ayudó la función motivadora de GeoGebra y, por otro lado, en estudiantes que no trabajaban debido a sus deficiencias cognitivas, a cuya mejora contribuyó la constructividad del software.

Desarrollo de los procesos de argumentación y demostración

El nivel de desarrollo alcanzado por el grupo de estudiantes en los procesos de argumentación y demostración no fue homogéneo. La situación cognitiva de los 46 estudiantes durante las tareas de lápiz y papel, puede resumirse diciendo que un 9% demostraba esta competencia a nivel alto (demostración empírica tipo experimento genérico o experimento mental), un 28% la manifestaba a nivel medio (demostración empírica tipo experimento crucial), y un 63% evidenciaba un nivel nulo-bajo (ausencia de demostración- demostración empírica tipo empirismo naïf). Esta situación experimentó una mejora gracias al trabajo con GeoGebra: la mayoría de estudiantes se situaron un nivel medio y un grupo más reducido alcanzó un nivel alto.

En relación a los estudiantes de la muestra, la situación inicial de estos 12 alumnos era bastante negativa: una estudiante con nivel nulo (8.3%), ocho estudiantes con nivel bajo (66.7%), dos estudiantes con nivel medio (16.7%) y un estudiante con nivel alto (8.3%), aunque tenían dificultades para elaborar argumentaciones válidas. El nivel alcanzado durante el trabajo con GG superaba con creces la situación de partida: la estudiante (8%) con nivel previo nulo alcanzó un nivel bajo, seis estudiantes (50%) con nivel bajo se situaron en un nivel medio y los cinco restantes (42%) lograron desarrollar estas competencias a un nivel medio-alto o alto, siendo este avance más que remarcable para los que partían de nivel bajo. En general, puede decirse que los estudiantes mejoraron un nivel la calidad de sus argumentaciones previas, salvo unos pocos alumnos que experimentaron una evolución mayor y subieron dos niveles (pasaron de un nivel bajo a un nivel alto). Para ilustrar el estudio a nivel micro se ha seleccionado a un alumno que pasó de nivel bajo a nivel medio-alto y a su pareja en el trabajo con GeoGebra. Éste último no pertenecía a la muestra, pero se considera de interés por representar a los alumnos que consiguieron pasar de nivel bajo a nivel alto a raíz del trabajo con el software.

Factores que influyen en el desarrollo del Plano 2 (Ins-Dis)

Se identificaron tres factores importantes en el paso de la génesis instrumental a la discursiva: el soporte cognitivo de la profesora y el que se produjo entre compañeros, GeoGebra y la mejora actitudinal experimentada por los estudiantes.

En cuanto a la importancia de la atmósfera emocional, la interacción entre los estudiantes se mostró suficiente, para muchos estudiantes, en las tareas que requerían de una demostración tipo empirismo naíf o experiencia crucial, mientras que la interacción entre los estudiantes y la profesora permitió a ésta guiarlos en el proceso de validación cuando la demostración exigía una demostración tipo experimento genérico o mental.

Como hemos señalado, la influencia de GeoGebra, que se mostró más potente para el desarrollo de procesos relacionados con las génesis instrumental y visual, perdió protagonismo en el caso de la génesis discursiva. No obstante, algunos de sus atributos y ventajas se pusieron de relieve cuando los estudiantes buscaban el paso de lo figural a lo discursivo sirviéndose de lo instrumental. Así, la posibilidad de generar gran cantidad de ejemplos de un modo rápido y sencillo los motivó en los procesos de validación y la posibilidad de comprobar ideas, recibir realimentación (interactividad) o manipular objetos mediante el "arrastre", incidió positivamente en la mejora de los procesos de argumentación, orquestados por la profesora.

En lo referente a la importancia de la componente actitudinal, el hecho de que los estudiantes hubieran desarrollado actitudes de perseverancia y autonomía en el trabajo con GeoGebra, así como su implicación en las tareas (debido, en parte, a un mayor gusto por el trabajo matemático con el software y una mayor confianza en sus posibilidades de éxito), ejerció un fuerte soporte afectivo que les mantuvo constantes en la búsqueda de argumentaciones no visuales, a pesar de las dificultades que éstas les suponían.

A continuación, ilustraremos lo expuesto mediante un estudio de caso.

RESULTADOS A NIVEL MICRO

La pareja elegida para el estudio de caso está formada por los alumnos a los que llamaremos F y R. Tal como señalamos anteriormente, F era uno de los cinco casos elegidos para el estudio en profundidad (A8). Pertenecía al grupo de alumnos con rendimiento suficiente y actitudes adecuadas. R era su compañero de trabajo. No pertenecía a la muestra, pero se encuadraba dentro del grupo de estudiantes con rendimiento insuficiente y actitudes inadecuadas.

Perfil cognitivo y actitudinal de la pareja de alumnos

F respondía a un perfil actitudinal bastante común en las aulas de secundaria. Estaba totalmente motivado para trabajar en la asignatura y realizar las tareas propuestas; sin embargo, su motivación respondía a querer superar la asignatura, no al gusto por la materia. Su bajo autoconcepto le hacía mostrar poca confianza en sí mismo y le llevaba a una visión de las matemáticas como asignatura difícil y poco atractiva, aunque necesaria. Reconocía tener habilidad para las tareas rutinarias y de cálculo, pero se mostraba poco confiado cuando se trataba de emplear conceptos matemáticos ya aprendidos para resolver problemas cuyo contexto no le resultaba familiar. Manifestó poco interés y gusto por realizar tareas en las que no solamente tuviera que aplicar conceptos ya trabajados, sino que le exigieran interpretar, diseñar estrategias y argumentar-demostrar sus hallazgos. Durante la experiencia con GeoGebra, F manifestó un aumento considerable de la confianza en sus propias habilidades y un mayor gusto por la resolución de tareas no rutinarias, mostrándose totalmente perseverante y bastante autónomo a la hora de resolverlas.

R respondía a un perfil muy distinto al de su compañero, representativo de una clase de alumnos emergente en secundaria cuando se trabaja con recursos tecnológicos. Este estudiante mostraba actitudes hacia las matemáticas muy negativas que le llevaban a trabajar en de forma irregular. Su falta de motivación por la asignatura impedía que mostrase actitudes matemáticas y competencias a un nivel adecuado. R afirmaba que las matemáticas eran aburridas y no le gustaban. Solía tener dificultades, al igual que F, en aquellas tareas no rutinarias que exigían interpretar, pensar y razonar antes de actuar y, sobre todo, en aquellas en las que se le solicitaba que argumentase sus hallazgos. Debido a todo esto, su rendimiento en la asignatura era muy bajo. Sin embargo, a raíz del trabajo con GeoGebra, con el que mostró una gran facilidad de uso, sus actitudes mejoraron notablemente y sus habilidades para el trabajo geométrico, tanto a nivel instrumental como cognitivo, salieron a la luz.

A pesar de la diferencia de perfiles, esta pareja trabajó de modo compenetrado durante la experiencia con GeoGebra, como veremos más adelante.

El trabajo en el Plano 2 (Ins-Dis)

Hemos descendido al detalle en el trabajo de estos alumnos con la tarea 3 de la secuencia con GeoGebra, que trascurrió en dos sesiones. Después de haber construido mosaicos con triángulos y cuadriláteros, se pedía a los alumnos que argumentaran por qué es posible teselar el plano con cualquier triángulo y cualquier cuadrilátero.

La mayoría de los alumnos (en torno al 70%) verificaron la conjetura dada por la profesora ("es posible teselar el plano con cualquier triángulo y cualquier cuadrilátero") para varios ejemplos lo más "generales" posible, avanzando de un empirismo naïf a una experiencia crucial, ayudados por el software. Hubo un porcentaje pequeño de alumnos que dieron el paso a los niveles más elevados de demostración inductiva de forma autónoma o con escasa ayuda de la profesora (en torno al 4%). El resto del alumnado del alumnado (26%) necesitó bastante ayuda de la profesora para pasar de lo figural, en ejemplos más o menos generales, hacia lo discursivo; es decir, para pasar de demostraciones tipo experiencia crucial a las de ejemplo genérico, en las que, además de verificar la conjetura, debían dar razones para su validez. El caso de F y R se encuadra dentro de este grupo. Describiremos a continuación el proceso que siguieron, pasando brevemente por la primera sesión de las dos en las que se desarrolló la tarea y profundizando en la segunda sesión. En el anexo 1 puede verse el análisis general de esta sesión, atendiendo a las categorías de: Transiciones entre las génesis que determinan en el plano 2; Interacciones con el compañero y la profesora; y Actitudes observadas.

En la primera sesión, F y R construyeron un mosaico de triángulos con un ejemplo lo menos particular posible y trataron de dar razones de por qué tesela el plano. Intentaron pasar de lo figural a lo discursivo a través de la instrumentación, midiendo los ángulos. Hicieron varias afirmaciones para intentar explicar la razón de que los triángulos teselen el plano: varios triángulos unidos forman un cuadrilátero, la suma de los ángulos que concurren es 360º… Como no llegaron a una explicación que les convenciera, volvieron al terreno instrumental y continuaron expandiendo el mosaico. La profesora intentó fijar su atención en la colocación de los ángulos del triángulo en cada vértice después de girarlo, con el fin de hacerles caer en la cuenta de que concurren los tres ángulos distintos del triángulo, dos veces. Los alumnos no captaron lo que la profesora quería hacerles ver. Hay que tener en cuenta que la argumentación que la profesora pretendía que los alumnos realizaran en esta tarea descansa en dos proposiciones: 1) la suma de ángulos internos en triángulos y cuadriláteros es 180º y 360º, respectivamente, y 2) en el vértice del mosaico concurren todos los vértices distintos de los polígonos en cuestión.

En la segunda sesión, la profesora les animó a intentar una argumentación con el cuadrilátero. R y F construyeron un mosaico con un cuadrilátero lo más general posible (trapecio escaleno) y midieron sus ángulos. Se produjo un bloqueo en el intento de argumentar. Cuando pidieron ayuda a la profesora, ésta, intencionalmente, volvió al caso del triángulo e hizo preguntas a F y a R encaminadas a fijar su atención sobre las dos proposiciones en las que debía soportarse la explicación. Aunque ambos alumnos contestaron correctamente a las preguntas, sólo veían todavía que en el vértice del mosaico los ángulos suman 360º. Es decir, continuaban en el plano figural inicial. Una vez que la profesora los puso sobre la pista, les dejó pensando y ellos volvieron a la génesis instrumental. Tenían dificultad para medir los ángulos porque había puntos superpuestos con GeoGebra, al haber girado los cuadriláteros. La profesora les prestó ayuda con ello e intentó otra vez llevarlos de lo instrumental a lo discursivo. Durante todo el proceso, F se mostraba persistente en dar el paso a la argumentación, mientras R parecía estar muy interesado en hacer una buena instrumentación. Esto podía deberse a que F tomó a su cargo el contestar por escrito a la tarea y también a sus metas globales (cumplir adecuadamente con los requerimientos de la asignatura), mientras que R disfrutaba más de sus habilidades instrumentales, empleándolas al servicio de la tarea.

A continuación, se presenta el episodio 1 (Tabla 3):

Diálogo entre F y R (1 min 39 seg)	Segundo nivel: Plano 2	Interacciones	P2 F	P2 R	Interac F	Interac R	Actitudes F GM	Actitudes F CO	Actitudes F P	Actitudes F AU	Actitudes R GM	Actitudes R CO	Actitudes R P	Actitudes R AU
R: Venga le voy a ir dando a grabar por si acaso... y ahora, ¿qué hay que hacer?	R pregunta a F por la meta. F le recuerda: hacer una demostración tipo ejemplo genérico para el caso del T y el C.	Se alinean en la meta común. R pide soporte cognitivo (s.c.) y F se lo da.	T, C											
F: Averiguar por qué se puede enlosar con el cuadrilátero y el triángulo														
R: ¡Ya está! ¡El triángulo ya! El triángulo porque los ángulos de los vértices dan 360º, ya está, ¿no?	-De nuevo, R da una conjetura sin argumentar (suman 360º) en un exp. crucial para el T y el C.	R da s.c. a F		T, C										
F: ¿Y en el cuadrilátero?		F pide s.c. a R												
R: pues también dan 360 los vértices	-Argumentación solo visual-figural	R da s.c. a F												
F: Puede ser porque los cuadriláteros... los cuadriláteros siempre tienen la misma forma, los gires como los gires, siempre tienen la misma forma, ¿no?	-F ya ha captado que hay que descender a explicar la conjetura. Aborda la proposición 2, pero con ejemplos cualesquiera (cuadrados y rectángulos): empirismo naif. -Deconstrucción de formas mediante la medida. Expansión de la figura Intento de enlazar unidades significativas del dibujo en un proceso gráfico para dar la explicación	F da s.c. a R F pide s.c. a R	Génesis Discursiva Proposición2 C											
R: No, mira, si tú lo giras así, ya no tiene... está en diferente sentido a ése	-R le presenta un contraejemplo para su argumento (el trapecio escaleno en el que ha trabajado como ejemplo "general"; es decir, se lleva a F a razonar sobre el experimento crucial. -Inician un primer análisis estructural mediante forma y medida que podría dar lugar a una proposición.	R da s.c. a F		C										
F: Bueno, también es verdad			C											
F y R a la vez: ¡A ver!		Continúan alienados en la meta												

T: Triángulo
C: Cuadrilátero

Plano 2	
Empirismo naïf	
Experimento crucial	
Experimento genérico	

Interacciones	
Pide soporte cognitivo	
Recibe soporte cognitivo	
Da soporte cognitivo	

Actitudes	
No manifiesta	
Manifiesta Bastante	
Manifiesta Mucho	

Tabla 3. Análisis del plano 2, interacciones y actitudes en el episodio 1

En este episodio, se puede observar cómo la pareja de alumnos trabajó con autonomía y alineados en la meta de la tarea. Cada uno tenía una parte de la información: F había conseguido captar la necesidad de argumentar más allá de una constatación visual. R tenía su atención en un experimento general que contradecía la conjetura de su compañero, basada en un ejemplo demasiado particular. Llegados aquí se produjo un bloqueo pero, en lugar de mostrar frustración o ansiedad, se ofrecieron mutuamente soporte cognitivo y afectivo, intentándolo un tiempo más y, finalmente, hablando de intereses comunes ajenos a la tarea.

Para hacerles salir del bloqueo, la profesora les llamó la atención de nuevo sobre la manera en que los ángulos se configuraban alrededor de los vértices del mosaico del triángulo. En el caso del cuadrilátero, recurrió al "arrastre" de GeoGebra, deformando el mosaico para conseguir ejemplos más generales que mostraban más claramente la confluencia de todos los ángulos distintos del cuadrilátero en el vértice del mosaico. La profesora hizo aquí una expansión figural para facilitar el paso a lo discursivo en sus alumnos, a través de una génesis instrumental que compartió con ellos: por una parte, se basó en el ejemplo que éstos generaron y conocían a fondo; por otra, la profesora aceptó sus aportaciones en términos de otros ejemplos generales que se podían realizar a partir del original y cómo tenía que proceder para ello (ver anexo). El interés de los alumnos no decayó en ningún momento, sino que se incrementó con las variaciones hechas a su diseño de forma dinámica.

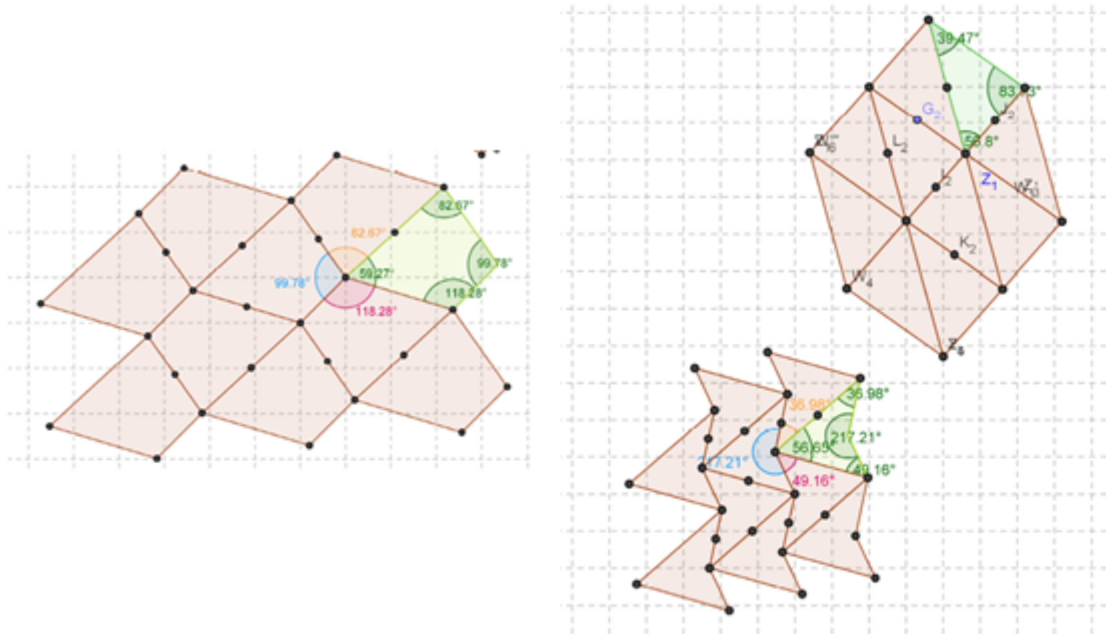


Figura 4. Construcciones realizadas por F y R con GeoGebra

Una vez expandido lo semiótico-figural, con una deconstrucción de formas encaminada a precisar la proposición 2, la profesora volvió a insistir en la génesis discursiva y dejó que pudieran culminarla por sí mismos, como veremos en el siguiente episodio (Tabla 4):

Diálogo entre F y R (3 min)	Segundo nivel: Plano 2	Interacciones	P2 F	P2 R	Inter F	Inter R	Actitudes F					Actitudes R			
							GM	CO	P	AU		GM	CO	P	AU
F: ¿Te has enterado?	F pide ayuda a R para hacer génesis discursiva en el caso del cuadrilátero.	F pide soporte cognitivo (s.c.) a R													
R: Pero me ha gustado esto de hacer así… ¡Dios, mira parece que está en relieve! ¡ahí!	Breve distensión en la que R y F disfrutan con la belleza de la configuración obtenida.														
F: ¡Qué guay! Parecen triángulos ahora															
F: ¡Madre mía!															
R: Vamos a ver, ahora esto lo mismo porque, porque para los cuadriláteros miden trescien… los ángulos	-R utiliza la proposición 1. -Argumentación sólo visual-figural	R da s.c. a F		P 1 C											
F: ¡Oye, pégate más el micrófono que no se te siente!															
R: Los ángulos de los cuadriláteros miden 360º y…		R da s.c. a F		P 1 C											
F: Lo borramos (hace referencia a la repuestas que habían escrito en la ficha de tarea 3 anteriormente)															
R: No, pero no borres eso	-F comprende la proposición 1 -Uso de génesis instrumental para la deconstrucción de formas mediante la medida y la precisión de proposición														
F: Ya, ya, ya, ahora, los ángulos de los cuadriláteros suman		F recibe s.c. de R	P 1 C												
R: 360º		R da s.c. a F													
F: 360º y, ¿qué más?		F pide s.c. a R													
R: Entonces en cada vértice, al haber cuatro cuadrados, al estar las cuatro esquinas diferentes de cada cuadrilátero, pues suma 360º	-R utiliza la proposición 2 -Trabajo sintáctico para la identificación de la Proposición (lenguaje) a partir de la deconstrucción de formas (signo	R da s.c. a F		P 2 C											
R: Bueno en cada vértice, ¿no?, porque mira, en este vértice está la esquina del cuadrado, luego está otra		R da s.c. a F													

esquina del cuadrado, la tercera esquina del cuadrilátero y la cuarta esquina del cuadrilátero	visual) Enlace de unidades significativas del dibujo en un proceso gráfico en forma de descripción, de explicación			P 2 C											
F: ¡Ah! Porque se juntan las cuatro esquinas del cuadrilátero	-F comprende la proposición 2. -Trabajo sintáctico en la expansión figural	F recibe s.c. de R	P 2												
R: Claro, en cada vértice se juntan las cuatro esquinas del cuadrilátero															
F: en cada… (está escribiendo la respuesta* en la ficha de la tarea) ¡Ya está!...¡pues ya está! *Porque en total miden 360º los ángulos de cada vértice. Los ángulos de los cuadriláteros suman 360º y en cada vértice se juntan las cuatro esquinas del cuadrilátero. En los triángulos en cada vértice se juntan todos los ángulos del triángulo y suman 180º. Se necesitan otros tres triángulos para que sumen 360º.	-F escribe explicación de la tarea. Ha realizado (con bastante ayuda de la profesora y de R) una génesis discursiva, de abajo a arriba, haciendo una demostración tipo experimento mental -Trabajo semántico de explotación del objeto matemático (signos empleados y significado) para precisar propiedad (sintaxis)		P 1 y P 2 T, C												

Tabla 4. Análisis del plano 2, interacciones y actitudes en el episodio 2

La pareja de alumnos formada por R y F consiguió, con mucho apoyo cognitivo por parte de la profesora hacer una génesis discursiva, pasando por distintos niveles de demostración empírica hasta llegar a un experimento mental. Éste no era un proceso para el que sintieran una necesidad intrínseca. Además de la interacción con la profesora, fue importante la perseverancia en la meta y el grado de autonomía con la instrumentación que les proporcionó GeoGebra para llegar a culminarlo. F destacó en la perseverancia hacia la meta de la tarea, basada en su motivación a largo plazo por conseguir buenos resultados en la asignatura, y R en la autonomía personal, la confianza en sus habilidades y el disfrute a la hora de trabajar con un experimento crucial.

Ambos alumnos se apoyaron mutuamente para realizar las transiciones en el plano 2 (Ins-Dis), aprovechando las indicaciones de la profesora. Cuando F trabajó solo en otras tareas, recurría a la constructividad de GeoGebra y el gusto por su manejo para distenderse cuando se enfrentaba a un obstáculo cognitivo. A veces, este avance lo llevaba a solucionar el bloqueo y otras recibía el soporte de la profesora. En la tarea 3, el uso de GeoGebra con esta función de puente cognitivo y afectivo lo aportó en gran medida su compañero R. Éste carecía de la motivación hacia la materia, pero mostraba facilidad en la instrumentación con GeoGebra y gusto por su uso, junto mayor rapidez cognitiva que su compañero, cualidades que puso al servicio de la meta común, sostenida por F. La colaboración fructífera de esta pareja liberó a la profesora para prestar ayuda a otras, contribuyendo a generar un clima de aula en el que la profesora se apoyó en la autonomía relativa de la mayoría de las parejas (en torno al 75%) para atenderlas en sus procesos particulares de transición entre las génesis instrumental y discursiva.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

Como los resultados del estudio han puesto de manifiesto, los esquemas de usos de los estudiantes dependen de la interacción entre aspectos cognitivos, instrumentales y actitudinales, corroborando los resultados de otros estudios previos (Gómez-Chacón, 2011 y 2012). El trabajo con SGD en el plano 2 (Ins-Dis) en entornos naturales de aulas de Secundaria ratifica las dificultades detectadas para la completitud del razonamiento geométrico por Gómez-Chacón y Kuzniak (2013), referidas al estancamiento que se puede producir entre la visualización y las construcciones, que bloquea el paso a la génesis discursiva en los alumnos. Las dificultades en alumnos de estas edades vienen dadas por la ausencia de necesidad intrínseca de realizar dicha génesis, así como por la falta de perspectiva en este sentido, puesto que carecen de experiencia en los procesos de argumentación y demostración matemática. Es en estos procesos de razonamiento lógico y argumentación donde se hacen más patentes las diferencias cognitivas de los alumnos, en cuanto a ritmos y a nivel de desarrollo posible en un determinado momento. En estas condiciones, tres factores de influencia se ponen de manifiesto: el profesor, las interacciones colaborativas y el instrumento.

El rol de la profesora en el trabajo geométrico en el Plano 2, tanto en los procesos de inducción como deducción, contribuye a las dialécticas exigidas en el trabajo de prueba (Tanguay y Geeraerts, 2012): un trabajo semántico de explotación de los objetos matemáticos y un trabajo sintáctico de análisis formal de las definiciones, propiedades y teoremas referida a los objetos. En nuestro caso, la profesora combina un primer de análisis estructural (deconstrucción formal de formas (Duval, 2005) con la medida y con la consciencia del uso gradual de las potencialidades de los SGD y la precisión de las proposiciones. Muy pocos alumnos consiguen hacer este proceso con la única ayuda del software. Para el resto, se revela conveniente una particularidad en los procesos de seguimiento, dada la diversidad de rutas que siguen. El trabajo colaborativo entre alumnos les proporciona un grado de autonomía con respecto a la profesora y permite a ésta seguir más de cerca los procesos de pensamiento particulares y los logros alcanzados. Por otra parte, la colaboración de la profesora con los alumnos sobre la base del trabajo de éstos posibilita una evaluación continua de los ETG Personales y del grupo en su conjunto, fundamental para ajustar un ETG Idóneo. Ello contribuye a evitar un deslizamiento entre Geometrías habitual en los últimos niveles de Secundaria, cuando el profesor se sitúa en Geometría II mientras que los alumnos están en Geometría I (De la Torre y Pérez, 2008).

El papel de los SGD se ha hecho patente en su componente intelectual (sentido Coutat y Richard, 2011) y componente actitudinal (sentido Gómez-Chacón, 2011). El racional del acto emocional generado en el grupo está marcado por la componente intelectual del medio y las interpretaciones individuales en relación al instrumento, lo que propicia la evolución de su conocimiento en la deconstrucción de formas y en la conexión de unidades significativas del dibujo en un proceso gráfico para dar la explicación. En relación a la componente actitudinal, se ha podido identificar una ruta global que muestra un soporte claro del instrumento para sostener las demandas cognitivas requeridas en los procesos de argumentación y demostración. En dicha ruta se destacan cuatro actitudes: gusto por la matemática y confianza en la propia habilidad y las actitudes perseverancia y autonomía, propiciadas principalmente por los atributos de SGD de constructividad e interactividad.

NOTAS

1. La inferencia figurativa o figural es un paso de razonamiento discursivo- gráfico que modifica el valore epistémico, semántico o teórico de la consecuencia discursiva.

2. La inferencia figurativa se basa en el razonamiento gráfico y la coordinación de un tratamiento entre registros para alcanzar una consecuencia discursiva. Se reconocen dos tipos de estructuras: Estructura binaria (Proposiciones gráficas → Proposiciones verbales) y Estructura ternaria (Proposiciones verbales, Proposiciones gráficas→ Proposiciones verbales).

REFERENCIAS

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7, 245–274.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, 18, 147-176.

Balacheff, N. (2000) Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogota: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Coutat, S. (2006). Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la pour favoriser une liaison école-collège, Thèse de l'université J. Fourier, Grenoble.

Bazán, J. (1997) Metodología estadística de construcción de pruebas. Una aplicación al estudio de actitudes hacia la matemática en la UNALM. Tesis doctoral no publicada. UNALM, España.

Brousseau,, G. (1998). Théorie des situations didactiques, La Pensée Sauvage,Grenoble.

Coutat, S. & Richard, P. (2011) Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 97-126.

Coutat, S. (2006). Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la pour favoriser une liaison école-collège, Thèse de l'université J. Fourier, Grenoble.

De la Torre, E.; Pérez, M. (2008). Paradigmas y espacios de trabajo geométricos en los libros de texto de la E.S.O. (texto de la ponencia presentada en la reunión del Grupo Aprendizaje de la Geometría, durante el 12º Simposio de la SEIEM).

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels, Peter Lang, Berne.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de I´apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. Annales de Didactique et Sciences Cognitives, nº 10, 5-53.

García, M.M. (2011). Evolución de actitudes y competencias matemáticas en estudiantes de secundaria al introducir GeoGebra en el aula. Tesis doctoral. Universidad de Almería.

Gómez-Chacón, I. Mª (2000). Matematica emocional. Los afectos en el aprendizaje matematico (Emotional mathematics. Affectivity in mathematics learning). Narcea, Madrid

Gómez-Chacón, I. Mª (2011). Mathematics attitudes in computerized environments. A proposal using GeoGebra. In L. Bu and R. Schoen (eds.), Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra, (147-170). Sense Publishers.

Gómez-Chacón, I. Mª (2012). Affective pathways and interactive visualization in the context of technological and professional mathematical knowledge. Nordic Studies in Mathematics Education,17(3-4), 57–74.

Gómez-Chacón, I. Mª (print appear in 2014). Meta-emotion and Mathematical modeling processes in computerized environments, In B. Pepin & B. Rösken-Winter (Eds.) From beliefs and affect to dynamic systems: (exploring) a mosaic of relationships and interactions. Springer (red series).

Gómez-Chacón, I. Mª y Escribano, J. (2014 aceptado) Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis, Relime, Revista latinoamericana de investigación en matemática.

Gómez-Chacón, I. Mª y Kuzniak, A. (2013) Geometric Work Spaces: Figural, instrumental and discursive geneses of reasoning in a technological environment, International Journal of Science and Mathematics Education, DOI: 10.1007/s10763-013-9462-4

Houdement, C. y Kuzniak, A., (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. Annales de didactique et de sciences cognitives, 11, 175-193.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n°15, pp. 75-96.Proceedings of the First French-Cypriot Conference of Mathematics Education, University of Cyprus, pp. 71-89.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014, en prensa). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains, Armand Colin, Paris.Richard, P.R. (2004b). L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo graphique, Educational Studies in Mathematics, 57, 229–263.

Tanguay, D. y Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. Petit x, n°88, pp. 5-24.

Tanguay, D. (2005). Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. Annales de didactique et de sciences cognitives, n°10, pp. 55-93.

Tanguay, D. (2014, en prensa). Conjectures, Postulats Et Vérifications expérimentales dans le paradigme du géomètre-Physicien: comment intégrer le travail avec les LGD ? Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)

REELABORACIÓN DEL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO DE PROFESORES DE PRIMARIA SOBRE GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS

Francisco Javier Olvera Bermúdez, Universidad Pedagógica Nacional

Olimpia Figueras, Cinvestav

Gregoria Guillén Soler, Universitat de València

Con la intención de favorecer la auto-regulación del desarrollo profesional (Olvera y Figueras, 2010) se constituyó una comunidad de práctica de profesores de primaria en la que las actividades propuestas incluyeron una estrategia para reelaborar conocimiento propio de los miembros de la comunidad desde un espacio de trabajo geométrico sobre los sólidos y procesos matemáticos. En el trabajo desarrollado se obtuvieron conclusiones en dos direcciones: una en relación con la reestructuración del espacio de trabajo geométrico de los docentes asociado con los procesos matemáticos y los objetos mentales, motivo de análisis de este documento, y la otra sobre la auto-regulación del desarrollo profesional de los docentes constituidos en comunidad (Olvera, 2013).

INTRODUCCIÓN

El Espacio de Trabajo Geométrico (ETG), como lo explica Kuzniak (2011), es el lugar organizado para permitir que las personas resuelvan problemas geométricos; en la escuela puede ser descrito en tres niveles: el ETG de referencia previsto por la institución y que debe ser dispuesto por el profesor en un ETG adecuado para su puesta en práctica en el aula donde los estudiantes se desempeñan de acuerdo con su ETG personal.

El Espacio de Trabajo Matemático de referencia establecido en los programas de estudio de matemáticas para la primaria en México [1] se encuentra organizado en seis ejes temáticos: 1) Los números, sus relaciones y sus operaciones; 2) Medición; 3) Geometría; 4) Procesos de cambio; 5) Tratamiento de la información y, 6) La predicción y el azar. El programa de geometría, a su vez, se subdivide en tres líneas temáticas: a) figuras geométricas, cuyos contenidos corresponden a la geometría plana; b) cuerpos geométricos, en la que se proponen contenidos relativos a los sólidos y, c) ubicación espacial (SEP, 1993).

A partir de un análisis de los documentos mencionados, Olvera, Guillén y Figueras (2008a) encontraron que: la aritmética y la geometría son los dos temas más importantes en la educación elemental en México; la geometría, en cantidad de contenidos, representa alrededor de la mitad de los asignados a la aritmética; la geometría de los sólidos apenas es considerada y, el modelo de enseñanza introducido en el curriculum y los libros de texto no destacan la riqueza de los contextos que el estudio de los sólidos proporciona para el aprendizaje de procesos matemáticos [2].

Al centrar la atención en el ETG de referencia, de manera especial en los contenidos de la línea temática cuerpos geométricos que se encuentran en cada uno de los programas escolares para los seis grados en que se divide la educación primaria en México, referido a procesos matemáticos y familias de sólidos, Olvera (2013) encontró que para los primeros se consideran especialmente la clasificación, descripción e identificación, y las familias de sólidos a las que más se les presta atención son los prismas rectos y las pirámides rectas.

En relación con la práctica docente relacionada con la enseñanza de la geometría de los sólidos, como un espacio de trabajo geométrico adecuado, Olvera (2007) llevó a cabo un estudio exploratorio para observar la forma en que dos profesoras interpretan y ponen en práctica el contenido geométrico inscrito en los documentos del curriculum nacional, además del uso que le dan a los diversos materiales de apoyo al trabajo docente elaborados por las autoridades educativas, así como a los libros de texto gratuito [3].

Como producto de las reflexiones iniciales en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría de los sólidos, se pudo identificar (ver Olvera, Guillén y Figueras, 2008) que en relación con el ETG adecuado, las profesoras enfrentan dificultades para el diseño de situaciones didácticas, básicamente por el uso de su ETG personal asociado con sus conocimientos de la geometría de los sólidos. Entre las primeras conclusiones que se obtienen, se pueden especificar: el conocimiento que las profesoras tienen con respecto a la geometría de los sólidos influye en la planeación de sus clases; el uso que le confieren a la geometría de los sólidos es limitado, lo emplean como formas que están en el ambiente o como cuerpos que pueden ser modelados; la evaluación del conocimiento aprendido por sus estudiantes se hace a partir de las producciones escritas y, las profesoras participantes enfrentan dificultades para mejorar su propia enseñanza.

En esa misma dirección se encontró que en su planeación las profesoras sólo consideran una o dos páginas de las que forman una lección incluida en los libros de texto gratuitos y sólo usan los procesos matemáticos tenidos en cuenta en las tareas propuestas, perdiendo la oportunidad de vincularlos con familias de objetos geométricos particulares u otros procesos. Aparentemente llevan a cabo la planeación de su clase sin reflexionar sobre los efectos de su enseñanza en el aprendizaje de sus estudiantes (ver Olvera y Figueras, 2010).

El trabajo que se reporta en este documento se centra especialmente en la observación de procesos de aprendizaje de profesores de primaria en servicio constituidos en una comunidad de práctica. Al considerar los resultados obtenidos del análisis del curriculum nacional y de las observaciones de clase de las dos profesoras de primaria mencionadas anteriormente, las actividades propuestas incluyeron una estrategia para reelaborar conocimiento propio de los miembros de la comunidad desde un espacio de trabajo geométrico sobre los sólidos y procesos matemáticos.

La idea fue obtener información sobre la geometría que los docentes participantes usan y aprenden en un contexto de trabajo colaborativo y en la práctica misma. Por eso los objetivos generales de la investigación fueron los siguientes:

Objetivo general 1: Caracterizar el conocimiento geométrico de docentes de primaria en un proceso de comunicación entre pares.

Objetivo general 2: Valorar las posibilidades de desarrollo profesional que se generan en comunidades de práctica que actúan de forma autónoma.

Para fines del presente escrito, la atención se centrará exclusivamente en el objetivo general 1.

GEOMETRÍA DE LOS SÓLIDOS. OBJETOS MENTALES Y PROCESOS MATEMÁTICOS

Diversos autores, por ejemplo, Seymour y Smith (1943) y Welchons y Krickenberger (1950) señalan que el estudio de la geometría de los sólidos favorece, entre otras cosas, la apreciación de las formas geométricas encontradas en la naturaleza y en la arquitectura, así como la familiarización con propiedades geométricas importantes del mundo tridimensional en el que se vive. Fielker (1979) afirma que las experiencias de aprendizaje relacionadas con los contenidos geométricos promueven el desarrollo del razonamiento lógico de los estudiantes y no sólo la construcción del conocimiento del entorno. Si bien es cierto, como dice el investigador, los profesores se preocupan por la forma, el lenguaje y en algunas ocasiones por los conceptos, al parecer olvidan proponer actividades que apoyen la evolución del pensamiento matemático de sus pupilos en dicha área de conocimiento.

El estudio, objeto de este documento, se enmarca en una línea de investigación sobre la geometría de los sólidos que iniciado en el marco del Modelo de van Hiele está fundamentada con el trabajo de Freudenthal (1971, 1973, 1983) con la interpretación que hace Puig (1997) de parte del mismo, así como el trabajo de Kindt (1993) y de Treffers (1987).

En la publicación de 1971, Freudenthal después de enunciar e intentar responder lo que él llama tres cuestiones filosóficas –qué son las matemáticas, qué es la educación, y si se debería enseñar matemáticas como un sistema deductivo–, hace otra pregunta: ¿qué es geometría?, y proporciona una fundamentación teórica de esa rama de las matemáticas como ciencia que parte del espacio –del espacio en el que vive el niño y en el que se relaciona–, y que sirve como vehículo para desarrollar el razonamiento lógico.

Objetos mentales

Puig (1997) a partir de una interpretación que hace del trabajo de Freudenthal (1983), señala que los objetos mentales se refieren a las ideas que las personas han ido constituyendo acerca de las matemáticas, así como al uso que hacen de ellas, en contraposición a las matemáticas como disciplina. Al respecto Puig (Ibid., pág. 74) afirma:

> En una primera aproximación, la contraposición objeto mental/concepto que plantea Freudenthal puede verse como la consecuencia de considerar a las personas que conciben o usan las matemáticas frente a las matemáticas como disciplina o conjunto de saberes histórica, social o culturalmente establecidos.

Más adelante él apunta:

> Podemos partir pues de una imagen inicial: la contraposición objeto mental/concepto es una contraposición entre lo que está en la cabeza de las personas –los objetos mentales– y lo que está en las matemáticas –los conceptos–.

Lo que se pretende subrayar, como comenta Puig, "lo que hay en la mente de una persona es una parte o una forma de ver el concepto".

Así pues, la idea de objeto mental es vista como un medio de organización de fenómenos; se constituyen en cadenas fenómenos y medios de organización, como sucede con los conceptos, con el consiguiente aumento de nivel. La constitución de objetos mentales incluye la posibilidad de que, aparte de los fenómenos para los cuales es un medio de organización, las propias definiciones de los conceptos formen parte de los objetos mentales en formación.

Procesos matemáticos

En los trabajos que componen el marco de referencia se da mucha importancia al desarrollo del razonamiento lógico y al proceso de matematizar, entendiendo esto como "la actividad de organización y estructuración en la que el conocimiento y las habilidades se evocan para descubrir regularidades, conexiones, estructuras,... aún desconocidas" (Treffers, 1987, págs. 310 y 311).

Al usar razonamiento lógico se hace referencia a los procesos matemáticos de analizar, clasificar, definir, conjeturar, generalizar y demostrar.

> Queremos destacar que si nos fijamos en las relaciones entre los contenidos geométricos, esto es, el tipo de razonamientos que los engarzan y que en la enseñanza nos proponemos desarrollar como objetivo de primer orden, del modelo de van Hiele se desprende una idea para razonamiento lógico que Fielker (1979) expresa en estos términos: Razonamientos lógicos no significa lógica formal sino procesos matemáticos como análisis, clasificación, definición, conjetura, generalización y demostración (Guillén, 2004, pág. 113).

Y al considerar estos procesos como contenidos geométricos se centra la atención especialmente en las acciones que se derivan al tomarlos en cuenta como contenidos escolares que los niños tienen que desarrollar: "Al hablar de los *procesos matemáticos* de *analizar, clasificar, definir, probar, demostrar, conjeturar, particularizar, generalizar, abstraer* se centra la atención 'en las características que estas acciones tienen como componentes de la práctica matemática'" (Puig, 1996, pág. 15).

Génesis epistemológica y cognitiva del ETG para los procesos matemáticos en la geometría de los sólidos

Kuzniak (2011) explica que para el funcionamiento de todo el ETG es necesaria una génesis general que se apoye en génesis particulares conectando los componentes y procesos cognitivos: una génesis epistemológica estructurada y organizada a través de procesos orientados por los paradigmas geométricos y las consideraciones matemáticas y, una génesis cognitiva usada por un individuo genérico o particular. En los siguientes párrafos se muestran algunos resultados de investigación relacionados con los procesos matemáticos de describir y clasificar en la geometría de los sólidos con la finalidad de ilustrar los planos epistemológico y cognitivo.

Génesis epistemológica. En el proceso matemático de la descripción en la geometría de los sólidos, la atención se centra en la lista de propiedades que se obtienen mediante la observación de la constitución de distintos cuerpos geométricos.

Guillén (1991) explica que "se puede considerar que hay distintos niveles de análisis: de los elementos y de la estructura. En la estructura el análisis puede ser local –como por ejemplo, el orden de los vértices– o global, que dice algo respecto a la estructura total" (pág. 59).

Al enumerar los problemas asociados con la clasificación Guillén (2004, págs. 125-126) recalca que los procesos de describir, clasificar, definir y demostrar están totalmente relacionados.

En relación con la clasificación se distinguen las que se han analizado en Guillén (2005) y de las cuales se van a enumerar algunas características fundamentales de cada tipo.

Clasificación partición significa la separación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos que son disjuntos unos con otros. Proviene de relaciones de equivalencia.

Por clasificación jerárquica se quiere indicar una clasificación de un conjunto de conceptos de manera que los conceptos particulares forman subconjuntos de los más generales. Proviene de las relaciones de orden.

Otros tipos de clasificaciones son aquellas que se obtienen con criterios de construcción y clasificaciones por analogía.

Génesis cognitiva. La actividad matemática puede ser caracterizada como lo hace Puig (1997), como la experiencia que se tiene con los objetos del mundo, las propiedades de esos objetos, las acciones que se realizan sobre ellos y las propiedades de esas acciones. Desde esta perspectiva, sitúa a las matemáticas en el mismo espacio de experiencia humana por el cual tanto los objetos reales y sus propiedades, como los objetos matemáticos que se derivan de la actividad matemática ejercida sobre ellos –las acciones que se realizan sobre los objetos del mundo y las propiedades de esas acciones–, se constituyen en algunos de los elementos fundamentales para organizar la enseñanza de las matemáticas.

Así, en relación con la geometría de los sólidos, las características generales que se han especificado en Guillén (2004, pág. 94) reflejan niveles distintos de aprendizaje; de ahí que se enumeren a continuación esas características en relación con los procesos matemáticos que se consideran en este trabajo.

La palabra *describir* en todos los niveles de razonamiento puede asociarse a listas de propiedades o características de los conceptos, y lo que varía de un nivel a otro es el tipo de propiedades que se incluyen en la lista (Guillén, 1997).

En el primer nivel de van Hiele, la descripción se hace de los objetos familiares; éstos pueden corresponder a un sólido, una familia de sólidos, o sus elementos. La descripción se hace por su aspecto físico o a partir de ejemplos prototipo tomados de su entorno físico y en la descripción se incluyen características visuales y funcionales.

En el segundo nivel, "la figura se convierte en la portadora de sus propiedades" (van Hiele, 1986, p. 168). Se empieza a reconocer la presencia de propiedades matemáticas de los objetos. Es el nivel propio de la descripción en el sentido matemático. Un sólido, o una familia de sólidos, se describe sobre la base de propiedades geométricas que se delimitan con la ayuda de observaciones, medida, dibujos y construcción de modelos.

En el tercer nivel ya se puede enunciar y entender de manera matemáticamente correcta todo tipo de propiedades matemáticas.

La *clasificación* en el primer nivel se hace considerando semejanzas o diferencias físicas globales entre sólidos o atributos visuales. En el segundo nivel la clasificación puede ser de dos tipos: clasificaciones-particiones o clasificaciones inclusivas. Las clasificaciones-particiones se establecen considerando propiedades geométricas de los sólidos cuando los criterios tienen componente fuertemente visual o centran la atención en la regularidad o el número de lados del polígono de las bases.

En el tercer nivel la clasificación hace referencia a clasificaciones lógicas de los sólidos –inclusivas-exclusivas– establecidas con propiedades o relaciones ya conocidas, formuladas con precisión matemática. Ya se pueden establecer las relaciones entre las familias por el hecho de que se haya observado que determinadas familias verifican las propiedades de otra.

COMUNIDAD DE PROFESORES

Nickerson y Moriarty (2005) y Huang y Bao (2006) señalan que el trabajo en comunidades profesionales de docentes contribuye con su crecimiento profesional, además de favorecer la reflexión sobre su propia práctica con la finalidad de llegar a nuevos planteamientos de actividades para la enseñanza. Fried y Amit (2005) reportan resultados similares para su experiencia en la planeación y puesta en práctica de lecciones implicando profesores que enseñan matemáticas en distintos grados escolares. Por su parte, Climent y Carrillo (2003) resaltan la importancia de la constitución de pequeños grupos de profesores e investigadores-formadores que propicien el desarrollo profesional de los docentes y fortalezcan los resultados asociados con la investigación en ese renglón.

Un elemento en común que se puede destacar de las experiencias referidas es la incorporación de especialistas en matemáticas en las comunidades constituidas o el apoyo externo y directo a los profesores participantes por personal experto en los temas que eran motivo de estudio. Esto garantizaría que al menos las dificultades que se enfrentan en relación con la complejidad del contenido fueran disminuidas y propiciaran un mejor diseño de actividades de aprendizaje.

Aquí cabría plantearse: ¿cuáles serían los resultados que se obtendrían en la constitución de una comunidad exclusiva de profesores de primaria que tuviera como propósito ampliar sus objetos mentales, de manera específica en lo relacionado con la geometría de los sólidos?

Bajo esta perspectiva, se decidió constituir una comunidad de cuatro profesores de primaria [4] con la intención de propiciar un espacio de trabajo geométrico que estuviera centrado en el análisis y la reflexión en torno a los contenidos escolares asociados con la geometría de los sólidos de la escuela primaria en México. Se esperaba que la experiencia llevada a cabo dotara a los participantes de diversos elementos, particularmente el relacionado con su conocimiento de la materia.

En cuanto al tipo de experiencias que se pusieron en práctica, el contenido geométrico para su estudio en la comunidad y los procesos matemáticos a tomar en cuenta se definió a partir de los resultados del análisis del ETG de referencia para la escuela primaria en México. Como puede derivarse de dicho análisis, el contenido geométrico que es motivo de estudio para la primaria se relaciona principalmente con los prismas y pirámides rectas en tanto que los procesos considerados fueron: clasificación, descripción e identificación. Se añaden también tareas de construcción a partir del doblado de papel, así como la que se sustenta en la composición de poliedros generados con otros cuerpos geométricos, lo que se ubica en las relaciones de composición y descomposición. De ahí que, las distintas actividades diseñadas para la experimentación en la comunidad de docentes versen casi exclusivamente sobre el estudio de dicho tipo de cuerpos y procesos matemáticos.

La comunidad se reunía con una periodicidad quincenal. La actividad principal era la resolución de tareas asociadas con la geometría de los sólidos, a partir de las cuales los profesores participantes hacían uso de su ETG personal, reflexionaban acerca de éste mediante un intercambio de experiencias, así como de un análisis de la tarea resuelta.

Las sesiones de trabajo fueron video-grabadas con la intención de contar con un registro audiovisual, dicho material fue el elemento primordial a partir del cual se llevaron a cabo transcripciones de cada una de las jornadas para realizar el análisis correspondiente.

En el siguiente apartado se ilustra el desempeño de los docentes relacionados con dos procesos matemáticos: la clasificación y la descripción.

RESULTADOS

Las sesiones de trabajo en la que se llevó a cabo la experimentación con la comunidad de profesores fueron seis. La mayor parte de ésas se ubican en el uso de diferentes modelos de sólidos geométricos, a excepción de la primera en la que se emplean mayormente objetos del entorno. Para fines del presente documento, se detallarán algunas de las actividades que fueron propuestas en la comunidad relacionadas con los procesos matemáticos clasificación y descripción.

Clasificación

La idea que orientó el uso de la clasificación en la primera sesión era propiciar la reflexión de los participantes de la comunidad de práctica acerca de su ETG personal relacionado con sus propios conocimientos sobre geometría de los sólidos; por esa razón, la actividad que se propone es la clasificación de diversos objetos. Una lista de los materiales utilizados se muestra en la Tabla 1.

La realización de la tarea permitió caracterizar las estrategias que emplean los profesores para llevar a cabo la organización del material, así como la identificación de los objetos mentales que ellos han constituido como parte de su historia de formación académica personal y de su experiencia en la enseñanza de la geometría de los sólidos.

Luciana, profesora de tercer grado de primaria, y Patricio, profesor de sexto grado, realizan tres intentos para la organización de los materiales; el primero de ésos lo hacen de manera individual y los dos restantes en interacción.

Los criterios que usa Luciana para la organización de los materiales son de distinta índole; en el primer momento ella explica que los separa de acuerdo con una función que les asigna y que se deriva principalmente de su experiencia: (1) objetos que son empleados principalmente en juegos de azar, las perinolas de toma todo y los dados con puntos; (2) sólidos geométricos de madera, les adjudica una función de apoyo a la enseñanza, Luciana lo asocia con su trabajo, ya que dice *para mí, pues es material didáctico*; (3) cajas, aunque no indica el uso de las mismas, uno puede suponer que se refiere al empleo que comúnmente se hace de ellas, de recipiente; (4) dos brújulas, les asigna la denominación *instrumentos… de medición* y, (5) objeto que no le encuentra utilidad alguna.

Prismas	4 perinolas de toma todo; 5 dados con puntos; Prisma octangular de base irregular de madera; Prisma triangular de madera; Cubo de madera; Prisma cuadrangular de madera; Botella de vidrio con forma de prisma hexagonal; Caja de hot cakes; Frasco de chiles con forma de prisma hexagonal; Reloj de pared; 2 cajetillas de cigarros; Regleta de madera; Caja de medicina; Cubos de unicel; Muñeco Bob Esponja.
Pirámides	Pirámide cuadrangular de madera; Caja de toallitas húmedas; Caja de plástico de mantequilla.
Esferas	Esfera; Llavero con forma de balón de futbol.
Cilindros	Cilindro de madera; Botella de yogur para beber; 3 frascos de pintura vinílica; Reflector; Instrumento musical indígena elaborado a partir de tronco de árbol.
Conos	Recipiente de yogur.

Tabla 1: Clasificación de los objetos del entorno considerados en la sesión 1, a partir de sus semejanzas con los sólidos geométricos

El ETG personal de Luciana se ve influenciado por el ETG de referencia, que al parecer, se encuentra desvinculado de la geometría de los sólidos. Sin embargo, se puede apreciar que a partir de la interacción con Patricio, que se pone de manifiesto en los dos intentos restantes, influye para que el ETG de referencia sea recuperado a partir de su experiencia relacionada con los sólidos geométricos.

Patricio sugiere a Luciana realizar un nuevo intento considerando criterios geométricos. El que usa la profesora lo denomina como lo *básico* y obtiene las siguientes colecciones: (1) cuatro perinolas de toma todo y un prisma recto con bases octágono irregular; (2) cinco dados con puntos; (3) cajas excepto la caja de plástico de mantequilla; (4) caja de plástico de mantequilla; (5) reflector, tronco de árbol y cilindro recto de madera y, (6) prisma recto triangular, pirámide recta cuadrangular y un cono, los tres de madera.

Aunque Luciana no aclara a lo que se refiere como *lo básico*, de acuerdo con lo realizado y explicado por ella, se puede suponer que centra la atención en la forma de los objetos en los primeros cinco grupos: (1) objetos con caras bases de más de cuatro lados; (2) cubos; (3) prismas rectangulares; (4) pirámide rectangular truncada y, (5) cilindros. Para el grupo (6) comenta que *terminan en pico*, refiriéndose al ápice de la pirámide y el cono y a una arista lateral del prisma triangular.

Aunque ya se puede observar una recuperación del ETG de referencia para el uso de los conocimientos relacionados con la geometría de los sólidos del ETG personal de la docente, sumado con los intentos realizados por Patricio en la separación de los objetos de manera simultánea, todavía se identifican que se enfrentan algunas dificultades para que los criterios de separación se correspondan de manera más directa con algunas familias de sólidos, como el caso de los cubos, prismas rectangulares, prismas hexagonales y el octagonal como una sola clase, la de los prismas.

Descripción

Algunas actividades relacionadas con el proceso matemático describir se plantearon en las sesiones tres y cuatro con resultados poco útiles, por esa razón se optó por diseñar tareas orientadas hacia los distintos niveles de análisis que caracterizan a la descripción para las sesiones cinco y seis.

En éstas dos últimas se emplearon tablas en las que los participantes tenían que ir anotando las características de los prismas para el caso de la quinta sesión y de las pirámides para la sexta. La integración de dicho instrumento se hizo a partir de los elementos que Guillén (1997) considera en la experimentación que llevó a cabo con estudiantes de magisterio.

La descripción a nivel de los elementos que se tomaron en cuenta son: 1. forma de las caras; 2. número de caras; 3. número de vértices, y 4. número de aristas. A nivel de la estructura, desde lo local se consideró: 1. orden de los vértices; 2. tipo de caras que concurren en un vértice; 3. tipo de caras que bordean una dada. La actividad se complementó integrando algunas propiedades de los sólidos como: 1. altura del poliedro; 2. caras iguales; 3. aristas iguales; 4. diagonales del poliedro; 5. diagonales de las caras; 6. paralelismo, y 7. perpendicularidad.

Para la quinta sesión se usaron esqueletos de cubo donde cada una de las varillas posee lengüetas que son útiles para trabar ligas y se denominan geoespacios, en tanto que para la sexta sesión se usaron modelos huecos de diversas pirámides rectas.

Tanto para la descripción de los prismas rectos como de las pirámides rectas que se ubican a nivel de los elementos fueron hechas con suma facilidad. Se piensa que el ETG personal de los docentes se ha visto influido por ese tipo de reflexión, así como el ETG de referencia establecido en el curriculum desde donde elaboran el ETG adecuado, de ahí que ese tipo de descripciones no representen mayor dificultad para los participantes.

Con respecto al análisis a nivel de estructura, en lo local, los participantes enfrentan algunas conflictos en los primeros intentos, sobre todo con el prisma recto triangular y el prisma recto cuadrangular, que fueron disminuyendo cuando se centra la atención en el prisma recto pentagonal y en el prisma recto hexagonal. Esto puede deberse a que la experiencia con los primeros, facilitó su comprensión en la resolución de los indicadores propuestos en los dos últimos análisis llevados a cabo.

Algunas de las dificultades que enfrenta la comunidad de docentes con respecto al conteo de las diagonales del espacio de algunos prismas rectos y la forma en que lo resuelve la comunidad se ilustran a continuación.

Con relación al prisma recto cuadrangular, Luciana manifiesta que son veinticuatro diagonales del espacio, pues si ella las 've' por una cara son cuatro, al ser seis las caras, en total dan veinticuatro:

Luciana: Bueno, es que, yo hago esto (muestra su cubo con dos ligas colocadas en las diagonales del espacio), y entonces bueno, obviamente de aquí a acá (señala una de los espacios en los que debería ir una liga) y de aquí a acá (señala el otro espacio vacío en el que deberá colocarse una liga). Yo te digo, aquí hay cuatro (coloca su cubo de frente y con un movimiento de su mano indica las cuatro diagonales que se verían desde esa perspectiva), hay cuatro (gira su cubo hacia la derecha quedando frente a ella la cara que se encontraba al lado izquierdo y hace el mismo movimiento con su mano para indicar las cuatro diagonales que se verían desde esa otra perspectiva).

Ante la explicación proporcionada, se le insta para que coloque las diagonales del espacio en el artefacto, pudiendo constatar de esa manera que las diagonales son cuatro.

Para determinar las diagonales de las caras de un prisma recto pentagonal, los profesores parten de la idea que de cada uno de los vértices se trazan dos diagonales del pentágono, al tener cinco vértices, las caras bases entonces son diez diagonales por cada cara base y diez de las caras laterales obteniendo 30 diagonales de las caras del poliedro.

Patricio manifiesta algunas dudas sobre el resultado y elabora un dibujo como el que se muestra en la Figura 1. Primero traza las dos diagonales que se representan con las líneas continuas, después dibuja las dos diagonales que se simbolizan con guiones, para perfilar finalmente la diagonal que se constituye con guiones y puntos. La comunidad se da cuenta que el pentágono sólo tiene cinco diagonales, llegando a la conclusión que veinte es la cantidad de diagonales de las caras para el prisma recto pentagonal.

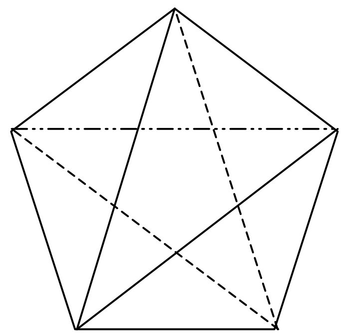


Figura 1. Diagonales del pentágono

De acuerdo con el procedimiento seguido para el prisma recto pentagonal, en el caso de hexágono los docentes han comprendido que la forma para determinar el número de diagonales de un polígono regular, pues algunas de ellas ya se encuentran trazadas. En esa dirección, el cálculo relacionado con las diagonales de las caras del prisma recto hexagonal se facilita.

Patricio: Fueron diagonales del poliedro, ¿verdad? Dieciocho. Diagonales de las caras.
Luciana: Pues son, según yo son nueve del hexágono.
Patricio: Dieciocho del poliedro.
Arnulfo: Sí, diagonales del espacio son dieciocho, pero de las caras.
Patricio: ¡Ajá!
Arnulfo: Una, dos, tres. Igual de cada punto parten tres.
Patricio: Sí. Ocho, nueve.
Arnulfo: Son nueve ¿no? son nueve diagonales de las caras.
Patricio: Son nueve. De una cara.
Luciana: De una.
Patricio: Sí.
Arnulfo: Dieciocho, igual.
Luciana: Pero faltan las laterales.
Patricio: Faltan las laterales
Arnulfo: Ah dieciocho, seis por dos doce son treinta.
Patricio: (…)
Arnulfo: Dieciocho y doce.
Patricio: ¡Ajá!
Arnulfo: Son treinta.
Patricio: (…)
Arnulfo: Ahora es más rápido.

El procedimiento que habían seguido los docentes, como ellos mismo lo expresan, se convierte en algo más evidente desde el cual se pueden omitir algunas referencias, lo que lo hace más ágil.

CONCLUSIONES

El trabajo desarrollado en la comunidad, así como el análisis practicado al mismo, han proporcionado elementos para aproximar algunas conclusiones al respecto. Para ello se consideran los rubros implicados en la exposición de los resultados: trabajo colaborativo, procesos matemáticos.

Con relación al trabajo colaborativo, lo que se puede destacar se enuncia en los siguientes términos:

El trabajo entre pares facilitó el intercambio de ideas. El hecho de que todos los participantes fueran profesores de primaria los hacía tener referentes similares en el plano del conocimiento disciplinario. Las dificultades que enfrentan en el análisis de los sólidos cuando se implican en un nivel de estructura, tanto en lo local como en lo global;

La influencia que se ejerce en el otro par en distintos momentos de la experiencia. La concurrencia en un punto de trabajo, así como el intercambio de ideas favorece que las estrategias o los procedimientos usados por uno de los participantes, sean retomados por los otros en momentos posteriores. En el análisis de los prismas rectos, una vez que se identifica la forma de contar las diagonales de las caras de un prisma recto, se convierte en una herramienta que el grupo emplea para resolver casos posteriores;

La participación conjunta como posibilidad para ampliar los propios objetos mentales. La expresión verbal de los saberes, así como las estrategias de solución empleadas en la solución de las tareas, otorgó la posibilidad de incorporar a las propias concepciones elementos nuevos que las enriquecen. Cuando se detallan las características de un prisma recto en particular, o asociado con la familia de los prismas rectos en general, los docentes que no habían advertido algunas de ellas, las empleaban en periodos posteriores de esa misma actividad o cuando se implicaban en otra. Esto permitió por ejemplo, facilitar la solución de situaciones planteadas en contextos de descripción.

Para los procesos matemáticos, de acuerdo con el uso que se hizo en la comunidad de profesores, lo que se puede estimar es:

La clasificación como un recurso valioso para caracterizar el conocimiento geométrico de los participantes. La necesidad de identificar las semejanzas de algunos objetos, así como la justificación de los criterios que se asumen para la separación de las entidades, proporciona elementos para distinguir los saberes sobre los que el profesor se apoya para llevar a cabo la tarea sugerida. Asimismo, la clasificación proporciona elementos que facilitan la definición de una estrategia para resolver las distintas problemáticas que se enfrentan. La identificación de un uso de ideas elementales para la geometría de los sólidos, que pudo ser detectada en la tarea de clasificar diversos objetos del entorno, suministró información para orientar actividades posteriores, como la descripción de prismas y pirámides rectas.

La descripción como elemento fundamental para favorecer la ampliación de los objetos mentales. Éste proceso matemático se empleó en dos direcciones distintas. Una primera que permitiera caracterizar el conocimiento geométrico de los profesores y una segunda orientada a la ampliación de los objetos mentales de los participantes. La primera de ellas suministró muy poca información para los fines requeridos, sin embargo, cuando se usó para el análisis de algunos sólidos, se observó que facilitó el enriquecimiento de los objetos mentales, cuando los profesores fueron capaces de describir un objeto sin tenerlo presente;

En términos generales, se puede afirmar que el trabajo en comunidad de profesores que funcionan de manera autónoma, es un espacio que favorece la ampliación de sus objetos mentales.

Desde esta perspectiva, y en concordancia con lo expuesto por Nickerson y Moriarty (2005), el dominio del conocimiento matemático es una condición necesaria para el funcionamiento de la comunidad, pero no suficiente. Por lo que la perspectiva que se abre desde esta experiencia, permite vislumbrar nuevos caminos para el desarrollo profesional docente, retomando las propias necesidades.

Con las evidencias que se develan en este documento se puede concluir que el trabajo colaborativo entre profesores de primaria que actúan de manera autodidacta, voluntaria y a contra-turno representa una opción para el desarrollo profesional docente. Entre otras cosas, porque facilita el intercambio de ideas entre pares y favorece la ampliación de los objetos mentales sobre los contenidos escolares. Empero, sostener a lo largo del tiempo esta participación voluntaria de los docentes en una comunidad de práctica con esas características es complicado, debido principalmente a que se piensa que no se obtiene 'nada' a cambio por este esfuerzo en el contexto del programa de promoción instaurado en el sistema educativo.

NOTAS

1. El plan y los programas de estudio, así como otros documentos oficiales –libros de texto, avance programático, por mencionar algunos– que se encontraban vigentes durante la experimentación llevada a cabo en la comunidad de profesores fueron los que se reformularon durante la década de los 90.

2. "Al hablar de los *procesos matemáticos*… se centra la atención 'en las características que estas acciones tienen como componentes de la práctica matemática'" (Puig, 1996, pág. 15).

3. Los libros de texto gratuitos y los materiales de apoyo a la docencia vigentes durante el desarrollo de la investigación que se describe en este documento fueron los diseñados para la educación primaria en el marco del proyecto intitulado Modernización Educativa que tuvo lugar en México de 1988 a 1994 y estuvo vigente para la educación primaria hasta 2009.

4. La idea original, al igual que en la experiencia llevada a cabo por Fried y Amit (2005), era constituir un grupo de seis profesores, uno por cada grado escolar en que se divide la educación primaria en México, pero por diversas circunstancias, entre ellas, la asistencia a las reuniones de la comunidad y la videograbación de sus clases, propiciaron que algunos de ellos se retiraran de la experiencia propuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras, *Enseñanza de las ciencias,* vol. 21 (3), págs. 387-404.

Fielker, D. S. (1979). Strategies for Teaching Geometry to Younger Children. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 10, 1, págs. 85-133.

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 3, 2/4, págs. 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. (D. Reidel: Dordrecht).

Fried, M. y Amit, M. (2005). The Co-development and Interrelation of Proof and Authority: The Case of Yana and Ronit. En *Mathematical Education Research Journal*. Vol. 20, No. 3, págs. 54-77.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. (Síntesis, Madrid).

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*. (Tesis doctoral). (Universitat de València: Valencia). (Publicada en 1999 en la Col-lecció: Tesis doctorals en Microfitxes. Universitat de València. Valencia).

Guillén, G. (2004). *Algunas reflexiones sobre la geometría y su enseñanza: origen y desarrollo de una línea de investigación*. Apuntes. Conferencia dictada en el Departamento de Matemática Educativa. México, D. F. (11 de marzo de 2004).

Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática*, vol. 17 (2), pp. 117-152.

Huang, R. y Bao J. (2006). Towards a model for teacher professional development in China: introducing Heli. En *Journal of Mathematics Teacher Education*. 9:279-298.

Kindt, M. (1993). *Aspectos didácticos de Matemáticas. 4*. (ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza) págs. 67-91.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 16, págs. 9 – 24.

Nickerson, S. y Moriarty, G. (2005). Professional communities in the context of teachers'proffessional lives: a case of mathematics specialists. En *Journal of Mathematics Teacher Education*. 8:113-140.

Olvera, F. (2007). *La enseñanza de la geometría de los sólidos en la escuela primaria*. Manuscrito no publicado. (Proyecto de investigación doctoral), México: Cinvestav.

Olvera, F. (2013). *Comunidad de profesores. Un estudio de desarrollo profesional para aprender geometría de los sólidos a partir de la práctica*. Tesis doctoral, México: Cinvestav.

Olvera, F. y Figueras, O. (2010). Teacher's knowledge for teaching geometry ideas of solid. En: Pinto, M. M. F. y Kawasaki, T. F. (eds). *Proceedings of 34th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education,* Belo Horizonte, Brazil, Vol. 2, pág. 80.

Olvera, F., Guillén, G. y Figueras, O. (2008a). Solid Geometry in elementary school in Mexico. En Figueras, O., Cortina, J., Alatorre, S., Rojano, T. y Sepúlveda, A. (Eds). *Proceedings of de Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. Vol. 1, pág. 298. México: Cinvestav-UMSNH.

Olvera, F.; Guillén, G. y Figueras, O. (2008). Teaching geometry in elementary school. *En 11th International Congress on Mathematical Education (ICME 11)*. Monterrey, Nuevo Leon, México. http://icme11.org. (Recuperada el 9 de junio de 2010), Topic Study Group 12, Abstracts and Schedule.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. (Comares: Granada).

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En Rico, L. (ed.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (Horsori: Barcelona), págs. 61-94.

SEP (1993). *Plan y programas de estudio. Educación Básica. Primaria*. Conaliteg, México.

Seymour, F y Smith, P. (1943). *Solid geometry*. The Macmillan Company, New York.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction – the Wiskobas Project*. Dordrecht: D. Reidel.

Welchons, A.y Krickenberger, W. (1950). *Solid Geometry*. Revised edition. Ginn and Company, USA

EL PROFESOR EN EL MARCO DE LOS ETM: EL PAPEL DEL MTSK COMO MODELO DE CONOCIMIENTO

José Carrillo, Eric Flores-Medrano, Luis C. Contreras, Nuria Climent

Universidad de Huelva, España

En este trabajo reflexionamos sobre el rol del profesor en la articulación de los Espacios de Trabajo Matemático. En particular, nos centramos en el conocimiento del profesor y su papel en la creación y gestión de Espacios de Trabajo Matemático para su aula. Para el análisis del conocimiento del profesor, utilizamos el modelo denominado Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, del cual presentamos sus principales referentes y los distintos subdominios que lo componen. Ahondamos en cómo la noción de 'especializado' de este modelo nos permite interpretar los constructos de Espacio de Trabajo idóneo, personal y de referencia para el caso del profesor y en cómo estos constructos nos permiten ampliar el marco de referencia del modelo.

Palabras clave: *Espacios de Trabajo Matemático, Conocimiento especializado del profesor de matemáticas*

INTRODUCCIÓN

La noción de Espacio de Trabajo Matemático [ETM] (Kuzniak, 2011), derivada de la conceptualización sobre los Espacios de Trabajo Geométricos, supone un modelo explicativo del trabajo matemático del alumno en un marco escolar. En la configuración de sus elementos teóricos, se identifica el papel del profesor en la generación de un ETM. Como señalan Kuzniak y Richard (2014), la investigación didáctica, en el marco de una enseñanza que favorezca el desarrollo del trabajo matemático del alumno, debe interrogarse sobre este trabajo desde el punto de vista de la organización de la enseñanza por parte del profesor. En el tercer simposio Espacio de Trabajo Matemático se profundizó en distintos aspectos relacionados con el modelo teórico y su potencialidad como herramienta de análisis del quehacer del estudiante en el aula de matemáticas, el papel de las herramientas tecnológicas en la transformación de espacios de trabajo de los estudiantes, y en el propio trabajo matemático, así como en aspectos sociales e institucionales en la constitución de los ETM. Es en esta última temática donde se hacía mención más explícita al profesor, considerándose su formación como un pilar institucional fundamental. El reconocimiento de la necesidad de profundizar en la figura del profesor en el marco del ETM, ha llevado a que una de las temáticas de reflexión del cuarto simposio Espacio de Trabajo Matemático fuera la *génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor y las interacciones*.

Nuestra aportación se sitúa en comprender el trabajo matemático desde la perspectiva del profesor. En concreto en el papel del profesor, y en particular de su conocimiento, en la configuración del ETM idóneo, de la evolución de éste ajustándose a las restricciones locales y en cómo el profesor interpreta el ETM de referencia.

En lo que se refiere al conocimiento del profesor en relación con la enseñanza de la matemática, la especificidad de éste frente a otras disciplinas ha llamado la atención de la comunidad científica (Ponte & Chapman, 2006). Así, en el modelo denominado *Mathematical Knowledge for Teaching*, se señala la existencia de un tipo de conocimiento puramente matemático que es diferente para el profesor respecto a otros profesionales (Ball, Thames & Phelps, 2008). Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) plantean un modelo cuya noción de especialización en el conocimiento del profesor de matemáticas está compuesta de conocimientos de diferente naturaleza, que se diferencian en subdominios con fines analíticos. En este trabajo elegimos este último modelo, denominado *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* por su consideración del contenido matemático en sus diferentes subdominios. Describiremos con detalle cada uno de los elementos de este modelo y estableceremos cuál es la relación del modelo en su conjunto con las nociones de Espacio de Trabajo Matemático personal, idóneo y de referencia.

UNA VISIÓN GENERAL DE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

La noción de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) pretende mejorar la comprensión de los fenómenos didácticos en torno al trabajo matemático en el contexto escolar y está pensada para favorecer el trabajo de un grupo de aprendices resolviendo problemas matemáticos (Kuzniack & Richard, 2014).

En el marco teórico de ETM la noción de paradigma es esencial. Un paradigma se instituye cuando una comunidad de individuos acuerda formular problemas y organizar sus soluciones conforme a una determinada forma de entender las cosas (Kuzniack & Richard, 2014). El espacio de trabajo *paradigmático* que define esa comunidad se denomina ETM de referencia. En una institución escolar determinada, la resolución de un problema requiere la elaboración de un ETM idóneo para permitir a un alumno implicarse en la resolución del problema. Este ETM idóneo debe cumplir necesariamente dos condiciones: de un lado, permitir trabajar en el paradigma correspondiente a la problemática concreta; y, por otro lado, estar bien construido, en el sentido de que sus diferentes componentes estén organizadas de forma válida (Kuzniack & Richard, 2014). Quien concibe el ETM juega aquí un papel esencial de diseñador de un espacio de trabajo para sus usuarios potenciales. En clase, la concepción de este espacio de trabajo va a depender del ETM personal del profesor; y, puesto que el problema se le plantea a un estudiante, su tratamiento matemático por parte del mismo va a estar condicionado por el ETM personal del alumno; así, el ETM idóneo no es estático, se modifica por condicionantes locales (Kuzniack & Richard, 2014).

"De esta forma, el trabajo matemático en un marco escolar se puede describir gracias a tres niveles de ETM: la matemática considerada por la institución, que se describe en el ETM de referencia. Éste es desarrollado por el profesor hasta alcanzar un ETM idóneo que permite un establecimiento efectivo en clase y donde cada alumno trabaja para su ETM personal.

La elección y la organización de las tareas propuestas a los alumnos por los profesores son esenciales en la constitución del ETM idóneo. […] La observación de la actividad de los alumnos permitirá identificar sus ETM personales", y realizar los ajustes necesarios (p.9).

MTSK: UN MODELO DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Coincidimos con otros autores (cuyo pionero es Shulman, 1986, 1987) en que para la enseñanza de una materia (en este caso matemáticas) el profesor necesita un conocimiento específico, y asociamos esa especificidad a la enseñanza de la misma.

Para el análisis del conocimiento del profesor proponemos el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), en el cual consideramos, siguiendo la línea de Shulman (1986), dos grandes grupos de conocimiento: el conocimiento de las matemáticas y el conocimiento de aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje (conocimiento didáctico del contenido). Entendemos que la especificidad del conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática debe reflejarse en su conocimiento de contenido y su conocimiento didáctico del contenido. Incluimos asimismo las creencias, en las que no nos extenderemos en este artículo (Fig1).

Proponemos tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento matemático del profesor de matemáticas: el conocimiento profundo del contenido matemático en sí (el *conocimiento de los temas matemáticos*), de su estructura (*conocimiento de la estructura matemática*) y de cómo se procede y produce en matemáticas (*conocimiento de la práctica matemática*).

Conocimiento de los temas matemáticos

El conocimiento de los temas describe qué y cómo conoce el profesor de matemáticas los temas que va a enseñar; supone conocer de manera fundamentada los contenidos matemáticos (conceptos, procedimientos, hechos, reglas, teoremas, etc.) y sus significados. Integra el contenido que queremos que aprenda el alumno, con un nivel de profundización sustancialmente mayor.

El término *temas* se refiere a los contenidos provenientes de los bloques de conocimiento tradicionalmente considerados en matemáticas. Como referente, tomamos las áreas propuestas por el NCTM (2000) en los estándares matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad, los cuales están relacionados entre sí. Los temas son los componentes de estas grandes ramas y pueden variar de acuerdo al currículo de cada país.

En el conocimiento del profesor sobre los temas consideramos el conocimiento de los significados asociados al contenido, de los fenómenos que le dan sentido (algunos ligados a su origen), de las aplicaciones del contenido (en la matemática o en otras áreas), de las definiciones e imágenes de un concepto, de las propiedades y su fundamentación, de las representaciones del contenido y de los procedimientos.

Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre los distintos significados de la fracción; identificar, por ejemplo, que algunos de sus significados se relacionan de modo más natural con un tipo de representación (como el significado de operador con un modelo de representación discreto); conocer la definición del concepto de número racional y su relación con fracción y decimal; conocer distintos algoritmos para las operaciones básicas con fracciones y su fundamentación matemática.

En este subdominio integramos las relaciones intra-conceptuales (Fernández, Figueiras, Deulofeu & Martínez, 2011), al considerarlas como un conocimiento profundo del tema, más que relaciones con otros contenidos (relaciones inter-conceptuales, que, como veremos a continuación, estarán incluidas en el Conocimiento de la Estructura Matemática).

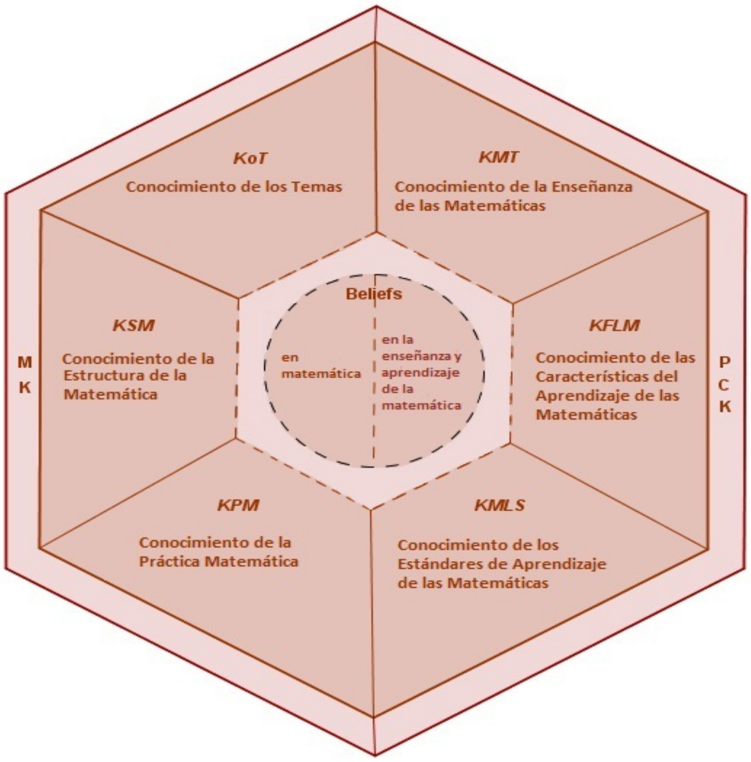


Fig1: Subdominios del MTSK

Nótese que se trata de un conocimiento fundamentado, que supone conocer el contenido desde un punto de vista más profundo del que corresponde al nivel de aprendizaje en cuestión. Además, se define de modo intrínseco (refiriéndonos exclusivamente al conocimiento matemático del profesor de matemáticas).

Conocimiento de la estructura matemática

El conocimiento de la estructura pretende recoger el conocimiento del profesor sobre la red de relaciones de contenidos matemáticos, lo que supone de hecho su conocimiento de la estructura del edificio matemático. Es el conocimiento sobre las relaciones entre distintos contenidos (Montes, Aguilar, Carrillo & Muñoz-Catalán, 2013), ya sea del curso que está impartiendo o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. Se trata específicamente de conexiones entre temas matemáticos. Se contemplan dos situaciones, no excluyentes entre sí, que generan conexiones: la temporalidad, como visión secuenciadora (no curricular) que genera conexiones de complejización y simplificación; y la delimitación de objetos matemáticos, que genera conexiones inter-conceptuales (Martínez, Giné, Fernández, Figueiras & Deulofeu, 2011).

Incluimos en este subdominio el conocimiento de ideas principales o transversales a distintos contenidos (como la idea de igualdad –con sus distintas caras como semejanza y congruencia), de relaciones entre distintos temas (por ejemplo, entre fracción y probabilidad) y de relaciones dadas por simplificación o complejización del tema (por ejemplo, entre los conceptos de escala numérica, de multiplicación de números naturales y de homotecia). Consideramos que el estudio del conocimiento sobre simplificación (relaciones que hace el profesor de un tema con contenidos más elementales) es un aporte distintivo del modelo en lo que respecta al estudio de cómo el profesor conecta temas matemáticos.

Conocimiento de la práctica matemática

Además de conocer los núcleos de contenidos matemáticos y sus relaciones, el profesor debe poseer conocimiento de cómo se genera conocimiento matemático, cuáles son las reglas de sintaxis de la disciplina. Este subdominio incluye, por ejemplo, conocimiento de cómo se define en matemáticas, la diferencia entre una demostración, una prueba y una comprobación, el valor en ésta de los ejemplos y en el planteamiento de una conjetura, de distintos tipos de demostraciones y su campo de acción.

Por ejemplo, supongamos que una clase de segundo ciclo de Primaria sobre el concepto de polígono, en la que el profesor plantea una actividad para construir una definición con los alumnos a partir de ejemplos y contraejemplos, se cierra con la siguiente definición de polígono: “figuras con lados rectos, ángulos y vértices; no tienen ninguna curva y son figuras planas y todos los lados tienen que estar unidos por los extremos”. El conocimiento del profesor sobre su corrección, desde lo que significa definir en matemáticas (entendiendo una definición como la expresión del conjunto mínimo de características comunes a un grupo, de modo que los objetos que no pertenecen a dicho grupo no cumplen alguna de dichas características), forma parte de este subdominio.

Hemos de aclarar que la *práctica* a la que se refiere este subdominio es la práctica matemática, no la práctica de la enseñanza de la matemática; y las formas de proceder se refieren a las formas de proceder en matemáticas (conocimiento de heurísticos para resolver problemas, conocimiento de las situaciones que requieren de un uso de pensamiento inductivo o de pensamiento deductivo), y no a saber utilizar los procedimientos con objetos matemáticos (lo cual está contemplado en el conocimiento del tema).

Por otro lado, en el conocimiento didáctico del contenido consideramos tres subdominios con los que reconocemos el conocimiento que tiene el profesor acerca del contenido como objeto de aprendizaje (*conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas*), como objeto de enseñanza (*conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*) y desde el punto de vista de lo que se debe/puede alcanzar en un determinado momento escolar (*conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas*).

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas

Tanto en este subdominio como en el que sigue hemos interpretado el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas en el sentido de que el conocimiento que nos interesa no es la intersección de conocimiento del contenido y de un conocimiento pedagógico general (referido en este caso a aprendizaje y, en el que sigue, a enseñanza), sino el conocimiento de cómo aprenden los estudiantes los contenidos matemáticos (o aspectos de la enseñanza intrínsecamente ligados a los contenidos matemáticos).

En este subdominio incorporamos conocer cuáles son los modos habituales de razonamiento de los alumnos en determinados contenidos, cuáles son sus dificultades, los aspectos que les resultan más comprensibles, así como cuáles les suelen resultar más y menos atractivos. Este conocimiento puede estar fundamentado en teorías personales del profesor o institucionalizadas. El profesor puede conocer teorías de aprendizaje -como el modelo de Sfard (1991), de comprensión de un objeto matemático- que sustenten su comprensión del aprendizaje de determinados contenidos matemáticos. Igualmente, damos cabida a que la fundamentación de su conocimiento tome la forma de teorías prácticas personales (Azcárate, 1999) que provienen en gran parte de su experiencia docente.

Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor acerca de qué significados de la fracción son más fáciles de comprender en general por los alumnos, qué errores suelen cometer cuando dividen fracciones, qué justificación del algoritmo convencional de la división de fracciones pueden comprender en general los alumnos de Primaria, o cómo pueden resolver determinados problemas, forma parte de este subdominio.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

Consideramos en este subdominio el conocimiento que tiene el profesor sobre modos de presentar el contenido y su potencial para la instrucción (incluyendo el conocimiento de ejemplos adecuados para cada contenido, intención o contexto determinado), así como el conocimiento de la potencialidad de los recursos y materiales didácticos respecto de la actividad matemática.

Los ejemplos y representaciones del contenido son considerados desde el punto de vista de su potencial para el aprendizaje (a diferencia de las representaciones consideradas en el conocimiento del tema, desde el punto de vista de su potencial matemático). Por ejemplo, la potencialidad de las regletas para representar fracciones de cara a la comprensión del concepto de fracción equivalente.

Al igual que en el subdominio anterior, puede ser un conocimiento fundamentado en teorías fruto de la investigación en Educación Matemática o en la observación y reflexión de la actividad matemática en el aula.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas

Recoge el conocimiento del profesor sobre lo que está estipulado que aprenda un estudiante y el nivel de profundidad y manejo con el que se espera que lo aprenda en un determinado momento escolar, así como secuenciaciones del contenido. Este conocimiento se puede fundamentar, además de en los documentos curriculares correspondientes, en otros documentos sobre estándares de aprendizaje e investigaciones que aportan recomendaciones al respecto.

El papel de las creencias del profesor en el MTSK

Somos conscientes de que la práctica del profesor tiene detrás una filosofía de las matemáticas que la respalda (Thom, 1973, citado en Ponte, 2012). Entendemos que esta filosofía contiene un conjunto de concepciones y creencias del profesor (Thompson, 1992) acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Dichas concepciones permean a su conocimiento en cada uno de los subdominios.

Buscamos construir imágenes cada vez más precisas que permitan interpretar la práctica del profesor a la luz de aspectos que influyen en ella basándonos en los conocimientos que sustentan dicha práctica. En ese sentido, interpretamos las concepciones del profesor en el sentido de que éstas pueden conformar un sistema que sea explicado en sí mismo (*Sensible System Framework* –Leatham, 2006). Somos conscientes de que las concepciones representan una predisposición a través de las acciones y que no pueden ser directamente observadas o medidas, solamente inferidas. Al igual que el resto de elementos en el modelo, las concepciones son consideradas con fines analíticos.

EL ROL DEL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR EN LAS INTERRELACIONES ENTRE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

En la figura 2 se muestra un esquema con el que presentaremos nuestras reflexiones alrededor del rol que tiene el conocimiento del profesor en la dinámica de conformación, generación o aprovechamiento de Espacios de Trabajo Matemático.

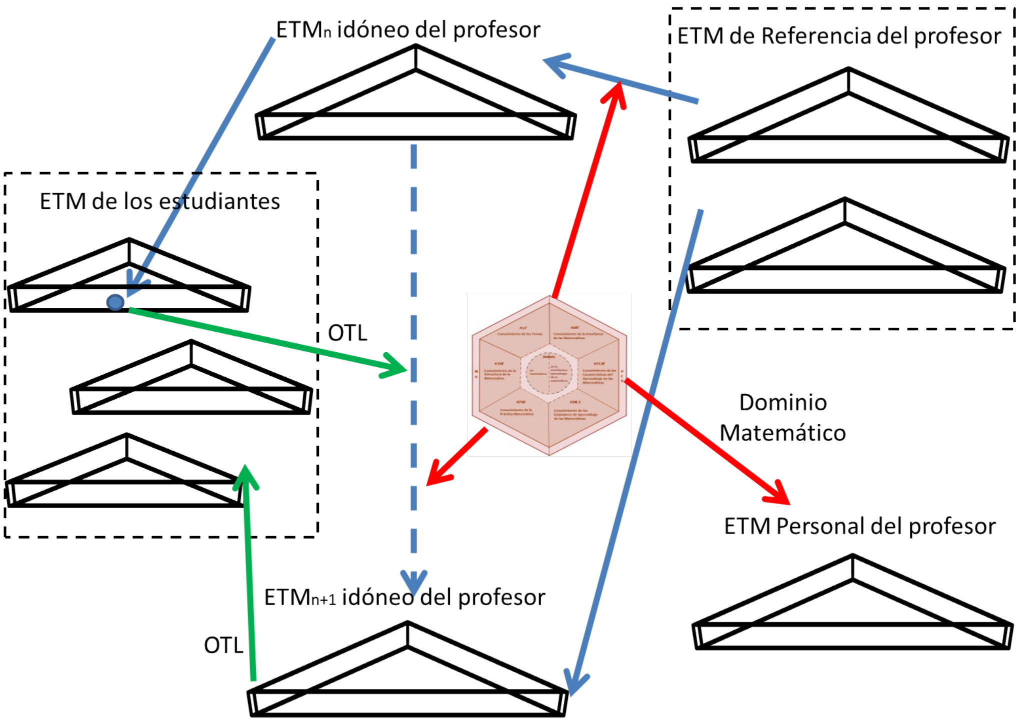


Fig2: Esquema de relaciones entre el MTSK y los Espacios de Trabajo Matemático

En primer lugar, decidimos simplificar el esquema del modelo ETM usando prismas triangulares cuyas bases representan el plano epistemológico y el cognitivo y las caras laterales representan los planos de razonamiento, comunicación y descubrimiento. Esto tiene la intención de señalar que los planos epistemológico y cognitivo son parte de un modelo analítico que trata de dar cuenta de procesos del trabajo matemático que se producen de manera integrada.

En segundo lugar, entendemos que el ETM de referencia puede proceder tanto del saber sabio o referente a la matemática, como de la concreción de este en un sujeto (en el profesor en este caso). Esto es, el profesor interpreta el ETM de referencia del saber sabio, con lo que podemos hablar de ETM de referencia del profesor. Además, cuando hablamos de ETM de referencia dibujamos varios (parte derecha) para ilustrar su carácter dinámico.

De ahí parte el esquema, de los ETM de referencia de los profesores, o del ETM de referencia de un profesor determinado. Este profesor, mediando su conocimiento profesional, transforma el ETM de referencia en el ETM idóneo en un momento determinado (en un curso, en una lección del curso, en una actividad concreta de un día concreto). En esta transformación interviene su conocimiento especializado, que puede ser modelizado a través del MTSK. El MTSK también interviene en el ETM personal del profesor, ya que su propio trabajo matemático tendrá potentes relaciones con el dominio del conocimiento matemático del MTSK.

El ETM idóneo va sufriendo cambios en función de los ETM personales de los estudiantes. Surgen, en la actividad del aula caracterizada por el trabajo matemático, y en función de los ETM de los estudiantes, oportunidades de aprendizaje (OTL en el esquema) que, con la influencia del conocimiento del profesor (MTSK), contribuyen a generar una nueva iteración del ETM idóneo del profesor. Este *nuevo* ETM idóneo también está influenciado por lo que es referencia para el profesor, y se revierte en los estudiantes como oportunidades para que estos aprendan.

En resumen, el papel que tiene el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la interacción entre los diferentes ETM en una dinámica amplia de práctica profesional (planificación, gestión, evaluación…) muestra especial relación con la transformación de los trabajos matemáticos referentes en idóneos, en la adaptación sucesiva de estos en nuevos espacios de trabajo matemático idóneos y en la propia conformación del ETM personal del profesor, aunque estas transformaciones y conformaciones no dependen exclusivamente del conocimiento.

CONSIDERACIONES FINALES

Parece evidente el papel del profesor en el diseño y gestión del ETM idóneo que propicie el trabajo matemático de los alumnos. El conocimiento del profesor juega a su vez un papel central en dichas tareas, de modo que modelos analíticos que pongan el foco en la especificidad de la matemática nos ayudarán a comprender cómo se configura dicho ETM idóneo. En ese sentido, el MTSK, al servir de herramienta para comprender el conocimiento del profesor que sustenta sus acciones, nos parece adecuado para explicar parcialmente el ETM idóneo del profesor. Del mismo modo, el ETM personal del profesor (esto es, el espacio de trabajo matemático en el que el profesor es hacedor de matemáticas) se ve directamente afectado por su conocimiento especializado, en especial en lo referente al dominio matemático.

Finalmente, una posible aportación a la interpretación de relaciones entre ETM y conocimiento del profesor, viene dada por la consideración de un espacio de referencia intermedio entre el determinado por el saber sabio y el ETM idóneo, el ETM de referencia del profesor. El MTSK del profesor (en sus dos subdominios – conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido) incide en su ETM de referencia y la transformación de éste en el idóneo.

En todos los casos, estamos considerando los ETM (de referencia, idóneo y personal) del profesor. Además, coherentemente con nuestra visión dinámica del conocimiento del profesor, estos ETM del profesor se muestran cambiantes en el tiempo, lo que hemos hecho explícito en la figura 2.

Aventuramos que el MTSK, al permitir estudiar el conocimiento del profesor relativo a su acción y a la especificidad del contenido matemático, puede contribuir a que comprendamos mejor los ETM (de referencia, idóneo y personal) de un profesor, así como las relaciones que se establecen entre ellos. Además, desde una perspectiva de desarrollo profesional, puede aportar explicaciones a cómo evolucionan dichos ETM.

En sentido inverso, el marco del ETM posibilita profundizar en las relaciones entre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y las acciones de enseñanza que éste sustenta, en un esquema más amplio donde se incorpora el saber sabio y los espacios personales de los alumnos, así como la diferenciación entre planos y génesis.

REFERENCIAS

Azcárate, P. (1999). El conocimiento profesional: naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, *8*, 111-138.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical Universitiy: Ankara, Turquía.

Fernández, S., Figueiras, L., Deulofeu, J., & Martínez, M. (2011). Re-defining HCK to approach transition En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the CERME 7* (pp. 2640-2649). Rzeszów, Poland University of Rzeszów: ERME.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Troisième symposium Espace de travail mathématique*, 7-12.Leatham, K.R. (2006). Viewing mathematics teachers' beliefs as sensible systems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *9*, 91-102.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-438). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Montes, M.A., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceeding of CERME8* (pp. 2985-2994). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Ponte, J.P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-96). Barcelona, España: Graó, de IRIF, S.L.

Ponte, & Chapman (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.). *Handbook of Research of the Psychology of*

Mathematics Education: Past, Present and Future. (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishing.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Thompson, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of Research. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: McMillan & NCTM.

¿CÓMO SE RELACIONA EL CONOCIMIENTO QUE TIENE EL PROFESOR ACERCA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS CON SU ENTENDIMIENTO SOBRE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO?

Eric Flores-Medrano, Dinazar Escudero-Avila, Miguel Montes, José Carrillo

University of Huelva, Spain

Esta investigación tiene por objetivo mostrar conexiones entre el conocimiento que tiene el profesor sobre el aprendizaje de las matemáticas y su entendimiento sobre elementos que conforman los espacios de trabajo matemático. Ejemplificamos dichas conexiones mediante el análisis de una actividad matemática propuesta por un profesor de secundaria. Las nociones de conocimiento son enfocadas desde la perspectiva del modelo analítico llamado Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. Las conclusiones se enfocan en las implicaciones que tiene esta faceta de conocimiento del profesor en la profundización del estudio del papel de este en los espacios de trabajo matemático.

Palabras clave

Características de aprendizaje, conocimiento especializado, espacio de trabajo matemático.

INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) se han desarrollado en cuatro temáticas específicas (Kuzniak & Richard, 2014). La primera es la profundización en la noción de ETM como modelo teórico y como herramienta de análisis del quehacer del estudiante en el aula de matemáticas. La segunda trata de analizar las potencialidades de incorporar herramientas tecnológicas para la transformación de espacios de trabajo de los estudiantes. En la tercera se ha estudiado el papel que tienen los aspectos sociales e institucionales en la constitución del trabajo matemático. Finalmente, la cuarta temática aborda el rol de la visualización y las representaciones en el trabajo matemático. Si bien la figura del profesor puede percibirse en algunas de estas temáticas, consideramos que es necesaria una mayor profundización en el papel de este en las diferentes funciones que puede desempeñar relacionadas con los Espacios de Trabajo Matemático: comprenderlos, analizarlos, promoverlos, evaluarlos…

En este artículo se analiza cómo influye el conocimiento que tiene el profesor sobre las características de aprendizaje de las matemáticas en la comprensión de los elementos del Espacio de Trabajo Matemático.

Para la delimitación de lo que entendemos por conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje de las matemáticas nos posicionamos en el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* [MTSK] (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013), el cual considera como uno de sus subdominios a dicho conocimiento. Elegimos este modelo ya que está centrado en los procesos de aprendizaje y no en el conocimiento sobre el estudiante en sí (Carrillo, Contreras & Flores, 2013), lo cual es compartido por el ETM (Kuzniak, 2011).

Mediante el análisis de una actividad matemática diseñada por un profesor, construimos relaciones entre diversos elementos del ETM (centramos nuestro interés en los polos y génesis) y una categorización del subdominio del MTSK denominado Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM, por sus siglas en inglés) basada en el *Mathematical Proficiency* (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

En las conclusiones ahondaremos en cómo este estudio teórico ayuda en la comprensión del papel del profesor en los Espacios de Trabajo Matemático.

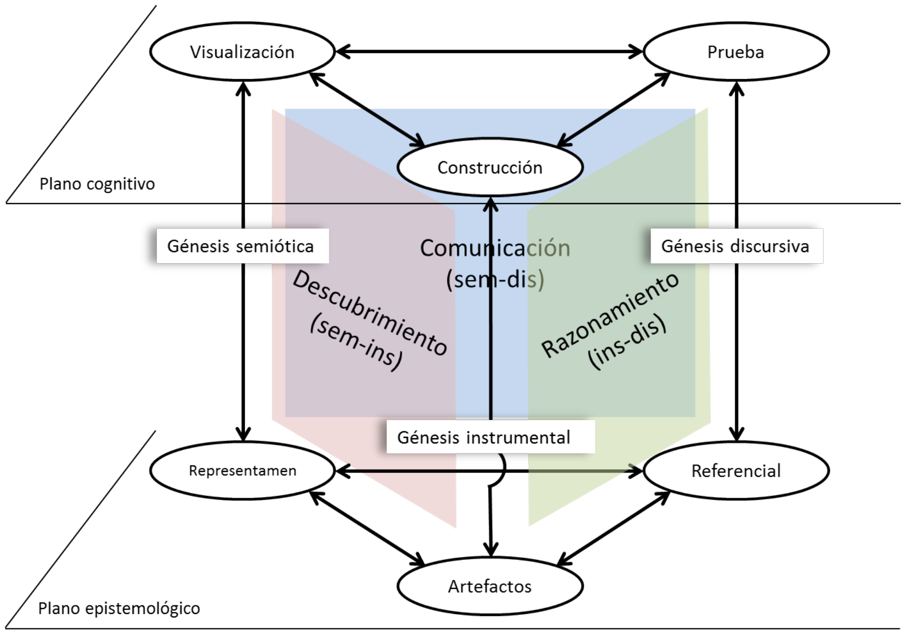
FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Esta investigación establece relaciones entre dos modelos teóricos de intereses diferentes. Se trata del modelo de Espacios de Trabajo Matemático [el cual describe un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven problemas matemáticos, (Kuzniak, 2011)] y el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* [sintetiza el conocimiento que es especializado para el profesor de matemáticas, en el sentido de que sólo tiene sentido para él (Carrillo, Contreras & Flores, 2013)]. En términos de Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello (2008), utilizamos una estrategia de coordinación para establecer conexiones locales entre elementos de ambos modelos. En esta sección describiremos dichos elementos, dejando para la sección de resultados la discusión de las conexiones que fueron construidas.

Espacios de Trabajo Matemático

La noción de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) tiene la finalidad de mejorar la comprensión de los fenómenos didácticos en torno al trabajo matemático en el contexto escolar y está pensada para permitir el trabajo de un grupo de aprendices resolviendo problemas matemáticos (Kuzniack & Richard, 2014). Consta de dos planos horizontales (uno cognitivo y el otro epistemológico) en los cuales se encuentran, respectivamente, tres polos. Estos polos están unidos a pares mediante génesis, de tal forma que generan tres planos verticales que bien pueden describir el tránsito entre las diferentes génesis (fig. 1). Los elementos que resultan de interés para este trabajo son las génesis y polos con los que se conforman los planos verticales (comunicación, descubrimiento y razonamiento) ya que, al proporcionar dinamismo al modelo, se relacionan con la idea de aprendizaje que se tiene en el MTSK.

El plano de comunicación se refiere al tratamiento, interacción y comunicación del contenido matemático que está siendo trabajado por una persona. Así, interrelaciona el referencial (conjunto de conocimientos teóricos) con la prueba a través de la génesis discursiva de la misma prueba, en la que el alumno "utiliza las propiedades en el referencial teórico para ponerlos al servicio del razonamiento matemático y de una validación" (Kuzniak & Richard, 2014, p. 10). Asimismo, para que el proceso de comunicación tenga consistencia, se considera que la persona establece una génesis semiótica, caracterizada como un proceso, que relaciona el *representamen* de un objeto y la visualización del mismo, "en el que se dota de significado a los objetos simbólicos del ETM, y les da su condición de objetos matemáticos operativos. Esta génesis garantiza la relación entre sintaxis, semántica y la función y estructura de los signos usados" (Kuzniak & Richard, 2014, p.10). De esta manera, el plano de comunicación queda definido como el tipo de interacción de la persona con el contenido en el que ha de establecer interacciones de tipo tanto



semiótico como discursivo.

Fig1: Planos y génesis del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak & Richard, 2014).

El plano de descubrimiento se apoya en la génesis semiótica e instrumental para identificar y explorar objetos en la solución de los problemas matemáticos (Kuzniak & Richard, 2014). De acuerdo con Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca y Mena-Lorca, (2014), la génesis instrumental se refiere a los mecanismos por medio de los cuales un artefacto se convierte en un instrumento y así puede integrarse en una persona con la finalidad de construir conocimiento matemático. Añaden que este proceso requiere de un reconocimiento de los alcances del artefacto para convertirlo en una herramienta matemática funcional para el individuo.

Finalmente, el tercer plano vertical del modelo corresponde al razonamiento, el cual "está fundado en la justificación de los descubrimientos, articulando las génesis instrumental y discursiva" (Kuzniak & Richard, 2014, p.10). Dichas génesis ya fueron descritas con anterioridad y se destaca, en este caso, el papel que tiene la justificación sobre el descubrimiento en el trabajo matemático.

Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas

Las tendencias actuales de didáctica y pedagogía general para el aula hacen casi evidente la necesidad que tiene el profesor de conocer aspectos relacionados con los procesos de aprendizaje de sus estudiantes (e. g. Mochón, 2010). En la investigación, esta necesidad se ha traducido en trabajos sobre las relaciones profesor-estudiante y estudiante-contenido, ambas necesarias en el proceso de enseñanza y aprendizaje (Serrano & Pons, 2008). Cada una de estas ha marcado una tendencia en lo que se refiere a los estudios del conocimiento del profesor de matemáticas. La primera (profesor-estudiante) pone en el centro el conocimiento que tiene el profesor acerca del estudiante como sujeto cognoscente, y la segunda (estudiante-contenido) pone en el centro el conocimiento que tiene el profesor del propio proceso de aprendizaje. Si bien en la práctica pudieran parecer imperceptibles las diferencias entre estas dos tendencias, con fines analíticos señalan un cambio importante.

Por ejemplo, el modelo MKT [*Mathematical Knowledge for Teaching*] (Ball, Thames & Phelps, 2008) considera el subdominio de Conocimiento del Contenido y los Estudiantes, que "*combina* conocimiento acerca de los *estudiantes* y conocimiento acerca de *matemáticas* [… algunas tareas del profesor] requieren una interacción entre un entendimiento específico de la matemática y *familiaridad con los estudiantes* y sus pensamientos matemáticos" (p. 401). En esta cita hemos resaltado elementos que ponen de manifiesto el énfasis en el conocimiento que el profesor tiene acerca del estudiante como aprendiz de matemáticas, lo cual se corresponde con el estudio de relaciones profesor-estudiante. Un análisis realizado con este marco requiere, entre otras cosas, de elementos de corte psicológico y antropológico que permitan analizar las interacciones del profesor con el *colectivo estudiantes* y el conocimiento que se desprenda de dichas interacciones.

Por otro lado, en el MTSK el subdominio encargado del estudio de los conocimientos sobre las características de aprendizaje inherentes al contenido matemático, el KFLM, engloba el conocimiento que tiene el profesor sobre los procesos de aprendizaje matemático atendiendo a la relación estudiante-contenido. Evita poner al estudiante como el foco principal del proceso al centrarse en el contenido matemático como objeto de aprendizaje. Esto no implica que se quite importancia al papel del estudiante en el proceso, sino que interesa el conocimiento relacionado con las características de aprendizaje derivadas de su interacción con el contenido matemático y no las características del estudiante en sí mismo. Desde esta postura epistemológica, en la que el conocimiento que interesa analizar es aquel que está normado por el propio contenido matemático, en este trabajo utilizamos una categorización interna al subdominio que nos permite organizar y comprender el KFLM para relacionarlo con los elementos del ETM.

Categorización del KFLM basada en el *Mathematical Proficiency*

Encontramos diversas aproximaciones para explicar los procesos de aprendizaje de la matemática. Kilpatrick *et al*. (2001) muestran una profunda reflexión sobre cómo fomentar el aprendizaje de los estudiantes sobre diversos contenidos. Estos autores proponen el término *Proficiency* (que, para mantener el sentido que ellos le dan, traduciremos como competencia), el cual se entiende como el conjunto de habilidades, conocimientos y actitudes necesarias para aprender matemáticas. Así, Kilpatrick *et al*. (2001) proponen cinco componentes, que denominan *hebras* (del inglés *strands*), para abordar la competencia del alumno: comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y disposición productiva.

El *Mathematical Proficiency* es considerado por Kilpatrick, Blume y Allen (2006) en el *Mathematic Proficiency for Teaching*, definiendo un subdominio orientado a cómo el profesor fomenta cada una de estas hebras, para lo cual, indudablemente, habrá de estar él mismo en cierto estadio superior de desarrollo de su cognición en las mismas.

La categorización que presentaremos a continuación se basa en el conocimiento que tiene el profesor acerca de la competencia de los estudiantes, utilizando, para ello, las cinco hebras antes mencionadas. Esta categorización no implica que el profesor deba conocer directamente el modelo teórico, sino que la modelización que suponen las hebras en relación con el aprendizaje de los alumnos es útil para el investigador al momento de enfocar sus esfuerzos analíticos a distintas dimensiones del conocimiento del profesor de las características del aprendizaje de sus alumnos.

Consideramos que la categoría *Comprensión Conceptual de los Estudiantes* emerge de la necesidad del profesor de comprender el grado de entendimiento relacional (Skemp, 1987) que sus propios estudiantes demuestran al trabajar diferentes conceptos. El nombre de la categoría está enunciado en plural (los estudiantes), lo cual es acorde con la focalización en el conocimiento del objeto a aprender y no del hipotético sujeto que lo aprenderá (aunque no cierra la opción a tipos de comprensión normados por variantes socioculturales). Un ejemplo de esta categoría es el conocimiento que tiene el profesor acerca del significado que asocia un estudiante de bachillerato al concepto de límite como regla de cálculo. Otro ejemplo es el conocimiento del profesor acerca de las fenomenologías que asocia un estudiante de los primeros años de secundaria o de los últimos de primaria a la división.

La categoría *Fluidez Procedimental de los Estudiantes* emerge de la parte procedimental del conocimiento matemático de los estudiantes. Incluye el conocimiento del profesor acerca de cómo el alumno interactúa con los diferentes procedimientos, qué grado de flexibilidad, eficiencia o precisión tiene en su uso, así como de la elección que hace de estos. Por ejemplo, el conocimiento que tiene el profesor de los errores que genera el cero en el cálculo de sumas (Dickson, Brown & Gibson, 1991). Esta categoría no solo engloba el conocimiento de los errores o dificultades habituales de los alumnos en el manejo de algoritmos, sino también de procedimientos alternativos, y del grado de habilidad que los estudiantes muestran en sus estrategias procedimentales. Un ejemplo puede encontrarse en Montes, Contreras y Carrillo (2013), donde un profesor sugiere a su estudiante que relacione la simplificación de fracciones algebraicas con la simplificación de números racionales, ya que consideraba que la fluidez procedimental sobre los números racionales era transferible al nuevo contenido.

Una de las concepciones más desarrolladas es que las matemáticas se construyen a través de la resolución de problemas (Schoenfeld, 1992). Con esta base se considera la categoría *Estrategias de Abordaje de los Alumnos de los Problemas Matemáticos*, con la que se reconoce la necesidad de que un profesor conozca diferentes estrategias heurísticas que sus alumnos seguirían a la hora de enfrentarse a determinados problemas. Este conocimiento estará íntimamente ligado al conocimiento de la comprensión conceptual y la fluidez procedimental de sus alumnos, pero entendemos que el hecho de conocer diferentes estrategias de abordaje de problemas constituye un núcleo estructurador del conocimiento del profesor en las dos categorías anteriores. Estos conocimientos sobre estrategias de resolución de problemas se construyen con base en la propia experiencia matemática o en cursos de formación, en los que se usen diferentes referentes sobre el tema (e. g. Billstein, Libeskind & Lott, 2009). También se considera en esta categoría el del tipo de abordaje que suelen hacer los alumnos ante situaciones matemáticas concretas.

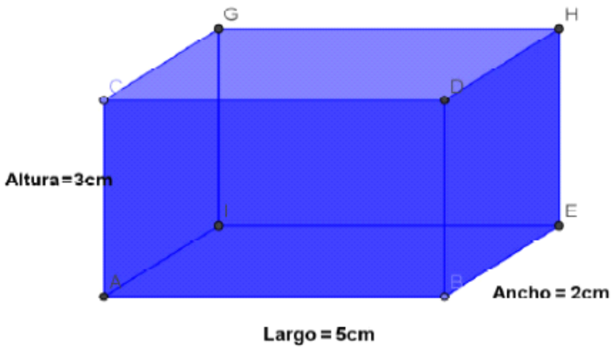
Con la categoría *Formas de Razonar de los Estudiantes* reconocemos que, además de saber cómo los alumnos conocen y usan los conceptos, procedimientos o razonamientos heurísticos, un profesor puede ser consciente del grado de dificultad que representa para sus estudiantes razonar lógicamente, reflexionar, verbalizar sus explicaciones o justificarlas. No sólo debe ser consciente de la validez de un razonamiento de un alumno, sino que ha de ser capaz de recrear el procedimiento lógico por el cual un alumno llega a cierta conclusión. Por ejemplo, un profesor debería saber que, en cierto curso, sus estudiantes pueden tender a aceptar un ejemplo como demostración de una propiedad, o usar resultados matemáticos en elementos que no cumplen las propiedades requeridas para ellos (e.g., proporcionalidad en la relación área-perímetro). Asimismo, consideramos en esta categoría el conocimiento que tiene el profesor del grado de validez que tenderán a alcanzar los argumentos de sus estudiantes, así como de diferentes razonamientos que pueden emplear ante una situación concreta. Pensamos, por ejemplo, en los distintos argumentos que surgen al discutir la justificación de la igualdad *0.999…=1* reportados en Njomgang y Durand-Guerrier (2013). En esta categoría estaría el conocimiento del profesor sobre esos posibles argumentos.

En la categoría *Conocimiento acerca de las Actitudes de los Alumnos frente a las Matemáticas* consideramos el conocimiento que los profesores tienen acerca de la utilidad que sus alumnos atribuyen a las matemáticas, así como de aspectos emocionales de los alumnos hacia esta disciplina. Este campo, en auge en las investigaciones en Educación Matemática, considera que los afectos tienen un papel importante en la enseñanza de las matemáticas (Charalampous & Rowland, 2013), habiendo focalizado habitualmente en aspectos negativos de los mismos, como la ansiedad matemática, miedo al fallo o la evitación de las matemáticas. El conocimiento de estos aspectos lleva al profesor a adoptar el papel de gestor de las emociones y actitudes de sus alumnos frente a las matemáticas y su aprendizaje.

RESULTADOS

A continuación mostramos el análisis de una viñeta con la que ejemplificamos relaciones entre elementos del ETM y las categorías establecidas para el KFLM. Se trata de mostrar cómo el conocimiento que tiene el profesor sobre las características de aprendizaje de las matemáticas puede influir en su comprensión sobre el ETM.

David (seudónimo) es un profesor de matemáticas de secundaria que diseña un recurso didáctico para abordar las funciones lineales. Propone una serie de preguntas con las cuales pretende que los estudiantes analicen el fenómeno de llenado de un recipiente mediante flujo continuo, establezcan relaciones entre las variables y modelen dicho fenómeno para encontrar una función que describa su comportamiento.



A continuación mostramos una resolución simulada de la actividad que propone el profesor, que nos ayuda a reflexionar sobre el trabajo matemático que realiza en ella el estudiante y relacionarlo con los elementos de conocimiento de las características del aprendizaje que David evidencia.

David (D): Se tiene un tanque de forma rectangular cuyo volumen se muestra en la figura, y se piensa llenar con agua con un flujo determinado de 1 cm^3 por segundo.

D: Se pretende analizar la situación para poder establecer los diferentes vínculos, y desarrollarla.

D: Atendiendo a la situación presentada, analizar y responder:

D: ¿Cuál cree que es la variable independiente en la propuesta?

Estudiante (E): El tiempo, el volumen del recipiente, la velocidad de caída del flujo

D: ¿Cuál es la variable que depende de otra?

E: La altura del agua que va cayendo en el recipiente depende de la velocidad a la que cae el flujo, de las dimensiones del recipiente y del tiempo que haya transcurrido.

D: Construir una tabla de datos, donde las variables son altura y tiempo.

E:

altura	tiempo
0	0
1	10
2	20
3	30

tiempo	altura
1	1/10 $^1/_{10}$
2	2/10
3	3/10
4	4/10

D: ¿Se podría encontrar otras parejas de variables, y cuáles serían?

E: Volumen-tiempo, altura-tiempo, tiempo-velocidad de flujo, velocidad de flujo-volumen

D: Con los datos obtenidos en [las tablas], ¿podría modelarse el problema? Explique.

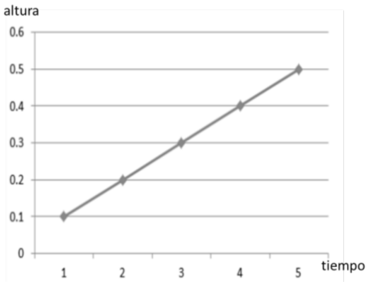
E:

tiempo	altura	1ra diferencia
1	$^1/_{10}$ $^1/_{1}$	$^1/_{10}$
2	$^2/_{10}$	
3	$^3/_{10}$	
4	$^4/_{10}$	$^1/_{10}$

E: El fenómeno puede modelarse con una función lineal. Esto se sabe porque a través del método de la primera diferencia, podemos observar que las variaciones en la altura del llenado son constantes. O podría graficarse los datos de la tabla para analizar el comportamiento del fenómeno.

D: ¿Cómo debe ser la representación gráfica de la situación?

E:



D: ¿Cuál es el modelo establecido?

E: $a = \frac{t}{10}$

La secuencia que hemos descrito corresponde a un trabajo matemático guiado por parte del profesor, pero en el que el estudiante tiene la posibilidad de mostrar en sus respuestas los razonamientos, fluidez procedimental, comprensión conceptual y estrategias para abordar los incisos concretos de cada parte de la actividad.

A continuación relacionaremos cada uno de los polos y génesis que conforman el ETM del estudiante en el desarrollo de la actividad con el KFLM que evidencia David.

El fenómeno de llenado de un recipiente mediante un flujo constante con el que comienza el problema es el **representamen** en esta actividad. En sus instrucciones el profesor busca transformar cada uno de los elementos del fenómeno en variables operables (incluso se detecta cuáles son operables y cuáles no lo son) mediante el trabajo en un registro algebraico. Este uso del registro algebraico para dicha transformación da cuenta de una **génesis semiótica** que da el estatus de objetos matemáticos a lo que antes eran partes del recipiente y otras variables físicas, pasando así del plano epistemológico al cognitivo para llegar a la **visualización**.

El conocimiento que tiene el profesor sobre la **comprensión conceptual** acerca de las características de las relaciones y funciones matemáticas que establece el estudiante, le ayudaría a entender cómo el estudiante matematiza los elementos del fenómeno para transformarlos en variables operables.

Por otro lado, el profesor pide el uso de algunos **artefactos** de naturaleza matemática: comparación entre variables, discernimiento entre variable dependiente e independiente. Estos artefactos se transforman por medio de una **génesis instrumental** la cual está evidenciada en la búsqueda de relación entre variables (la altura y el tiempo en este caso), con la finalidad de llegar a la **construcción** de tabulaciones y distintas representaciones de una función para describir el fenómeno.

Un caso que se destaca es la construcción que hace el estudiante de dos tablas distintas para comparar la altura con el tiempo, lo cual puede hacer referencia a dos formas distintas de instrumentalizar. En la primera, asigna valores a la altura del recipiente y determina cuánto tiempo tardará en alcanzar ese nivel el líquido vertido. En la segunda, asigna valores de tiempo y determina qué nivel se habrá alcanzado. Si el profesor posee conocimiento tanto de la **comprensión conceptual** como de las **estrategias de abordaje**, esto le permitiría notar que la primera construcción responde a una estrategia de abordaje basada en criterios de facilidad en los cálculos, mientras que la segunda responde a una correcta asignación, de acuerdo al fenómeno, de significados para variables dependientes e independientes. Con esto queremos señalar cómo estos conocimientos dan al profesor la posibilidad de interpretar distintas instrumentalizaciones en el trabajo matemático.

Cuando el estudiante es cuestionado acerca de la posibilidad de modelar el fenómeno con la información que dispone, este se aventura a proponer que se trata de una función lineal. Enseguida va más allá y busca que el trabajo matemático se constate con una **prueba** que garantice que dicha función, la que está descrita en la tabulación, es lineal. En el **referencial** se ubica la definición y características de la función lineal y, como consecuencia de ello, se considera oportuno el uso del método de la primera diferencia para validar el supuesto de que la función es lineal. La **génesis discursiva** se basa en el uso de estos elementos para justificar el tipo de función asociada al fenómeno como una manera de modelarlo.

El conocimiento que tiene el profesor acerca de qué noción tienen sus estudiantes acerca de lo que es justificar, demostrar, argumentar… es parte del conocimiento de las **formas de razonar** de los estudiantes. Este mismo conocimiento le permitirá interpretar las argumentaciones empleadas por estos en el trabajo matemático. Esa argumentación está considerada en la génesis discursiva y el KFLM permitiría dar explicaciones a cómo son utilizados los elementos en el referencial al momento de generar la justificación de que la función que modela al fenómeno es lineal.

CONCLUSIONES

En el ejemplo analizado, el conocimiento sobre las características de aprendizaje de las matemáticas le permite al profesor secuenciar y anticiparse a cómo los estudiantes desarrollarán el trabajo matemático: cómo harán funcionales diferentes artefactos, qué tipo de razonamientos utilizarán para generar pruebas, qué entienden por prueba, cómo emplearán distintos registros de representación y cómo ese uso les permitirá la transformación de variables físicas en objetos matemáticos operables.

Por otro lado, desde el punto de vista de la investigación analítica, el KFLM y sus categorías nos permite observar e interpretar cómo este tipo de conocimiento interviene en la toma de decisiones por parte del profesor cuando se está desarrollando un trabajo matemático en el aula. El uso de génesis y el tránsito que ocurre entre planos descritos en el ETM sirven como una forma de relacionar directamente el conocimiento sobre los procesos de aprendizaje con la actividad genuinamente matemática que realiza el estudiante. Esto tiene impacto en el MTSK para la interpretación de las acciones que suceden en la práctica del profesor y la detección de posibles focos prioritarios de interés que permitan un desarrollo en su conocimiento guiado a mejorar la gestión del trabajo matemático con sus estudiantes.

REFERENCIAS

Ball, D.L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Billstein, R., Libeskind, S., & Lott, J. (2009). *A problem solving approach to mathematics*. Washington: Pearson.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013).Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti, *Proceedings of the CERME 8*, 2985-2994, Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Contreras, L.C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, & I. Segovia (Eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Charalampous, E., & Rowland, T. (2013). Mathematics Security and the individual. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti, *Proceedings of the CERME 8*, 1299-1308, Antalya, Turquía: ERME.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: M.E.C. & Labor.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up*. Washington: National Academy Press.

Kilpatrick, J., Blume, G., & Allen, B. (2006). *Theoretical framework for secondary mathematical knowledge for teaching*. Documento no publicado, Universidad de Georgia y Universidad Estatal de Pennsylvania. Disponible en http://cor.to/Proficiency.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et sesgenèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 9-24. El espacio de trabajo matemático y sus génesis, traducción J. Lezama, CICATA.

Kuzniak, A., & Richard, P.R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Troisième symposium Espace de travail mathématique*, 7-12.

Mochón, S. (2010) La relación del comportamiento del profesor con el avance cognitivo de los estudiantes al introducir un software educativo en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-II), 355-371.

Montes, M.A., Contreras, L.C. & Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao, España: SEIEM.

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A., & Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Troisième symposium Espace de travail mathématique*, 49-60.

Njomgang, J., & Durand-Guerrier, V. (2013). 0,999…..=1 An equality questioning the relationships between truth and validity. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti, *Proceedings of the CERME 8*, pp.196-205, Antalya, Turquía: ERME.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 165-178.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. Grows (Ed.). *Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Serrano, J.M., & Pons, R.M. (2008). La concepción constructivista de la instrucción: hacia un replanteamiento del triángulo interactivo. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *38*(13), 681-712.

Skemp, R. (1987). *The Psychology of learning Mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO Y CONOCIMIENTO DE UN PROFESOR DE ÁLGEBRA LINEAL

Diana Vasco Mora, Universidad Técnica Estatal de Quevedo, Ecuador

Nuria Climent, Universidad de Huelva, España

En este estudio, intentamos aproximarnos a los espacios de trabajo matemático (ETM) desde el conocimiento especializado de un profesor universitario de Álgebra Lineal, analizando una sesión de clase con el modelo analítico de conocimiento denominado Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK). El MTSK del profesor, que evidencia principalmente conocimiento de los temas, acompañado de conocimiento de las características de aprendizaje referente a errores y dificultades de los estudiantes, y conocimiento de la enseñanza en cuanto a la selección de ejemplos de forma fundamentada, nos permite tener una idea de los ETM de referencia, idóneo, y personal del profesor.

Palabras clave: *Espacios de Trabajo Matemático, Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, Álgebra Lineal, matrices.*

INTRODUCCIÓN

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) se constituye en un ambiente pensado y organizado para facilitar el trabajo matemático (Kuzniak & Richard, 2014), donde el profesor utiliza estrategias y promueve tareas que articulan los componentes del ETM. Por su parte, los modelos de conocimiento del profesor de matemáticas pretenden que podamos comprender la práctica del profesor en el aula, y en esta comunicación intentamos engranar ambos modelos aplicados al caso de un profesor universitario de Álgebra lineal y a una sesión de clase sobre operaciones con matrices.

El conocimiento matemático desde la perspectiva de su enseñanza está íntimamente relacionado con las facultades que posee el profesor para realizar representaciones que ayuden a desarrollar habilidades matemáticas en los estudiantes (Charalambous, 2009). Existe un interés constante en comprender el tipo particular de conocimiento que necesita el profesor de matemáticas, así como en cómo se adquiere y desarrolla (Sánchez, 2011). La observación del conocimiento del profesor en el aula nos puede permitir, por su parte, aportar explicaciones a los espacios de trabajo matemático que éste propicia.

Para efectos de realizar una primera aproximación al conocimiento especializado que se observa en la práctica de un profesor universitario cuando enseña el contenido de *Matrices y Determinantes* hemos empleado el modelo analítico denominado *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013), el cual se ocupa del conocimiento que necesita el profesor de matemáticas en relación con la enseñanza de la materia.

MARCO TEÓRICO

En el marco de los ETM se incluye el *ETM de referencia*, *ETM idóneo* y *ETM personal*. El *ETM de referencia* es aquel definido por una comunidad de individuos que se han puesto de acuerdo sobre un paradigma dado para formular problemas y organizar sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento. El *ETM idóneo*, se organiza para permitir al alumno comprometerse con la resolución de problemas, no es fijo y debe modificarse continuamente ajustándose a restricciones locales, permitiendo el trabajo en el paradigma correspondiente a la problemática considerada, debiendo estar construido en el sentido en que sus diferentes componentes estén organizadas de manera válida. El *ETM personal* es aquel donde el profesor o el alumno dan un tratamiento matemático a un problema (Kuzniak, 2011; Kuzniak y Richard, 2014).

En las reflexiones realizadas en el Cuarto Simposio Espacio de Trabajo Matemático, sobre el papel del profesor en la interrelación entre estos tres espacios, se vislumbra que el profesor puede reinterpretar el ETM de referencia constituyendo un ETM de referencia del profesor. Además, el conocimiento del profesor puede explicar parcialmente el paso del ETM de referencia al idóneo y, por otra parte, en el ETM personal del profesor, que incide en el idóneo, interviene claramente su conocimiento matemático.

En cuanto a las investigaciones sobre el conocimiento de los profesores de matemáticas, el marco del *Mathematics Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball, Thames, & Phelps, 2008) se ha constituido en un importante referente en la concreción del trabajo de Shulman (1986) en lo relativo a la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, en el grupo de investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva hemos encontrado dificultades en la caracterización y delimitación de los distintos subdominios del MKT (Flores, Escudero, & Carrillo, 2013).

Como respuesta a tales dificultades, nuestro grupo de investigación ha desarrollado un modelo para el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas, que pretende captar la especialización de este conocimiento en su conjunto. El *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo et al., 2013) se compone de dos dominios con sus respectivos subdominios. El dominio *Mathematical Knowledge* (MK), *abarca el universo de las matemáticas, comprende los conceptos y procedimientos, la estructuración de las ideas, las conexiones entre los conceptos, la razón u origen de los procedimientos, los medios de prueba y cualquier forma de proceder en las matemáticas, junto con el lenguaje matemático y su precisión* (Carrillo et al., 2013, p. 2990). El MK incluye los subdominios: *conocimiento de los temas* (KoT), *conocimiento de la estructura de la matemática* (KSM) y *conocimiento de la práctica matemática* (KPM).

El *Conocimiento de los temas*, propio de los profesores de matemáticas y de su labor de enseñar, supone un conocimiento profundo y fundamentado de los contenidos matemáticos.

Consideramos en este subdominio el conocimiento del profesor sobre *Fenomenología* (conocimiento acerca de usos y aplicaciones de un tema matemático; además aquel sobre modelos atribuibles a un tema, vistos éstos como fenómenos que pueden servir para generar conocimiento matemático); *Propiedades y sus fundamentos* (conocimiento de las propiedades que cumple un objeto matemático o las necesarias para llevar a cabo un procedimiento, ligadas al tema a estudiar); *Registros de representación* (conocimiento del profesor acerca de las distintas formas en que se puede representar un tema, así como el conocimiento de la notación y el lenguaje matemático asociado a dichas representaciones); *Definiciones* (conocimiento para describir o caracterizar un concepto, incluyendo los ejemplos e imágenes asociados); y *Procedimientos* (*¿cómo se hace?, ¿cuándo se puede hacer?, ¿por qué se hace así?*, y *características del resultado*). Presentamos el KoT con más detalle que otros subdominios, por cuanto el conocimiento que evidencia el profesor participante de nuestra investigación se enmarca fundamentalmente en éste.

El *Conocimiento de la estructura de la matemática* emerge de la descripción de conocimiento del horizonte de Ball & Bass (2009); es el conocimiento del profesor sobre las relaciones entre distintos contenidos matemáticos (Montes, Aguilar, Carrillo, & Muñoz-Catalán, 2013). Implica ver el contenido en perspectiva, las matemáticas elementales desde un punto de vista avanzado y las matemáticas avanzadas desde un punto de vista elemental.

El *Conocimiento de la práctica matemática*, por su parte, incluye conocimiento de las formas de crear o producir matemáticas (formas de proceder características del trabajo matemático); por ejemplo, el papel que tienen las definiciones; cómo establecer relaciones, correspondencias y equivalencias; seleccionar representaciones; argumentar, generalizar y explorar (Carrillo et al., 2013).

El otro dominio del MTSK es el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) relacionado con el conocimiento del profesor para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Comprende los subdominios: *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (KMT), *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* (KFLM) y *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (KMLS).

El *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* es el tipo de conocimiento que permite al profesor elegir una representación o un determinado material para el aprendizaje de un concepto o procedimiento matemático. Incluimos aquí el conocimiento del profesor sobre teorías personales o institucionales de enseñanza, recursos materiales y virtuales, así como su conocimiento sobre actividades, tareas y ejemplos para enseñar un contenido matemático.

El *Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* se refiere a cómo se aprende en matemáticas, no es conocimiento matemático, pero el maestro debe tener una formación en matemáticas con el fin de entenderlo y usarlo (Carrillo et al., 2013). El foco está en el contenido matemático como objeto de aprendizaje e incluye el conocimiento del profesor sobre las formas de aprendizaje, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido, formas de interacción de los estudiantes con éste y las motivaciones de los estudiantes respecto del mismo.

Finalmente el *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* incluye el conocimiento de las especificaciones del plan de estudios, la progresión de un año a otro, así como, objetivos y medidas de desempeño desarrolladas por entidades externas tales como asociaciones profesionales e investigadores (Carrillo et al., 2013).

El MTSK, en la línea de Bromme (1994), adicionalmente contempla las concepciones del profesor sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, vistas como elementos que permean conocimientos y que dan sentido a su práctica.

Nuestro trabajo, por otra parte, se ocupa del conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de Álgebra Lineal a nivel universitario. Aún existen pocas investigaciones sobre el conocimiento matemático de profesores universitarios de Álgebra Lineal. A nivel de secundaria, podemos referir el trabajo de McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase, & Senk (2012), quienes en base al análisis de textos de Álgebra, entrevistas y vídeos, definieron categorías de conocimiento y prácticas de enseñanza para la comprensión y evaluación del conocimiento del profesor para la enseñanza de Álgebra, enmarcándolas en dos dimensiones: *Knowledge of Algebra for Teaching* y *Mathematical Uses of Knowledge in Teaching* (o *Teaching Practices*). Las categorías propuestas por McCrory et al. (2012) para cada una de estas dimensiones, incluyen no sólo conocimiento, sino también acciones de enseñanza (en la dimensión de *Teaching Practices*) [1]. Además, en las categorías referidas a conocimiento (dimensión *Knowledge of Algebra for Teaching*) se reconoce la necesidad de lo que podría entenderse como álgebra escolar, un conocimiento avanzado (ligado, quizás al establecimiento de relaciones entre contenidos), un conocimiento en el que se podrían identificar elementos de PCK, y un conocimiento del contenido que consideran específico para su enseñanza.

MARCO METODOLÓGICO

Nuestra investigación se caracteriza por ser cualitativa e interpretativa y emplea un diseño de estudio de caso (Yin, 1989).

Participantes y contexto

El estudio se realiza con un profesor universitario, al que llamaremos Jordy, que imparte un módulo de Álgebra Lineal en el año básico de carreras de Ingeniería. Jordy posee experiencia en la enseñanza de módulos de matemáticas, tanto en secundaria (17 años) como en el nivel universitario (9 años) e imparte Álgebra Lineal desde hace 4 años.

El módulo de Álgebra Lineal tiene una duración de 16 semanas y cada curso está conformado por un promedio de 20 estudiantes. El programa de estudios de la asignatura está previamente establecido y su punto de partida es el tema de *Matrices y Determinantes* (tipos, operaciones, resolución de sistemas de ecuaciones lineales y aplicaciones, complementadas con el estudio de determinantes); posteriormente se imparten temáticas como vectores en R^2, R^3 y R^N; espacios vectoriales y transformaciones lineales. Para la investigación, se eligió observar el desarrollo de *Matrices y Determinantes* porque constituye la base de las temáticas que se abordan en la asignatura de Álgebra Lineal.

Recogida y análisis de datos

La recopilación de datos incluye observaciones de clase (grabaciones en vídeo) y una entrevista semiestructurada. Las clases, que fueron transcritas por la primera autora de este documento se observaron en dos períodos: octubre de 2011 – enero de 2012 y octubre de 2012 – enero de 2013 (la observación de las clases durante dos períodos lectivos obedece a la posibilidad de extraer la mayor información posible para profundizar en el conocimiento especializado del profesor). El análisis de los datos, atendiendo a un análisis de contenido (Bardin, 1977), se realiza buscando evidencias en la acción y declaraciones del profesor que aludieran a los subdominios del MTSK. En este trabajo presentamos los resultados preliminares del análisis del conocimiento de Jordy en una de las sesiones de clase, acompañado de una reflexión sobre cómo dicho conocimiento nos sirve como herramienta para comprender los espacios de trabajo matemático relacionados con la sesión. Cabe indicar que las categorías consideradas para el KoT, como para el resto de los subdominios, se encuentran en evolución y son discutidas en nuestro grupo de investigación, a la luz del análisis de los datos de varias investigaciones en curso.

MTSK DE JORDY EVIDENCIADO EN UNA SESIÓN DE CLASE SOBRE OPERACIONES CON MATRICES

En la Figura 1 (final del documento) se muestra un esquema del MTSK que Jordy evidencia en la sesión. El profesor divide la sesión en dos episodios [2]: producto de matrices y álgebra de matrices. El primer episodio, que tiene una duración aproximada de 35 minutos fue dedicado a explicar cómo multiplicar matrices. El segundo episodio, cuya duración es de 30 minutos, está dedicado al álgebra de matrices, donde el profesor escribe una función cuadrática, para calcular su valor reemplazando la variable por una matriz, aplicándose la suma, producto de un escalar por una matriz (explicados en sesiones anteriores), producto de matrices y potencia de una matriz (esta última explicada detenidamente en esta sesión).

De acuerdo a los subdominios del MTSK, en esta sesión encontramos evidencias de conocimiento de los temas, de las características de aprendizaje de las matemáticas, y de la enseñanza de las matemáticas.

Conocimiento de los temas (KoT)

Las evidencias de este subdominio de conocimiento predominan en la sesión de clase analizada. Observamos conocimiento del profesor sobre *Procedimientos*

(*¿cómo se hace?*) cuando expone el algoritmo para llevar a cabo la multiplicación de matrices.

Jordy: Lo que se hace es tomar la primera fila de la matriz A y la multiplicas por los elementos la primera columna de la matriz B, se multiplican los elementos correspondientes y la suma de todos esos productos va a ser el elemento a_{11} de la matriz producto. (Tomado de episodio 1 de la sesión).

El mismo conocimiento se presenta al trabajar el álgebra de matrices, donde en base a su explicación sobre el producto aborda la potencia de una matriz, lo que le permite después considerar el resultado de una función cuadrática cuando toma como valor una matriz, y en cuyo tratamiento está inmerso su conocimiento sobre otras operaciones con matrices como la suma y el producto por un escalar.

Jordy: Vamos a tratar un tema que se llama álgebra de matrices. Si tienes tú la matriz A, de dimensiones 2x2, por ejemplo, esta matriz […] De ella se puede escribir la matriz A^2. Vamos a elevar al cuadrado esa matriz, ¿qué es lo que tenemos que hacer? Calcular AxA […] Vamos a hacerlo paso a paso […] Y podemos también escribir A^3 y es igual a A^2xA […] Si tenemos una función f(x) que diga por ejemplo $2x^2$-5x-3, defina f(A). Entonces f(x) = $2x^2$-5x-3 y f(A) = $2A^2$-5A-3. En este 3 aquí colocamos la matriz identidad de orden 2x2 para poder sumar; si no, ese -3 no tiene forma de ser sumado acá, como estamos trabajando con matrices. Reemplazamos los valores y en lugar de A^2 escribimos la matriz A^2, luego donde está la A deberá reemplazar con los elementos de la matriz A y por último al lado del 3 escribir la matriz identidad 2x2. (Tomado de episodio 2 de la sesión).

En esta unidad de información, Jordy muestra también conocimiento sobre *Procedimientos (características del resultado)* que relacionamos con la multiplicación del -3 por la matriz identidad, ya que la función está siendo definida sobre una matriz y el término independiente tiene que ser entendido como un escalar multiplicado por la matriz identidad para que el procedimiento sea posible, y el resultado otra matriz. Por otra parte, el hacer explícitas las dimensiones del producto resultante de dos matrices es otra evidencia del conocimiento de las *características del resultado* de un procedimiento.

Jordy: Ahora, la respuesta del producto de dos matrices tiene el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda. La respuesta de AxB en este caso tendrá dimensiones 2x1, en este caso tendrá dimensiones 2x2 y en este caso tendrá dimensiones 2x4. (Tomado de episodio 1 de la sesión).

El conocimiento sobre *Procedimientos* (*¿cuándo se puede hacer?*) sale a relucir al indicar que para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la matriz uno sea igual al número de filas de la matriz dos.

Jordy: Si tenemos la matriz A ¿Cuáles son las dimensiones de esa matriz? […] La dimensión de esta matriz es 2x3. Para poder multiplicar dos matrices se necesita que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz. Si A es así, B debe tener obligatoriamente tres filas, no importa el número de columnas. (Tomado del episodio 1 de la sesión).

Se evidencia conocimiento sobre *Propiedades y sus fundamentos*, cuando el profesor incitado por una afirmación realizada por un estudiante (*en la multiplicación de matrices sí cuenta el orden en el que estén ubicadas)*, menciona que en el producto de matrices no se cumple la propiedad conmutativa.

Jordy: Allí hicieron A(2x3)xB(3x1), pero que si las colocamos al revés B(3x1)x A(2x3) no se puede multiplicar, en este caso ¿qué pasa? […] Correcto, en el producto de matrices no se cumple la propiedad conmutativa (AxB ≠ BxA); no siempre es conmutativa, primero por las dimensiones y luego, aunque se pudiese, siendo matrices cuadradas, éstas no siempre son conmutativas. (Tomado del episodio 1 de la sesión).

En relación con esta propiedad, el profesor señala en una entrevista que, como excepción a la no conmutatividad del producto de matrices, en el caso de la multiplicación de una matriz por su inversa, sí hay conmutatividad y, que da como resultado la matriz identidad.

Jordy: Cuando es la matriz inversa, ahí es conmutativo, o sea, la matriz inversa por su matriz que siempre da la identidad (Tomado de entrevista).

En cuanto a los *Registros de representación*, Jordy muestra conocimiento sobre la notación matemática. Se observó que utiliza el registro algebraico – matricial (Ramírez, Romero, & Oktaç, 2013) cuando explica las operaciones con matrices.

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM)

En el desarrollo de la sesión encontramos indicios del conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de las matemáticas, en lo referente a *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* del contenido tratado. Así, el profesor identifica posibles dificultades en el aprendizaje del producto de matrices.

Jordy: Ahí tiene usted el ejercicio cinco, si en ese caso no es posible realizar el producto, escriba usted que no se puede hacer. Siempre es bueno definir las dimensiones de las matrices para evitar algún tipo de error en el producto. (Tomado de episodio 1 de la sesión).

Este indicio de conocimiento nos llevó a indagar a través de una entrevista acerca del conocimiento del profesor sobre los principales errores que suelen cometer los estudiantes al realizar el producto de matrices. Además del error anterior, relacionado con las dimensiones de las matrices, el profesor identifica como dificultad que los estudiantes hagan una falsa generalización del procedimiento de suma de matrices al del producto.

Jordy: El error que pueden cometer es que el chico piense que hay que multiplicar número por número, según la posición que está. Entonces, en la multiplicación de matrices, yo suelo insistir en las dimensiones. Si yo tengo dos matrices cuadradas, los chicos pueden sacar resultado matriz 2x2 que es lo lógico, pero en cambio pueden hacer lo mismo de la suma, multiplican los elementos que corresponden en cada matriz según su posición, pero obviamente tiene error porque no es así, suelen equivocarse en eso cuando no tienen claro el concepto o la definición de una operación. (Tomado de entrevista).

El profesor prevé errores de los alumnos con el contenido (en este caso con el producto de matrices) y les advierte de ello a los estudiantes. En algunos casos (segundo error detectado) tiene una explicación a por qué se produce el error (falsa generalización de un procedimiento conocido). No encontramos evidencias de KFLM en el segundo episodio de la sesión.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)

Sabemos que el conocimiento de la enseñanza y de las características de aprendizaje de las matemáticas está relacionado. En este caso, lo descrito con relación al KFLM de Jordy se relaciona con los ejemplos que emplea para explicar el producto de matrices, lo que nos lleva a identificar una oportunidad de investigación (Flores, Escudero, & Aguilar, 2013) para profundizar en el conocimiento del profesor relativo al KMT, referida a la elección de ejemplos de enseñanza. El profesor explica el producto empleando matrices que no son cuadradas A(2x3), B(3x1), C(3x2) y D(3x4). Parece que elige estos ejemplos por la posible repercusión en la visión del contenido de los alumnos, evitando abordar la multiplicación con dos matrices cuadradas del mismo orden para dejar claro a los estudiantes la importancia que tiene definir las dimensiones de las matrices al multiplicar, y que les llevará a determinar si se puede o no realizar la operación. En el segundo momento de la sesión (episodio 2) no se encontraron evidencias de este subdominio.

MTSK DEL PROFESOR COMO HERRAMIENTA PARA COMPRENDER ALGUNAS RELACIONES EN LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

El ETM de referencia lo constituye la disciplina misma, es decir, dónde dicha disciplina (que en nuestro caso sería la matemática) enmarca una situación problemática. Un profesor reinterpreta este ETM de referencia constituyendo un ETM de referencia del profesor (dónde sitúa el profesor la situación problemática). Al considerar el profesor el ambiente propicio que desde su perspectiva hace que los estudiantes se impliquen en la situación problemática nos estaríamos refiriendo al ETM idóneo del profesor. El MTSK permite comprender estos espacios intermedios, es decir cómo el profesor interpreta el ETM referencia, cómo pasa de este ETM al idóneo (el cual se puede ir modificando a lo largo de la clase, debido a la interacción con los estudiantes), y explicaría también cuál es el ETM personal del profesor.

Hemos visto que el MTSK de Jordy, en la sesión analizada, se enmarca fundamentalmente en *Conocimiento de los temas* sobre procedimientos, con cierta profundidad, porque sabe no sólo el cómo se hace, sino el cuándo se puede hacer, características del resultado, algunas propiedades, y registros de representación. Además, parece poseer *Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* en cuanto a ejemplos de enseñanza y *Conocimiento de las características de aprendizaje matemático* sobre errores y dificultades habituales de los estudiantes respecto del contenido (el MTSK evidenciado se resume en la Figura 1). No hemos encontrado evidencias de *Conocimiento de la estructura de las matemáticas*, *Conocimiento de la práctica matemática*, ni *Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las* *matemáticas*. Pensamos que a partir del conocimiento que evidencia este profesor en su práctica podemos tener una imagen de los ETM personal, de referencia del profesor e idóneo del profesor.

Partiendo de la interpretación del profesor del ETM de referencia de la disciplina, pensamos en el ETM de referencia del profesor en esta sesión, donde su forma de comprender las operaciones con matrices y transmitirlas es abordándolas de manera local (sin relación con otros contenidos), que parece tener sentido en sí mismo y que se asocia exclusivamente a procedimientos algorítmicos. No es observable el sentido del contenido desde una comprensión más amplia que estaría relacionada con el *Conocimiento de la estructura de la matemática* (KSM). El ETM de referencia de este profesor estaría relacionado con la ausencia de evidencias de KSM en la sesión analizada. Otro ETM de referencia podría estar constituido por las matrices y las operaciones con estas desde el punto de vista de las transformaciones lineales.

El ETM idóneo para el profesor es plantear las operaciones con matrices en un ambiente formal, donde sólo se trabaja exclusivamente la operatoria, y no se hacen explícitas aplicaciones y relaciones con otros contenidos, pero sí una justificación de ejemplos para la enseñanza en la búsqueda de que el alumno otorgue un tratamiento matemático adecuado al contenido. Al estudiante no se le plantean problemas con ejercicios de aplicación, posiblemente influenciado por la visión algorítmica del contenido. Por cuanto la interacción del profesor con los estudiantes es limitada no hemos podido encontrar evidencias sobre la evolución del ETM idóneo.

Finalmente, tenemos una imagen del ETM personal del profesor en lo referente a cómo trabaja matemáticamente las operaciones con matrices, evidenciando un tratamiento principalmente procedimental.

Lo anterior nos permite, por una parte, reinterpretar los constructos de ETM personal, idóneo y de referencia tomando como foco al profesor (y en concreto su conocimiento). Por otra parte, la perspectiva de estos tres espacios de trabajo matemático nos lleva a plantearnos cuestiones como cuál es el marco matemático de referencia del profesor, que relacionamos con una visión del tema amplia, donde éste se incardina en un determinado paradigma y en relación con otros temas. Además, las nociones de espacio de trabajo personal e idóneo, ponen el énfasis en el propio profesor como resolutor de los problemas asociados y como diseñador y gestor de lo que considera necesitan los alumnos para implicarse en las tareas.

NOTAS

1. En el MTSK, sin embargo, se ha hecho un esfuerzo por desglosar el conocimiento que sustenta las acciones del profesor respecto de la enseñanza de la matemática, describiendo en términos de conocimiento en lugar de acciones.

2. En nuestro estudio, los episodios corresponden a momentos diferenciados o fragmentos de la clase, organizado por el profesor en torno a un tema que forma parte del contenido que ha preparado para una sesión de clase.

REFERENCIAS

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Paper presented at The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference.

Bardin, L. (1977). *L'analyse de contenu*. Paris: PUF.

Bromme, R. (1994). Beyond subject-matter: A psychological topology of teacher's professional knowledge. In R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer & B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Cientific Discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.

Charalambous, C.Y. (2009). Mathematical Knowledge for Teaching and Providing Explanations: An Exploratory Study. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), *Proc. of the 33rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 305-312). Thessaloniki, Greece: PME.

Flores, E., Escudero, D., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of Specialized Content Knowledge. In B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: ERME.

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Troisième symposium Espace de travail mathématique*, 7-12.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de TravailMathématique et ses genèses. *Didactique et de Sciences Cognitives, 16,* 9-24.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M.D., & Senk, S.L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, C. (2013). MTSK: From Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures. In B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 3185-3194). Antalya, Turquía: ERME.

Ramírez, O., Romero, C.F., & Oktaç, A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez & Y. Morales (Eds.), *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 537-547). Santo Domingo, República Dominicana: ICEMACYC.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Yin, R.K. (1989). *Case study research: Design and methods*. London: Sage

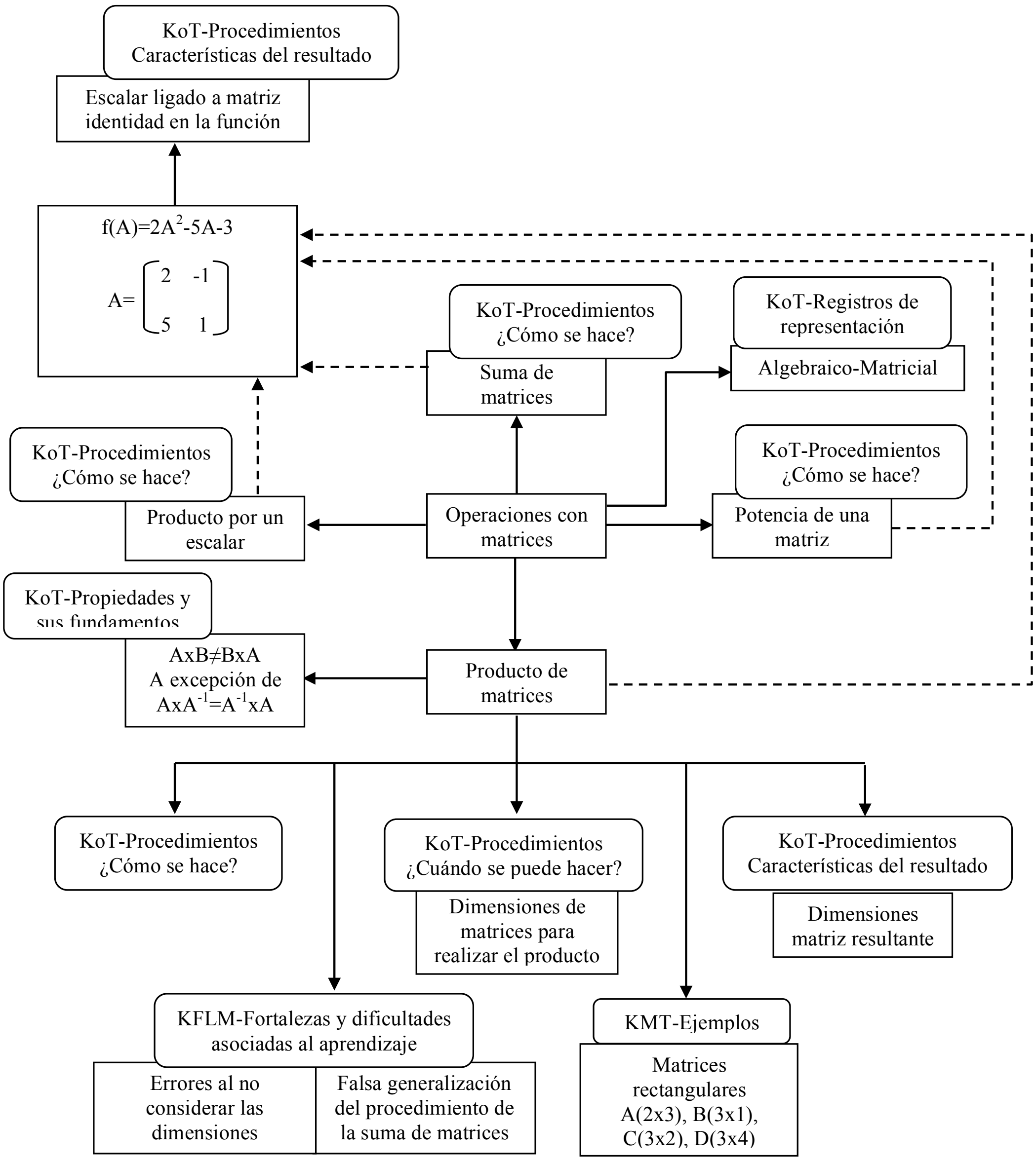


Figura 1. MTSK evidenciado por un profesor de Álgebra Lineal en una sesión sobre operaciones con matrices

GESTION INTERACTIVE DE PROBLEMES EN GEOMETRIE POUR LE DEVELOPPEMENT DES COMPETENCES DES ELEVES ET L'ACQUISITION DU SAVOIR MATHEMATIQUE

Josep Maria Fortuny, Universitat Autònoma de Barcelona (Espagne)

Michel Gagnon, École Polytechnique de Montréal (Canada)

Philippe R. Richard, Université de Montréal (Canada);

Notre article présente un projet de recherche issu de la didactique des mathématiques et du génie informatique dans lequel la résolution de problèmes est à la fois une condition une conséquence de l'apprentissage de mathématiques. Nous introduisons la notion de problèmes connexes en tant que moyen employé par un agent enseignant afin de relancer un premier processus de résolution bloquée chez des élèves. Si notre approche théorique se centre sur les interactions didactiques et cognitives, nous accordons une attention particulière au modèle de connaissances cK¢, au modèle des espaces de travail mathématiques et au concept de la zone proximale de développement. En particulier, nous montrons combien la notion d'interactions relie les enjeux théoriques et méthodologiques du projet.

***Mots-clefs** : didactique des mathématiques; conceptions et espace de travail mathématique; compétence et pensée géométrique; système de gestion de problèmes; problèmes racines; problèmes connexes; interactions didactiques et cognitives; dévolution; contrat didactique.*

INTRODUCTION

En troisième secondaire, deux élèves tentent de résoudre un problème de preuve à l'interface d'un système tutoriel intelligent. Il s'agit de comparer l'aire de deux triangles dans un parallélogramme et de démontrer la conjecture retenue. Après avoir lu l'énoncé, construit ou déplacé des éléments de figure dans le module de géométrie dynamique (Fig. 1), les étudiantes conviennent rapidement d'une égalité d'aires. Elles commencent à écrire leurs premières phrases à l'interface du système tutoriel et, d'emblée, elles sont ravies de constater que Prof. Turing, un agent tuteur artificiel, leur indique par un sourire[39] que leur première intuition est fondée. Même si ce sont des élèves appliquées, celles-ci se bloquent parfois dans leur démonstration. Mais heureusement, par ses messages, Prof. Turing réussit toujours à relancer le processus de solution. Il faut dire que même s'il ne prétend pas se substituer à l'enseignant, cet agent tuteur a bien «en tête» les 69 000 solutions possibles et qu'il arrive promptement à cibler la solution envisagée par les élèves. Dans son accompagnement personnalisé, Prof. Turing sait aussi reconnaître une difficulté persistante chez les élèves, et, le cas échéant, il peut leur suggérer de recourir à son enseignant.

---

[39] Émoticône.

C'est alors qu'il se produisit un événement que nous n'attendions pas. À la suite d'un blocage, tandis que l'enseignant venait constater l'à-propos des messages que les élèves ont reçus de Prof. Turing, nous croyions que l'intervention de l'enseignant aurait insisté davantage sur le sens des messages dans le contexte du problème. Mais au lieu de cela, après une brève analyse de la situation, l'enseignant a plutôt demandé aux élèves de résoudre un nouveau problème en expliquant : «regardez [énoncé du problème sur papier], ça me fait penser à ça [en pointant sur la feuille] ; si vous être capable de le résoudre, alors vous verrez ce que vous ne voyez pas.». Les élèves, habituées à ce type d'intervention dans leurs cours ordinaires, ont commencé à résoudre sur papier le nouveau problème, puis l'une d'elles dit à sa compagne : «regarde je le sais... regarde c'est pour ça que ça marche!». Et la solution du problème initial à l'interface s'en trouve relancée. À la manière de cet enseignant, peut-on mettre à la disposition de Prof. Turing un ensemble de problèmes qui donnerait naissance à des messages d'aide nouveau genre ?

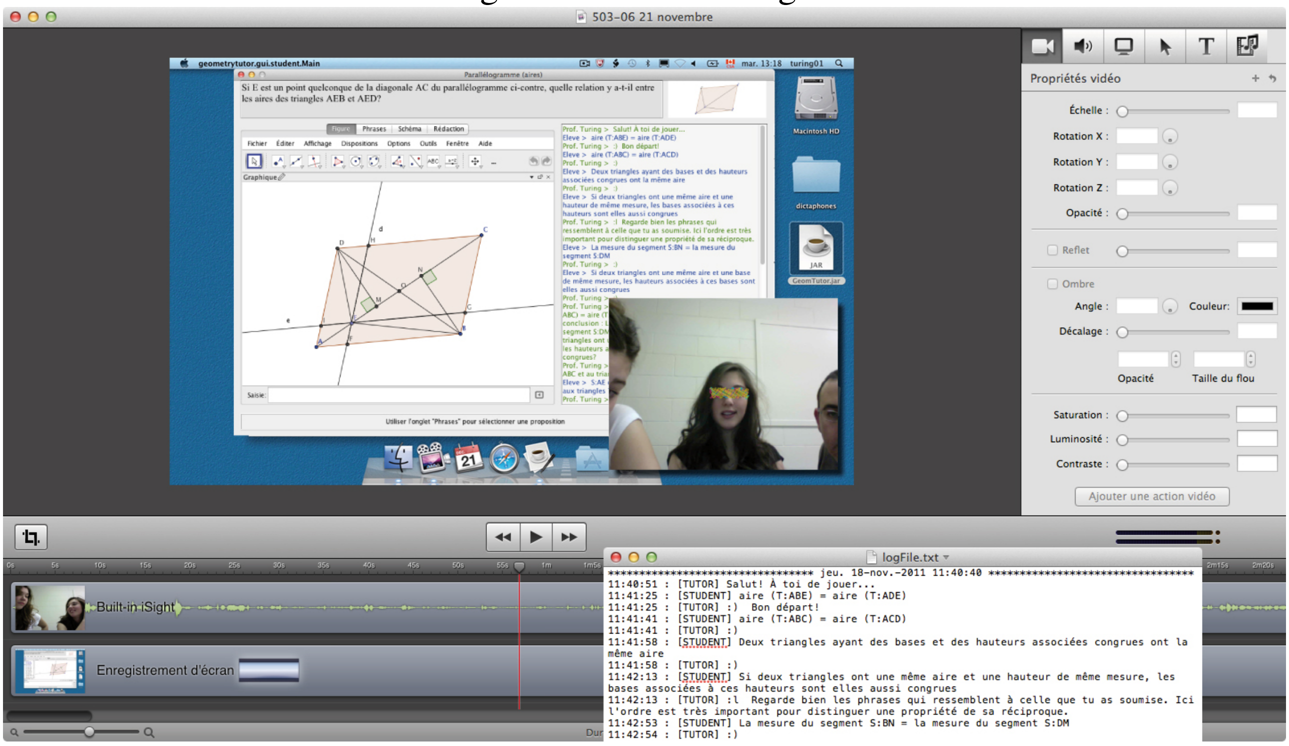


Figure 1. Dispositif d'analyse des interactions entre deux élèves et le système géogébraTUTOR (fenêtre intitulée «Parallélogramme (aires)» dans la copie d'écran du bureau) lors de la résolution du problème du parallélogramme. À l'arrière-plan se trouve l'interface du logiciel ScreenFlow (enregistrement du son, de l'image et des interactions à l'écran) et au premier plan, le fichier journal de la conversation avec l'agent tuteur artificiel. L'image du système retenue ici montre les modules géométrique (à gauche) et la conversation (à droite), mais elle cache les modules d'écriture (onglet «Phrases»), de formation d'arguments structurés («Schéma») et de démonstration («Rédaction»).

1. CONTEXTE DE LA RECHERCHE : LA RESOLUTION DE PROBLEME AU COEUR DE L'ENSEIGNEMENT ET DE L'APPRENTISSAGE DES MATHEMATIQUES

Selon la Théorie des Situations Didactiques (TSD) : «Nous savons que le seul moyen de ‹faire› des mathématiques c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions. Le maître doit donc effectuer, non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère. Mais si l'élève refuse ou évite le problème, ou ne le résout pas ? Le maître a alors l'obligation sociale de l'aider» (Brousseau, 1998, p. 61). Dans le prolongement de la TSD, nous montrons les enjeux d'un projet de recherche qui s'échafaude sur trois idées clefs : la nécessité de chercher et résoudre des problèmes spécifiques à l'apprentissage des mathématiques au secondaire, sur l'aide que constitue la **dévolution** de «bons problèmes» [40] pour le développement des **compétences** et de la **pensée géométrique** de l'élève, et enfin sur l'action volontaire, mais étonnante, de l'enseignant qui choisit de poser un nouveau problème pour relancer un premier processus de résolution bloqué. Le processus de résolution initial porte sur un **problème racine** et le nouveau problème posé, tel un message retourné par un système de gestion de problèmes, s'appelle un **problème connexe** (Richard, Gagnon & Fortuny, 2013).

Notre projet propose deux questions de recherche : sous quelles conditions la gestion de problèmes connexes permet-elle de relancer un processus de résolution bloqué chez l'élève ? Quels renseignements nous apportent les problèmes racines et les problèmes connexes, posés par un tuteur, sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ? Avant d'aborder les enjeux théoriques et méthodologiques que soulèvent ces questions, demandons-nous brièvement pourquoi la gestion interactive de problèmes est-elle si importante. En matière d'apprentissage, si le «bon problème» est caractéristique du travail mathématique, il est aussi une composante de la construction des concepts mathématiques au cours des **interactions cognitives** avec le milieu, complémentaires aux **interactions didactiques** avec le tuteur. Ceci rejoint les notions d'**espace de travail mathématique** (Kuzniak 2006, 2011; Kuzniak & Richard, 2014) et de **conceptions** en tant que connaissances effectivement construites par l'élève (Balacheff & Margolinas, 2005). Les notions de conception et d'espace de travail offrent deux éclairages d'un même système sujet-milieu (Fig. 2), nous devons y revenir dans notre cadre théorique (section suivante).

[40] Nous revenons sur cette notion au dernier paragraphe (§**4**) la section suivante (*Cadre théorique*).

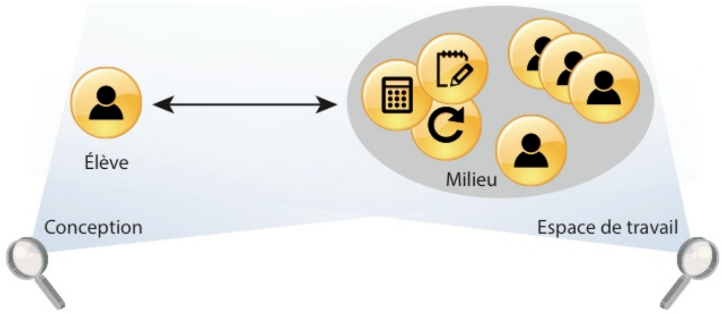


Figure 2 : Deux éclairages du système sujet-milieu : le point de vue de la conception et celui des espaces de travail, le premier regardant l'élève au premier plan et le second, le milieu.

En termes d'enseignement, lorsque le choix d'un problème survient à la suite d'un moment de blocage ou de la réussite du problème racine, on engendre ainsi un itinéraire d'apprentissage adapté aux compétences de l'élève, dans la logique du problème. Cette disposition repousse de façon originale les limites de l'enseignement traditionnel qui consiste à poser des problèmes en série, sans égard à la proximité des problèmes déjà résolus ni aux connaissances acquises en cours d'apprentissage. En termes d'articulation enseignement-apprentissage, si l'on réfléchit sur l'engagement mutuel entre l'élève et l'enseignant, au regard du savoir mathématique, la gestion des problèmes connexes évite de donner des réponses en même temps que les questions, respectant la spécificité du **contrat didactique** et offrant une réponse au paradoxe de la dévolution.

2. CADRE THEORIQUE : UNE APPROCHE CENTREE SUR LES INTERACTIONS DIDACTIQUES ET COGNITIVES

Avant d'examiner plus en détail les caractéristiques de notre approche de recherche, il convient de signaler que le cadre général du projet suit cinq axes de références conceptuelles dont l'articulation a été largement diffusée au niveau international, aussi bien dans des revues de sciences humaines (cf. Richard, Fortuny, Gagnon et al., 2011) que de maths-info (cf. Richard, Gagnon et Fortuny, 2013). Ces axes sont de nature **épistémologique** [dialectique des preuves et des réfutations de Lakatos (1984), heuristiques de résolution de problèmes de Polya (2007) et points de rupture dans le processus de découverte mathématique de Mason (2005)], **sémiotique** [théorie des fonctions du langage de Duval (1995), approche fonctionnelle-structurelle de Richard et Sierpinska (2004), raisonnements instrumentés de Hollebrands, Conner et Smith (2010) et raisonnements dans l'exercice de la géométrie de Richard (2004a, b), Coutat et Richard (2011)], **situationnelle** [théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) et modèle de connaissances de Balacheff et Margolinas (2005)], **instrumentale** [théorie de l'instrumentation de Rabardel (1995) et espace de travail géométrique de Kuzniak (2006)] et **décisionnelle** [paradoxes didactiques de Brousseau (2004) et théorie de la prise de décision de Schoenfeld (2011)].

Le schéma classique de la situation d'enseignement considère les interactions entre trois systèmes, le savoir, l'élève et l'enseignant. En outre, les situations classiques sont traditionnellement des situations d'institutionnalisation, sans prise en charge de la création du sens par l'enseignant : on transmet à l'élève un savoir incluant les explications nécessaires et on en teste ensuite l'acquisition. Ces approches ont l'inconvénient de réduire l'environnement didactique à l'action de l'enseignant et d'occulter complètement les rapports du sujet (l'élève) avec le milieu a-didactique (Brousseau, 1998). Le milieu choisi par l'enseignant peut être matériel (manuel, outil, logiciel, mise en scène, etc.) ou intellectuel (compagnon ou tuteur jouant un rôle de collaborateur). Le *a* privatif signifie qu'il s'agit d'un milieu pour lequel l'enseignant a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants qui pourraient influencer l'acquisition des connaissances.

Dans la TSD, le milieu apparaît comme étant le système antagoniste de l'élève. Puisque le milieu véhicule des connaissances, celles-ci ne peuvent se révéler que lorsque l'élève l'«interroge». Il ne s'agit donc pas d'un vis-à-vis réagissant, mais bien d'un partenaire dans la création du sens. Le premier système qui nous intéresse est alors le **système sujet-milieu** : «Brousseau va considérer l'interaction sujet-milieu comme étant la plus petite unité d'interaction cognitive. Un état d'équilibre de cette interaction définit un état de la connaissance, le déséquilibre sujet-milieu étant producteur de connaissance nouvelle (recherche d'un nouvel équilibre)» (Margolinas, 2009, pp. 13-14). Cet apport de la TSD est bien documenté dans la littérature didactique et nous en retenons deux premières conséquences (voir §1 et 2 ci-dessous). Mais avant, nous avons besoin d'insister sur la notion de contrat didactique, c'est-à-dire la «relation qui se noue et qui détermine – explicitement pour petite part, mais surtout implicitement – ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre» (Brousseau, 1998, p. 61). Même si les attentes mutuelles de l'élève et de l'enseignant, concernant le savoir mathématique, sont le plus souvent implicites, une interaction demeure didactique tant et si bien qu'un système (l'enseignant, un autre élève ou un agent pédagogique virtuel) affiche l'intention de modifier le système des connaissances (moyens de décision, vocabulaire, système d'argumentation, références culturelles) du système sujet-milieu. Les observables dans notre projet sont alors groupés en fonction des intentions didactiques et adidactiques.

§**1**. Si la TSD détermine chaque connaissance par les situations qui lui sont spécifiques, le modèle de connaissances de Balacheff et Margolinas (2005) – appelé dans la littérature scientifique «modèle cK¢» – situe les conceptions dans l'interaction sujet-milieu, tout en caractérisant d'abord une conception donnée par les problèmes dans lesquels elle est impliquée. Plus précisément, ce modèle caractérise les conceptions **C** par un ensemble définitoire de problèmes (P) pour lesquels elles apportent des outils de résolution (R) en s'appuyant sur des systèmes de représentation (L) et une structure de contrôle (Σ) qui permet jugements et décisions.

Il en découle une relation forte entre un moment de blocage et la venue d'un problème connexe. Un blocage devient une rupture de contrat avec ce qui est attendu dans la logique du problème racine, le problème connexe survient en agissant au sein même de la conception. Ainsi, non seulement la dévolution du «bon problème» ne négocierait pas à la baisse le savoir visé par le problème racine, mais aussi il serait susceptible de relancer le processus de résolution en intervenant directement sur la cause du déséquilibre sujet-milieu. Les observables adidactiques s'expriment donc par les problèmes (P), les opérateurs (R), les langages (L) et les contrôles (Σ) des conceptions en jeu.

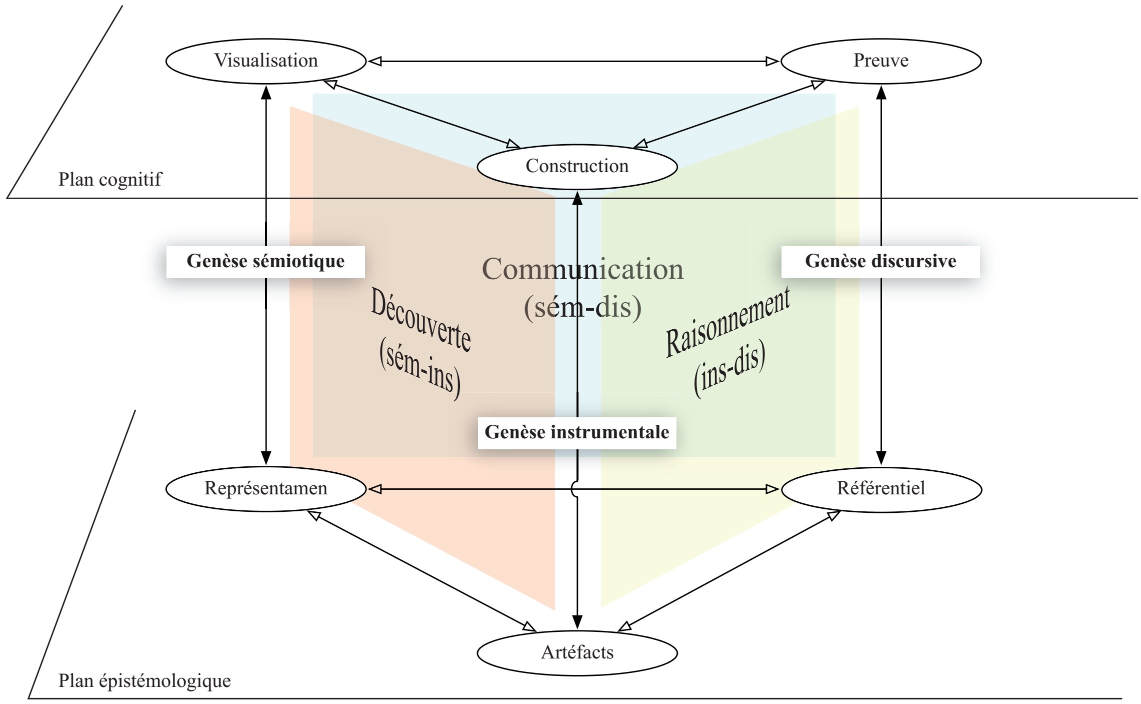


Figure 3 : Les plans verticaux dans l'ETM rejoignent les trois compétences mathématiques du programme de formation du MÉLS (2001, 2006 et 2007).

§**2**. L'intention didactique ne peut se contenter de développer des compétences mathématiques, puisqu'elle doit aussi viser un savoir reconnu par l'institution et permettre à l'élève d'effectuer son travail de mathématicien. Ainsi, dans l'exercice du sens géométrique, on a beau vouloir appuyer sur les compétences de raisonnement, de visualisation, de figuration et d'instrumentation (Richard, Maschietto, Mithalal et Swoboda, 2013), encore faut-il que les connaissances en jeu adhérent à un référentiel théorique : la géométrie. Avec ses plans (épistémologique et cognitif), ses genèses (instrumentale, discursive et sémiotique) et ses compétences mathématiques cognitives (raisonnement, communication et découverte), le modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) permet de désigner l'environnement pensé et organisé pour permettre le travail des individus qui résolvent des problèmes mathématiques (Fig. 3, issue de Kuzniak et Richard, 2014). En géométrie, lorsque l'accent est mis sur le processus d'apprentissage de l'élève dans une situation didactique, le plan épistémologique peut aussi se considérer comme un milieu épistémologique et le plan cognitif, un sujet épistémique (Coutat et Richard, 2011). Il en découle que les interactions spécifiques à la démarche géométrique sont constitutives de l'espace de travail et qu'une caractérisation de ces interactions, à partir d'un ensemble de tâches (problèmes à résoudre choisis par l'enseignant), révèle les enjeux des compétences mathématiques du sujet lors de son travail géométrique. Les interactions didactiques se manifestent alors par le choix des problèmes à résoudre; leur signification peut donc s'interpréter au regard des composantes de l'espace de travail. L'articulation entre les interactions didactiques et les interactions cognitives deviennent possibles parce que l'ETM intègre à la fois les interactions sujet-milieu et l'intention de modifier ce système avec de nouveaux problèmes.

§**3**. En tant que concept central dans les travaux de Vygotski (2013), la Zone Proximale de Développement (ZPD) représente la distance entre ce qu'un enfant apprendra s'il est seul et ce qu'il peut apprendre s'il reçoit de l'aide d'une personne compétente. Puisque la ZPD représente surtout ce que l'apprenant n'est pas capable de réaliser sans une telle aide, il appert que le niveau de développement potentiel est plus grand lorsque l'apprenant est accompagné par un enseignant humain ou par un système expert. Au regard de la théorie de Vygotski, si la venue d'un problème connexe adaptée à un moment de blocage contribue déjà au développement normal de l'élève, le rapprochement «blocage → problème connexe» recèle un potentiel considérable pour faciliter et accélérer l'apprentissage. Autrement dit, la conséquence «blocage → problème connexe» permet d'insister sur la possibilité d'évaluer un développement proche dans le but de le faciliter, aussi bien sur la base des acquis actuels que potentiels. D'une certaine façon, l'idée de développement proche rejoint la notion de conception au sein du modèle cK¢ en tant qu'instance de la connaissance de l'apprenant dont la porté est locale, attestée sur un domaine de validité et d'efficacité dans le contexte du problème racine.

§**4**. À la lumière de notre approche, le «bon problème» est une notion dont le choix et l'intervention se constituent dans les interactions didactiques et cognitives. Dans le langage courant, l'adjectif «bon» signifie que le problème satisfait ou présente les qualités utiles qu'on en attend. Le domaine utilitaire que nous intéresse ici se fonde sur nos questions de recherche, c'est-à-dire qu'un problème est bon s'il permet l'exercice d'une nouvelle conception, ce qui suppose qu'il y aura apprentissage à la suite d'un premier problème racine, ou s'il permet de relancer un processus de résolution bloquée pour faciliter ou accélérer l'apprentissage. Il s'agit d'une définition toute relative qui suppose une certaine connaissance sur les enjeux du travail mathématique que pose la résolution de problèmes, que ce soit lors de processus de découverte et d'exploration, de justification et de raisonnement, de présentation et de communication (cf. les compétences mathématiques cognitives dans les plans verticaux à la Fig. 3).

3. DEROULEMENT DE LA RECHERCHE : ORIENTATION, TACHES ET METHODES

Basé sur les axes de références conceptuelles du cadre général de même que sur les interactions didactiques et cognitives comme pont théorique et méthodologique, la démarche que nous préconisons exige l'intégration et la poursuite de nos travaux antérieurs, la considération de ce que d'autres ont déjà réalisé ainsi qu'une réflexion critique concernant les enjeux de nos questions de recherche. La démarche comporte six phases, pendant cinq ans, qui repose sur la convergence de modèles comparatif-inductif et hypothético-déductif. Cette combinaison rentabilise l'effort expérimental afin de développer et de valider de nouveaux modèles d'apprentissage qui sont cohérent avec les conditions de recherche. La quête de modèles ne résulte donc pas d'un simple phénomène d'apprentissage, mais bien d'allers et retours entre l'anticipation experte et l'étude de systèmes interactifs en évolution. En cherchant à mieux comprendre le processus de gestion interactive de problèmes en géométrie pour le développement des compétences des élèves et l'acquisition du savoir mathématique, notre méthodologie vise des objectifs sur le modèle instructionnel, l'interprétation, la théorisation, l'évaluation et le contrôle :

Objectif 1 Modèle instructionnel	Concevoir, indexer, implanter et tester une structure de problèmes connexes qui se fonde sur les moyens de décision habituels de l'intervention enseignante et sur le comportement de l'élève au cours de la résolution de problèmes racines.
Objectif 2 Interprétation et théorisation	Interpréter et théoriser sur les caractéristiques décisionnelles, épistémologiques, représentationnelles, didactiques et instrumentales du système sujet-milieu en évolution, à partir des interactions didactiques et cognitives, en référence aux conceptions de l'élève et à l'espace de travail mathématique.
Objectif 3 Évaluation et contrôle	Évaluer la constance du système sujet-milieu en interaction, en référence au développement des compétences et à l'acquisition du savoir mathématique, la construction de la pensée géométrique et l'apprentissage de l'élève dans une perspective instrumentée.

Puisque, pour un enseignant humain, il est pratiquement impossible de gérer à lui seul le choix des problèmes connexes pour toute une classe au cours d'une même séance de résolution de problèmes, nous devons aménager en conséquence un système expert. Nous considérons alors le modèle intructionnel (de l'anglais «instructional design») entre deux pôles, celui de la didactique et celui de la technologie de programmation et d'implémentation informatique. L'atteinte des objectifs de recherche présumes également une implication directe sur la formation des enseignants :

Formation initiale :	Prise en charge, par les formés (étudiants universitaires), d'une partie des moyens cognitifs, heuristiques, sémiotiques et métamathématiques mis à la disposition des élèves lors de situations simulées, afin de développer leur capacité de s'identifier à ce que l'élève sait faire et de tester, réciproquement, leur action tutrice.
Formation continue :	Développement de compétences disciplinaires en géométrie, comme professionnel héritier, critique et interprète de ses objets ou de sa culture, dans l'exercice de ses fonctions.

Bien que la notion de problèmes connexes est novatrice dans la littérature didactique, nous avons déjà mis à l'essai des variables de connexité avec trois enseignants issus de l'École internationale de Laval (Laval, Canada), du Lycée Le

Corbusier (Saint-Étienne-du-Rouvray, France) et de l'Institut Pius Font i Quer (Manresa, Espagne). Nous y avons intégré, en particulier, la structure d'itinéraires d'apprentissage de Iranzo (2009) lorsque la transition d'un problème à l'autre répond à un moment de blocage ou à une interaction avec un système tutoriel (voir Phase 1 ci-après et Richard, Cobo, Fortuny et Hohenwarter, 2009). Il en résulte une structure en arbre qui se reconfigure à chaque moment de blocage (Fig. 4). Un itinéraire d'apprentissage est un chemin dans un arbre et l'ensemble des configurations pour un problème racine engendre la forêt du problème. À la section suivante, nous approfondissons la question du rapprochement entre problèmes connexes.

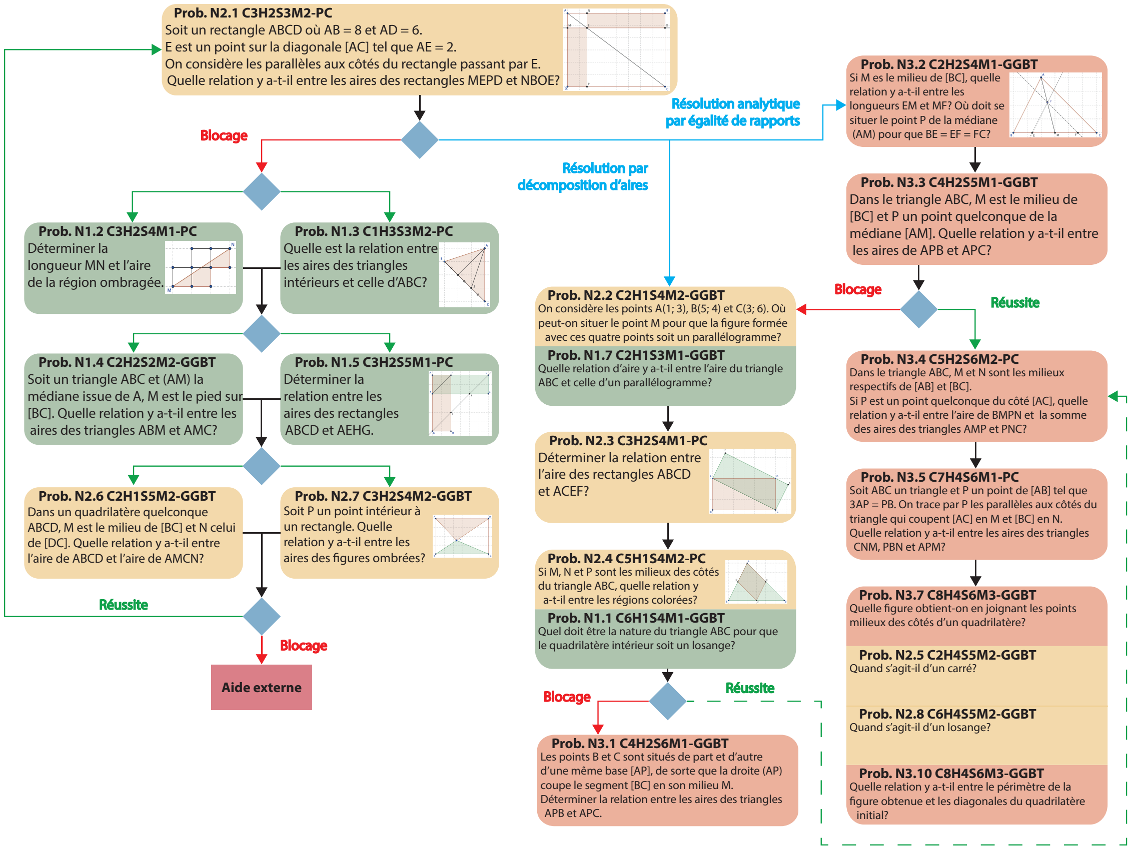


Figure 4 : Arbre de problèmes connexes en géométrie pour un même problème racine (énoncé tout en haut).

Phase 1 – Conception du modèle instructionnel • préparation à l'objectif 1 (1re partie)

Cette phase sera amorcée dès la première année du projet et elle commence par l'intégration des résultats partiels que nous avons obtenus jusqu'ici, dont une première indexation de critères conceptuels, heuristiques, sémiotiques et métamathématiques. Bien que certains résultats ont déjà été publiés[41], il faut adapter

[41] Il s'agit de Richard, Fortuny, Hohenwarter et Gagnon (2007), Richard, Iranzo, Fortuny et Puertas (2009), Richard et Blossier (2012) et Richard, Tessier-Baillargeon, Leduc, Gagnon et Fortuny (2012).

le choix des problèmes aux programmes d'études en vigueur dans les régions des chercheurs participants et les critères de connexité doivent être utilisables par un système expert que nous devons créer. L'ensemble initial est constituée des 34 problèmes de la base de Py (2001), enrichie par des problèmes de géométrie dynamique dans le plan (Iranzo & Fortuny, 2009) et dans l'espace (Blossier & Richard, 2011). La tâche principale de la phase 1 est l'analyse par simulation experte des interactions didactiques et cognitives. Il s'agit d'effectuer une analyse a priori dans une ingénierie didactique (Artigue, 1990, 2002), méthode de recherche de type hypothético-déductif. Conformément à la méthode, cette analyse sera comparée dans les phases ultérieures par une analyse a posteriori (phase 3), suite à une expérimentation dans les écoles (phases 2 et 5), pour raffiner le modèle instructionnel (phase 4) sous une logique de cohérence avec le contrat didactique et ses implicites. Si le choix des critères de connexité dans une perspective a priori exige une réflexion didactique poussée, la complexité même de la connexité demande à s'assurer que les problèmes connexes font partie de l'ETM du problème racine et qu'ils ne sont pas qu'une réaction à une action, mais bien une interaction relative à une conception de l'élève dans l'espace de travail. Cette caractéristique originale est importante puisqu'elle suppose un point de vue opposé aux systèmes tutoriel apparentés à notre projet[42]. En portant sur la gestion interactive de problèmes en géométrie, il n'est pas question pour nous d'erreurs, de profils, de tâches d'élèves ou de décomposition du problème principal en sous-problèmes, encore moins dans une perspective déterminisme de type diagnostic-remède. Ce qui est en jeu ici est la conception d'un modèle pour le développement des compétences des élèves et l'acquisition du savoir mathématique.

Phase 2 – Première expérimentation dans les écoles • réalisation de l'objectif 1 (1re partie)

Dans la poursuite de l'ingéniérie didactique, on ouvre ici une phase d'étude descriptive dans laquelle nous appliquons des méthodes ethnographiques (Eisenhart, 1998, 2001a et 2001b; Lee, Nargund-Joshi & Dennis, 2011; Howe et Eisenhart, 1990). Dans cette tradition typique du domaine, l'«ethnie» est la classe ou le groupe de travail, que l'on peut comprendre en s'interrogeant sur les «langues» (composantes R, L et Σ des conceptions; plan cognitif dans l'ETM), l'«histoire» (contrat didactique; choix du milieu), la «géographie» (composante P d'une conception, le plan épistémologique dans l'ETM) ainsi que leurs interactions. En vue

[42] Dans les articles mentionnés au début de la *Description détaillée*, nous présentons une étude critique sur les systèmes *Geometry Proofs Tutor* (Anderson, Boyle, & Yost, 1986), *Tigre-Mentoniezh* (Py, 1996), *Géométrix* (http://geometrix.free.fr/ par Jacques Gressier), *Advanced Geometry Tutor* (Matsuda & VanLehn, 2005), *Baghera* (Laboratoire Leibniz, 2003), *Cabri-Euclide* (Luengo, 2005), *Geometry Explanation Tutor* (Aleven & al., 2002) et *Andes Physics Tutor* (Vanlehn et al. 2005). Les systèmes *géogébraTUTOR* (Richard, Fortuny, Hohenwarter & Gagnon, 2007), *AgentGeom* (Cobo, Fortuny, Puertas & Richard, 2007) et *Turing* (Richard & Fortuny, 2007) sont des réalisations de notre équipe de recherche.

de renforcer notre objectif d'interprétation et de théorisation (objectif 2), il faut recouper les sources primitives (interactions didactiques et cognitives) à la suite de l'observation de plusieurs «ethnies» (processus de «triangulation», Eisenhart, 1988) : **a)** collecte des interactions dans 3 classes du 2e cycle au secondaire issus de 3 régions différentes lorsque, dans leurs cours ordinaires, les élèves résolvent 5 problèmes racines en binôme à l'interface du système expert (données qualitatives, Paillé et Mucchielli, 2008); **b)** demande aux enseignants de reconstruire leurs interventions et de comparer les moyens de décision du système par rapport au contrat didactique du cours (Perrin-Glorian & Reuter, 2006; Caron & de Cotret, 2007) lors d'entretiens d'explicitation de 50 min (Vermersch, 1994)[43]. Alors que la phase 1 devra durer deux ans, nous prévoyons effectuer des tests informatiques par échantillonnage selon la méthode la phase 2 et la logique de la «conception dans l'usage» (voir phase 4).

Phase 3 – Analyse et interprétation • préparation aux objectifs 2 et 3 (1re partie)

Puisque qu'un moment de blocage ou la réussite d'un problème est caractéristique du sujet-milieu, il faut considérer les problèmes connexes que l'on retourne avant de pouvoir dégager des régularités dans les conceptions et les ETM. De la collecte et de l'analyse des interactions, nous répondons aussi à nos questions suivant une analyse par théorisation ancrée (Glaser et Strauss, 2012), méthode de recherche de type comparatif-inductif. En rapprochant les problèmes posés par le tuteur et les conceptions en jeu lors des moments de blocage, notre analyse reliera les caractéristiques des problèmes aux composantes des conceptions afin de théoriser sur les aspects décisionnels, épistémologiques, représentationnels, didactiques et instrumentaux de systèmes en évolution. Cette analyse sera complémentaire à l'analyse a posteriori de l'ingénierie didactique. Si la phase 2 doit s'étaler sur 1 an, il faudra s'accommoder du moment où la géométrie s'étudie dans chaque classe : la phase 3 pourrait commencer dans la 2e année, même si elle s'achèvera au terme de la 3e année. Les tâches des phases subséquentes s'étalent alors sur deux ans et découlent naturellement des trois premières phases.

Phase 4 – Recoupement, validation et perfectionnement • préparation à l'objectif 1 (2e partie) et réalisation de l'objectif 2 (1re partie)

- Mise en commun des résultats de la phase 3 et dégagement de régularités (conceptions et ETM).
- Afin d'améliorer le modèle instructionnel et de mieux comprendre les caractéristiques communes ou invariantes du système sujet-milieu en évolution, validation experte du rapprochement de la phase 3.

[43] En plus des fichiers-journaux du système expert, le logiciel «ScreenFlow» permet l'enregistrement du son, de l'image et des interactions à l'écran (Richard, Gagnon et Fortuny, 2013). Nous prévoyons aussi des enregistrements audio pour les enseignants (intervention en classe et entretiens d'explicitation), le tout dans le respect des règles d'éthique en vigueur – idem pour la saisie et le traitement des données dans toutes les phases.

- Optimisation de l'articulation et de la continuité entre la conception du système expert et la poursuite de la conception lors de la résolution par les élèves (ou «conception dans l'usage», Rabardel, 1995).

Phase 5 – 2e expérimentation dans les écoles • préparation à l'objectif 3 (2e partie) et réalisation de l'objectif 1 (2e partie)

- Reprise des procédures de la phase 2, en demandant aux enseignants d'évaluer en outre les solutions (sans les noter) dans une perspective d'évaluation de compétences et d'acquisition du savoir.

Phase 6 – Modélisation, synthèse, théorisation • réalisation des objectifs 2 (2e partie) et 3

- Modélisation d'une ontologie sur la base des contrats didactiques et des caractéristiques du milieu.
- Synthèse sur les itinéraires d'apprentissage non déterministes et sur la gestion des problèmes.
- Théorisation sur les relations fondamentales dans les situations didactiques et adidactiques.

4. CHOIX DES PROBLEMES : COMPLEXITE DE LA CONNEXITE ET PROCESSUS DE DECISION

La question de la connexité se pose en caractérisant chaque problème selon un certain nombre de variables et en comparant les valeurs de ces variables. Deux problèmes connexes sont proches lorsque les valeurs des variables sont communes. Les variables que nous avons testées répondent à quatre questions qui portent sur l'énoncé d'un problème et ses solutions possibles :

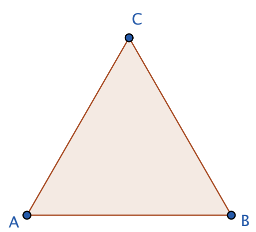
- Quel est le contenu curriculaire (concepts, processus) qui intervient dans la résolution du problème et quelles sont les compétences mathématiques engagées (variable *contenu*)?
- Comment découvre-t-on une solution dans le processus de résolution (variable *heuristique*)?
- Par quels moyens (signes, outils) exprime-t-on, développe-t-on et communique-t-on les idées (variable *sémiotico-instrumental*)?
- Sous quelles dispositions contrôle-t-on le traitement du problème (variable *métamathématique*)?

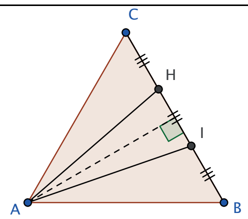
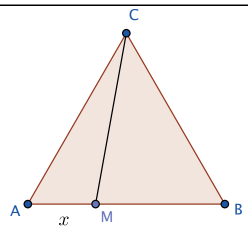
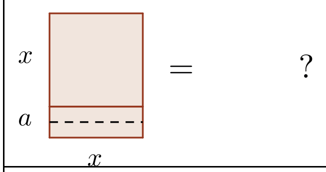
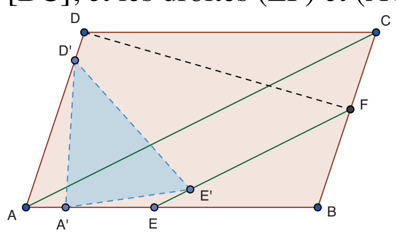
  À titre indicatif, ces variables peuvent prendre les valeurs :
- Contenu (C) : triangle, hauteur, base, longueur, mesure, aire, homothétie, isométrie, description, construction, analyse, transformation, etc.
- Heuristique (H) : décomposer, comparer, équivaloir, particulariser, limites, singularité, formules, auxiliaire, appréhension, exemplification, généralisation,

itération, etc.

- Sémiotico-instrumental (S) : interpréter, représenter, traduire, modéliser, accentuer, instrumenter, instrumentaliser, décoder, communiquer, décontextualiser, coordonner, déplacer, etc.
- Métamathématique (M) : identifier, décrire, conclusion, hypothèse, figure, définir, démontrer, conjecturer, valider, supposer, argumenter, induire etc.

Quoiqu'étant susceptibles de différer d'une région ou d'un auteur à l'autre, les valeurs des variables *contenu* et *heuristique* sont plutôt courantes dans la tradition didactique. La difficulté d'attribution de ces valeurs à un problème tient essentiellement à l'anticipation des solutions possibles, ce qui suppose une connaissance sur le contexte de résolution tel que l'état des compétences mathématiques cognitives ou les habitudes cultivées par les contrats didactiques. En revanche, l'assignation des deux autres variables demande un peu plus de créativité et de réflexion sur la déclinaison des énoncés. Afin d'illustrer les liens entre un énoncé et une valeur possible pour variables *sémiotico-instrumental* et *métamathématique*, nous exposons ci-après quelques attributions archétypiques. Cependant, les exemples proposés n'épuisent pas l'ensemble des valeurs possibles. C'est-à-dire que normalement, un même énoncé peut prendre plusieurs valeurs d'une même variable, et tous les énoncés, se voir attribuer au moins une valeur par variable.

Métamathématique	
Énoncé	**Exemple de valeur type**
Dans le problème suivant : «Divise le triangle équilatéral ABC en trois triangles équivalents à partir de deux droites qui passent par le point C» à quel résultat veut-on arriver dans le triangle équilatéral ABC?	**Conclusion** (identifier, décrire la conclusion)
Dans le problème suivant : «Divise le triangle équilatéral ABC en trois triangles équivalents à partir de deux droites qui passent par le point C» qu'est-ce que l'on sait avant de pouvoir diviser le triangle équilatéral ABC?	**Hypothèse** (identifier, décrire les hypothèses)
Quel objet géométrique manque-t-il à la figure ci-contre pour qu'elle représente le problème suivant : «Divise le triangle équilatéral ABC en trois triangles équivalents à partir de deux droites qui passent par le point C»? On ne demande pas de construction, il faut seulement dire quel est ou quels sont les objets qui manquent. 	**Figure** (identifier, décrire la figure)

Sémiotico-instrumental	
Énoncé	**Exemple de valeur type**
Dans la situation ci-contre, que peut-on dire sur les aires des triangles ACH, AHI et AIB? 	**Interpréter** (un dessin)
Dessiner trois triangles de même aire qui forment, ensemble, un triangle équilatéral.	**Représenter** (une figure)
Si M est un point sur la base [AB] d'un triangle équilatéral ABC, où M doit-il se situer pour que l'aire du triangle MBC soit le double de celle du triangle AMC? 	**Traduire** (du registre figural au registre analytique)
Expliquer l'égalité suivante en représentant le membre de droite à l'aide d'un dessin géométrique : $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ 	**Modéliser** (géométriquement)
Dans la situation suivante, où ABCD est un parallélogramme, E et F sont respectivement des points quelconques sur [AB] et [BC], et les droites (EF) et (AC) sont parallèles :  si D' peut se déplacer sur [AD], A' sur [AE] et E' sur [EF], que peut-on dire des aires des triangles DAE et DFC?	**Accentuer** (animer une figure exprimée dans le registre figural pour mettre en évidence une propriété qui demeure invariante dans les déplacements)

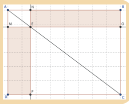
Articulation des problèmes

Pour montrer l'institution d'un mécanisme de rapprochement des problèmes, nous retenons les problèmes N2.1, N1.2 et N1.3 de la Fig. 4, qui sont tous proposés dans l'environnement papier-crayon. Nous supposons ici que ces problèmes se destinent à des élèves de 3e secondaire dans le contexte québécois, et que la variable *contenu* reprend les concepts et les processus relatifs aux figures géométriques et au sens spatial du MÉLS (2006, 2007). Dans le programme de formation de l'école québécoise, le contenu mathématique est hiérarchisé, de sorte que les valeurs possibles pour les problèmes précédents le sont également (ci-dessous). Par économie d'espace et afin de faciliter l'indexation des problèmes, nous indiquons leur caractérisation selon la numérotation suivante :

1	Figures planes > Triangles, quadrilatères et polygones réguliers convexes > Segments et droites remarquables : bissectrice, médiatrice, médiane, hauteur
2	Figures planes > Triangles, quadrilatères et polygones réguliers convexes > Base, hauteur
3	Figures planes > Mesure > Longueur
4	Figures planes > Mesure > Aire, aire latérale, aire totale
5	Transformations géométriques > Homothétie de rapport positif
6	Recherche de mesures manquantes > Longueurs > Segments provenant d'une isométrie ou d'une similitude
7	Recherche de mesures manquantes > Longueurs > Mesure manquante d'un segment d'une figure plane
8	Recherche de mesures manquantes > Aires > Aire de polygones décomposables en triangles et en quadrilatères
9	Analyse de situations mettant à profit des propriétés des figures > Description et construction d'objets
10	Analyse de situations mettant à profit des propriétés des figures > Recherche de mesures manquantes > Longueurs > Côtés d'un triangle rectangle (relation de Pythagore)
11	Analyse de situations mettant à profit des propriétés des figures > Recherche de mesures manquantes > Longueurs > Segments provenant d'une isométrie, d'une similitude, d'une figure plane ou d'un solide
12	Analyse de situations mettant à profit des propriétés des figures > Recherche de mesures manquantes > Aires > Figures issues d'une similitude

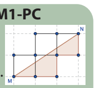
Encore par économie, nous limitons la complexité des valeurs des autres variables à celles que nous avons énoncées ci-dessus et nous gardons en réserve toutes éventuelles hiérarchisations de ces valeurs. Sous ces conditions, une caractérisation possible des problèmes N2.1, N1.2 et N1.3 est :

Prob. N2.1 C3H2S3M2-PC
Soit un rectangle ABCD où AB = 8 et AD = 6.
E est un point sur la diagonale [AC] tel que AE = 2.
On considère les parallèles aux côtés du rectangle passant par E.
Quelle relation y a-t-il entre les aires des rectangles MEPD et NBOE?



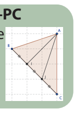
$C_{N2.1}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
$H_{N2.1}$ = {décomposer, comparer, équivaloir, auxiliaire, appréhension}
$S_{N2.1}$ = {interpréter, traduire, communiquer, coordonner}
$M_{N2.1}$ = {identifier, décrire, figure, définir, conjecturer}

Prob. N1.2 C3H2S4M1-PC
Déterminer la longueur MN et l'aire de la région ombragée.



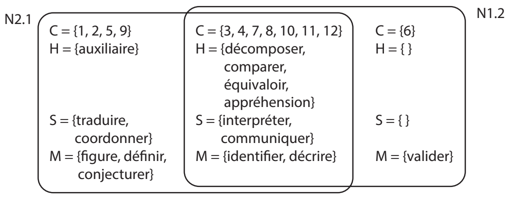
$C_{N1.2}$ = {3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12}
$H_{N1.2}$ = {décomposer, comparer, équivaloir, appréhension}
$S_{N1.2}$ = {interpréter, communiquer}
$M_{N1.2}$ = {identifier, décrire, valider}

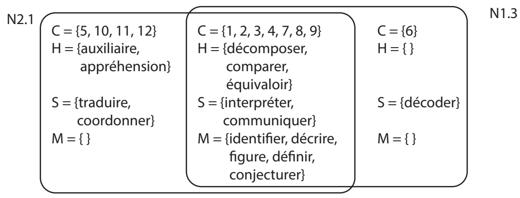
Prob. N1.3 C1H3S3M2-PC
Quelle est la relation entre les aires des triangles intérieurs et celle d'ABC?



$C_{N1.3}$ = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9}
$H_{N1.3}$ = {décomposer, comparer, équivaloir}
$S_{N1.3}$ = {interpréter, décoder, communiquer}
$M_{N1.3}$ = {identifier, décrire, figure, définir, conjecturer}

On constate tout de suite que le problème N2.1 est essentiellement plus riche que N1.2 et N1.3, en ce sens que sa caractérisation fait intervenir davantage de valeurs pour presque chaque variable. Malgré tout, cette caractéristique ne rend pas N2.1 si différent des autres. En effet, dans la transition N2.1 → N1.2 ou N1.3, on remarque que les valeurs communes sont nombreuses, ce qui signifie que les problèmes N1.2 et N1.3 sont proches de N2.1 :





Autrement dit, même si les énoncés sont indépendants, la résolution d'un problème proche à un autre risque d'en influencer la résolution suivant les valeurs communes. Regardons ce plus près la relation entre ce critère de connexité et les moments de blocage afin de constituer un processus de décision qui s'y rattache.

Blocage et décision

Dans notre cadre théorique, nous avons associé un moment de blocage à un déséquilibre au sein du système sujet-milieu, le blocage portant avec lui un potentiel d'apprentissage. En principe, le dépassement d'un blocage induit une transition dynamique d'une conception à l'autre. Ainsi, au regard du modèle cK¢, on considère p_1 le problème racine et $\mathbf{C}_1 = (P_1; R_1; L_1; \Sigma_1)$ une conception du système-sujet milieu, avant la résolution de p_1. Lorsque $\mathbf{C}_1$ permet de résoudre p_1, alors p_1 appartient à P_1, ce qui veut dire qu'il n'y a pas d'apprentissage. Néanmoins, lorsque $\mathbf{C}_1$ s'avère insuffisant, alors la résolution de p_1 exige l'apprentissage $\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2$, où $\mathbf{C}_2 = (P_2; R_2; L_2; \Sigma_2)$ et $p_1 \in P_2$. À la suite d'un blocage, la venue d'un problème connexe p_2 devrait aussi appartenir à P_2. Mais comme l'apprentissage ne s'est pas encore réalisé, p_2 est susceptible de déséquilibrer la cohérence conceptuelle de $P_1 \cup \{p_2\}$, pour P_1 qui justement exclu p_1. Il en découle que la différence $p_2 - p_1$ représente un potentiel de déséquilibre conceptuel. Pour deux problèmes proches, le processus de décision doit donc s'établir sur cette différence et correspondre, dans la mesure du possible, à la cause du blocage. Du coup, les variables de connexité agissent en variables d'interprétation de blocages. Dans l'exemple précédent, puisque $C = \{6\}$ et $H = \{\ \}$ pour N1.2 – N2.1 et N1.3 – N2.1, il faut comprendre que par rapport au problème racine N2.1, les problèmes connexes N1.2 et N1.3 ne se différentient respectivement que pour M = {valider} et S = {décoder}. Le choix de N1.2 ou N1.3 dépend donc de l'identification d'un blocage en termes des valeurs «valider» ou «décoder».

5. QUELSQUES RESULTATS ESCOMPTES

L'idée de répondre à un blocage de l'élève en lui proposant la résolution opportune de problèmes constitue une solution effective à l'une des difficultés majeures de l'enseignement, soit celle qui demande d'éviter de donner des réponses en même temps que les questions lorsque l'élève est en difficulté. En ce sens, notre projet soulage théoriquement un paradoxe de Brousseau (1998), que l'on appelle «paradoxe de la dévolution» : tout ce que fait l'enseignant pour faire produire, par les élèves, les comportements qu'il attend tend à diminuer l'incertitude de l'élève et par là, à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée; si l'enseignant dit ou signifie ce qu'il veut de la part de l'élève, il ne peut plus l'obtenir que comme exécution d'un ordre et non par l'exercice de ses connaissances et de son jugement. La notion de dévolution, en tant que levier didactique pour l'enseignant et condition indispensable pour le développement de l'autonomie de l'élève, gagne en force et reprend ici l'idée qu'un problème connexe appartient à l'espace de travail du problème racine et que l'enseignant cherche à rendre cet espace à l'élève en lui laissant la responsabilité de la résolution. Le développement de l'autonomie dans l'apprentissage est un enjeu social majeur.

6. CONCLUSION

Dans la poursuite d'un programme de recherche qui se conduit dans l'actualité des enjeux de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, notre projet propose un regard neuf sur l'action tutorielle visant à soutenir l'élève en résolution de problème. Lorsqu'on sait que le professeur a l'obligation sociale d'enseigner tout ce qui est nécessaire à propos du savoir et que l'élève, surtout lorsqu'il est en échec, le lui demande, il faut admettre avant tout que le professeur doit réussir à ce que l'élève s'approprie les problèmes au point d'être capable d'en accepter la responsabilité et de les résoudre par lui-même. Or, cela soulève une problématique bien connue dans la littérature didactique, à la fois difficile et complexe, qui repose sur le paradoxe de la dévolution du problème, en tant qu'opportunité d'apprentissage que lègue le professeur à l'élève. À partir d'une approche originale qui cherche à rendre à l'élève des problèmes adaptés tout en évitant de «donner des réponses en même temps que les questions» – que nous appelons méthode des problèmes connexes –, notre projet offre d'emblée une solution subtile au paradoxe de la dévolution. En intégrant notamment la façon dont les problèmes se posent et se résolvent en classe, nous traitons à la fois de l'importante question de la conceptualisation chez les jeunes et de leur mise en œuvre pour le développement des compétences mathématiques.

En se centrant sur les interactions didactiques et cognitives de systèmes en évolution, nos cadres théoriques et méthodologiques demeurent intimement rattachés, ce qui génère un avantage déterminant permettant de mieux comprendre l'articulation entre les énoncés théoriques et les énoncés issus de l'expérience, bien au-delà de projets éducationnels hérités du positivisme logique (Putnam, 2002). Et en nous référant aux conceptions de l'élève en même temps qu'à l'espace de travail mathématique, nous pouvons formuler de façon très concrète et plus opératoire une modélisation fonctionnelle de la situation didactique et de l'apprentissage autonome. Si notre projet prolonge nos réalisations technologiques récentes en intelligence artificielle, nous visons aussi à ce que la conception d'un système expert de gestion de problèmes se poursuive dans l'usage, c'est-à-dire qu'au cours du processus de conception d'un modèle instructionnel et d'expérimentation, le dialogue entre concepteurs et usager se substitue à la consigne initiale de faire «approprier» le système par les utilisateurs. Enfin, avec l'idée d'itinéraires interactifs, nous rejetons tout particulièrement les approches tutorielles déterministes qui prédominent pour l'apprentissage de la géométrie.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Aleven V., Popescu O. & Koedinger K.R. (2002), Towards tutorial dialog to support self-explanation : Adding natural language understanding to a cognitive tutor, dans Artificial Intelligence in Education : AI-ED in the Wired and Wireless Future (Éds. Moore, Redfield & Johnson), 246-255. IOS Press, Amsterdam.

Anderson J.R., Boyle C.F. & Yost G. (1986), The Geometry Tutor, *The Journal of Mathematical Behavior*, 5-20.

Artigue M. (1990), Ingénierie didactique, *Recherches en didactique des mathématiques* **9.3**, 281-308.

Artigue M. (2002), Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? *Les Dossiers des Sciences de l'Éducation* **8**, 59-72.

Balacheff N. & Margolinas C. (2005), Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques, dans *Balises pour la didactique des mathématique* (Éds. Mercier & Margolinas), 75-106. La pensée sauvage, Grenoble.

Blossier, M. & Richard, P.R. (2011). Modélisation instrumentée et conceptions a priori dans un espace de travail géométrique en évolution : un tour en géométrie dynamique tridimensionnelle. *Actes des journées mathématiques 2011 de l'École Normale Supérieure de Lyon (IFÉ 2011), Institut Français de l'Éducation* (pp. 93-101), Lyon.

Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau, G. (2004). Introduction à l'étude de l'enseignement du raisonnement et de la preuve : les paradoxes. *La lettre de la preuve – International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, récupéré le 3 février 2010 à http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/04Ete/04EteThemeFR.html.

Caron F. & de Cotret S.R. (2007), Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques : genèse d'une perspective, *Actes du Colloque 2007 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 123-134.

Cobo P., Fortuny J.M., Puertas E., & Richard, P.R. (2007), Agentgeom : A multiagent system for pedagogical support in geometric proof problems, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **12.1**, 57-79.

Coutat, S. et Richard, P.R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 97-126.

Duval R. (1995), Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Peter Lang, Berne.

Eisenhart, M. (2001b). Changing Conceptions of Culture and Ethnographic Methodology: Recent Thematic Shifts and Their Implications for Research on Teaching. In *V. Richardson (Ed.) Handbook of Research on Teaching, 4th Edition* (pp. 209-225). Washington, DC : American Educational Research Association.

Eisenhart, M. A. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 99-114.

Eisenhart, M. A. (2001a). Educational Ethnography Past, Present, and Future: Ideas to Think With. *Educational Researcher, 30*(8),16–27.

Glaser B.G. & Strauss A.L. (2012), La découverte de la théorisation ancrée - Stratégies pour la recherche qualitative. Paris : Armand Colin.

Hollebrands K.F., Conner A.M. & Smith R.C. (2010), The Nature of Arguments Provided by College Geometry Students With Access to Technology While Solving Problems, *Journal for Research in Mathematics Education* **41.4**, 324-350.

Howe, K. & Eisenhart, M.A. (1990). Standards for Qualitative (and Quantitative) Research: A Prolegomenon. *Educational Researcher, 19*(4), 2-9.

Iranzo, N. & Fortuny J.M. (2009), La Influencia conjunta del uso de geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado, *Revista Enseñanza de las Ciencias* 27.3, 433-446.

Kuzniak A. (2006), Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* **6.2**, 167-187.

Kuzniak A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **16**, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P.R. (2014), Espaces de travail mathématique - Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 17, Numero Extraordinario 1*, 1-21.

Laboratoire Leibniz (2003), Baghera assessment project : Designing an hybrid and emergent educational society, dans *Rapport pour la commission européenne, Programme IST, Les Cahiers du Laboratoire Leibniz nº 81* (Éd. Soury-Lavergne). Grenoble.

Lakatos I. (1984), Preuves et réfutations. Essai sur la logique de la découverte mathématique. Hermann, Paris.

Lee, J.S., Nargund-Joshi, V. & Dennis, B. (2011). Progressing through the Haze in Science and Mathematics Education Research: Contemporary Use of Spradley's Qualitative Inquiry in Two Case Studies. *International Journal of Qualitative Methods 2010, 10*(1), 41-57.

Luengo V. (2005), Some didactical and epistemological considerations in the design of educational software: The cabri-euclide example, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **10.1**, 1-29.

Margolinas C. (2009), *Points de vue de l'élève et du professeur : essai de développement de la théorie des situations didactiques*, Habilitation à diriger les recherches en sciences de l'éducation, Université de Provence, version électronique récupérée le 26 juillet 2010 à http://tel.archivesouvertes.fr/docs/00/42/96/95/PDF/HDR_Margolinas.pdf.

Mason, J. (2005). Researching Your Own Practice : The Discipline of Noticing. Londres et New York : Routledge.

Matsuda N. & VanLehn K. (2005), Advanced geometry tutor : An intelligent tutor that teaches proof-writing with construction, dans *The 12th International Conference on Artificial Intelligence in Education* (Éds. Looi, McCalla, Bredeweg & Breuker), 443-450. IOS Press, Amsterdam.

Paillé, P. et Mucchielli, A. (2008). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales*. Paris : Armand Colin.

Perrin-Glorian, M.J. et Reuter, Y. (2006). *Les méthodes de recherche en didactiques*. Villeneuve d'Ascq, France : Presses Universitaires du Septentrion.

Polya, G. (2007). *Comment poser et résoudre un problème, 2e éd*. Pour l'original de 1965, Paris : Dunod, 1965; pour le nouveau tirage de 2007, Paris : Jacques Gabay.

Putnam, H. (2002), The collapse of the fact/value dichotomy and other essays. Havard University Press.

Py D. (1996), Aide à la démonstration en géométrie : le projet Mentoniezh, *Sciences et Techniques Educatives* **3.2**, 227-256.

Py D. (2001), *Environnements interactifs d'apprentissage et démonstration en géométrie*. Habilitation à diriger des recherches, Université de Rennes.

Rabardel P. (1995), Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin, Paris.

Richard P.R. (2004a), Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques. Peter Lang, Berne.

Richard P.R. (2004b), L'inférence figurale : Un pas de raisonnement discursivo-graphique, *Educational Studies in Mathematics* **57.2**, 229-263.

Richard P.R., & Fortuny J.M. (2007), Amélioration des compétences argumentatives à l'aide d'un système tutoriel en classe de mathématique au secondaire, *Annales de didactique et de sciences cognitives* **12**, 83-116.

Richard P.R., Cobo P., Fortuny J.M. et Hohenwarter M. (2009), Training teachers to manage problem-solving classes with computer support, *Journal of Applied Computing* **5.1**, 38-50.

Richard P.R., Fortuny J.M., Gagnon M., Leduc N., Puertas E. & Tessier- Baillargeon M. (2011), Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometry, dans Interoperable interactive geometry for Europe (Éds. Kortenkamp & Laborde), *ZDM - The International Journal on Mathematics Education* **43**, 425-439.

Richard P.R., Fortuny J.M., Hohenwarter M. & Gagnon M. (2007), geogebraTUTOR : une nouvelle approche pour la recherche sur l'apprentissage compétentiel et instrumenté de la géométrie à l'école secondaire, *Actes de la World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education*.

Richard P.R., Gagnon, M. & Fortuny J.M. (2013), Means of choice for interactive management of dynamic geometry problems based on instrumented behaviour, *American Journal of Computational Mathematics* **3**, 41-51.

Richard, P.R. et Blossier, M. (2012). Instrumented modelling and preliminary conceptions in three-dimensional dynamic geometry with geogebra-3D. *Acte de la World Conference on E-Learning i1n Corporate, Government, Healthcare & Higher Education (E-Learn 2012) of the Association for the Advancement of Computing in Education* (10 p.). Montréal.

Richard, P.R. et Sierpinska, A. (2004). Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie. In Lemoyne, G. et Sackur, C. (rédactrices invitées) *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, Revue des sciences de l'éducation, Numéro thématique, 30* (2), 379-409.

Richard, P.R., Iranzo, N., Fortuny, J.M. et Puertas, E. (2009). Influence of dynamic geometry and problem solving strategies toward an interactive tutorial system. *Actes de la World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare & Higher Education* (pp. 649-658). Vancouver.

Richard, P.R., Maschietto, M. & Mithalal, J. & Swoboda, E. (2013). Introduction to the papers and posters of WG4: geometrical thinking. *Actes du Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME8)*, pp. 578-584.

Richard, P.R., Tessier-Baillargeon, M., Leduc, N., Gagnon, M. et Fortuny, J.M. (2012). Levels of teaching intervention and the development of geogebraTUTOR system in a secondary school experiment. *Acte de la World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare & Higher Education (E-Learn 2012) of the Association for the Advancement of Computing in Education* (10 p.). Montréal.

Schoenfeld, A.H. (2011). How We Think - A Theory of Goal-Oriented Decision Making and its Educational Applications. New York : Routledge.

Vanlehn K., Lynch C., Schulze K., Shapiro J.A., Shelby R., Taylor L. et al. (2005), The andes physics tutoring system: Lessons learned, *Int. J. Artif. Intell. Ed.* **15.3**, 147-204.

Vermersch P. (1994), L'entretien d'explicitation en formation initiale et continue, ESF, Paris.

Vygotsky, L.S. (2013). *Pensée et langage*. Paris : éditions La dispute.

ESTUDIO DE LA CALIDAD DE LA ENSEÑANZA COMPARANDO DISCUSIONES EN GRAN GRUPO DE TAREAS DE SEMEJANZA

Miquel Ferrer, Universitat Autònoma de Barcelona

Itziar García-Honrado, Universidad de Oviedo

Josep M. Fortuny, Universitat Autònoma de Barcelona

Presentamos un estudio de dos casos de profesor que pretende analizar la calidad de la enseñanza que se genera en un contexto de discusión en gran grupo y se muestran elementos que contribuyen en la generación de un Espacio de Trabajo Matemático (ETM) idóneo. Identificamos el modo de actuación de los docentes y ejemplificamos oportunidades de aprendizaje matemático. Profundizamos en su estudio a través de las rúbricas de un instrumento de análisis y empleamos los conjuntos borrosos para mejorar la interpretación de los resultados. La investigación muestra evidencias de dos modos de actuación docente, los cuales se relacionan con las oportunidades de aprendizaje generadas en clase y con el aspecto de los conjuntos borrosos obtenidos.

INTRODUCCIÓN

Numerosas investigaciones se centran en el estudio de la interacción como un facilitador del conocimiento en el trabajo por parejas (Sfard y Kieran, 2001), pero poco se conoce sobre la construcción de conocimiento matemático en las discusiones en grupo, las cuales son susceptibles de facilitar el aprendizaje de los alumnos. En este informe nos preguntamos cómo valorar la calidad de la enseñanza que se genera en una discusión en gran grupo según el modo de actuación del profesor.

Proponemos un estudio experimental de dos casos de profesor de secundaria que tiene por objetivos: (a) identificar el modo de actuación de los docentes cuando gestionan clases de Geometría que incluyen la resolución de tareas de semejanza, y (b) determinar oportunidades de aprendizaje matemático para reflexionar sobre la calidad de la discusión en gran grupo.

Este trabajo pretende ser novedoso en el área, ya que su diseño incluye la utilización de métodos analíticos propios de las investigaciones en educación matemática y aspectos metodológicos de la lógica borrosa o *fuzzy*. Además, se centra en el rol de los profesores y muestra la importancia de realizar una gestión adecuada de las interacciones para facilitar la generación de oportunidades de aprendizaje matemático.

MARCO TEÓRICO

Dentro del marco teórico de los ETM (Kuzniak, 2011), donde se incluyen dos planos: epistemológico y cognitivo, enmarcamos el informe en el ETM de Referencia del profesor, ya que contribuirá a un conocimiento de las estrategias que en una discusión en gran grupo permiten la construcción de un ETM efectivo. Éste ayuda a los estudiantes a progresar matemáticamente desde un punto de vista conceptual, procedimental y actitudinal, es decir, también involucra ETM Personales de los alumnos, en los que la mediación del profesor permite dirigirlos hacia un ETM idóneo (Gómez-Chacón y Kuzniak, 2013).

Dimensiones instrumental y discursiva

Analizamos los episodios de una discusión en gran grupo a través de dos dimensiones: la instrumental, basada en los artefactos y en la forma como éstos se utilizan en clase, y la discursiva, la cual se fundamenta en los modos de interacción que ayudan a entender el desarrollo genérico de los episodios y las características particulares que se producen en ellos.

En la dimensión instrumental consideramos seis tipos de orquestación: *explorar el artefacto*, *explicar a través del artefacto*, *enlazar artefactos*, *discutir el artefacto*, *descubrir a través del artefacto* y *experimentar el instrumento*. Los tres primeros se centran en las acciones del profesor y los tres últimos en las de los alumnos. Todos ellos están inspirados en los tipos iniciales diseñados por Drijvers, Doorman, Boon, Reed y Gravemeijer (2010), aunque generalizados en nuestra investigación para situaciones de enseñanza en las que el diseño e implementación de las discusiones en gran grupo no contenga, necesariamente, un uso intensivo de los artefactos tecnológicos (para analizar los detalles de esta clasificación consultar Morera, 2013).

Consideramos que los artefactos son todas las herramientas utilizadas durante la sesión de clase que pueden facilitar la interacción entre dos participantes y pueden fomentar el desarrollo de aptitudes, procedimientos y contenidos matemáticos. Algunos son tecnológicos, como un software de geometría dinámica (p.ej., GeoGebra), y otros son convencionales (p.ej., pizarra ordinaria o material manipulativo).

Estructuramos la dimensión discursiva en términos de los estadios de la discusión de un problema, los cuales se presentan como una secuencia de pautas de actuación que ilustran el proceso de gestionar una discusión en gran grupo hacia la resolución de un problema matemático (Morera, 2013). Los estadios, que se organizan de acuerdo a un desarrollo idealizado del proceso de resolución, son los siguientes: *situación del problema*, *presentación de una solución*, *estudio de estrategias para resolver o argumentar*, *estudio de casos particulares o extremos*, *contraste entre soluciones*, *conexiones con otras situaciones*, *generalización y conceptualización*, y *reflexión sobre el progreso matemático*.

De acuerdo con las dimensiones instrumental y discursiva, interpretamos los episodios como sistemas de acciones que han tenido lugar en un estadio específico de la discusión en gran grupo de un problema. Nuestro interés recae en los efectos relativos al aprendizaje de dichas acciones, que son susceptibles de fomentar conocimiento matemático procedimental y/o conceptual (Niss y Højgaard, 2011). Las acciones se vinculan al participante que las realiza (estudiante o profesor), con atención al papel que ejercen en la organización de la participación matemática durante la discusión.

Como este informe se basa especialmente en el estudio de la actividad docente del profesor, adaptamos la clasificación de Schoenfeld (2011) para agrupar las acciones del docente en tres tipos de acción: *gestión*, *discusión* y *contenido matemático*, según se refieran a la organización de la clase y de sus participantes; al desarrollo y discusión de las tareas matemáticas; o a los contenidos matemáticos de las tareas y a la disposición del profesor para escuchar a los alumnos y darse cuenta de los aspectos que comprenden mejor o peor.

Oportunidades de aprendizaje matemático

La interpretación de las discusiones en gran grupo en términos de secuencias de episodios y acciones está relacionada con la comprensión de la interacción como un elemento fundamental para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas. Diversos autores han estudiado este tema para el caso de los estudiantes (Yackel, Cobb y Wood, 1991). En nuestro caso, consideramos las oportunidades de aprendizaje matemático como las relaciones entre los contenidos del conocimiento matemático (procedimentales y conceptuales) y las acciones que potencialmente contribuyen a facilitar el aprendizaje de los alumnos (Ferrer, Fortuny y Morera, 2014).

Estas oportunidades se pueden identificar a través de acciones generadas por diversas situaciones desarrolladas en los procesos de interacción de una clase de matemáticas. Así, las situaciones de aula se presentan como un conjunto de múltiples procesos de interacción, donde todos los participantes contribuyen conjuntamente en el desarrollo de situaciones que pueden fomentar el aprendizaje matemático de los estudiantes.

Sistemas de rúbricas en la valoración de la calidad de la discusión

Profundizamos en el estudio de las oportunidades de aprendizaje haciendo uso del 'Instructional Quality Assessment' -IQA- (Boston, 2012), instrumento que incluye un conjunto de diez rúbricas divididas en dos bloques: rigor académico y efectividad de la discusión en gran grupo. Las rúbricas están planteadas para medir el grado de demanda cognitiva de la tarea que se introduce a los alumnos, la riqueza de su implementación en clase y la calidad global de la discusión en grupo. Como en Jackson, Garrison, Wilson, Gibbons y Shahan (2013), consideramos que cuanto mayor es la puntuación en las rúbricas del instrumento, más probable es que los alumnos puedan aprovechar las oportunidades de aprendizaje matemático que se generan en la discusión. A continuación describimos las dos primeras rúbricas de cada bloque, las cuales utilizamos en el análisis de datos del presente informe.

Potencial de las tareas matemáticas. Mide el grado en el que las tareas planteadas son capaces de fomentar el desarrollo de procedimientos y contenidos matemáticos que puedan suponer un desafío para los estudiantes. Una puntuación de 0 indica que no se requieren conocimientos matemáticos para resolver las tareas. Se obtiene 1 punto si el potencial de las tareas se limita a la memorización y reproducción de reglas, fórmulas o definiciones matemáticas. Una puntuación de 2 sugiere que las tareas inducen a la aplicación de procedimientos y algoritmos que los alumnos ya conocen y su principal objetivo recae en la obtención de resultados correctos. Se obtienen 3 puntos si las tareas permiten que los estudiantes den significado a los procedimientos y conceptos matemáticos implicados, aunque sin preguntar por pruebas de razonamiento o demostraciones precisas. Por último, se asignan 4 puntos a las tareas que fomentan la exploración y comprensión de la naturaleza de los procedimientos y conceptos, así como de las relaciones que se establecen entre ellos.

Participación en la comunidad de aprendizaje. Indica el grado en el que los alumnos se implican en la discusión en grupo. Consideramos que un estudiante participa en la discusión si realiza una intervención oral que genera o aporta algún procedimiento o contenido matemático que pueda cambiar cualquier elemento de la situación de enseñanza. Si ningún alumno participa en el debate, la puntuación es de 0. Se obtiene 1 punto si menos del 25% de los estudiantes intervienen en la discusión en gran grupo. Una puntuación de 2 indica que entre el 25% y el 50% de los estudiantes participan en el debate. Se obtienen 3 puntos si entre el 50% y el 75% de los alumnos intervienen en la discusión. Finalmente, una puntuación de 4 muestra que más del 75% de los estudiantes del grupo han participado en la sesión de clase.

Flexibilización de las escalas de una rúbrica

En ocasiones los parámetros de evaluación de las rúbricas contienen imprecisión en su formulación, lo que se contrapone al uso de escalas categóricas para su definición. Esto supone un problema porque implica una pérdida de parte de la información obtenida en el transcurso de la actividad, ya que se asigna al hecho estudiado un único número. Por otro lado, si en lugar de fijar un número se determina una aproximación a ese número considerando los matices que recoge la rúbrica, se hace una asignación más próxima a la realidad. La lógica borrosa permite flexibilizar las escalas y posibilita la asignación de grados de verificación a los objetos de estudio. En cada caso concreto se puede representar un conjunto borroso (Zadeh, 1965) que se acerque de una forma más fiel a la realidad de estudio. Así, podemos interpretar que el hecho analizado se encuentra en un nivel pero mantiene mayor cercanía con el nivel superior que con el inferior; o que está entre dos niveles; o bien no tenemos certeza del nivel donde podemos situarlo, ya que sólo podemos decir que levemente nos decantaríamos por uno u otro.

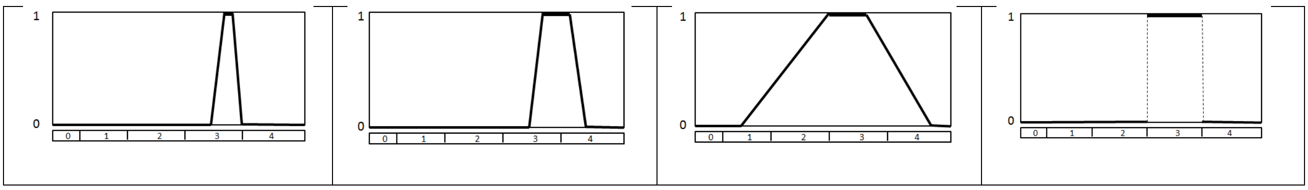


Figura 1: Ejemplos de conjuntos borrosos

Proponemos utilizar conjuntos borrosos trapezoidales para realizar una evaluación de un continuo asignando un valor de creencia entre el 0 y el 1 a cada punto del intervalo (Fig. 1). Más adelante lo detallaremos con las dos rúbricas de la sección anterior.

La idea de utilizar estos conjuntos borrosos para describir términos imprecisos está relacionada con el concepto de variable lingüística introducido por Zadeh (1975), es decir aquella variable que toma únicamente valores lingüísticos del tipo: muy alto, alto, medio, bajo o muy bajo (Fig. 2). Cada uno de estos valores se modela por un conjunto borroso etiquetado con el valor de la variable, de ahí las etiquetas lingüísticas.

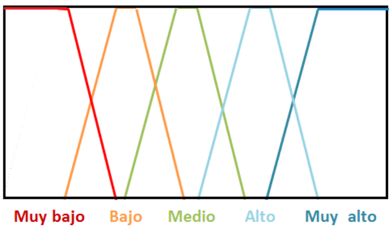


Figura 2: Conjuntos borrosos modelando las etiquetas lingüísticas

En cada situación particular debe realizarse el diseño de un conjunto borroso que refleje el significado de la percepción o valoración del experto, la cual se puede dar a través de un apoyo significativo de las etiquetas lingüísticas.

METODOLOGÍA

Hemos elaborado una secuencia instructiva de problemas de semejanza, la cual ha sido implementada en las clases de distintos profesores con estudiantes de 14 y 15 años. Para este informe hemos seleccionado dos tareas matemáticas de la secuencia y dos casos de profesor, Luis y Sara, con experiencia docente media y un entorno sociocultural de trabajo medio-alto.

Descripción de las tareas matemáticas

Las dos tareas pretenden introducir la comprensión del concepto de proporcionalidad geométrica, que está directamente relacionado con las nociones de forma y semejanza. El enunciado de la primera tarea[44] (Fig. 3) presenta un planteamiento abierto y su resolución introduce el desarrollo de procesos cognitivamente elevados relacionados con la proporcionalidad. Hay más de una estrategia de resolución, ya que se pretende que los alumnos realicen conexiones con diversos conceptos matemáticos (p.ej., área, forma y razón).

[44] Consultar una tarea similar en Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: El caso del perrito. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano* (pp. 237-257). Granada: Editorial Universitaria.

Dada la siguiente letra del abecedario, representa otra que sea el doble de grande. Explica brevemente cómo la has obtenido y compárala con la original.

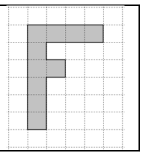


Figura 3: Enunciado de la primera tarea

La segunda tarea (Fig. 4) induce a los alumnos a construir una transformación geométrica que convierta el triángulo original en otro con el doble de perímetro y que lo traslade en el plano. Así, se relacionan las dos tareas y se introduce el concepto de homotecia de razón positiva, la cual se plantea como la transformación que combina una ampliación y una translación.

¿Cómo transformarías el polígono de la izquierda -1- para conseguir el de la derecha -2-? ¿Y el polígono 2 para conseguir el 1? Explícalo con detalle en cada caso.

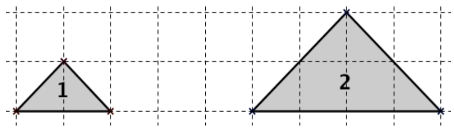


Figura 4: Enunciado de la segunda tarea

Ciclo de trabajo en clase, datos y métodos

La dinámica de trabajo es colaborativa y comprende dos sesiones de clase. En la primera los estudiantes trabajan por parejas, con lápiz y papel, y resuelven, entre otras, las tareas anteriores. En la segunda sesión cada profesor dirige una discusión en gran grupo, que gestiona según su criterio profesional. Finalmente, se pide a los alumnos que reflexionen individualmente sobre las dos tareas y que incluyan en sus protocolos escritos todos los elementos que no habían considerado en la resolución por parejas. Aunque sin dejar de lado las demás fases del ciclo de trabajo, en este informe nos centramos especialmente en las discusiones en gran grupo.

Los datos de las intervenciones de todos los participantes se obtuvieron registrando con tres videocámaras las discusiones en grupo y transcribiéndolas posteriormente. Las videos y transcripciones se analizaron con el fin de: (a) dividir las discusiones en gran grupo en episodios, que mostraran orquestaciones y acciones significativas; (b) determinar modos de interacción entre los participantes susceptibles de generar oportunidades de aprendizaje matemático; (c) reflexionar sobre las oportunidades generadas durante la discusión en gran grupo, diseñando conjuntos borrosos que flexibilizasen los ítems de las rúbricas del IQA.

EJEMPLIFICACIÓN DEL ANÁLISIS

En primer lugar dividimos las discusiones en gran grupo de las dos tareas en episodios, que clasificamos según un tipo de orquestación (dimensión instrumental) y un estadio de la discusión (dimensión discursiva), y analizamos las acciones de todos los participantes. En este informe hemos seleccionado el quinto episodio de la primera tarea de Luis y el segundo de la segunda tarea de Sara, ya que ambos los consideramos representativos de sus modos de actuación docente.

Modo de actuación del profesor Luis

En el siguiente fragmento del quinto episodio de la tarea 1 observamos que Luis realiza diversas explicaciones sobre la adecuación matemática de dos formas de entender el enunciado: una figura con el doble de perímetro y otra con el doble de área. Por este motivo, en la dimensión instrumental el tipo de orquestación que le asignamos es *explicar a través del artefacto*. Como se comparan dos interpretaciones del enunciado, las cuales originan soluciones distintas, en la dimensión discursiva el estadio que le corresponde es *contraste entre soluciones*.

Alumno 1: [a Luis] ¿Entonces qué sería correcto? Porque una tiene [un área] de 40 [refiriéndose al número de cuadraditos] y otra la tiene de 20.

Luis: A ver, respecto a cuestiones lingüísticas, el doble de grande se refiere al doble de superficie, ¿de acuerdo? Por lo tanto, la opción esta [la F con el doble de área] es correcta, pero tampoco nos quedaba demasiado claro si se debían respetar las mismas proporciones. Al parecer nadie en clase ha intentado conseguir el doble de área respetando las proporciones. Yo tampoco lo he hecho. De todos modos, el enunciado tampoco nos decía que tuviésemos que respetar las proporciones, sólo nos decía que fuese otra [F] el doble de grande. Por lo tanto, entendemos otra F el doble de grande. Yo lo veo así y vosotros parece que también. Entonces, ¿el resto de los alumnos lo que habéis hecho al final qué es?

Alumno 2: Hacer un cuadro grande de cada cuadradito pequeño, es decir, de cada uno hacer cuatro [se refiere a multiplicar todas las dimensiones por dos, obteniendo el doble de perímetro y cuatro veces más de área].

Luis: Es decir, habéis doblado directamente todos los lados y habéis mantenido todas las proporciones [respecto a la figura original].

Al principio del episodio el Alumno 1 realiza una petición de aclaración al profesor, Luis, y le pregunta cuál de las dos interpretaciones del enunciado de la tarea es la correcta. El estudiante observa que una de las figuras, la obtenida multiplicando por dos el perímetro, presenta una superficie de 40 cuadraditos, mientras que la otra únicamente duplica el área de la original. El profesor realiza una explicación al respecto y menciona que 'el doble de grande' se refería a multiplicar por dos la superficie, aunque el enunciado no lo especificaba. A continuación, Luis reflexiona sobre la posibilidad de construir una figura con el doble de área mantenido las proporciones de la representación original. Aunque la cuestión no se desarrolla, el profesor de un modo implícito invita a la generalización, ya que induce a plantearse una cuestión matemáticamente más compleja. De nuevo, Luis interviene y trata de establecer consenso en el grupo, dejando constancia de que la mayoría han interpretado que el enunciado les preguntaba por la representación de una nueva figura con el doble de área. Luego formula una pregunta que invita a la participación de los estudiantes que han obtenido otra solución. El Alumno 2 realiza una exposición sin argumentación comentando que su construcción presenta el doble de perímetro y cuatro veces más de área que la figura original. Finalmente, la última intervención de Luis complementa la exposición del alumno y menciona que la construcción mantiene las proporciones respecto de la representación original.

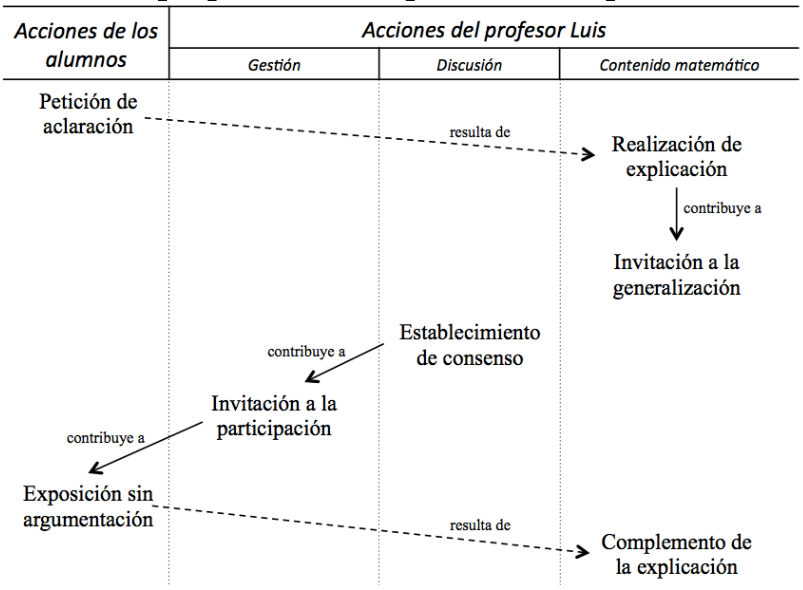


Figura 5: Representación de acciones del quinto episodio de la tarea 1 de Luis

La Figura 5 sugiere que la secuencia de acciones del episodio se centra en las intervenciones del docente. Se detecta poca participación de los alumnos y en diversas ocasiones la distribución de las flechas tiene origen y final en el profesor, hecho que ilustra poca interacción bilateral entre estudiantes y docente. Este modo de interacción se reproduce en la mayoría de episodios de la discusión en gran grupo de esta tarea y, también, en los episodios de la segunda.

El análisis de las dimensiones instrumental y discursiva, el cual refleja el modo de actuación de Luis, finaliza con el estudio de once episodios que comprenden la discusión en grupo de las dos tareas. En total revelan una orquestación centrada en el profesor, ya que siete episodios corresponden con los tres primeros tipos de orquestación (*explorar el artefacto*, *explicar a través del artefacto* y *conectar artefactos*), mientras que solo cuatro se centran en los tres últimos (*discutir el artefacto*, *descubrir a través del artefacto* y *experimentar el instrumento*). El cumplimiento de la secuencia ideal y ordenada de estadios de la discusión es bastante completo, ya que su distribución es secuencial entre los estadios correspondientes a momentos iniciales de la discusión (*situación del problema* y *presentación de una solución*) hasta los más avanzados (*generalización y conceptualización*).

Modo de actuación de la profesora Sara

El siguiente fragmento del segundo episodio de la tarea 2 de Sara revela que la discusión se produce sobre la base de la información que proporcionan los artefactos, es decir, la pizarra ordinaria, el GeoGebra y los protocolos escritos de resolución de los alumnos. Por este motivo, el tipo de orquestación que le asignamos es *discutir el artefacto*. Como Sara invita a un estudiante a que exponga su solución de la tarea, el estadio de la discusión que le corresponde es *presentación de una solución*.

Sara: ¿Tú [al Alumno 3] cómo lo has hecho?

Alumno 3: Nosotros lo que hicimos fue que, como la base [del triángulo pequeño] era 2 [cuadraditos], la ampliamos el doble y mantuvimos los ángulos. Entonces, si prolongamos el doble todos los lados, en el punto de cruce se forma el nuevo triángulo.

Sara: De acuerdo. Por tanto, tú tenías un triángulo así [representa sobre la pizarra un triángulo parecido al original] y, luego, lo duplicaste.

Alumno 3: Sí, exacto.

Sara: Claro, pero entonces ¿dónde lo construiste?

Alumno 4: Lo representamos al lado [del triángulo original].

Sara: Sí, de acuerdo, pero ¿qué órdenes debemos darle al GeoGebra, por ejemplo, para que nos lo transforme en este que está pintado aquí al lado [señala sobre la pantalla del proyector el triángulo grande]?

Alumno 5: Podemos decirle que duplique los lados.

Sara: De acuerdo, que duplique todos los lados y mantenga los ángulos. Por tanto, hacemos una ampliación de razón 2.

Alumno 5: Y nos lo situará encima a partir de un vértice, ¿verdad?

Sara. ¿Estás seguro? ¿Cómo puedes saberlo? ¡Pensad un momento! El problema está en que debemos escribir en el GeoGebra toda esta información y aún no sabemos cómo decírselo.

Al principio del episodio Sara invita a la participación y el Alumno 3 comparte su solución con el grupo. El estudiante realiza una exposición de evidencia empírica y concluye que, de forma colaborativa con el Alumno 4, duplicaron todos los lados del triángulo original, aunque no precisa en que posición lo situaron. La profesora valida la afirmación y el estudiante asiente. Entonces, Sara realiza una petición de explicación para que el alumno detalle la posición exacta donde representó la nueva figura. El Alumno 4 expone sin argumentar que hicieron la construcción al lado del triángulo original, aunque no proporciona mayores detalles. La profesora detecta que ambos estudiantes no han respondido a la pregunta del enunciado con exactitud, ya que sólo han cambiado las dimensiones del triángulo original y no han realizado una translación que lo lleve encima del nuevo polígono. Por este motivo, Sara se apoya en GeoGebra e introduce una petición de explicación, preguntando por las órdenes que deberían dar al software para conseguir la transformación deseada. El Alumno 5 expone sin argumentar que basta con dar la orden de duplicar todos los lados del triángulo y la profesora formaliza la afirmación matizando que se trata de una ampliación de razón 2. Este mismo alumno realiza una petición de aclaración dando a entender que el uso del programa de geometría dinámica lo situaría encima del original, partiendo de un vértice arbitrario. Finalmente, la profesora invita a la reflexión para que los estudiantes se planteen con mayor detalle esta última cuestión.

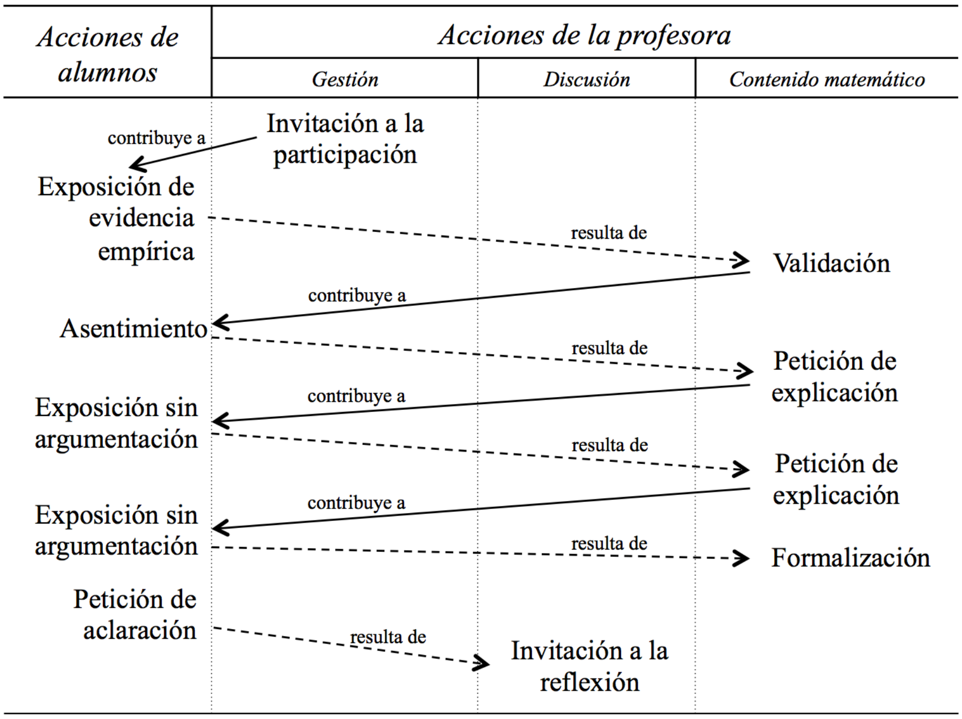


Figura 6: Representación de acciones del segundo episodio de la tarea 2 de Sara

En la Figura 6 observamos que la secuencia de acciones presenta series encadenadas de intervenciones entre Sara y los estudiantes. Este modo de interacción bilateral se reproduce en la mayoría de episodios de la discusión en gran grupo de las dos tareas. La profesora procura que los alumnos descubran por sí mismos los hechos matemáticos y evita realizar explicaciones extensas. Gestiona la discusión a través de preguntas y elabora su discurso sobre la base de las respuestas que dan los estudiantes.

El análisis de la gestión de clase de Sara finaliza después de estudiar los diecinueve episodios que comprenden la discusión en gran grupo de las dos tareas. En total muestran una orquestación equilibrada entre alumnos y profesora, ya que nueve de los diecinueve episodios corresponden a los tres primeros tipos de orquestación y diez se centran en los tres últimos. El cumplimiento de la secuencia ideal y ordenada de estadios de la discusión es bastante completo y se avanza ordenadamente entre los correspondientes a momentos iniciales de la discusión hasta aquellos más avanzados.

Ejemplificación de oportunidades de aprendizaje matemático

Del análisis de los episodios ilustrados en este informe se desprenden diversas acciones de los alumnos relacionadas con la promoción de conocimiento procedimental en torno a procesos matemáticos y afirmaciones sobre hechos percibidos durante la discusión (p.ej., exposiciones sin argumentación). Hay también otras acciones orientadas a la promoción de conocimiento conceptual en torno a observaciones de evidencias empíricas y razonamientos de los alumnos sobre conceptos matemáticos (p.ej., noción de proporcionalidad).

Si atendemos a las acciones de los profesores, vemos que algunas llevan a peticiones de explicación y verificación de métodos matemáticos, por lo que su efecto en el aprendizaje puede fomentar conocimiento procedimental (p.ej., formalizaciones y comprobaciones). Estas acciones también pueden estar relacionadas con el trabajo de contenidos matemáticos específicos (p.ej., nociones de razón, proporción y homotecia). Su efecto en el aprendizaje puede generar conocimiento conceptual mediante la invitación a reflexionar sobre nociones matemáticas, o bien la complementación de explicaciones respecto de una cuestión concreta. En los párrafos siguientes ejemplificamos dos oportunidades de aprendizaje de la discusión de Luis y una de la discusión de Sara, las cuales se generan, de acuerdo con nuestro análisis, a raíz de los modos de actuación e interacción activados por los profesores en su gestión de las discusiones en gran grupo.

La intervención de Luis en el quinto episodio de la primera tarea, donde realiza una explicación como respuesta a la petición de aclaración de un alumno, genera una oportunidad de aprendizaje procedimental definida por 'identificar que un problema puede presentar diferentes interpretaciones y todas ellas pueden obtenerse siguiendo varios procedimientos correctos'. Esto se debe a que algunos estudiantes interpretaron que la solución de la tarea se basaba en la construcción de una figura con el doble de perímetro, mientras que otros entendieron que el objetivo era la duplicación de su área. A continuación, el profesor realiza una invitación a la generalización que crea una nueva oportunidad de aprendizaje, en este caso conceptual, la cual se define por 'observar que la duplicación del área de una figura no preserva, necesariamente, la semejanza con la original'. Esto se debe a que la construcción obtenida duplicando el área modifica la forma del polígono, en el sentido coloquial del término, si éste se dibuja encima de los bordes de la cuadrícula y no se tiene en cuenta que la razón es $\sqrt{2}$.

Por otro lado, la discusión de la segunda tarea de Sara también origina oportunidades de aprendizaje. Un ejemplo es la oportunidad conceptual definida por 'reconocer la existencia de transformaciones geométricas que combinan una ampliación y una translación'. Las peticiones de explicación realizadas por la profesora propician que los alumnos observen la necesidad de introducir una transformación adicional a la ampliación de razón 2 que traslade la nueva figura construida.

Interpretación *fuzzy* de las discusiones en gran grupo

Con el fin de profundizar en el estudio de las oportunidades de aprendizaje generadas en las dos discusiones en gran grupo, analizamos cada una de ellas con las rúbricas del IQA. Entre otros aspectos, la calidad de la enseñanza está relacionada con el logro de oportunidades de aprendizaje, que a su vez se relaciona tanto con el rigor académico como con la efectividad de la discusión en grupo. A modo de ejemplo, mostramos a continuación el análisis del potencial de la tarea (del bloque de rúbricas sobre el rigor académico) y la participación de los alumnos (del bloque sobre la efectividad de la discusión en grupo).

Las dos tareas matemáticas y el ciclo de trabajo en clase han sido los mismos en ambos grupos. No obstante, el potencial de las tareas está relacionado, en parte, con la preparación de la discusión que realiza cada profesor. En ella se puede incluir la elaboración de *árboles de los problemas* (Morera, 2013), donde se recogen diferentes estrategias que un estudiante puede seguir para alcanzar la resolución de las tareas. Así, la riqueza potencial de éstas queda reflejada en el árbol.

En nuestro caso observamos que las dos tareas se pueden resolver de distintas formas, ya que los alumnos pueden relacionar varios contenidos matemáticos con el fin de afianzar su significado. Los contenidos involucrados pasan por la definición de semejanza y de homotecia, y se relacionan con conceptos transversales como la noción de proporcionalidad, perímetro, área o número irracional. Así pues, la resolución de ambas tareas no requiere el uso de un pensamiento algorítmico, por lo que según la correspondiente rúbrica del IQA podría asignarse un nivel 4. Sin embargo, como se explicita en el nivel 3 de la rúbrica, no se puede garantizar el siguiente nivel a menos que los estudiantes alcancen una generalización o presenten justificaciones detalladas de los hechos matemáticos. Esto último se matiza en el desarrollo de la tarea en el aula, ya que el instrumento recoge la capacidad del profesor para realizar preguntas sobre la obtención de diversas estrategias de resolución, para probar conjeturas o dar significado a procedimientos matemáticos, como por ejemplo la determinación de los elementos que caracterizan una homotecia (centro y razón de semejanza). Por tanto, el docente puede inducir a sus alumnos, en mayor o menor medida, a que lleguen a generalizaciones o bien se queden sólo con la ratificación de la efectividad de una estrategia de resolución concreta.

Basándonos en estas consideraciones, el uso de conjuntos borrosos permite presentar un análisis del potencial de la tarea ligeramente distinto en los dos casos. En el caso de Sara trasladamos el conjunto borroso hacia valores un poco más altos (Fig. 7), ya que los alumnos son más conscientes que en el caso de Luis de la importancia de relacionar conceptos matemáticos y de argumentar sus resoluciones, aunque sea previa petición de la profesora.

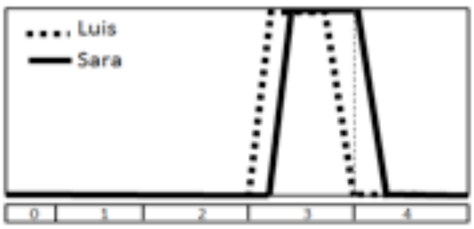


Figura 7: Análisis *fuzzy* del potencial de la tarea

Como se muestra en el siguiente fragmento de la transcripción del séptimo episodio (*enlazar artefactos*, *generalización y conceptualización*) de la primera tarea de Sara, se relacionan las constantes de proporción entre el área y el perímetro, aspecto que no se realiza en la discusión en gran grupo de Luis, donde simplemente se observa que las constantes de proporcionalidad varían.

Sara:	Fijaros que la razón de proporcionalidad entre los perímetros también es 2, ¿de acuerdo? Es la misma constante de proporcionalidad. Ahora bien, ¿cuál es la constante de proporcionalidad del área?
Alumno 6:	Es 4 o 1/4.
Alumno 7:	¿Pero el área siempre se debe multiplicar por dos? ¿Se debería elevar a 2, verdad?
Sara:	¡Pensadlo un momento! Si os hubiese dicho que queríamos hacer una F el triple de grande, ¿qué hubiese pasado con el área?
Alumno 8:	Que hubiese sido seis veces mayor.
Alumno 7:	¡No! Nueve veces.
Sara:	¿A ver, en qué quedamos? ¿Seis o nueve veces más?
Alumno 7:	Nueve.
Sara:	Exacto, nueve. Por lo tanto, ¿esto qué quiere decir?
Alumno 7:	Que se debe elevar al cuadrado.
Sara:	¡Exacto! Elevamos al cuadrado, ¡no multiplicamos por dos! Por lo tanto, la razón de proporcionalidad entre las áreas es *k* al cuadrado, es decir, 4 en este caso concreto.

Respecto a la participación, la rúbrica sólo tiene en cuenta el porcentaje de alumnos que intervienen oralmente, al menos una vez, en la discusión. Por tanto, le asigna dos puntos al caso de Luis y tres al de Sara. No obstante, se pueden distinguir aspectos relacionados con la participación no verbal (Ferreiro, 2005), como son la atención, escucha e implicación en el aula; la frecuencia de participación, reflexión y corrección gramatical de las aportaciones, o la iniciativa de la participación, es decir, si surge espontáneamente o bien es fruto de una pregunta que realiza el profesor.

El análisis de todos estos aspectos influye en que la percepción de la participación en el aula varíe más allá del cómputo del porcentaje indicado por la rúbrica. El conjunto borroso permite recoger estos elementos (Fig. 8). Así, en el caso de Sara vemos que, además de un porcentaje fijo de participación del 68%, se obtienen puntuaciones altas en los demás aspectos (Tabla 1). En cambio, en el caso de Luis se obtienen puntuaciones medias o bajas en la mayoría de ítems.

Niveles: Luis (■) y Sara (◆)

	0 (nulo)	1 (bajo)	2 (medio)	3 (alto)	4 (total)
Porcentaje de participación			■(44%)	◆(68%)	
Participación no verbal			■		◆
Grado de reflexión de los estudiantes en la participación oral (sobre el contenido)		■		◆	
Corrección gramatical de la aportación				■ ◆	
Iniciativa de la participación por parte del alumno		■		◆	

Tabla 1: Estudio de diferentes aspectos de la participación

Los conjuntos borrosos representados en la Figura 8 reflejan los elementos obtenidos en el análisis anterior. Para su construcción damos más peso al porcentaje de participación y, basándonos en este dato, determinamos el lugar dónde tenemos una confianza alta de que se sitúe el nivel (base menor del trapecio). Para fijar la amplitud de los trapecios, que corresponde con su base mayor, tenemos en cuenta los demás ítems de la Tabla 1. En sus diseños evidenciamos una participación media de los alumnos de Luis y alta de los estudiantes de Sara.

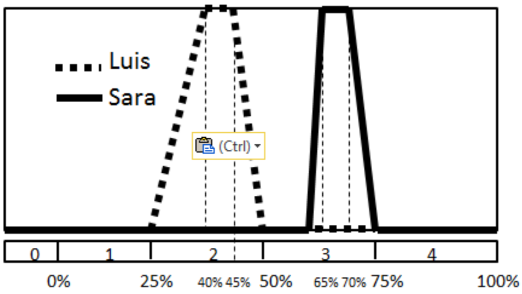


Figura 8: Análisis *fuzzy* de la participación

RESULTADOS Y DISCUSIÓN FINAL

En este informe hemos desarrollado un estudio de dos casos de profesor que pretende valorar la calidad de la enseñanza que se genera en una discusión en gran grupo según la gestión de aula realizada por cada docente. A continuación detallamos los resultados de la investigación.

Dos modos de actuación docente en la gestión de la discusión

Nuestro análisis de las dimensiones instrumental y discursiva sugiere que la discusión en gran grupo de Luis presenta predominio instrumental del profesor y completitud discursiva. Observamos que los tipos de orquestación se basan en el profesor y se produce una consecución completa y bastante ordenada de los estadios. El quinto episodio de la primera tarea muestra que la secuencia de acciones se centra en las intervenciones que él realiza y se produce poca interacción entre estudiantes y docente. En cambio, el modo de actuación de Sara muestra equilibrio instrumental y completitud discursiva. La orquestación es equilibrada entre la profesora y los alumnos y se produce un tratamiento completo y bastante ordenado de los estadios. El segundo episodio de la tarea 2 muestra secuencias encadenadas de preguntas y respuestas y un modo de interacción que alterna la profesora y los alumnos.

Los modos de actuación de Luis y Sara son coherentes con los detectados en una investigación preliminar (Ferrer, Fortuny y Morera, 2014), aunque en ella sólo se analizaba la gestión de clase de diversos profesores respecto de la primera tarea. Por tanto, en este informe, donde estudiamos dos tareas de semejanza que inician una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995), afianzamos el modo de actuación de ambos docentes. Aún así, hay que seguir investigando, analizando otras tareas, para comprobar si representan un modo de actuación general de estos profesores.

Tres oportunidades de aprendizaje para valorar la calidad de la discusión

Los datos mostrados sólo ilustran una pequeña parte de las muchas oportunidades de aprendizaje que se han generado en las dos discusiones en gran grupo, aunque su análisis sugiere que ambos profesores han utilizado la situación de instrucción para crear condiciones favorables y lograr oportunidades de aprendizaje. En particular, hemos identificado tres oportunidades en las dos discusiones en gran grupo, pero la forma como estas oportunidades se manifiestan en clase parece que puede estar relacionada con el modo de actuación del profesor. En la sesión de Luis, las oportunidades quedan ocultas bajo las extensas explicaciones del docente y los alumnos deben realizar reflexiones complejas para poder aprovecharlas. En cambio, en la discusión de Sara, las oportunidades de aprendizaje son más visibles y se explicitan en las situaciones de interacción que se producen entre profesora y alumnos. Esto induce a pensar que el grado de aprovechamiento de las oportunidades puede ser mayor en la discusión de Sara que en la de Luis, aunque se deberán realizar nuevas investigaciones para constatar esta observación.

A parte de estudiar las oportunidades de aprendizaje matemático según los modos de actuación e interacción, nos hemos apoyado en las rúbricas del IQA para realizar un análisis *fuzzy* de las dos discusiones en gran grupo y, así, establecer parámetros sobre la calidad de cada discusión. Observamos que la aplicación original del instrumento sólo permite obtener coeficientes numéricos rígidos de los diversos aspectos que analizan las rúbricas. En cambio, su aplicación *fuzzy* posibilita la valoración más detallada de los parámetros estudiados en cada grupo de alumnos.

El diseño *fuzzy* de dos rúbricas del instrumento IQA, el cual es generalizable a las demás rúbricas (Ferrer y García-Honrado, 2014), permite capturar más información que la englobada en el intervalo original de valores que oscila entre 0 y 4. Además, no obliga al investigador a resumir toda la información observada en un único número, sino que le permite crear un reflejo estructurado de su percepción basándose, en parte, en los descriptores del instrumento y de forma más fiel a la realidad del aula.

La valoración de los ítems de cada rúbrica es mayor cuanto más a la derecha (hacia valores más grandes) se sitúa el conjunto borroso. En las dos primeras rúbricas del IQA se puede comprobar que, en el caso de Sara, las valoraciones se sitúan más a la derecha que en el caso de Luis, y si utilizamos el orden puntual usado para la comparación de conjuntos borrosos, incluso se puede afirmar que son mayores. En general, en casi todas las rúbricas del IQA, el estudio de la discusión en grupo de Sara obtiene valoraciones más altas que la discusión de Luis. Aún así, el orden total de los números naturales no se puede trasladar a los conjuntos borrosos, permitiendo la existencia de dos situaciones valoradas a través de dos conjuntos borrosos distintos, aunque no sean comparables y no podamos testear cuál de ellas es más eficaz.

Finalmente, el informe involucra el ETM de Referencia del profesor y ETM Personales de los alumnos. Se muestra que la gestión del profesor es clave en la generación de oportunidades de aprendizaje, hecho que contribuye en la creación de un ETM idóneo. También se observa que la gestión de discusiones en gran grupo de tareas geométricas compromete muchas variables, las cuales pueden ser estudiadas utilizando conjuntos borrosos. En futuros trabajos sería interesante poder llegar a un conjunto borroso compendio de todas las valoraciones obtenidas en las distintas rúbricas. Así podríamos obtener un indicador representativo tanto de las oportunidades de aprendizaje que se generan en clase como del grado en el que los alumnos las consiguen aprovechar.

Agradecimientos

Al Ministerio de Economía y Competitividad, por financiar los proyectos EDU2011-23240 y TIN2011-29827-C02-01, la Beca FPI BES-2012-053575 (primer autor) y la Estancia de corta duración al extranjero EEBB-I-14-08541 (primer autor). Al Departamento Catalán de Economía y Universidades, por financiar GIPEAM, Grupo de Investigación 2014-SGR972. A la ayuda económica de proyectos de grupos emergentes de la Universidad de Oviedo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boston, M. D. (2012). Assessing the quality of mathematics instruction. *Elementary School Journal, 113*(1), 76–104.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*, 213-234.

Ferreiro, R. (2005). La participación en clase. *Revista Rompan Filas*, *76*, 3-7.

Ferrer, M., Fortuny, J.M., y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas* (en prensa).

Ferrer, M., y García-Honrado, I. (2014). Ejemplificación del uso de conjuntos borrosos en la valoración de la calidad de la enseñanza. En F. Bobillo, H. Bustince, F.J. Fernández, y E. Herrera-Viedma (Eds.), *Actas del XVII Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*. Zaragoza. ESTYLF, 579-584.

Gómez-Chacón, I. y Kuzniak, A. (2013). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment. *International Journal of Science and Mathematics Education*, December 2013, 1-26. [online]. DOI: 10.1007/s10763-013-9462-4.

Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L., y Shahan, E. (2013). Exploring Relationships Between Setting Up Complex Tasks and Opportunities to Learn in Concluding Whole-Class Discussions in Middle-Grades Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(4), 646-682.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra: UAB.

Niss, M. A., y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competences and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: Roskilde Universitet, IMFUFA.

Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think. A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York: Taylor & Francis.

Sfard, A., y Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity, 8*(1), 42-76.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Yackel, E., Cobb, P., y Wood, T. (1991). Small-group interactions as a source of learning opportunities in second-grade mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(5), 390-408.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information Control, 8*, 338-353.

Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – III. *Information Sciences, 9*(1), 43-80.

ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO EN FORMACIÓN DE MAESTROS EN UN CONTEXTO DE E-LEARNING

Antonio Codina Sánchez, Universidad de Granada

Isabel Mª Romero Albaladejo, Universidad de Almería

El trabajo describe las relaciones entre distintos Espacios de Trabajo Matemático (ETM) bajo un modelo de e-Learning para la formación de maestros/as. Utilizando un enfoque metodológico basado en el trabajo colaborativo y la evaluación formativa, ponemos de manifiesto como no es solo el docente quien gestiona las interacciones del trabajo matemático de los estudiantes, sino que éstas son simultáneamente construidas y gestionadas también por los propios estudiantes. Dichas interacción y gestión da a lugar a la noción emergente de ETM Grupal.

Palabras Clave: *E-Learning, Trabajo Colaborativo, Formación de Maestros, Evaluación Formativa, Espacio de Trabajo Matemático Grupal*

INTRODUCCIÓN

A. Kuzniak y C. Houdement desarrollan un marco teórico para la enseñanza y aprendizaje de la geometría basado en la identificación de tres paradigmas o dominios geométricos y la noción de Espacio de Trabajo Geométrico [ETG] (Houdement y Kuzniak, 2006, Kuzniak, 2005, 2008, 2011, Houdement, 2007). Para cada ETG, los autores establecen tres niveles: (a) de Referencia, (b) Idóneo y (c) Personal. En un contexto de aula, el ETG Personal es aquel definido por el estudiante, fruto de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica, de acuerdo con sus conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas. En el ETG Personal se articulan los siguientes componentes:

- "Un conjunto de objetos eventualmente materializados en un espacio real y local.
- Un conjunto de artefactos entendido como aquellas herramientas al servicio del estudiante.
- Un referente teórico eventualmente organizado en un modelo teórico" (Houdement y Kuzniak, 2006, p. 184)

Dado que la naturaleza de los componentes de un ETG depende del paradigma teórico de referencia, conlleva considerar áreas específicas de trabajo asociado a cada paradigma. Para el caso de la Geometría se identifican:

(a) Geometría I o Geometría Natural. Los objetos son tangibles y materiales como trazos gráficos (en papel o en soporte digital) o maquetas. Los artefactos son instrumentos habituales en las clases de geometría (compás, regla,…), así como técnicas (plegado, recortado, embaldosado). Los conocimientos se adquieren de la intuición, percepción y validación empírica.

(b) Geometría II Geometría Axiomática Natural. Los objetos son ideales y los artefactos dominados por el formalismo de las definiciones, axiomas y teoremas. Los artefactos son las propiedades y la articulación de los objetos de este paradigma en procesos de razonamiento hipotéticos-deductivos que generan nuevo conocimiento en el estudiante.

(c) Geometría III o Geometría Axiomática Formal. Es el formalismo matemático, en el paradigma de la geometría III la axiomatización tiende a ser completa.

Dichos paradigmas no presentan una relación jerárquica. De La Torre y Pérez (2008) lo ejemplifican para el caso de la Geometría I y II puesto que la geometría I proporciona una heurística y base de experimentación para la Geometría II, a la vez que ésta permite automatizar tareas o resolución de problemas de la geometría I. Por otro lado, los ETG conllevan ciertos procesos que conforman un espacio dinámico entre dos planos: el cognitivo y el epistemológico. En el plano cognitivo se articulan tres procesos; la visualización-percepción, la construcción y la prueba; mientras que en el plano epistemológico, se articulan el espacio real y local, los artefactos y el marco de referencia. La propuesta teórica considera que la puesta en juego de ambos planos transcurre a través de diversas génesis: la Figural o de Intuición, la Instrumental o Experimental y, la Discursiva o de Deducción. Todo ello se conjuga en un proceso dinámico inter e intra planos sustentando por el/los paradigmas geométricos puestos en juego (Figura 1)

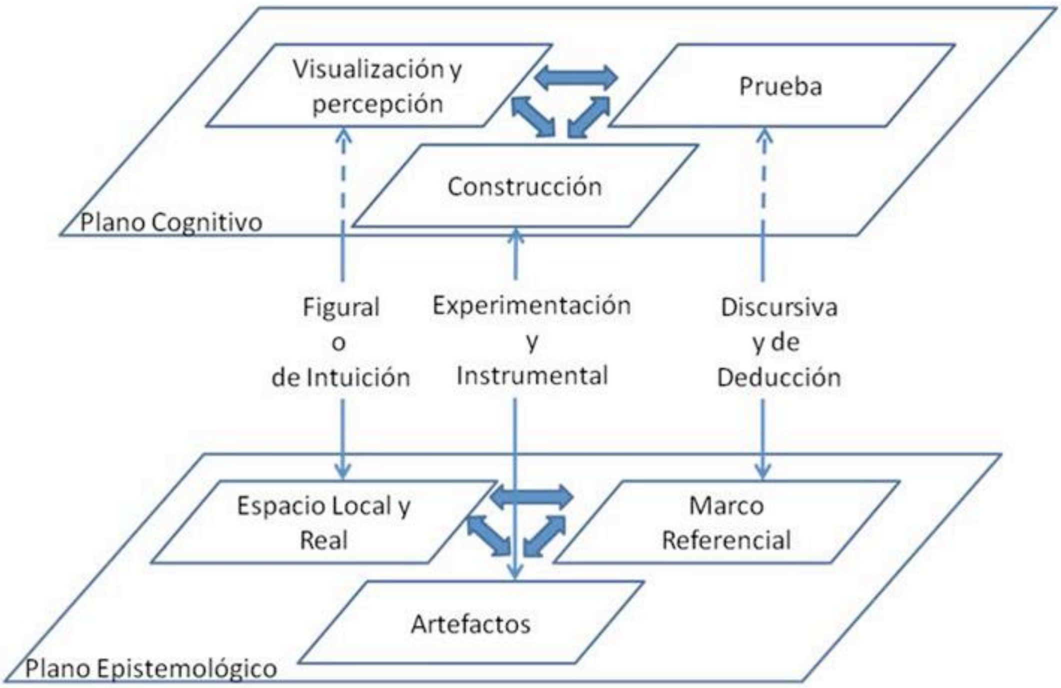


Figura 1. Proceso dinámico del ETG.

Es en este ambiente que se concibe la reflexión a partir de la interacción entre un individuo y los problemas geométricos. No obstante como señalan Montoya (2011) y Montoya, Henríquez, Menares y Barra (2012), en un ambiente escolar, en el ETG personal de un estudiante intervienen de forma implícita el docente, los compañeros y la institución. Ello conlleva una relación-tensión entre el ETG personal, el de referencia y el idóneo. Una cuestión aún por explorar es describir la dinámica de dichas tensiones.

Espacio de trabajo matemático, conexiones

La noción de Espacio de Trabajo Matemático es una extensión metodológica de los Espacios de Trabajo Geométricos (Kuzniak, 2011) dado que algunos elementos de los ETG no pueden generalizarse a otras áreas matemáticas. Mena y Morales (2011) lo ejemplifican para el Espacio de Trabajo Algebraico al detectar como el cambio de paradigmas (de los geométricos a los algebraicos) provoca diferencias que hacen que la propia naturaleza de estos espacios sea distinta. Los autores argumentan cómo es usual que en los paradigmas de la Geometría Natural y la Geometría Axiomática Natural, los estudiantes trabajen con métodos ad hoc para cada construcción o argumentación (demostración), mientras que en el paradigma algebraico el trabajo tiende a ser implícito. Ello obliga a que los ETM sean considerados con cierta flexibilidad teórica para cada dominio matemático y las particularidades de los paradigmas asociados. Más aún cuando en tareas de la resolución de problemas reales o de modelización matemática se interrelacionan distintos ETM.

Por otro lado, Barrera (2013) interrelaciona la teoría de la mediación semiótica con la teoría de ETM al considerar los signos de los artefactos (tecnológicos o no) como mediadores en el aprendizaje compartido. La autora señala que la mediación semiótica influye en la génesis Figural, donde el significado de los objetos surge como resultado de la presencia de interacciones semióticas complejas, incluidas el tratamiento con los signos producidos por los artefactos, que son puestas en juego en un plano intermedio entre el epistemológico y el cognitivo. Paralelamente, Gómez-Chacón y Kuzniak (2013) reflejan como en ambientes tecnológicos las actividades geométricas, junto a la mediación semiótica, promueven la génesis Instrumental y, en menor medida, la Discursiva, también en un plano intermedio.

Bajo esta óptica, Barrera (2013) y Gómez-Chacón y Kuzniak (2013) destacan la importancia de la mediación del profesor para que la diversidad de ETM Personales de los estudiantes pueda dirigirse hacia ETM idóneos. Gómez-Chacón y Kuzniak (2013) afirman que los docentes orientan a los estudiantes en la generación de la génesis Discursiva, especialmente cuando el software bloquea el avance del estudiante en el plano cognitivo y no son visibles para ellos sus potencialidades, es decir, tal y como señala Barrera (2013): "el docente juega un papel fundamental en la guía del estudiante a través de la diversidad de los ETM resultantes de una propuesta didáctica particular" (p. 15). Ahora bien, si el contexto de aula se desarrolla bajo un ambiente e-Learning, ¿quién asume el papel de guía y orientador? Dicho papel, en ambientes de trabajo colaborativo de e-Learning, ¿es exclusivo del docente? ¿Es posible desplazar el papel del docente y en qué grado?

ETM en ambientes de e-Learning

Partimos de la base que los contextos e-Learning no pueden replicar modelos presenciales, siendo necesario replantear las propuestas didácticas hacia modelos centrados en el autoaprendizaje, donde el trabajo colaborativo y la evaluación formativa cobra mayor sentido (Codina, 2009). La idea central recae en la importancia de los procesos de interacción, constituyéndose éstos en elementos clave para la construcción de conocimiento y el aprendizaje (Jochems, Martens y Strijbos, 2004). Dichas interacciones son consideradas colaborativas cuando para la realización de una actividad los estudiantes aceptan corresponsabilidades, tanto de sus acciones individuales como grupales, y la división de tareas es horizontal con un fuerte compromiso para alcanzar el objetivo común de la actividad (Dillenbourg, 1999). Si “el grado de interacción entre las parejas no está definido por la frecuencia de las interacciones, sino por el grado de influencia de esas interacciones en los procesos cognitivos de las parejas” (Waldegg, 2002, p. 8), los ETM Personales tienen que ser analizados a posteriori y observar qué interacciones realmente ocurrieron durante la construcción de los ETM Personales, sin prestar especial atención a afirmaciones individuales aisladas. Por tanto hay que observar cómo las ideas se mejoran o refinan a lo largo de toda la interacción (Dillembourg, 1999).

En contextos e-Learning el horizonte didáctico es la promoción de dichas interacciones colaborativas. Conlleva asumir una evaluación basada en la retroalimentación entre los estudiantes, así como entre éstos y el docente. Parece lógico entonces asumir que estas interacciones colaborativas permiten establecer nexos de unión entre los ETM Personales, Idóneos y de Referencia, al igual que fomentan las distintas génesis entre los planos cognitivos y epistemológicos. Para potenciar la producción de interacciones colaborativas es útil el marco de la evaluación formativa, “cuya finalidad principal es mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje mientras éstos tienen lugar” (López, Fernando y Julián, 2007, p. 10). Entonces los estudiantes no son receptores pasivos, sino activos en un constante intercambio de información con el docente y compañeros/as, encaminada a valorar las acciones de otros y contribuir a su mejora. De este modo, el papel del docente parece desplazarse en el sentido apuntado por Barrera (2013) y Gómez-Chacón y Kuzniak (2013). Es decir, el docente ejerce de orientador en la construcción de ETM Personales y de un posible ETM Grupal del conjunto de estudiantes.

La noción emergente de ETM Grupal es un constructo en proceso de definición y articulación. En este artículo mostramos indicios que sugieren su existencia, a raíz de considerar una enseñanza basada en la evaluación formativa y el trabajo colaborativo, junto con la consiguiente construcción de un conocimiento común, compartido entre los estudiantes y entre éstos y el docente.

Objetivos

Este trabajo tiene como objetivos:

-Describir las relaciones entre distintos ETM bajo un modelo de e-learning para la formación de maestros.

-Explorar de qué manera el papel de guía y orientador se desplaza del docente hacía los estudiantes y en qué grado.

-Explorar la noción emergente de ETM Grupal, justificando su existencia así como el papel que tienen en su gestión estudiantes y profesor.

UNA EXPERIENCIA DOCENTE DE E-LEARNING, INTERACCIONES ENTRE ETM

Nos apoyamos en lo acontecido en la asignatura *Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas*, optativa para el grado de Maestro e impartida bajo una modalidad de enseñanza e-Learning. Presenta una carga de trabajo de 4,5 créditos ECTS (120 horas de trabajo para el estudiante) y la materia está abierta a cualquier estudiante de las universidades andaluzas.

Las directrices generales de la materia enfatizan la actitud del estudiante, subrayando la necesidad de que sean ellos mismos, a través de la interacción con los compañeros/as y con el docente, quienes ejerzan de constructores de sus propios conocimientos (ETM Personales) y contribuyan a la construcción de un conocimiento común, compartido y registrado a través de los medios que proporciona el entorno tecnológico (ETM Grupal).

Dado el carácter no presencial, se detallan con precisión los aspectos significativos de la materia y en particular, la metodología y el proceso de evaluación.

La metodología está centrada en el intercambio de información pública a través del Foro. Se basa en cinco tipos de actividades: (1) participación en el Foro, (2) pequeños trabajos, (3) pruebas tipo test, (4) glosario y (5) trabajo voluntario. Cada actividad dispone de una guía con objetivos, fechas, instrucciones, criterios de evaluación, autoevaluación, coevaluación y recursos. Puesto que vamos a describir las relaciones entre ETM generados, para contextualizarlos presentamos brevemente las actividades:

(1) Pequeños trabajos. Individuales o grupales (a libre elección) con tres tipologías: (a) Teóricos, como elaborar una ficha de revisión de web educativas; (b) Teóricos-prácticos, como analizar propuestas didácticas de utilización de tecnología; y (c) Prácticos, como construir un triángulo dados sus tres lados que soporte la prueba del arrastre utilizando el software de Geometría Dinámica *Geogebra*.

(2) Pruebas tipo test. Relacionados con los pequeños trabajos. Un ejemplo de pregunta es explicar cómo realizar la multiplicación de 82 por 35 sin poder utilizar la tecla "×" en una calculadora básica.

Durante la elaboración de los trabajos y los test solicitamos expresamente la comunicación de los resultados, dudas, soluciones, etc., al Foro respectivo, así como en caso de utilizar algún mensaje, citar expresamente la fuente para que forme parte de la valoración de la actividad del estudiante citado.

(3) Participación en el Foro. La participación activa en el Foro es esencial en las interacciones colaborativas. Los estudiantes conocen que forma parte de la evaluación y que cada mensaje es valorado según su relevancia, interés, nivel de reflexión, etc. Al finalizar cada unidad de aprendizaje, los estudiantes reciben retroalimentación a través de informes personalizados del intercambio comunicativo puesto en juego.

(4) Glosario. Diccionario on-line construido año tras año, de términos relacionados con la materia. Los estudiantes envían propuestas de términos al docente, quién lo valora y propone modificaciones.

(5) Trabajo voluntario (solo para optar a la calificación máxima).

La Evaluación Formativa es de carácter continuo, centrada en la calidad del intercambio de información pública a través del Foro y de las actividades realizadas. La calidad es medida en términos de intervenciones que permiten a los sujetos avanzar en su conocimiento. La evaluación presenta tres momentos de ejecución y tres componentes interconectadas que permiten una retroalimentación constante durante la cual se producen las relaciones entre los ETM (Figura 2):

(a) Momento 1. Los estudiantes envían, leen, analizan y comentan los mensajes del Foro. Mientras elaboran sus trabajos en un proceso dinámico de intercambio de información. Los estudiantes reciben retroalimentación valorando y siendo valoradas las versiones preliminares de sus trabajos. En ocasiones puntuales, el docente reconduce o precisa informaciones. En el momento 1 sucede una relación bidireccional entre los ETM Personales de los estudiantes y el ETM Grupal y, una direccional del ETM Personal del docente hacia los ETM Personales de los estudiantes y el ETM Grupal.

(b) Momento 2. Aquellos estudiantes que consideran que su trabajo alcanza los objetivos establecidos, envían su versión final al Foro, realizan el test asociado y citan qué mensajes/trabajos les han sido útiles. Surge una relación direccional del ETM Personal al ETM Grupal. Además, como el Foro es público, la información retroalimenta a su vez a los estudiantes que se encuentran en el momento 1 de ejecución. Surge una relación inter-momentos direccional entre el ETM Grupal y los ETM personales.

(c) Momento 3. El estudiante envía su trabajo al docente quien la valora, teniendo en cuenta las citas realizadas a compañeros/as y las que otros compañeros/as hacen del trabajo. El docente remite su valoración con comentarios generales. Los estudiantes, tomando como base dicha valoración, emiten sugerencias de mejora al Foro. Surge una relación direccional entre los ETM Personales de docente y estudiante y del ETM Personal del estudiante al Grupal y, una relación inter-momento del ETM Grupal hacia el ETM Personal de los estudiantes que se encuentran en el momento 1 y 2.

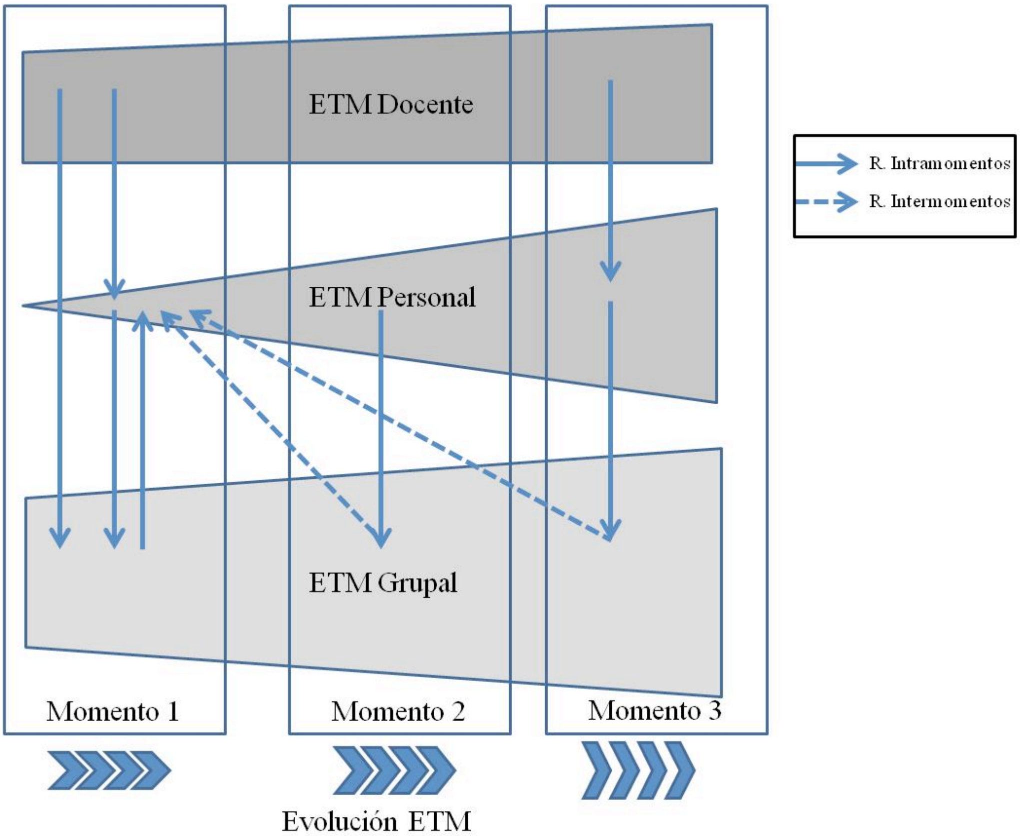


Figura 2. Relaciones entre ETM inter e intra momentos en los momentos de evaluación.

ANÁLISIS

Presentamos un análisis de una investigación natural de los procesos acontecidos en un ambiente e-learning, tal y como éstos tuvieron lugar. El estudio, de carácter exploratorio, pretende detectar las interrelaciones y la gestión en la construcción de ETM Personales de los estudiantes y Grupal. Para ello realizamos en primer lugar algunas observaciones globales realizadas por el investigador-docente. Dichas observaciones contextualizan una selección de secuencias escogidas para ilustrar las interrelaciones que se muestran en la Figura 2.

La observación de lo acontecido en la materia a lo largo del curso muestra indicios de que:

- Los estudiantes se implican con mayor intensidad en su propio aprendizaje, al detectar como sus intervenciones en el Foro son útiles para la construcción y la evolución de ETM Personales de sus compañeros/as
- Las interacciones entre estudiantes y entre éstos y profesor apuntan a la posible existencia de un ETM Grupal.
- La evaluación es interpretada como un elemento positivo para el autoaprendizaje y coaprendizaje. Ello ocurre al comprobar los estudiantes en sus calificaciones el reconocimiento, por parte de sus semejantes y del docente, del valor del esfuerzo realizado en la construcción de su ETM Personal y de la

contribución al ETM personal de los compañeros/as y a un ETM Grupal.

- La gestión de las interacciones colaborativas permite al docente plantear un seguimiento individualizado de los ETM Personales hacía el ETM Idóneo. El docente es visto como guía del aprendizaje, no solo como elemento de autoridad.
- Los estudiantes tienen dificultades para asumir las bondades de principios metodológicos diferentes a los habituales. No obstante, a lo largo del desarrollo de la materia, la producción de interacciones colaborativas es cada vez más fluida, libre y de mayor calidad, llegando a naturalizarse.

A continuación exponemos las secuencias mencionadas anteriormente.

Secuencia 1

Actividad: Uso del operador SI en una hoja de cálculo.

Estudiante A: hola, tengo un problema con el trabajo 6, en las columnas de condiciones creo que no he hecho algo bien puesto que me sale error, ¿alguién puede decirme en qué me estoy equivocando, por favor?
Vuestras respuestas me serán de gran ayuda, gracias de antemano. Saludos
Archivo adjunto: Trabajo_6.ods

Estudiante B: Hola, en la fórmula del SI() lo que tienes que comprobar es si el contenido de la raíz es menor que 0, para que si es así no intente calcularla y te muestre el mensaje que has puesto.
=SI((C7*SENO(C12))^2-4*4,9*50 >= 0 ;RAIZ((C7*SENO(C12))^2-4*4,9*50) ;"NO SE PUEDE")
Y ten cuidado con los paréntesis que si no están bien enlazados tb te dará error. Espero que puedas arreglarlo.
Un saludo.

Estudiante A: Muchas gracias Estudiante B. Funciona.

En esta secuencia, el estudiante "A" solicita ayuda en relación al uso del operador lógico *SI* en una hoja de cálculo. Dicha petición la efectúa al no detectar un error en su actividad ni en su proceso de obtención de una fórmula que relacione los datos (secuencia 1). La secuencia 1 muestra como el estudiante "B" presta ayuda al estudiante "A" indicando el funcionamiento del operador SI. Además, añade un consejo general relativo al uso de los paréntesis. La secuencia se desarrolla mientras el estudiante "A" está en el momento de ejecución 1 y muestra una relación direccional entre el ETM del estudiante "B" hacía el ETM del estudiante "A" y hacía el ETM Grupal.

La formulación proporcionada del operador SI por parte del estudiante "B" se sitúa en el plano Instrumental-Discursivo, puesto que por un lado, transforma la formulación en el instrumento (en este caso, el lenguaje propio de la Hoja de Cálculo) en el proceso de construcción del significado del operador SI, que una vez es admitido por el estudiante "A" se constituye en una prueba experimental del proceso. (Figura 3)

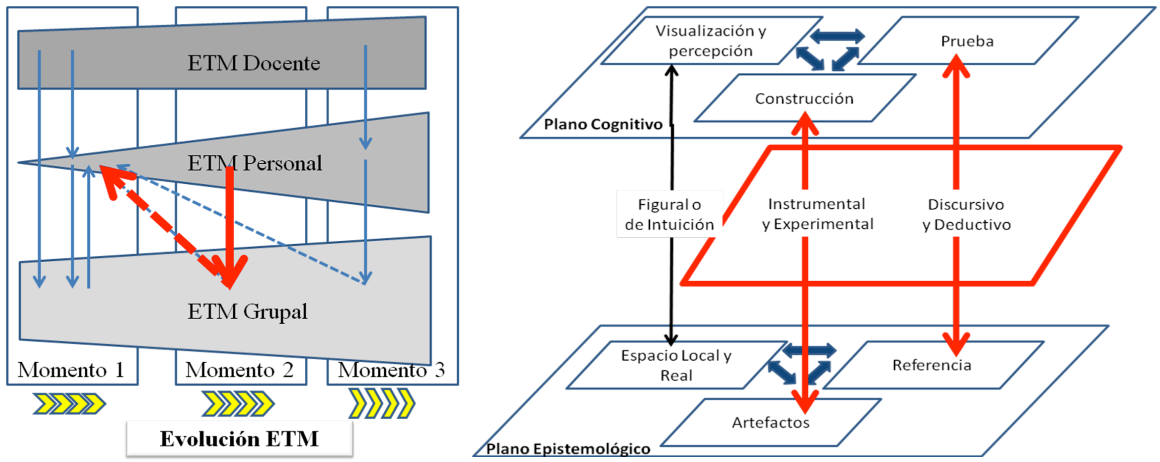


Figura 3. Relaciones entre ETM y planos de la secuencia 1.

Secuencia 2

Actividad: Analizar y construir la secuencia 1=1; 11^2=121; 111^2=12321;… en una hoja de cálculo.

1 Estudiante C: Con respecto al trabajo nº 3, hay una formula que no logro averiguar, que es la que sale en la columna términos y empieza con un numero 1, y se te pide una formula que al arrastrar la primera celda de la columna donde esta el numero 1, abajo de ella ponga 11, mas abajo 111 y asi sucesivamente.

No logro la formula que logre esta sucesion de numeros, si me podrias ayudar os lo agradeceria mucho.

Un saludo

2 Estudiante D: Fíjate que cada iteración se obtiene con 10,100,1000,.... y sumandole la cifra de la iteración anterior.

Es decir:

La iteracion 2 es 10+1=11

La iteracion 3 es 100+11=111

La iteracion 4 es 1000+111=1111

Espero haberte servido de ayuda.

Un saludo!!

3 Estudiante C: Hola ! muchas gracias por contestar, pero si haces una formula de sumas la cifra anterior mas 10, ¿tendrias que aplicar esta formula en cada celda no?

He estado probando con suma con cuadrados y suma de productos pero no me sale nada, lo unico la celda B3 que da 11 pero ya no continua la serie

4 Estudiante D: Es que tienes que sumarle 10 en la iteracion 2 (10^(2-1)), 100 en la iteracion 3 (10^(3-1)), 1000 en la iteracion 4 (10^(4-1)).

Por eso, lo que tienes que sumarle en cada paso depende de la columna izquierda de iteraciones.

No se si me explico muy bien.

Un saludo

5 Estudiante C: Hola! lo siento, se lo que quieres decir, de hecho se como lograr cada valor, pero el problema lo tengo en la formula.

Nose como expresar la suma, puesto que ¿tendria que 10 elevado a 2 no?, no se si me explico muy bien.

De todas formas, gracias por interesarte

6 Estudiante D: Por ejemplo, en la iteración 2, la fórmula sería:

10^(2-1) + 1

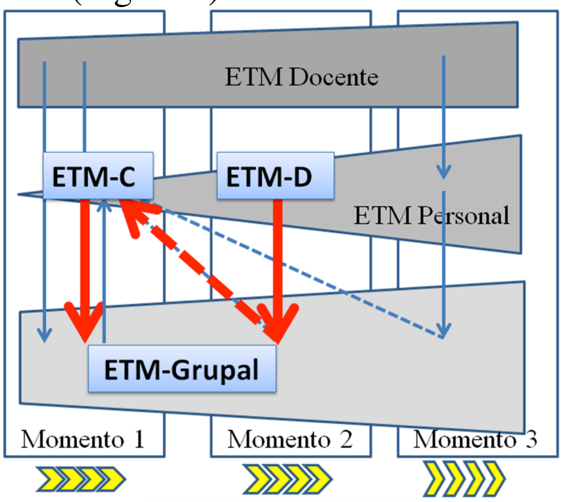
Donde el 2 es el número de iteración, es decir, la celda A3 y el 1 que suma es el resultado de la iteración anterior, es decir, la celda B2.

Una vez que tengas eso, al arrastrar hacia abajo Calc va cambiando A3 por A4,A5,A6.... y B2 por B3,B4,B5...

7 Estudiante A: Muchisimas gracias, ya lo entendi, de verdad me has ayudado mucho.

La secuencia 2 refleja una relación direccional entre el ETM del estudiante “D” hacía el ETM del estudiante “C”, donde el rol del estudiante “D” se modifica asumiendo el papel de docente al guiar al estudiante “C” durante el proceso de resolución de la actividad, incluso cuando éste parece desear abandonar la tarea (mensaje 5 y 6). En este sentido, es el estudiante “D” quién gestiona la interacción del trabajo matemático. Por otro lado, detectamos una relación direccional hacia el ETM Grupal al presentarse un método de resolución. La interacción se produce mientras el estudiante “C” está en el momento de ejecución 1 y el estudiante “D” en el momento de ejecución 2.

Esta secuencia se sitúa en el plano Figural-Instrumental, las líneas 1, 2, 3 y 4 muestran una génesis Figural desde el espacio local y real de los datos del problema hacía la visualización de la relación numérica pretendida, mientras que las líneas 4, 5, 6 y 7 lo hace desde la génesis Instrumental y los artefactos hacía la construcción, especialmente la línea 6 en la que interviene lenguaje específico del tratamiento matemático en Hoja de Cálculo (Figura 4).



Evolución ETM

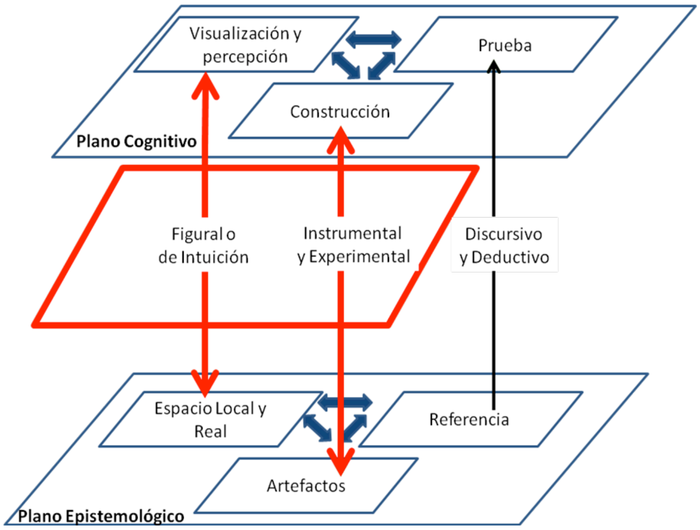


Figura 4. Relaciones entre ETM y planos de la secuencia 2.

En relación con esa misma actividad, la secuencia 3 describe una interrelación entre el ETM Grupal y Personales.

Secuencia 3

1 Estudiante E: Hola: Alguien me podría ayudar con la formula que pasa de 1 a 11 a 111 a 1111... y así sucesivamente.

Un saludo y gracias

2 Estudiante F: Hola,

Yo he multiplicado por 10 y he sumado 1, de la siguiente forma: 1*10=10 y 10+1= 11; 11*10=110 y 110+1=111......

Espero servir de ayuda y que encuentres tu propio sistema. Un saludo

3 Estudiante G: Hola Estudiante E,

Yo la he hecho como (10^(número de 1's anterior))+(término anterior).

Si quieres echarle un vistazo mejor, mira mi trabajo que lo colgue en un post del foro dedicado a los trabajos nº 3 y 4.

Saludos.

En la interacción colaborativa participan tres estudiantes (“E”, “F” y “G”) dónde el estudiante “G” hace referencia a otro mensaje enviado previamente al foro. En esta ocasión, la situación se desarrolla desde el espacio local y real hacía la visualización, es decir, en la génesis Figural (Figura 5).

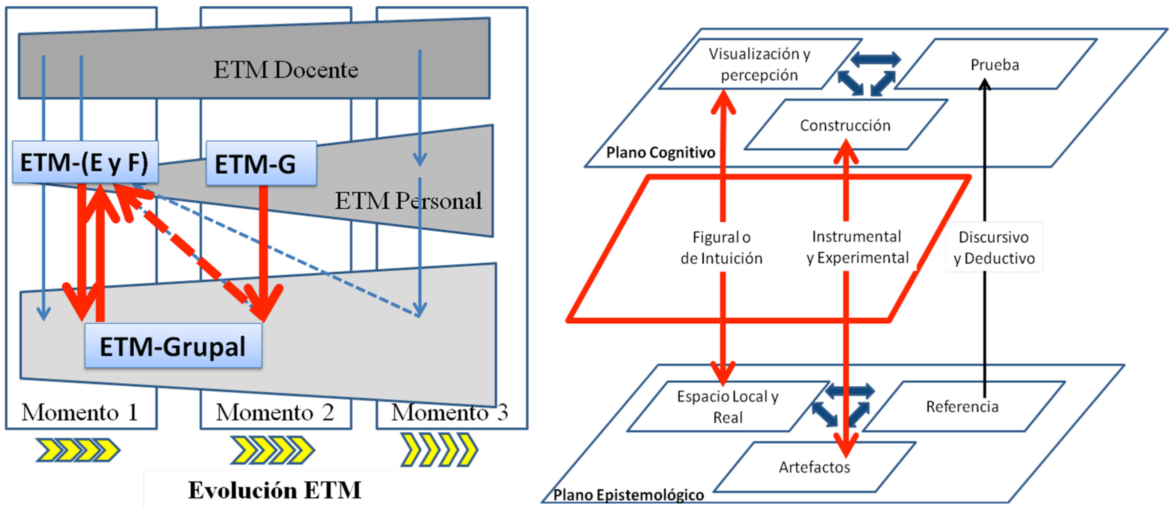


Figura 5. Relaciones entre ETM y planos de la secuencia 3.

Secuencia 4

Actividad:	usando una calculadora básica, realizar la siguiente suma 12475269159+9238569568+9455775269159.
1	Estudiante H: Actividad 17. Intenta hacer la siguiente suma con una calculadora básica: 12475269159+9238569568+9455775269159 Si no se puede hacer la suma directamente, idea un procedimiento para que la calculadora ayude en los cálculos. Yo creo que esto no es así pero no se otra forma, de la primera cantidad introducir las ultimas 8 cifras, en mi caso sería: 75269159 + 4 EXP 8+2Exp9+1EXP10= 1.2475269 elevado a 10. El cuatro sale de ser el número que hemos dejado fuera porque no lo aceptaba la calculadora al igual que el uno. Y lo que aparece después de la tecla EXP son los números que hay detrás en el número inicial. La segunda cantidad lo mismo, introduciríamos 38569568+ 2EXP8+ 9EXP9 y obtenemos 9.2385696 elevado a 09. Y con la tercera lo mismo: 75269159 + 7 EXP8+5 EXP9+5 EXP10+4 EXP11+9 EXP12 y obtendríamos 9’4557753 elevado a 12. Por último sumar las tres cantidades y obtenemos 9’4774891 elevado a 12 que esl cantidad que sale aproximada mente. espero que lo entendais y que me envieís otra froma más rápida y exacta que esta. un saludo
2	Estudiante I: Yo tengo una buena propuesta para la actividad 17: 1. Se agrupan los números en grupos de 4 en 4 cifras (aunque también se pueden agrupar de otras formas mas fáciles o difíciles) y se suman independientes: Primera suma: 9592 + 9568 + 9592 = 28752 Segunda suma: 7803 + 3856 + 7803 = 19462 Última suma: 124 + 92 + 94557 = 94773 2. Ahora nos fijamos en todas las sumas menos en la última (en la primera y en la segunda). El resultado que nos interesa realmente son las 4 últimas cifras de cada una y la quinta (la primera), es lo que se llama el acarreo de suma, el cual se le sumará a la siguiente:

Primera suma;
acarreo anterior = NADA
nos interesan solo las 4 ultimas cifras: 8752
acarreo siguiente = 2
Segunda suma:
acarreo anterior = 2
2 + 19462 = 19464
nos interesan solo las 4 ultimas cifras: 9464
acarreo siguiente = 1
Si hubiera más sumas se seguiría haciendo como la anterior...
Última suma:
acarreo anterior = 1
1 + 94773 = 94774
nos Interesa todo el número ya que no hay más sumas
acarreo siguiente = NADA
3. Montamos el número final juntando 8752, 9464 y 94774
El número final sería: 9477494648752

NOTA: Este algoritmo tambien se utiza en electronica digital para sumar en binario.

3 Docente: Como bien ha manifestado el estudiante A, su método ofrece una interpretación aproximada de la solución. En concreto, lo que ha realizado es idear una forma de introducir los números en la calculadora utilizando las potencias de 10 [EXP]. Una vez lo tiene, suma en la calculadora. La descomposición de los números es “correcta” en términos matemáticos, pero obvia el problema de la aproximación numérica al introducirlos en la calculadora puesto que por ejemplo 1.2475269E10 es considerado por la calculadora como 12475269000!!!! Esto mismo ocurre con los demás números. ¡¡¡Se producen truncamientos de los números!!!.

Por otro lado, el proceso realizado por el compañero B es correcto, (descompone los números de forma “similar” que el estudiante A, lo suma y presta atención a las llevadas), pero comete un error al poner los números, de ahí que tampoco obtenga la solución correcta. En el Aula, si ocurre esta situación hay que aprovecharla para trabajar las distintas formas de descomponer los números en el sistema decimal y cómo esto se relaciona con el tratamiento de los mismos con la calculadora. También puede ser un buen momento para discutir con el grupo clase la importancia de controlar el proceso y estimar si nuestra respuesta es correcta o adecuada a los propósitos de la tarea. Por ejemplo, el estudiante B debería de haberse dado cuenta que había cometido un error si hubiera sumado las unidades de los tres números!!!.

La secuencia 4 refleja la gestión por parte del docente de la interacción de dos estudiantes sobre el trabajo matemático que están realizando. Esta gestión involucra una relación direccional del ETM Personal del docente hacia el ETM Personal de los estudiantes y el ETM Grupal. El intercambio comunicativo de los estudiantes lo situamos en el plano Figural-Instrumental, mientras que la intervención del docente reconduce y lleva la interacción al plano Instrumental-Discursivo. Las líneas 1 y 2 explicitan un proceso de resolución que parte del plano epistemológico con elementos del espacio local y real y artefacto hacía el plano cognitivo y la visualización-construcción. Por su parte, el docente sitúa su discurso desde el plano epistemológico (Artefactos-Referencial) hacia el cognitivo (Construcción-Prueba) (Figura 6).

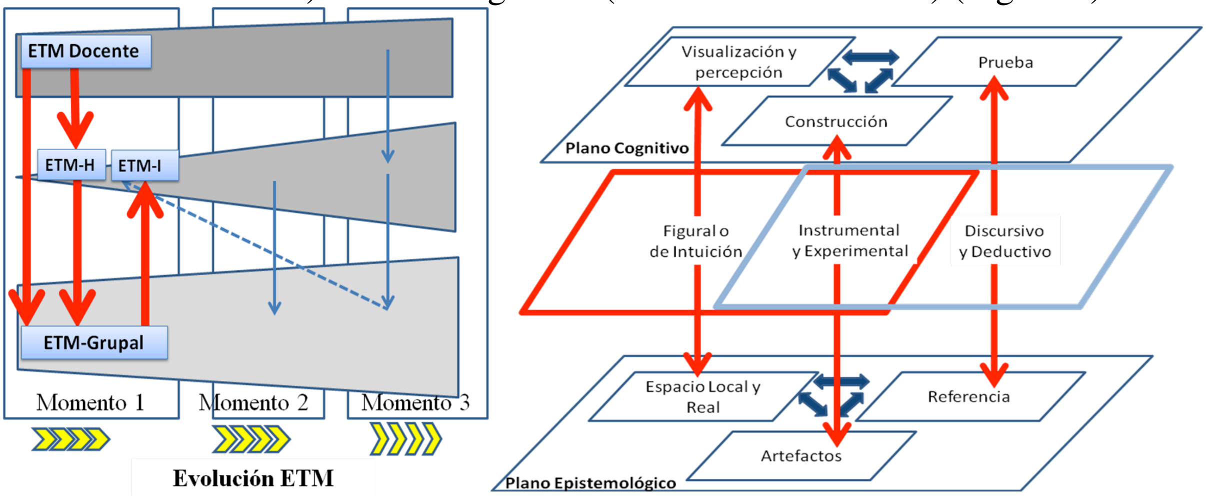


Figura 6. Relaciones entre ETM y planos de la secuencia 4.

Secuencia 5

Actividad:

> Supongamos que tenemos una escalera apoyada sobre una pared, a una distancia de un tercio de la longitud de la escalera, desde la base, se ha subido mi gato "Piwii". En ese instante y debido al peso de Piwii, la escalera empieza a deslizarse. ¿Cuál es la trayectoria que "dibujará" Piwii al caerse la escalera? Es decir, ¿qué gráfica describe? Te pediré que la reconozcas en la prueba WebCt

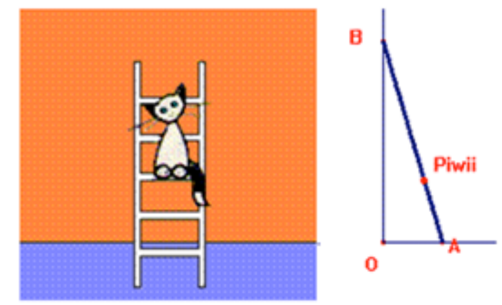


Figura 7. Enunciado actividad de Piwi.

Estudiante: Para aquellos que tienen problemas para hacer la actividad de la escalera, os propongo que hagais una cosa, ya verás como lo veis más claro. Cambia la escalera por un palillo, haz un agujero en él, a un tercio de un lado, de tal forma que quepa en el la punta de un lapiz o boli, y desplazalo por un papel utilizando como pared y suelo los bordes del papel, veras que figura geometrica te sale.

La secuencia 5 relaciona el ETM Personal del estudiante y el ETM Grupal al proponer un método alternativo con el que visualizar la resolución de la actividad con Geogebra (Figura 7). Ante las dudas que genera la comprensión de la actividad en los compañeros/as, el estudiante propone la utilización de un material físico, anticipándose a una posible intervención del docente. Aquí el estudiante asume el rol del docente al mostrar una estrategia que permite superar una dificultad generalizada del grupo clase. Situamos dicha interacción dentro de la génesis Figural (Figura 8).

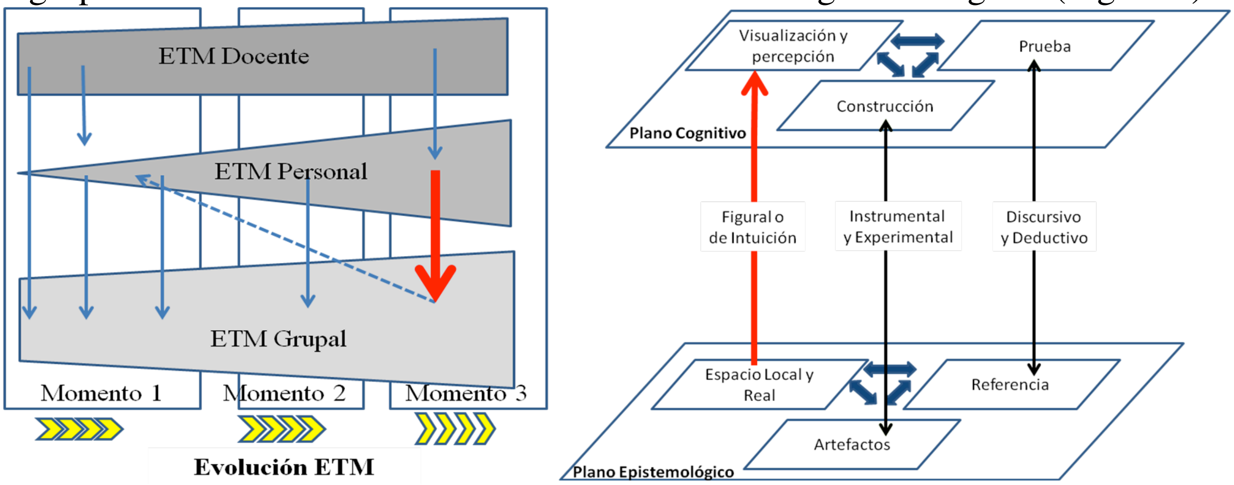


Figura 8. Relaciones entre ETM y planos de la secuencia 5.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este trabajo muestra cómo en un contexto de enseñanza e-Learning, la construcción de los ETM implica la puesta en juego de relaciones entre los ETM Personales de los agentes implicados (estudiante y docente), potenciando la posible construcción de un ETM Grupal.

Las situaciones descritas reflejan como en la gestión de las interacciones del trabajo matemático de los estudiantes, éstos asumen papeles que en una enseñanza presencial corresponden casi en exclusividad al docente. Dicha asunción de papeles alimenta a su vez los ETM personales de los propios estudiantes, del docente y grupal. En e-Learning, los estudiantes cada vez más ejercen de guía de sus compañeros/as en las distintas génesis y tránsitos entre ellas. El papel del docente se desplaza entonces hacía un papel de supervisor de las interacciones para acercar a los estudiantes al ETM Idóneo.

Por otro lado, los ETM Idóneos en el marco de la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático se han concebido con una visión centrada en el ámbito profesional del docente y de modo individual. Este trabajo refleja también la necesidad de seguir indagando en constructos que permitan abordar situaciones en las que se entran en juego ETM Idóneos de profesores en formación en situaciones de trabajo colaborativo.

En este trabajo, la existencia de un ETM Grupal surge a raíz de las interacciones entre los ETM Personales de estudiantes y docente. Los siguientes indicios permiten una aproximación a la caracterización de este constructo y reflejan su naturaleza dinámica, social y compartida:

- El ETM Grupal es socialmente construido.
- Queda registrado en las herramientas de comunicación sincrónicas y

asincrónicas del entorno virtual.

- Dicho registro, configurado como un conglomerado de parcelas de ETM Personales, actúa como un repositorio accesible en cualquier instante.
- El repositorio, como conglomerado constituye un ETM Grupal en continua construcción e integra elementos de los planos epistemológicos y cognitivos de los ETM Personales junto con los procesos propios de las distintas génesis.

Este trabajo pone de manifiesto como la gestión del ETM Grupal es compartida por estudiantes y docente, siendo corresponsables todos en su creación y mantenimiento e integrando elementos de los planos epistemológicos y cognitivos de los ETM Personales, junto con los procesos propios de las distintas génesis. El ETM Grupal, como noción emergente, necesita ser explorada y, abre nuevas líneas de indagación en el marco de la Teoría de los Espacios de Trabajo. Surgen de manera natural diversas cuestiones por abordar, entre las que podemos señalar: ¿bajo qué condiciones puede establecerse la existencia de ETM Grupal en una enseñanza presencial y cuál sería su naturaleza? ¿Quién asume su gestión? ¿Cómo influyen las interacciones entre ETM y el mantenimiento-fortalecimiento del ETM Grupal? ¿Cuál es la relación, si existe, entre el ETM Grupal y el concepto emergente de fibración entre ETM?

REFERENCIAS

Barrera, R. (2013). On the Meanings of Multiplication for Different Sets of Numbers in Context of Geometrization: Descartes' Multiplication, Mathematical Workspace and Semiotic mediation. *Mathematics teaching-research journal online, 1-2*(6),1-20

Codina, A. (2009). Teleformación en Educación Matemática. Una experiencia a través de la evaluación formativa y el trabajo colaborativo. En Aguaded, J. I y Infante, I. (Eds.) *Buenas prácticas en teleformación en las diez universidades andaluzas* (pp. 303-318). La Coruña: NetBiblo. DOI: 10.4272/978-84-9745-219-9.ch32.

De la Torre, E. y Pérez, M. (2008). Paradigmas y espacios de trabajo geométricos en los libros de texto de la E.S.O. En Luengo, R., Gómez, B., Camacho, M. y Blanco, L. J. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XII, ponencias grupo Aprendizaje de la Geometría* (pp. 1-17). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. [on-line] En: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXII/AprenGeo/DelaTorreYPerez.pdf

Dillenbourg, P. (1999). What do you mean by collaborative learning? En P. Dillenbourg (Ed). *Collaborative learning: cognitive and computational approaches*. Oxford: Elservier.

Gómez-Chacón, I. y Kuzniak, A. (2013). Spaces for geometric work: figural, instrumental, and discursive geneses of reasoning in a technological environment.

International Journal of Science and Mathematics Education, December 2013, 1-26. [online]. DOI: 10.1007/s10763-013-9462-4

Houdement, C. (2007). A la recherche d'une coherence entre geometrie de l'ecole et geometrie du college. *Reperes-IREM,* 67, 69-84.

Houdement, C., y Kuzniak, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Jochems, W.M.G, Martens, R.L. y Strijbos, J.W. (2004) Designing for interaction: Six steps to designing computer-supported group-based learning. *Computers & Education*, 42, 403-424.

Kuzniak, A. (2005). Espace de travail géométrique personnel:une approche didactique et statistique. En R. Gras, F. Spagnolo y J. David (Eds.), *Proceedings of the third International Conference Imlicative Statistic Analysis* (pp. 211-227). Palermo: Università degli studi di Palermo

Kuzniak, A. (2008). Diversidad de las matemáticas enseñadas "aquí" y "en otro lugar": el ejemplo de la geometría. *Matematicalia*, *4*(1), 1-15.

Kuzniak, A. (2011) L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 16, 9-24.

Mena, A. y Morales, A. (2011). Elementos para una aproximación epistemológica a un "espacio de trabajo□ algebraico. En A. Ruiz (Ed.) *Actas del XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (pp. 1-12). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Montoya, E. (2011). Los paradigmas geométricos en la formación inicial de profesores de Matemática. En A. Ruíz (Ed.), *Actas XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (pp. 1-13). Universidade Federal de Pernambuco.

Montoya, E. Henríquez, C., Menares, R. y Barra, M. (2012). *El espacio de trabajo matemático: una herramienta de análisis*. Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaiso

López, V.M, Fernando, L. y Julián, J.A. (2007). La Red de evaluación formativa, docencia universitaria y Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Presentación del proyecto, grado de desarrollo y primeros resultados. *Revista de Docencia Universitaria*, *RED-U*, 2, 2-19.

Waldegg, G. (2002). El uso de las nuevas tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias. *Revista electrónica de Investigación Educativa, 4* (1), [online]. En: http://www.redalyc.org/pdf/155/15504106.pdf

TAREAS DE INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA (16-18 AÑOS)

Constantino de la Fuente Martínez, Inst. de Educación Secundaria, Burgos (España)

Inés Mª Gómez Chacón, Universidad Complutense de Madrid (España)

Abraham Arcavi, Inst. Weizman, Rehovot (Israel)

Esta comunicación se centra en análisis de la génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor y las interacciones. Para ello se ha priorizado el tema de trabajo con ejemplos y contraejemplos en una demostración matemática. Con ello se intentará dar respuesta a algunas preguntas contenidas en el problema de investigación planteado en el marco de la tesis doctoral: en el desarrollo de un PIM, ¿qué papel pueden jugar los ejemplos y contraejemplos en el proceso de demostración? La interacción con el estudiante, ¿qué conocimiento matemático y sobre la enseñanza puede desarrollar en el profesor? El análisis de las producciones de los estudiantes, ¿qué principios de intervención puede proporcionar al profesor para conseguir un espacio de trabajo matemático idóneo?

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas ha sido una de las áreas más prominentes desde la segunda mitad del siglo XX en la educación matemática (p.e. Polya, 1945, Schoenfeld, 1985, Mason, Burton y Stacey; 1982) no sólo como propuesta de enseñanza y aprendizaje, sino también como planteamiento y propuesta epistemológica que da una explicación de la estructura del conocimiento matemático.

Desde varias décadas se ha reflexionado en los modelos teóricos que sustentan esta propuesta en su vertiente didáctica y cognitiva. Más recientemente la idea de *investigación matemática* o *proyecto de investigación matemática* en Secundaria surge como un acercamiento a la verdadera investigación matemática y como un paso adelante en la aplicación, cada vez más profunda, de la Resolución de Problemas (R.P.) en el aula (Braverman, 2006; Braverman y Samovol, 2008).

El curriculum español de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (Bocyl, 2009) y el de Bachillerato (Bocyl, 2008) recogen esta idea y plantean dentro de sus programas de forma prescriptiva la realización de *investigaciones matemáticas* que pueden concretarse en forma de proyectos de investigación. Es en este contexto donde se sitúa el tema de nuestro estudio que tiene por finalidad la caracterización de los procesos de investigación matemática llevados a cabo con estudiantes de Bachillerato (16-18 años), teniendo tres pilares fundamentales: el profesor, el estudiante y las tareas o proyectos de investigación.

Entendemos por proyecto de investigación matemática en Secundaria (en adelante denotado por PIM) un conjunto de problemas de matemáticas con un tema específico, que requiera la exploración, la consideración de casos especiales, el pensamiento inductivo, la generalización, la propuesta de conjeturas, su prueba o refutación, y el planteamiento de nuevos problemas originales que se basan en ideas del problema inicial (Braverman y Somovol, 2008, p. 400). A este respecto, conviene aclarar que los PIM se pueden obtener a partir de un problema de investigación (por ejemplo: ¿se pueden estudiar matemáticamente los arcos de la Catedral de Burgos, mediante modelos matemáticos? ¿qué tipo de patrones numéricos aparecen?) y también se pueden obtener a partir de modificaciones en tareas típicas de resolución de problemas (por ejemplo, el PIM que se analiza en este documento). Frobisher (1994) señala que casi siempre es posible modificar una tarea de resolución de problemas para transformarla en… una investigación. En cualquier caso, se debe hacer una distinción entre las tareas de resolución de problemas que conducen a las investigaciones, y… las investigaciones que tienen su propia existencia separada (p. 158). En el estudio presentado en este documento utilizaremos PIM obtenidos a partir de modificaciones y extensiones en una tarea de resolución de problemas.

A continuación, nos gustaría reseñar algunos aspectos sobre la pertinencia de este estudio. Una primera cuestión que surge es si se puede dar por conocida la estructura de un PIM, a semejanza de un proyecto de investigación matemática de los que se desarrollan en el contexto de la Universidad. Consideramos que no, por las siguientes razones:

- Los PIM de los que estamos hablando se desarrollan en un contexto de Bachillerato, sin tradición en desarrollar este tipo de proyectos y con algunas variables implicadas en el proceso, que no han sido estudiadas suficientemente: los estudiantes, los profesores y los contenidos matemáticos.
- El estudiante se acerca a la investigación por primera vez, por tanto, necesita conocer la estructura del proceso de investigación, clarificar los contenidos de las tareas que debe desarrollar, resolver las dificultades que puedan surgir y conseguir, en la medida de lo posible, los objetivos propuestos (resolución del problema de investigación y aprendizajes que se esperan del proceso). En un principio, él no conoce nada de esto y, por tanto, necesita un tutor que le guíe y le ayude en las dificultades.
- El profesor que va a dirigir un PIM, es muy probable que se acerque a la investigación por primera vez, porque en su formación inicial no tuvo este tipo de experiencias. Por ello necesita adquirir *conocimientos científicos de contenido*: método científico, proceso de descubrimiento, fases, estructura, metodologías, y tipos de investigaciones matemáticas; y *conocimientos pedagógicos de contenido* en relación con: a) los PIM (tipos, estructura y fases de los proyectos de investigación); b) con el estudiante (tareas a realizar, resolución de dificultades, aprendizajes a conseguir, interacciones con el profesor y con otros estudiantes, etc.); c) el currículo (situación de los PIM en el currículo, contenidos curriculares más adecuados para llevar a cabo un PIM, problemas ideales para generar PIM, nivel de profundización en un PIM, tipos de PIMs para proponer a los estudiantes); d) el papel del profesor en el desarrollo de un PIM (tipo de ayuda a prestar al estudiante y nivel de intervención en el proceso).

La contribución para este Cuarto Simposio Internacional ETM se centra en el tema 3 del mismo (Génesis y desarrollo del trabajo matemático: el papel del profesor y las interacciones). Para ello se ha priorizado el tema de trabajo con ejemplos y contraejemplos en una demostración matemática. Con ello se intentará dar respuesta a algunas preguntas contenidas en el problema de investigación planteado en el marco de la tesis doctoral: en el desarrollo de un PIM, ¿qué papel pueden jugar los ejemplos y contraejemplos en el proceso de demostración? La interacción con el estudiante, ¿qué conocimiento matemático y sobre la enseñanza puede desarrollar en el profesor? El análisis de las producciones de los estudiantes, ¿qué principios de intervención puede proporcionar al profesor para conseguir un espacio de trabajo matemático idóneo?

MARCO TEÓRICO: EJEMPLOS Y CONTRAEJEMPLOS EN UNA DEMOSTRACIÓN

El trabajo con ejemplos y casos particulares tiene interés en la búsqueda de conjeturas y en la construcción de una demostración que justifique su veracidad o su falsedad. En el contexto de un PIM, este trabajo se sitúa, habitualmente, en la fase de resolución del problema de investigación y, más concretamente, en la búsqueda de patrones y leyes matemáticas que se quieren utilizar en la demostración que resuelve el problema de investigación planteado. A su vez, la potencialidad de los ejemplos utilizados en las pruebas está condicionada por uno de los tres elementos importantes del conocimiento del profesor sobre la prueba (Stylianides y Ball, 2008), concretamente el que se refiere a la *capacidad de entender y distinguir entre argumentos empíricos y deductivos*. En este sentido…*los argumentos empíricos no pueden contar como pruebas en ningún nivel de la enseñanza, sobre todo porque las discusiones empíricas utilizan modos inválidos de argumentación promoviendo la aceptación de las demandas matemáticas basadas en evidencias incompletas. Además, las discusiones deductivas se asocian a una gama de modos válidos de argumentación […]. Los ejemplos incluyen los modos de la argumentación asociados al principio de la inducción matemática, la regla de equivalencia de la contraposición y la construcción de los contraejemplos*. (p. 310-311)

En nuestro estudio, analizaremos diferentes episodios con estudiantes, en los que aparecen ejemplos en el proceso de demostración de conjeturas. Para llevar a cabo el análisis utilizaremos diferentes categorías:

En primer lugar la idea de *ejemplos genéricos* (Masón y Pimm, 1984; Balacheff, 1988; Harel, 2001): *Un ejemplo genérico es un objeto solo, particular, que representa el caso general y con el cual puede ser percibida una generalidad* (Pedemonte y Buchbinder, 2011, p. 257). La diferencia entre genéricos y no genéricos radica en que los primeros son portadores de una *idea abstracta*, tienen una *estructura subyacente* que podemos observar si dejamos a un lado los aspectos concretos del ejemplo. Los no genéricos no contienen ninguna estructura subyacente o no se observa. Otra de las principales características de los ejemplos genéricos es que *conectan el dominio aritmético con el algebraico* (p. 265) lo que permite conectar el nivel de lo concreto con el nivel de lo general. Como plantean Pedemonte y Buchbinder (2011): si los argumentos que sirven para demostrar la conjetura *se basan en ejemplos genéricos, y tienen así una estructura deductiva, permiten la construcción de la prueba deductiva. En estos casos, los ejemplos genéricos sirven como puente entre la argumentación y la prueba* (p. 266).

Otra idea en la que nos apoyaremos es la de *generalización de patrones* de Harel (2001). Este investigador ha observado dos tipos distintos de generalizaciones que corresponden a "dos maneras distintas del pensamiento": *generalización del patrón del resultado* (*result pattern generalization)* (RPG) y *generalización del patrón del proceso* (*process pattern generalization)* (PPG). La peculiaridad de cada uno es que *en la generalización del patrón del proceso* (PPG) *los estudiantes se centran en las regularidades del proceso, mientras que en la generalización del patrón del resultado* (el RPG) *en las regularidades de los resultados* (p. 191). Además, como plantea Pedemonte (2007), los PPG *son requeridos para la construcción de una demostración de tipo inductivo*.

También nos basaremos en las ideas de *unidad cognoscitiva* y *continuidad estructural* propuestas por Pedemonte (2007) y Pedemonte y Buchbinder (2011). Para ello, previamente, debemos introducir los conceptos de *argumentación constructiva y argumentación estructurante* (Pedemonte, 2007). La *argumentación constructiva* está constituida por los argumentos que contribuyen a la construcción de la conjetura, que pueden ser proporcionados por los *ejemplos genéricos*. La *argumentación estructurante* está formada por los argumentos que justifican la conjetura. Estos argumentos justificativos pueden aparecer a la vez que los constructivos (en este caso las dos argumentaciones son coincidentes) o posteriormente a ellos, una vez que la conjetura se considera un hecho, si la argumentación constructiva es insuficiente para proporcionar una prueba. Cuando los ejemplos genéricos se pueden generalizar fácilmente, pueden facilitar la elaboración de la *argumentación estructurante* y, como consecuencia de ello, la construcción de la prueba.

Una vez aclarados estos primeros conceptos explicaremos la idea de *Unidad cognoscitiva* (Pedemonte y Buchbinder, 2011). La unidad cognoscitiva se observa cuando hay una continuidad entre la *argumentación constructiva*, la *argumentación estructurante* y la prueba o demostración de la conjetura. Por último nos fijaremos en la *Continuidad estructural* (Pedemonte y Buchbinder, 2011). Esta idea se puede observar cuando la *argumentación* (constructiva o estructurante) *y la prueba tienen la misma estructura lógica*; es decir, *tienen las mismas conexiones lógicas entre sus proposiciones* (p. 259); es decir, son todas de tipo inductivo, deductivo o abductivo. La *continuidad estructural se observa si los ejemplos usados para construir y/o justificar la conjetura, se pueden generalizar para la construcción de la prueba* (p. 265). En este sentido, … *si la argumentación estructurante se basa en ejemplos genéricos, y tiene así una estructura deductiva, permite la construcción de la prueba deductiva. En estos casos, los ejemplos genéricos sirvieron como puente entre la argumentación y la prueba permitiendo que la unidad cognoscitiva y la continuidad estructural se observaran* (p. 266). De ahí la importancia de los ejemplos de tipo genérico en el paso de la argumentación a la demostración.

En cuanto al tipo de pensamiento utilizado en la construcción de la prueba, tendremos en cuenta, además de los razonamientos demostrativos inductivo y deductivo, el razonamiento abductivo (Peirce, 1960): *La abducción como modelo de inferencia es usada en el proceso de descubrimiento, haciendo que, a partir de un hecho observado y suponiendo que ese hecho es condición necesaria para que se cumpla cierta hipótesis, entonces la hipótesis (de la implicación) es más creíble*. *En un razonamiento abductivo, la hipótesis es la conclusión de un razonamiento, teniendo este último un valor de plausibilidad al proporcionar mayor credibilidad para la hipótesis*[45]. Este tipo de razonamiento fue modelado por Polya (1954, traducción española 1966) en sus *patrones de razonamiento plausible* en la forma:

$$A \Rightarrow \mathrm{B}$$

$$B \text{ es verdadera}$$

$$A \text{ es más digna de crédito}$$

El razonamiento anterior (Polya, 1954, p. 107; traducción española (1966), p. 283), denominado por Polya *patrón fundamental inductivo,* daría mayor credibilidad a la conjetura A, aunque no asegura su veracidad.

CONTEXTO Y METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

La metodología de investigación se enmarca en la perspectiva *design research*, o *design studies* (Akker, 1999 y 2006), basada en iteraciones sucesivas o microciclos de investigación. Con ello se pretende validar a nivel local el diseño de intervención y obtener unos principios de diseño o declaraciones teóricas o declaraciones heurísticas sobre:

- La estructura y fases de los PIM desarrollados por los estudiantes.
- El papel e intervención del profesor: pautas, patrones y orientaciones para aumentar la eficacia de la intervención del profesor; interacción entre el estudiante y el profesor y consecuencias de ella en los conocimientos del profesor (conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido).
- Las tareas que realizan los estudiantes: identificación y caracterización de las mismas, dificultades que encuentran y procesos mentales que ponen en práctica.

La investigación se ha llevado a cabo con siete estudiantes de 2º de Bachillerato, en tres iteraciones puestas en práctica en años diferentes: la primera con una estudiante, la segunda con cinco y la tercera con una. En cada una de las experiencias, los estudiantes han desarrollado un PIM teniendo como punto de partida el problema que se presenta más abajo. El objetivo principal era que, con la

---

[45] Adaptado de Pedemonte (2007), pág. 647.

resolución de los problemas de investigación que surgen en el PIM, los estudiantes establecieran conexiones entre el contexto del problema y las progresiones aritméticas tradicionales, para intentar generalizar estas últimas al espacio.

Cada estudiante, durante un periodo de cuatro meses, llevó a cabo su PIM, entregando periódicamente borradores de trabajo (cada dos o tres semanas) al profesor, para ser revisados y comentados. El profesor hacía comentarios escritos a cada uno de los borradores, teniendo en cuenta que su intervención se desarrollaba en tres vertientes: a) coordinación del proceso (orienta, sugiere, propone, etc.); b) control del proceso (analiza dificultades y propone salidas; evalúa el desarrollo y propone consolidar, revisar, modificar, etc.); c) evaluación del informe final. El estudiante, con los comentarios del profesor, prosigue el trabajo hasta la siguiente entrega. El papel del profesor se completa con la celebración de dos reuniones con el estudiante, una al principio del proceso para presentarle formalmente el PIM y otra al final para valorar globalmente los resultados.

Como resultado de cada PIM, los estudiantes elaboraron un informe personal, con unos contenidos aportados por el profesor en un guion al efecto, en el que describían todos los aspectos del PIM realizado: problema de investigación, objetivos o hipótesis iniciales, estado de la cuestión, metodología, resultados, conclusiones y bibliografía.

Para la presentación de este documento, se han seleccionado tres episodios sacados de uno de los informes elaborados por los estudiantes en su PIM, concretamente del de la estudiante P.I. (de la tercera iteración) en la parte que trabaja con ejemplos y contraejemplos intentando resolver el problema de investigación. Se han elegido los episodios de esta estudiante porque:

- ella es la que más profundiza en el uso de ejemplos y contraejemplos a la hora de intentar demostrar los resultados, considerando su caso como el más representativo;
- sus informes parciales son los que han propiciado una mayor interacción con el profesor, consiguiendo también que el análisis posterior de los episodios, por parte de este último, haya resultado muy fructífero, ya que se han obtenido los resultados presentados en este documento.

La codificación utilizada para la descripción de los documentos analizados, P.A.-06-P.I, que será utilizada a lo largo del documento, contiene tres valores: las dos primeras letras describen el tema de trabajo (P.A. significa progresiones aritméticas), el número de dos cifras representa el número de informe (06 es el informe nº 6 sobre este tema) y las dos últimas letras son las iniciales del nombre completo de la estudiante.

El problema inicial es el siguiente:

	74			
				186
		103		
0				

¿Será posible rellenar los espacios vacíos de la tabla con números enteros positivos, de modo que los números de cada fila y de cada columna formen progresiones aritméticas?

El problema de investigación, en el PIM del que se han extraído los episodios, es el siguiente: dados unos valores de la tabla, ¿en qué condiciones se puede completar de manera única?

PRESENTACIÓN Y PRIMER ANÁLISIS DE LOS EPISODIOS

El trabajo de la estudiante P.I., que tiene como objetivo la resolución del problema de investigación, tiene una parte que se desarrolla con ejemplos y contraejemplos, dando lugar a unos resultados (plasmados en el informe final) entre los que hemos elegido los episodios a analizar. En el episodio 1 se estudian algunos *ejemplos genéricos* que sirven para la construcción de demostraciones de existencia; en el episodio 2 se analiza el carácter de la información contenida en la estructura subyacente de algunos ejemplos genéricos; y en el episodio 3 se evidencian algunos razonamientos utilizados en la construcción de conjeturas modificadas a partir de otras anteriores.

Episodio 1. ¿Ejemplos para demostrar?

En este episodio, vamos a ejemplificar varias de las ideas presentadas anteriormente. Concretamente identificaremos la diferencia entre el caso particular general o abstracto, que se rige por un modo de argumentación deductivo y que, por tanto, si sirve para demostrar, y el caso particular concreto que, salvo para la construcción de contraejemplos, no sirve para demostrar.

Para ello analizaremos el documento P.A.-06-P.I. en la parte que intenta profundizar en una de las conjeturas más importantes del trabajo: *dados cuatro valores de la tabla, ¿siempre es posible completarla de forma única?* Concretamente analizaremos la pág. 6 del citado documento, donde la estudiante presenta unos casos muy interesantes, relacionados con el problema inicial. El episodio tiene varias partes y comienza de la manera siguiente:

Dados unos números a, b, c, d arbitrarios, ¿podemos construir un cuadrado de cualquier dimensión, o incluso un rectángulo, verificando que sus filas y columnas son progresiones aritméticas?

a+b	a+b+c+d
a	a+c

Fig. 15

Está claro que en esa situación (Fíg. 15) sí tiene contestación afirmativa la pregunta anterior. Además si a, b, c, d son enteros, entonces el cuadrado resulta de números enteros.

Como podemos observar, la estrategia de la estudiante, P.I., ha sido construir un caso particular que dé respuesta a la pregunta planteada. Además el ejemplo planteado permite a la estudiante presentar como trivial el hecho de que si esos valores son colocados en la tabla en filas y columnas consecutivas (que pueden ser las primeras), esos cuatro elementos nos permiten completar, de forma única, la tabla de números en su totalidad, sin más que ir añadiendo valores en la dirección que nos interese y teniendo en cuenta que la diferencia de dos consecutivos es la diferencia de la progresión aritmética correspondiente. Es decir, que para dar una respuesta justificada a la pregunta: *¿podemos construir un cuadrado…?,* vemos que basta con dar un ejemplo en el que ocurra. Lo mismo pasaría para preguntas del tipo: *¿existirá algo que cumpla..?, ¿se puede dar el caso…?* Para el caso propuesto por la estudiante, vemos que ha priorizado el uso de los valores *b, c* y *d* para que formen parte de las diferencias de las p.a. filas o columnas; concretamente *b* es la diferencia de la primera columna, *c* es la de la primera fila, *c+d* de la segunda fila y *b+d* de la segunda columna de la tabla.

Volviendo al caso analizado, resulta curioso que PI no haya resuelto la pregunta presentando la solución más sencilla, por ejemplo (Ejemplo 2A):

b	d
a	c

O mediante la solución que se obtiene a partir de la última colocación, en la que, repitiendo el procedimiento para interpolar medios aritméticos, podríamos completar las filas y columnas (Ejemplo 2B) :

b	…	…	…	…	d
…					…
…					…
a	…	…	…	…	c

Por tanto, es sencillo completar una tabla de las del problema inicial si conocemos cuatro elementos como los anteriores, situados en dos filas y dos columnas consecutivas, como en el primer ejemplo, o no consecutivas, como hemos propuesto en el último ejemplo.

Volviendo al desarrollo de la estudiante, vemos que ha demostrado el siguiente resultado: dados cuatro números cualesquiera, siempre podemos construir una tabla, de manera que los valores formen parte de ella y todas sus filas y columnas sean p.a. Además, la construcción nos permite asegurar que la tabla resultado no es única, sino que depende de las posiciones de los cuatro valores en la tabla; para cada posición elegida existirá una tabla como resultado.

Profundizando en el análisis de las características de los ejemplos anteriores, vemos que no se pueden encuadrar completamente en la idea de *ejemplos genéricos* (Masón y Pimm 1984; Balacheff 1988; Harel 2001), ya que, aunque tienen algunas coincidencias con ellos, también mantienen varias diferencias:

- Ejemplifican una estructura general, abstracta, pero esa idea no está subyacente como en los *ejemplos genéricos* sino que aparece explícita en los ejemplos.
- No *conectan el dominio aritmético con el algebraico*, sino que se mantienen en este último.
- Tienen un carácter ambivalente. Son casos particulares de la tabla de números, pero no son ejemplos concretos, sino que representan una familia de casos (uno para cada cuarteto de valores de a, b, c, d). Si nos ceñimos al contexto: *lugares que ocupan los elementos en la tabla* o *posiciones de los elementos en la tabla,* y tomamos esta variable como criterio, entonces son casos particulares o *ejemplos genéricos;* pero en el contexto: *valores numéricos de los elementos de la tabla,* para este criterio, son casos generales, no son ejemplos concretos ni *genéricos*. Tenemos, por tanto, que son ejemplos particulares y generales a la vez, según el contexto en el que los situemos y el criterio con el que los analicemos.Surgen de este modo un tipo de ejemplos genéricos nuevos que denominaremos *ejemplo (o caso particular) de tipo general y genérico* (se amplía esta idea en el Episodio 3). Son casos particulares de una situación general, pero, a su vez, son casos generales de una idea más concreta; siempre expresarán explícitamente una idea abstracta y, por tanto, englobarán otros casos particulares que lo pueden concretar.

Una de las características de los tres *ejemplos de tipo general y genérico* vistos en el episodio es que configuran sendas demostraciones de existencia por construcción; es decir, que sirven para demostrar la veracidad de la conjetura planteada, a semejanza de lo que ocurre con los *ejemplos genéricos*.

Por otra parte, los tres ejemplos analizados representan sendos ejemplos de una *Generalización del Patrón de Proceso* (PPG) (Harel; 2001). En los tres casos que estamos analizando, para completar la tabla a partir de los cuatro elementos conocidos, se debe encontrar una idea procesual que permita ir generando los restantes elementos a partir de los elementos dados inicialmente. Esta idea es encontrada por la estudiante al centrar su búsqueda en el cálculo de las diferencias de cada una de las p.a. que componen las líneas (filas o columnas). Como de cada una de ellas conoce dos elementos, la cuestión es trivial. Es tan sencilla que la estudiante, una vez presentado el ejemplo, da por hecho que se puede completar la tabla y ni siquiera lo menciona.

Otra característica del proceso llevado a cabo por la estudiante es que podemos observar varias de las ideas propuestas por Pedemonte y Buchbinder (2011):

- *Unidad cognoscitiva*. En nuestro caso, el ejemplo planteado por la estudiante es de tipo general (que lo hemos denominado *caso particular general genérico*) y sirve para la construcción de la prueba, (él mismo es parte esencial en la construcción de la conjetura y en su justificación).
- *Continuidad estructural*. En el caso de la demostración de la estudiante, la argumentación y la prueba son de tipo deductivo (concretamente de existencia por construcción). En ellas, la construcción de un ejemplo sirve de argumentación estructurante para hacer verdadera la conjetura.

Episodio 2. La información contenida en la estructura subyacente de los ejemplos genéricos

Continuamos con el análisis del trabajo de la estudiante, que continúa en la página 7 del documento P.A.-06-P.I. Allí podemos leer:

Podemos poner cualquier valor con tal de que no sean redundantes o insuficientes, como por ejemplo:

2	4	6	8

Si nos dan estos cuatro valores, situados en la misma fila, no podríamos obtener el cuadrado [una tabla única], pues en definitiva sólo nos han dado dos valores independientes.

Como vemos, el refinamiento en la selección de ejemplos permite conseguir resultados interesantes: *las posiciones de los valores en la tabla condicionan la existencia o no de una tabla única a la que ellos pertenezcan*. Estamos ante un caso particular concreto (lo llamaremos Ejemplo 3); es decir, un *ejemplo genérico* (Masón y Pimm 1984; Balacheff 1988; Harel 2001) ya que lo realmente importante de él no son los valores numéricos particulares, sino la situación de ellos en la tabla; es decir, que contienen una *estructura subyacente* (la idea general o abstracta de la que el ejemplo es un caso particular) que es la siguiente: tenemos cuatro elementos consecutivos de una misma línea. Este ejemplo genérico, a modo de contraejemplo, sirve para demostrar la falsedad de la conjetura: *dados cuatro elementos cualesquiera de la tabla, siempre se puede completar de forma única, resultando sus filas y columnas p.a*.

Resulta muy ilustrativo el uso que hace la estudiante de las ideas de *valores redundantes, insuficientes o contradictorios;* es decir, para completar de forma única una línea de la tabla, basta con conocer dos elementos cualesquiera de ella. Conocer más de dos implica que hay información redundante o contradictoria, conocer menos de dos significa que la información es insuficiente.

Por esta causa, en el ejemplo genérico anterior, observamos que la información es redundante; es decir, podemos considerar dos cualesquiera de los elementos dados *independientes* y los demás los podemos deducir de esos dos. Esta idea general o *estructura subyacente,* descubierta por la estudiante en el ejemplo, es la que sirve para argumentar y demostrar que, en los casos análogos a ese, se puede completar la tabla, pero no de forma única. Todo ello refuerza la importancia de los ejemplos genéricos.

La importancia de un ejemplo genérico proviene de su capacidad de conectar los dominios aritméticos y algebraicos. Esta conexión apoya la unidad cognoscitiva porque un ejemplo usado en la argumentación se puede generalizar a través de la representación algebraica en la prueba. Esto es porque las reglas usadas para los ejemplos, y particularmente para los ejemplos genéricos, se pueden generalizar en el dominio algebraico.

De ahí que parezca natural empezar a pensar que los elementos deban estar en filas y columnas diferentes, para ver si así son *independientes* y nos permiten completar la tabla de forma única, como ocurría en el problema inicial. Esta es la idea que se resalta en el siguiente episodio, desarrollado en las dos o tres semanas siguientes.

Episodio 3. El papel de la modificación de conjeturas en los razonamientos

Por todo lo anterior, P.I. modifica la conjetura y la transforma en: sean cuatro elementos de la tabla, con la propiedad de que tomados dos cualesquiera de ellos se cumple que están en filas y columnas diferentes. En estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única, resultando sus filas y columnas p.a.

Como la demostración de esta conjetura conlleva unas *formas de expresión* que se salen del *alcance conceptual* de la estudiante, vuelve a tomar un caso particular general de la misma, para ver si obtiene algún resultado interesante. Ello aparece en las páginas 9-10 del documento P.A.-06-P.I.

Vamos a tratar una variante del problema, de forma general:

Si tenemos cuatro elementos conocidos, situados como en la figura siguiente, ¿hay solución para el cuadro aritmético?

			d
		c	
	b		
a			

Tenemos que demostrar que existen las diferencias v_1, v_2, h_1 de las correspondientes p.a. fila [fila primera: h_1] o p.a. columnas [columnas primera: v_1; columna segunda: v_2].

Se cumple que las diferencias de las filas son: h_1, $h_1+(v_2-v_1)$, $h_1+2(v_2-v_1)$, $h_1+3(v_2-v_1)$.

[Podemos poner $h_2 = h_1 + (v_2 - v_1)$ pues se cumple que $b = a + h_1 + v_2 = a + v_1 + h_2$, simplificando se tiene $h_1 + v_2 = h_2 + v_1$ o lo que igual: $h_2 - h_1 = v_2 - v_1$. Por tanto $v_2 - v_1 = h_2 - h_1$. Luego $h_2 = h_1 + (v_2 - v_1) = h_1 + (h_2 - h_1) = h_2$] (Este párrafo aparece como una nota a pie de página en el original)

Además: $a + v_2 + h_1 = b$; $a + 2v_1 + 2(h_1 + 2(v_2 - v_1)) = c$; $a + 3v_1 + 3(h_1 + 3(v_2 - v_1)) = d$. Operando y ordenando tenemos:

$$h_1 + v_2 = b - a; \qquad h_1 - 2v_1 + 4v_2 = c - a; \qquad 3h_1 - 6v_1 + 9v_2 = d - a$$

Es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Analicemos el rango de la matriz del sistema y la ampliada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b-a \\ 2 & -2 & 4 & c-a \\ 3 & -6 & 9 & d-a \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & -2 & 2 & c-2b+a \\ 0 & 0 & 0 & d-3b+2a-3(c-2b+a) \end{pmatrix}$$

Por tanto el sistema no tendrá solución si

$$d - 3b + 2a - 3c + 6b - 3a = -a + 3b - 3c + d \neq 0.$$

O lo que es lo mismo $3b + d \neq a + 3c$. Vamos a presentar un ejemplo de cada situación. [...]

El planteamiento de fondo de la estudiante en este episodio es un intento más de contrastar la veracidad o no de la conjetura enunciada al principio de este episodio: *sean cuatro elementos de la tabla, con la propiedad de que tomados dos cualesquiera de ellos se cumple que están en filas y columnas diferentes. En estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única, resultando sus filas y columnas p.a.* Para ello analiza otro *caso particular general* (lo denominaremos como Ejemplo 4) y, si el resultado es el adecuado, lo utiliza posteriormente para refutar la conjetura.

Sin detenernos a comentar la originalidad del planteamiento de la estudiante, que se apoya en varias incógnitas auxiliares no explícitas en el enunciado del problema, podemos observar cómo P.I., a partir de este *caso particular general*, presenta, en P.A.-06-P.I.-P10, dos casos particulares o ejemplos concretos, aparentemente parecidos, uno de ellos (para a=1, b=2, c=3, d=4) con varias soluciones, de las que presenta dos (ejemplos 5 y 6), y el otro sin solución (para a=1, b=2, c=4, d=3) (Ejemplo 7):

			4
		3	
	2		
1			

7	6	5	4
5	4	3	2
3	2	1	0
1	0	-1	-2

Ejemplo 5

22	16	10	4
15	9	3	-3
8	2	-4	-10
1	-5	-11	-17

Ejemplo 6

			3
		4	
	2		
1			

Ejemplo 7

Estos resultados permiten a P.I. demostrar la falsedad de una de las conjeturas principales del trabajo: *si tenemos cuatro valores conocidos de una tabla, situados en diferentes filas y columnas* (es decir, que tomados dos cualesquiera de ellos no están ni en la misma fila ni en la misma columna) *entonces podemos completar la tabla de forma única,* como en el problema inicial. Además, demuestra que las tablas análogas a la de los datos *a, b, c, d*, o no tienen solución o, si la tienen, ésta no es única.

Volviendo a la demostración, vemos que la estudiante vuelve a utilizar, como en el Episodio 4.1, la Generalización de Patrones de Proceso (PPG) (Pedemonte; 2007) que *son requeridos para la construcción de la demostración* de una conjetura que resulta al generalizar un propiedad que se da en ejemplos numéricos. En este caso los *patrones de proceso* son:

- Las diferencias de la p.a. filas o columnas, que juegan un papel muy importante en la demostración, por un lado porque son los valores a determinar y, por otro porque son los que permiten generar elementos en la tabla, de manera gradual y sin contradicciones.
- Las propiedades que relacionan las diferencias de las p.a. filas y las p.a. columnas. Téngase en cuenta que la sucesión de diferencias de las filas (h_i) y la sucesión de las diferencias de las columnas (v_i) forman, respectivamente, nuevas p.a. con la peculiaridad de tener la misma diferencia (h_i-h_{i-1}=v_i-v_{i-1})

Estos patrones son los que permiten a la estudiante construir una demostración deductiva, de carácter algebraico, que termina con la discusión de la naturaleza de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, que puede ser de cualquier tipo excepto compatible determinado. Ella lo ejemplifica con un ejemplo concreto de cada tipo (que aparecen más arriba: ejemplos 5, 6 y 7).

Así mismo ocurre que la *argumentación estructurante* (la que justifica la conjetura basándose en los patrones de proceso) y la prueba (basada en el uso del lenguaje de tipo algebraico): a) tienen la misma estructura lógica, (cadena de razonamientos de tipo deductivo); b) conservan una continuidad en los contenidos (los ejemplos generales genéricos que nos han permitido generalizar y construir la prueba) Todo ello nos permite observar (Pedemonte y Buchbinder; 2011) la *continuidad estructural*.

DISCUSIÓN CONJUNTA DE LOS EPISODIOS. PRIMEROS RESULTADOS

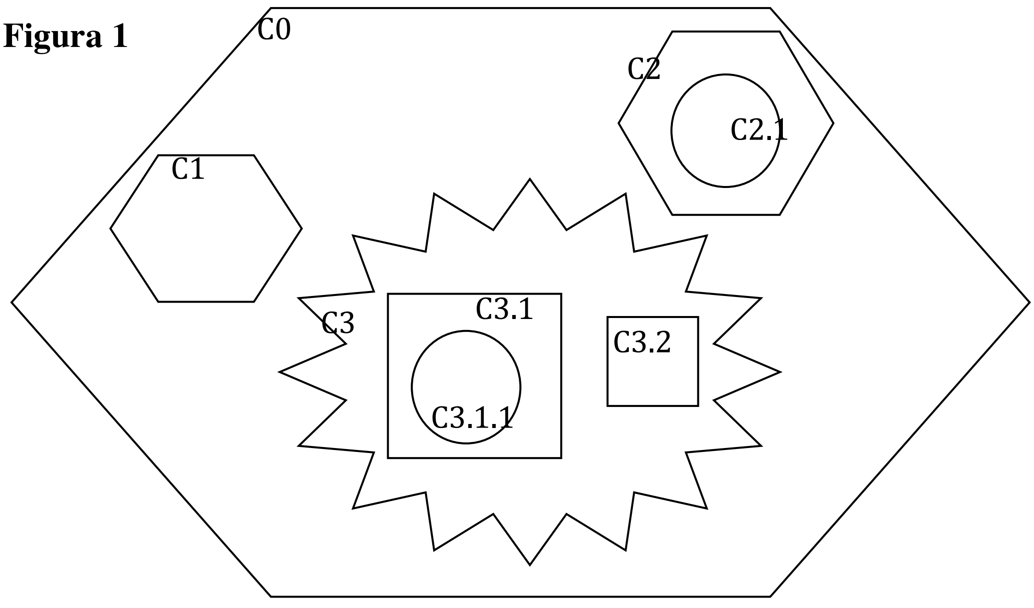
Prosiguiendo el análisis, se presenta a continuación la discusión conjunta de los tres episodios, lo que ha permitido la identificación de algunas ideas nuevas que complementan el marco teórico.

En primer lugar, si se recopilan las conjeturas que han ido apareciendo en los tres episodios, se obtienen las siguientes:

- **C0**: Dados cuatro valores cualesquiera situados en la tabla, siempre es posible completarla de forma única, de manera que sus filas y sus columnas formen p.a.
- **C1**: Dados cuatro valores de la tabla, situados en una misma línea (fila o columna), se puede completar la tabla de forma única.

- **C2**: Dados cuatro valores conocidos de la tabla, por ejemplo los siguientes: $a_{i,j}, a_{i+p,j}, a_{i,j+q}, a_{i+p,j+q,}$ (siendo i, i+p las filas i-ésima e (i+p)-ésima; j, j+q las columnas j-ésima y (j+q)-ésima); en estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única.
- **C2.1**: Dados cuatro valores de la tabla, $a_{i,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j+1,}$ (siendo i la fila i-ésima y j la columna j-ésima); en estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única.
- **C3**: Si conocemos cuatro elementos de la tabla, con la propiedad de que tomados dos cualesquiera de ellos están en filas y columnas diferentes; en estas condiciones, la tabla se puede completar de forma única.
- **C3.1**: Dada la tabla con elementos conocidos:
- $a = a_{i,j},\ b = a_{i+1,j+1},\ c = a_{i+2,j+2},\ d = a_{i+3,j+3}$
- (colocados respectivamente en filas y columnas consecutivas); en estas condiciones, podemos completar la tabla de forma única.
- **C3.1.1**: Con las condiciones de C3.1, si a=1, b=2, c=3, d=4, entonces la tabla se puede completar de más de una manera. Si a=1, b=2, c=4, d=3, entonces la tabla no se puede completar.
- **C3.2**: El problema inicial tiene solución.
- Para visualizar las conexiones existentes entre las conjeturas anteriores, en relación con el problema , se ha construido la figura 1, en la que se sitúan todas ellas. Con el fin de resaltar la dificultad de la conjetura C3, ésta se ha representado por un polígono cóncavo con muchos lados, en forma de estrella con muchas puntas. Las demás conjeturas se han presentado por medio de polígonos regulares convexos, para denotar que son más manejables, o por

Figura 1



circunferencias, para denotar que ya está están verificadas o refutadas.

Como se puede observar en la Figura 1 y en los anteriores enunciados, las conjeturas C1, C2 y C3 son casos particulares de tipo general de la conjetura C0; la conjetura C2.1 es un caso particular de tipo general de C2; las conjeturas C3.1 y C3.2 son casos particulares, de tipo general y concreto respectivamente, de la conjetura C3, y la conjetura C3.1.1 es un caso particular concreto de la C3.1.

Por tanto, se tiene que la falsedad de C1 sirve como contraejemplo (ya que es un caso particular) para demostrar la falsedad de C0, pero la veracidad de C2 lleva a pensar en la posibilidad de que C0 pueda dar lugar a una conjetura cierta modificando alguna de sus condiciones.

Por otra parte, la veracidad de C3.1.1 como contraejemplo (caso particular concreto) lleva a la falsedad de C3.1 y la falsedad de esta última sirve de contraejemplo, como caso particular general, para demostrar la falsedad de C3.

Se tiene que C3 es falsa. A su vez, la existencia de solución en el problema inicial es equivalente a que C3.2 es verdadera. En estas condiciones, a partir de C3.2 se podría intentar construir una nueva conjetura C que verificara $C \Rightarrow C3.2$, de forma que, utilizando el razonamiento abductivo (Peirce, 1960), modelado en forma de *razonamiento plausible* y denominado *patrón fundamental inductivo* (Polya, 1954 y 1966 (traducción española)) en la forma:

$$C \Rightarrow C3.2$$

$C3.2$ es verdadera

C es más digna de crédito

Por tanto, el análisis efectuado con las conjeturas confirma la importancia de los ejemplos en el proceso de elaboración de conjeturas y en el de construcción de la prueba (primera pregunta de investigación).

En segundo lugar, se ha podido comprobar que los niveles de concreción o de generalidad de un ejemplo pueden jugar un importante papel a la hora de plantear argumentos válidos y evidencias completas en la construcción de conjeturas y en su demostración. Esos niveles de concreción o de generalidad vienen dados y están condicionados por el contexto y el criterio elegido a la hora de plantear el ejemplo. En el caso estudiado, permite asegurar la existencia de ejemplos genéricos no contemplados hasta ahora. Se propone una categorización de los ejemplos, intentando englobar a todos ellos:

$$Ejemplos\ o\ Casos\ particulares \begin{cases} Concretos \begin{cases} No\ genéricos\ (ECNG) \\ \\ Genéricos\ (ECG) \end{cases} \\ \\ Generales \begin{cases} No\ genéricos\ (EGNG) \\ \\ Genéricos\ (EGG) \end{cases} \end{cases}$$

Una vez fijado el contexto o contextos en los que se van a construir los ejemplos y el criterio/s o aspecto/s que vamos a valorar, se puede señalar que la diferencia entre concretos y generales radica en que los primeros vienen dados mediante valores concretos del aspecto/s a valorar (valores o coeficientes numéricos, etc.) y los segundos por valores abstractos de alguno de los criterios que se valoran (con valores literales); cada ejemplo general representa a una familia de ejemplos concretos que obtenemos al dar valores a los elementos del ejemplo general. Por otra parte, recordando que la diferencia entre genéricos y no genéricos radica en que los primeros son portadores de una *idea abstracta*, tienen una *estructura subyacente* que se puede observar si se dejan a un lado los aspectos concretos del ejemplo. Los no genéricos no contienen ninguna estructura subyacente o no se observa.

En el problema inicial que origina el trabajo de la estudiante, se pueden considerar al menos dos criterios a la hora de construir ejemplos: *valores de los elementos de la tabla* y *posiciones de los elementos en la tabla*. Se tienen varias posibilidades a la hora de construir ejemplos:

4	2		
1	5		

Ejemplo A

1			
			4
	2		
		3	

Ejemplo B

c	d		
a	b		

Ejemplo C

a			
			d
	b		
		c	

Ejemplo D

En la siguiente tabla se clasifican estos ejemplos, en función del criterio o el contexto elegido:

CRITERIO O CONTEXTO	EJEMPLO A	EJEMPLO B	EJEMPLO C	EJEMPLO D
POSICIONES DE LOS ELEMENTOS EN LA TABLA.	ECG	ECNG	ECG	ECNG
VALORES DE LOS ELEMENTOS DE LA TABLA	ECG	ECNG	EGG	EGNG

Las anteriores ideas, sobre la naturaleza de los ejemplos, completan el marco teórico descrito inicialmente con la idea de *ejemplo genérico general*, en un contexto en el que haya varios criterios de clasificación, en el que los ejemplos pueden tener un carácter ambivalente. También proporcionan una posible respuesta a la primera pregunta de investigación profundizando en la importancia del papel de los ejemplos en la construcción de la prueba.

PRINCIPIOS DE INTERVENCIÓN Y CONCLUSIONES

Del análisis anterior se pueden extraer varias conclusiones que constituyen principios de intervención para el profesor en el trabajo con ejemplos y casos particulares. Estos también forman parte de la respuesta a las preguntas de investigación planteadas.

En primer lugar, el profesor, a la hora de plantearse procesos de demostración a partir de conjeturas propiciadas por ejemplos, debe tener en cuenta algunas reglas de lógica demostrativa:

1. Todo ejemplo (*concreto o general*) puede ser usado como un contraejemplo para demostrar la falsedad de una conjetura que implique ese caso particular. Téngase en cuenta, como aparece en Stylianides y Ball (2008), que esto equivale a la utilización de la *regla lógica de contraposición*.

2. Un *ejemplo concreto* puede ser usado como contraejemplo para demostrar la falsedad de un *ejemplo general*.

3. En el trabajo con conjeturas se debe tener en cuenta, cuando aparezca, el siguiente patrón de razonamiento demostrativo que se presenta a continuación:

Sean $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, \dots, \mathbf{C_{n-1}}$ conjeturas en las que cada una (excepto la primera) es un caso particular de la anterior (véase la Figura 2 en la que se representan las conjeturas por polígonos cóncavos, hasta llegar a un polígono convexo, que representa una conjetura más manejable y, finalmente una circunferencia, que representan la conjetura que se ha podido demostrar o refutar). Es decir, $\mathbf{C_i}$ es un caso particular de $\mathbf{C_{i-1}}$, para i=n-1, n-2, …, 2; o dicho de otra manera, $C_i \Rightarrow C_{i+1}, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$. En estas condiciones, si $\mathbf{C_n}$ es un contraejemplo (caso particular general o concreto) que demuestra la falsedad de $\mathbf{C_{n-1}}$, entonces también son falsas todas las conjeturas $\mathbf{C_i}$, i=1, 2, …, n-1.

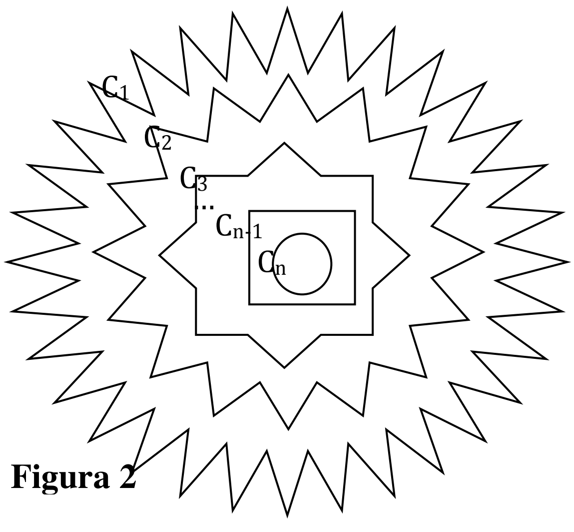


Figura 2

El silogismo anterior es un razonamiento lógico (ya conocido) que, usado en un contexto de ejemplos, adquiere mucho valor, porque sirve para demostrar resultados de existencia o para refutar, si los ejemplos los usamos como contraejemplos. Pero es posible porque estos ejemplos en un contexto son concretos (y sirven para demostrar, por refutación, como contraejemplos en razonamientos empíricos) y en otro contexto son generales (y sirven para demostrar dentro de razonamientos deductivos).

- 4. Así mismo, se ha identificado un *patrón de razonamiento plausible* (Polya, 1966, p. 281-341), que constituye una variante del presentado por Polya (1966) y que podemos enunciar de la siguiente manera:
- Sean $C, C_1, C_2, \dots, C_n$ conjeturas, de tal forma que se cumple que $C \Rightarrow C_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Supongamos que C_1 es falsa y que $C_2, C_3, \dots, C_n$ son verdaderas. Construimos otra conjetura D, modificando las condiciones de C, acercándolas a las de alguna de las C_i, $i = 2, \dots, n$; de forma que $D \Rightarrow C_i, \forall i = 2, 3, \dots, n$. Con estas condiciones, se cumple que C es falsa y D es *un poco (o mucho)*

más digna de crédito, en función de las semejanzas (o diferencias) que existan entre $C_2, C_3, \ldots, C_n$[46]. Este razonamiento abductivo (Peirce, 1960) lo podemos modelar de manera análoga a como hace Polya (1954, 1966(traducción española)) en sus patrones de razonamiento plausible:

$$C \Rightarrow C_i \,, \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

C_1 es falsa

$C_i \,, \forall i = 2, 3, \ldots, n$ son verdaderas y semejantes (ó diferentes) entre sí

$$D \Rightarrow C_i \,, \forall i = 2, 3, \ldots, n$$

C es falsa y *D* es más (ó mucho más) digna de crédito

- Por tanto, el análisis realizado esto ha permitido identificar una variante de uno de los patrones de razonamiento plausible de Polya, lo que permite completar el marco teórico, obteniendo una respuesta a la segunda pregunta de investigación planteada: el análisis de las producciones de los estudiantes produce interacciones con los conocimientos pedagógicos de contenido del profesor, en este caso sobre el papel de los ejemplos y contraejemplos en la construcción de un prueba a partir de la conjeturas formuladas (primera y segunda preguntas de investigación planteadas al inicio del documento).
- Por otra parte, en el proceso de demostración de conjeturas se ha observado que:
- 5. Los ejemplos pueden ser concretos o generales, *genéricos* o no genéricos, en función del contexto o del criterio con el que los construyamos. Un ejemplo puede ser concreto en un contexto y general en otro.
- 6. El análisis refuerza las ideas de Masón y Pimm (1984), Balacheff (1988) y Harel (2001): los *ejemplos genéricos* son eficaces para la *generalización de patrones de proceso* y pueden contribuir a que las *argumentaciones constructiva* y *estructurante* tengan la misma estructura y utilicen los mismos contenidos que la prueba, lo que permite observar *unidad cognoscitiva* y *continuidad estructural* en el proceso de construcción y justificación de la conjetura.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez les élevès de College*. Tesis Doctoral. Universidad Joseph Fourier. Grenoble.

[46] Este patrón, por analogía con el de Polya (1966), pág. 285, añade una cualificación al *patrón fundamental inductivo.*

Ball, D. B; Hoover Thames M. H.; Phelps, G. (2008) Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education* Vol. 59, nº 5, pág. 389-407.

Bocyl, (2007). DECRETO 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. Publicado con fecha 23-05-07.

Bocyl, (2008). DECRETO 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León. Publicado con fecha 11-06-08.

Brown, J.; Edwards, I.; Galbraith, P.; Stillman, G. (2007). A Framework for Success in Implementing Mathematical Modelling in the Secondary Classroom. En J. Watson & K. Beswick (Edit) *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia,* p. 688-697. MERGA, Inc.

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. En A. Orton y G. Wain (Eds.), *Issues in teaching mathematics* (pp. 150-173). Cassell, Londres.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. En S. Campbell & R. Zazkis (Eds.): *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 185–212). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Mason, J., Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. En *Educational Studies in Mathematics*, nº 15, pág. 227–289.

Mason, J. (2002). Minding Your Qs and Rs: effective questioning and responding in the mathematics classroom. En L. Haggerty (Ed.) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, RoutledgeFalmer, London, pág. 248-258.

Mason, J. (2003). Structure of attention in the learning of mathematics. En J. Novotná (Ed.) *Proceedings, International Symposium on Elementary Mathematics Teaching*, pág. 9-16. Prague: Charles University.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004). *Fundamental constructs in mathematics education*. London: Routledge Falmer.

McKenney, S.; Nieveen, N. y Van den Akker,J. (2006). Design research from a curriculum perspective. En: Van den Akker, J.; Gravemeijer, K; McKenney, S.; Nieveen, N. (Eds). *Educational design research*. Pág 62-90 London: Routledge.

Pedemonte, B (2007). Structural relationships between argumentation and proof in solving open problems in algebra. En Pitta-Pantazi, D & Philippou, G (Edit) *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)*. Páginas 643-652. Larnaca, Cyprus.

Pedemonte, B., Buchbinder, O. (2011). Examining the role of examples in proving processes through a cognitive lens: the case of triangular numbers. En *ZDM Mathematics Education* nº 43, pág 257–267.

Peirce C. S. (1960): *Collected papers* Cambridge, M A: Harvard University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Edit. University Press, New Jersey. Existe traducción al castellano en 1966: *Matemáticas y razonamiento plausible*. Edit. Tecnos, Madrid.

Shriki, A. (2008). Assisting teachers to develop their students'creativity in mathematics– implementing the "what-if-not?" strategy. En Saul, M. E., Applebaum, M. (Coord). *Simposium 2: Mathematical creativity and giftedness in secondary school*) *CMEG-5. Proceedings of The 5º International Conference on Creativity in Math and the Education of Gifted students*. Pág. 408-410. Haifa,Israel.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

Stylianides, A., y Ball, D.L., (2008). Studying the mathematical knowledge for teaching: the case of teachers' knowledge of reasoning and proof . En: *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Diego, CA.

Van den Akker, J. (1999). Principles and Methods of Development Research. En Van den Akker, J.; Branch, R.M.; Gustafson, K.; Nieveen, N.; y Plom, T. (Eds): *Design approaches antools in education and training*. Pag.1-14. Boston: Kluwer Academic.

Van den Akker, J.; Gravemeijer, K.; McKenney, S.; Nieveen, N. (Eds). (2006). *Educational design research*. London: Routledge.

Wademan, M. (2005). Utilizing Development Research to Guide People Capability Maturity Model Adoption considerations. Tesis Doctoral, Universidad de Syracuse (New York, USA).

Yin, R.K. (2003). *Case study research: design and methods*. Newbury Par (CA, USA): Sage–Applied Social Research Methods Series, volume 5.

DISCUTIENDO EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE INFANTIL COMO GÉNESIS DE APRENDIZAJES FUTUROS

C. Miguel Ribeiro, Centro de Investigación sobre el Espacio y las Organizaciones, Universidad del Algarve (Portugal) y UNESP (Rio Claro, Brasil)

M. Cinta Muñoz-Catalán, Universidad de Sevilla (España),

M. Mar Liñán, Universidad Cardenal Spínola CEU Sevilla (España)

El conocimiento del profesor incide directamente en los aprendizajes de los alumnos y tiene una influencia decisiva en el diseño de espacios de trabajo matemático idóneos. En este trabajo, presentamos una propuesta de contenido del conocimiento del profesor de educación infantil para el caso de la resta, basándonos en el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Nos centramos en los subdominios del Conocimiento Matemático, destacando especialmente el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), pues un conocimiento bien cohesionado del profesor ayudará a crear bases sólidas para aprendizajes futuros en los alumnos. Finalizamos con algunas reflexiones y consideraciones para la formación inicial y continua del profesor.

MOTIVACIÓN Y JUSTIFICACIÓN

La investigación actual está poniendo de relieve lo que ya percibíamos como formadores de profesores[47]: la importancia de que estos tengan un profundo conocimiento de las matemáticas que enseñan para favorecer un buen aprendizaje matemático de sus estudiantes (e.g., Hill, Rowan y Ball, 2005; Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán y Climent, 2012; Ma, 1999). Este conocimiento profundo será el sustento del *medio epistemológico* (Coutat y Richard, 2011), es decir, del plano epistemológico del espacio de trabajo matemático cuando se pone el acento en el aprendizaje del alumno Pero ¿qué entendemos por un conocimiento profundo de las matemáticas? Debemos partir de la consideración de la especificidad del conocimiento matemático del profesor frente al de otros profesionales que utilizan la matemática como instrumento de trabajo. Además, para el caso del profesor de infantil[48], coincidimos con Jakobsen, Thames y Ribeiro (2013) en que su

---

[47] Hasta ahora, en España se utilizaba el término de maestro para referirse al formador de las etapas de infantil y primaria, y el de profesor, para los niveles de secundaria y universitario. Hemos decidido optar por el segundo término puesto que actualmente la formación de todos estos profesionales posee la misma duración.

[48] En España, la etapa de educación infantil está organizada en dos ciclos; el primer ciclo va dirigido a alumnos entre 0 y 3 años y, el segundo ciclo, para alumnos entre 3 y 6 años. Sólo los profesores del segundo ciclo poseen una formación universitaria. En Portugal se consideran también dos etapas, la primera de 6 meses a 3 años y la segunda de 3 a 6 años, pero la formación inicial no hace distinción en estas dos etapas (dependiendo de la Institución de formación considerada, puede

conocimiento es diferente al del profesor que enseña en primaria o secundaria y que dicho conocimiento para enseñar Números y Operaciones es distinto del necesario para enseñar Geometría o Magnitudes.

Thames y Ball (2010) defienden que los profesores requieren un buen conocimiento matemático, pero las definiciones actuales sobre cómo ha de ser este conocimiento resultan imprecisas. Se hace imprescindible, por tanto, discutir cuáles son sus características definitorias y, por otro lado, sobre las relaciones entre el conocimiento necesario y las oportunidades de aprendizaje (Hiebert y Grouws, 2007) que permiten promover.

Como hemos indicado anteriormente, admitimos la especificidad del conocimiento matemático del profesor para el ejercicio de la actividad docente (Ball, Thames y Phelps, 2008) y, en ese sentido, asumimos la conceptualización del *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), que concibe como especializado el conocimiento completo del profesor y no solo una de sus parcelas. Rowland (2008) sostiene que el conocimiento del profesor de primaria es más especializado que el de secundaria y, atendiendo a nuestra experiencia como formadores de profesores de infantil y primaria, nos atrevemos a extender la misma consideración para el conocimiento del profesor de infantil respecto del de primaria. Asumiendo esto, coincidimos con Chamorro (2005) en que a pesar de que el repertorio matemático en educación infantil sea limitado, se pueden identificar errores y obstáculos didácticos que son muy persistentes y repercuten en la adquisición de conocimientos en etapas posteriores. A la necesidad de erradicarlos se une también la distancia que en esta etapa existe entre el conocimiento matemático consciente, formal y riguroso que debe tener el profesor y el envoltorio lúdico con el que se deben revestir las actividades de enseñanza según prescripciones curriculares, sin que por ello se diluyan las raíces matemáticas del contenido que se está trabajando. Asimismo, puesto que se trata de una etapa educativa generadora de lenguaje, el profesor de infantil debe prestar especial atención a aspectos relacionados con la comunicación matemática del aula, velando por respetar la validez de los contenidos matemáticos mediante un lenguaje matemático adecuado.

Dado que infantil es la primera etapa educativa formal, y pretendiendo que los niños se conviertan en ciudadanos alfabetizados matemáticamente, será fundamental establecer las bases que les permitan establecer conexiones con contenidos matemáticos futuros (e.g., conceptos, definiciones, demostraciones). Es aquí, de nuevo, esencial el papel del profesor de matemáticas, de su conocimiento especializado y de su capacidad para ponerlo en juego, respetando estas bases, en una etapa tan temprana.

Uno de los temas en que los alumnos presentan serias dificultades es la resta (Kamii, Lewis y Kirkland, 2001). El cuestionamiento de cuál es el conocimiento que el profesor ha de poseer en relación con la resta es relevante también en infantil

---

que incluyan alguna asignatura más dirigida hacia la primera etapa, aunque no es lo más común).

porque es en esta etapa donde se deberán sentar las bases para iniciar el desarrollo del sentido numérico y de operación (Slavit, 1999). En muchas ocasiones, el origen de las dificultades que presentan los alumnos se encuentra en las propias dificultades de los (futuros) profesores en el tema (e.g., Martins y Ribeiro, 2013). Así, considerando que la etapa de infantil contribuye a establecer las bases matemáticas de los alumnos, los profesores de infantil deberán tener un conocimiento bien cohesionado, que promueva una cimentación matemáticamente válida.

Aunque comienzan a aparecer investigaciones sobre el contenido del conocimiento matemático del profesor para la enseñanza, en nuestra revisión no hemos encontrado ninguna que se centre específicamente en el conocimiento de profesores de infantil, y en particular, en la comprensión del sentido de la operación resta. Somos conscientes de la dificultad de delimitar lo que debe saber un profesor de infantil, pero presentamos un primer acercamiento a su caracterización, particularizándolo en el caso de la resta. Partiendo de la consideración de la especificidad del conocimiento matemático del profesor de infantil, discutimos y justificamos aspectos de su *Conocimiento Matemático Especializado para la Enseñanza* deseable, destacando el *Conocimiento de la Estructura Matemática* (KSM, Carrillo et al, 2013) como expresión de las conexiones entre elementos del *Conocimiento de los Temas* (KoT, Carrillo et al., op. cit.), y el *Conocimiento de las Prácticas Matemáticas* (KPM, Carrillo et al. Op.cit.) sobre todo en lo que al lenguaje matemático se refiere. Esta reflexión se realiza tomando como perspectiva de futuro la comprensión amplia y completa que los alumnos deben poseer sobre los algoritmos, que les lleve a comprender el significado de los pasos asociados y de las propiedades matemáticas que los sustentan, generando las bases para la articulación del plano epistemológico de los espacios de trabajo matemático de los alumnos.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El conocimiento de las matemáticas escolares de un profesor competente ha de ser lo suficientemente amplio y profundo para que le permita conceptualizar el contenido que imparte, representarlo de diversas formas y conocer y seleccionar sus conexiones con otros contenidos del mismo nivel, así como con aquellos que suponen una complejización o simplificación del mismo (e.g., Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Ese conocimiento les permitirá organizar correctamente los contenidos, estructurándolo a través de las grandes ideas matemáticas (Clements, 2004) y posibilitando un aprendizaje significativo en los alumnos que les permita seguir construyéndolo en etapas posteriores sobre una base sólida.

Se torna por tanto evidente la gran influencia que tiene el conocimiento matemático de un profesor de infantil, tanto por lo que en el aprendizaje de sus alumnos puede proyectar para el éxito o no en etapas posteriores, como por los posibles obstáculos que se pueden generar en este periodo y que pueden marcar los siguientes (Chamorro, 2005). Esto nos plantea la necesidad de preguntarnos cuál ha de ser ese conocimiento matemático, aquello que le va a permitir decidir sobre los mejores abordajes y espacios de trabajo idóneos que potencien un conocimiento significativo generador de conexiones entre conocimientos para aprendizajes futuros.

Teniendo en cuenta la argumentación de Fernández y Figueiras (2010) sobre la influencia del conocimiento del profesor de matemáticas en la transición del estudiante de primaria a secundaria, consideramos que también es válido aplicarla al conocimiento del profesor de infantil para favorecer una transición suave y fructífera del alumno a la siguiente etapa.

Para reflexionar sobre el contenido del conocimiento del profesor, consideramos el modelo del MTSK, desarrollado por el grupo de investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva (SIDM). Dicho modelo conserva la división en dos grandes grupos de conocimiento de Shulman (1986): desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje (*Pedagogical Content Knowledge –PCK)* y como disciplina científica en un contexto escolar (*Mathematical Knowledge –MK)*, foco de atención en este trabajo. El MTSK surge como respuesta a las dificultades que emergen de la conceptualización del *Mathematical Knowledge for Teaching* (Ball et al., 2008) y toma las potencialidades de este y de otros modelos que caracterizan el conocimiento del profesor de matemáticas (e.g., Carrillo *et al*., 2013). Así, el MTSK extrae el carácter de especializado de uno de los subdominios para que defina la naturaleza del conocimiento de manera integral, y subdivide los dos dominios mencionados en tres subdominios cada uno, ubicando en el centro del modelo las concepciones sobre la matemática y sobre la enseñanza y el aprendizaje de la misma.

Anteriormente hemos justificado que nuestro foco es el estudio, de naturaleza teórica, del contenido matemático deseable sobre la resta para el profesor de infantil. En particular centramos la propuesta de dicho conocimiento en el dominio del *Mathematical Knowledge*, constituido por los siguientes tres subdominios (Montes, Aguilar, Carrillo, Muñoz-Catalán, 2013):

El Conocimiento de los Temas (*KoT),* supone conocer la definición y fundamentación de los contenidos matemáticos, sus propiedades y procedimientos asociados, los ejemplos más potentes, las diferentes formas de representación, los usos y aplicaciones del contenido o los contextos que lo genera, así como los diferentes significados que se pueden atribuir a un contenido. . Considerando el contexto de la resta para profesores de infantil, podríamos incluir el conocimiento de conceptos pre-numéricos, del sistema de numeración decimal, de la construcción del número natural, de las propiedades de la resta en los números naturales, entre otros (cf. Figura 1).

En el Conocimiento de la Práctica Matemática (*KPM),* se considera el conocimiento de las formas de hacer, proceder y pensar en matemáticas. Está relacionado con conocer diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema o la sintaxis matemática, incluyendo el uso de un lenguaje apropiado. Como la etapa de infantil se considera generadora de lenguaje, este se constituye en un elemento clave de este subdominio para el caso de este profesor. En el contexto de la resta, debe evitar reforzar en exceso la imposibilidad de sustraer al minuendo una cantidad de mayor valor (aunque esto sea también la base del algoritmo más comúnmente utilizado), pues aunque es matemáticamente válido en el contexto de los números naturales, podría repercutir en las formas de pensar y entender las matemáticas futuras de los alumnos, generando obstáculos de origen didáctico.

El Conocimiento de la Estructura Matemática (*KSM),* se refiere al conocimiento de cómo se conecta la matemática a un nivel interno, que es clave para entender cómo conoce y construye un profesor las matemáticas. Fernández y Figueiras (2010) afirman que un profesor de secundaria debe conocer lo que sus alumnos saben y cómo lo han sabido, mientras que un profesor de primaria debe conocer, además, las dificultades a las que se enfrentarán en el futuro para construir una base sobre la que apoyar el nuevo conocimiento. Esta visión prospectiva debe caracterizar al profesor de infantil, quien ha de dominar la base conceptual y procedimental sobre la que se apoyará todo el edificio de conocimiento que los alumnos construirán a lo largo de toda su escolaridad. En esta armazón, los autores distinguen tres tipos de conexiones: *intraconceptuales*, entre diferentes ideas asociadas con un concepto particular; *interconceptuales*, entre diferentes conceptos matemáticos; y *temporales*, entre conocimientos previos y futuros. En MTSK, las conexiones *intraconceptuales* se incluyen en el KoT, y las *interconceptuales* y *temporales* en el KSM.

Las conexiones interconceptuales, denominadas de *contenidos transversales*, consideran contenidos con una cualidad común que los relaciona. En las temporales, se distinguen las conexiones de *complejización*, que relacionan los contenidos enseñados con contenidos posteriores, y las conexiones de *simplificación*, que los relacionan con contenidos anteriores. Podríamos decir que cualquier profesor, pero en especial, el de infantil, cuando diseña su enseñanza debería activar su visión de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental (simplificación), mientras que, cuando está implementándola, predominaría justo la opuesta, considerando el papel potenciador de los contenidos para aprendizajes matemáticos futuros. Por tanto, estas relaciones no tienen que ver con su ubicación en cursos posteriores o anteriores, sino con la secuenciación de conocimientos que genera tales conexiones (Montes et al., 2013). Consideremos, por ejemplo, el dominio de la estructura de los cuerpos conmutativos de los números racionales y reales; mientras el profesor de secundaria planteará situaciones complejas en estos, el profesor de infantil podrá utilizar estrategias para comenzar a explorar los números naturales, enteros y racionales (e.g., plantas del ascensor, peso de la fruta) para sustentar la creación de la estructura de la matemática en los alumnos. Considerando el contexto de la resta en la educación infantil, podríamos incluir las conexiones transversales entre las relaciones biyectivas, de orden total, y la idea de conjunto, implícitas en la acción de contar, que está a su vez relacionada con el propio concepto de resta y la interpretación de la misma dependiendo del conjunto de números en los que se realice (e.g., naturales, enteros, reales).

Como Fernández, Figueiras, Deulofeu y Martínez (2011), consideramos que las conexiones deben tratarse desde el punto de vista de la educación matemática continua y, desde esta perspectiva, la educación infantil será el pilar que sustentará dicha continuidad en la formación matemática del alumno. Además, los contenidos en infantil adquieren su entidad matemática cuando se conciben desde una perspectiva avanzada, por lo que dichas conexiones deben poseer un lugar destacado en el conocimiento del profesor.

Consideramos, finalmente, que el espacio de trabajo (ETM) del profesor evocaría todo el MTSK por su conformación como núcleo de conocimiento profesional que solo tiene sentido para el profesor de matemáticas; en particular, nuestro interés se centra en el contenido matemático desde la perspectiva del aprendizaje del alumno como veremos a continuación, lo que se puede considerar como un *medio epsitemológico* dentro del ETM (Coutat y Richard, 2011). Estamos en una primera aproximación, así que será necesario, en trabajos futuros, explorar en profundidad el papel de las dimensiones del MTSK en la articulación de los dos planos de los ETM.

APROXIMACIÓN AL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESPECIALIZADO PARA LA ENSEÑANZA DE LA RESTA EN EDUCACIÓN INFANTIL

Las operaciones con números, tanto para modelar situaciones de la vida real, como para resolver problemas, constituyen una de las grandes ideas que articulan el contenido matemático de Educación Infantil (Clements, 2004). Desde esta perspectiva, la operación es considerada como un elemento matemático más amplio que las operaciones habituales de suma, resta, multiplicación y división y los algoritmos “tradicionales” que las resuelven. También supone asumir que existe un conjunto de conocimientos matemáticos intrínsecamente conectados con aquellos, que se convierten en el foco de atención en la etapa de la educación infantil y que permite a los alumnos construir unas bases adecuadas para el aprendizaje posterior en primaria.

Para los objetivos de este trabajo, centramos esta reflexión en la resta para el conjunto de los números naturales. En particular, nos preguntamos qué conceptos, procedimientos y elementos matemáticos están relacionados con esta operación y, por tanto, qué *Conocimiento de la Estructura Matemática* de la resta debe poseer un profesor de educación infantil. Con el fin de presentar un retrato cohesionado de los contenidos matemáticos que están relacionados con la resta, utilizamos la noción de “*package of kowledge*” (PK) de Ma (1999) (Figura 1). De la multitud de conexiones posibles, nos interesan aquellas que revelan la génesis epistemológica en el aprendiz, esto es, el papel generativo que cada contenido juega en la construcción de los demás en situación de aprendizaje y que puede, por tanto, forjar el plano epistemológico de los posibles ETM. En la propuesta que presentamos y que esperamos seguir refinando, hemos seleccionado los contenidos conceptuales y procedimentales que consideramos poseen un mayor peso en la comprensión de la resta.

La Figura 1 supone una primera respuesta a la pregunta qué significa conocer la resta para su enseñanza como profesor de Infantil desde la dimensión del MK. Los contenidos de ese conocimiento están en rectángulos y constituyen elementos del KoT y del KPM. Las flechas destacadas en negrita señalan la conexión con el centro de la representación, mientras que los números mostrados nos servirán para referirnos a las distintas conexiones en el desarrollo de nuestra discusión posterior. Estas conexiones entre contenidos están representadas mediante flechas bidireccionales porque, desde la perspectiva del aprendizaje, unos contenidos se cimentan en otros; los conceptos más básicos sustentan el aprendizaje de los más avanzados y a la vez éstos refuerzan a aquellos (Ma, 1999). Partiendo del PK que los profesores chinos propusieron sobre la resta con llevadas (Ma, 1999), hemos destacado en el centro de la figura dos aspectos de la misma que poseen implicaciones particulares para su aprendizaje: la resta con llevada y la resta sin llevada. Además, el objetivo de trabajar la resta debe ir en sintonía con desarrollar en los alumnos el sentido numérico (e.g., Castro y Rodrigues, 2008), por lo que consideramos que es un contenido que impregna a todo el conocimiento del profesor.

Conocer la resta significa considerarla como una operación matemática ligada tanto a la suma, pues ambas son operaciones inversas, como a la división, ya que esta puede concebirse como sustracción reiterada (1). Supone también conocer el conjunto de propiedades que la sustentan (2) con el fin de ser capaces de identificar el alcance de esa operación y cómo es posible actuar sobre diferentes cantidades en situación de sustracción (retirar, completar y comparar) (3). Consideramos que, aunque no conozcan de manera formal las propiedades de esta operación en otros conjuntos de números, como los enteros y los reales, se debe prestar atención a cuáles y cómo se ven modificadas. Así, cuando se extiende el trabajo a los números enteros es posible efectuar restas en las que el minuendo es menor que el sustraendo. Finalmente, comprender la resta implica también conocer, por un lado, los algoritmos informales y su papel en el desarrollo del sentido numérico, así como los algoritmos formales y su justificación matemática (4).

Estos algoritmos formales e informales están relacionados tanto con las propiedades de la resta (5) como con el Sistema de Numeración Decimal (SND) (6) (Aharoni, 2008). En particular, la realización de la resta sin llevadas supone ver el número como una entidad flexible y se apoya en el conocimiento de hechos numéricos y el manejo de diversas relaciones numéricas (7) y en las propiedades de la resta y de la suma. La resta con llevadas requiere necesariamente del conocimiento del SND, principalmente de los dos principios que lo definen: el valor de posición y el agrupamiento en base 10 como criterio de relación y formación de unidades de cada orden – aspecto en que se basan algunas de las dificultades posteriores incluso de futuros profesores (e.g., Martins y Ribeiro, 2013). Estas dos propiedades están en la base de dos algoritmos formales de la resta, descomposición y compensación. Además, este último también se apoya en la propiedad de la resta según la cual la suma de una misma cantidad al minuendo y al sustraendo no altera el resultado.

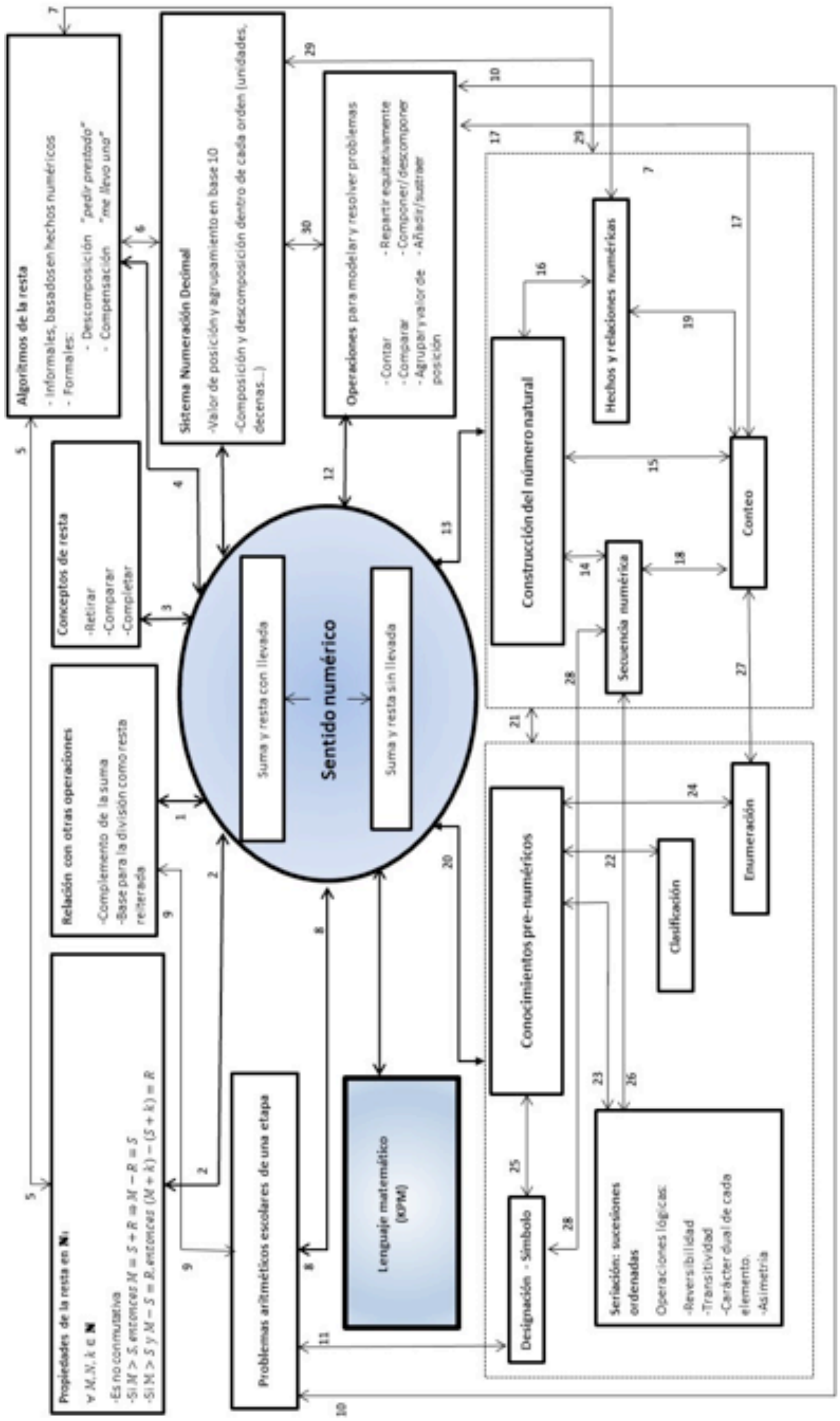


Figura 1: Propuesta de contenido del *Conocimiento de la Estructura Matemática* (*KSM*) de la resta para el profesor de Educación Infantil

Otro elemento de este conocimiento especializado sobre la resta son los tipos de problemas aritméticos escolares de una etapa (8). Desde la investigación, distintas asociaciones de profesores (NAEYC y NCTM, 2013) señalan la importancia de articular la enseñanza y aprendizaje de la aritmética en los primeros niveles relacionándola con la resolución de problemas aritméticos. Los tipos de problemas atendiendo a un criterio semántico (Puig y Cerdá, 1991) ponen de relieve las relaciones entre la suma y la resta (9), dado que ambas operaciones están relacionadas con los problemas de estructura aditiva, y su relación con la división, especialmente con los problemas de división cuotitiva, resolubles mediante restas sucesivas. El problema deberá ser concebido como el medio que permite desarrollar una comprensión significativa del concepto de operación (10) y del significado de los símbolos (11).

Como ya habíamos dicho, la consideración de la operación de la resta desde la etapa de la educación infantil significa considerar el término de operación de una manera amplia. Así, en sintonía con Clements (2004), identificamos seis operaciones que ayudan a cimentar las bases para poder realizar significativamente aquellas cuatro, y la resta en particular: contar, comparar y ordenar, agrupar y valor de posición, repartir equitativamente, componer y descomponer y añadir/sustraer (12). Estas operaciones están, a su vez, en el sustrato del SND (30).

Las operaciones están íntimamente ligadas a la cantidad y a su representación numérica y es en infantil donde se deberá producir la génesis de la construcción del número natural (13). El profesor de infantil debe identificar tres elementos matemáticos que están estructuralmente en el núcleo de la construcción del número natural desde la perspectiva del aprendizaje (representado mediante el rectángulo con línea discontinua): la secuencia numérica (14), el conteo (15) y los hechos numéricos y relaciones numéricas (16), teniendo cada uno de ellos entidad como objeto de enseñanza y aprendizaje (e.g., Chamorro, 2005). Por ejemplo, Jung (2011) presenta una experiencia de una profesora de infantil que pretende desarrollar en sus alumnos la comprensión del número y de la cantidad a partir de tres tipos de relaciones numéricas: subitización, relaciones de ‘más-menos’ y de ‘parte-todo’, superando las destrezas de conteo. Por otro lado, la acción de contar es una operación que, ligada a la gran idea matemática de que contar sirve para obtener el cardinal de un conjunto, nutre a las otra cinco operaciones (Clements, 2004), de ahí la conexión (17).

Por otro lado, *secuencia*, *conteo* y *hechos numéricos y relaciones numéricas* están conectados entre sí, pues contar requiere del dominio de la secuencia numérica (18) y el dominio del conteo es un requisito necesario para desarrollar una visión del número como una entidad flexible, basada en el manejo de hechos numéricos y de relaciones numéricas (19).

En relación con la estructura matemática de la resta, el profesor de infantil debe saber cuáles son los conocimientos de naturaleza prenumérica (20) sobre los que se asienta la construcción del número natural (21). Chamorro (2005) destaca cuatro contenidos prenuméricos(que presentamos agrupados en un rectángulo con borde discontinuo) con fines analíticos: la clasificación (22), la seriación (23), la enumeración (24) y la designación (25). La seriación y las operaciones lógicas subyacentes (reversibilidad, transitividad, carácter dual de cada elemento y asimetría) caracterizan matemáticamente a la secuencia numérica (26). La enumeración supone establecer una relación de orden total en un conjunto finito dado y los pasos necesarios para realizarlo coinciden con los efectuados en el conteo (27). Desde los conocimientos pre-numéricos (21) se construiría el número natural para, una vez completada la concatenación del aprendizaje de la secuencia numérica (14), el conteo (15) y los hechos y relaciones numéricas (19), pasar a la construcción del SND (29).

Adquirir el concepto de número implica también la utilización de la función simbólica, pues supone asumir una relación arbitraria de un símbolo con un constructo. El profesor ha de conocer la naturaleza simbólica de los números, el papel que juega en su construcción, así como que la designación de algoritmos recursivos está directamente ligada a la construcción de la secuencia numérica (28).

La actividad de simbolización incluye el lenguaje. Dado que la etapa de infantil es generadora del mismo, el profesor ha de conocer el lenguaje matemático preciso y apropiado; correcto, aunque no necesariamente completo, que posteriormente interpretará para poder ser utilizado en el aula (KPM). Ejemplos de lenguaje no completo sería afirmar que no se puede restar un número mayor a otro menor, o que al dividir siempre obtengo una cifra menor, resultados válidos en el contexto de los números naturales pero no válidos al ampliar la noción de número, cuestión que el formador debe tener presente para no provocar errores y obstáculos posteriores de origen didáctico (Chamorro, 2005). Un ejemplo de lenguaje incorrecto aparece cuando se consideran los dígitos del minuendo como *amigos* que se *prestan* lo que necesitan; además de ser matemáticamente falso, puede llevar a interpretar el número como cifras independientes sin relación entre sí (Ma, 1999). Marcamos este recuadro, el correspondiente al lenguaje, con un color diferente para indicar que impregna el conocimiento del profesor en toda su completitud.

ALGUNOS COMENTARIOS Y REFLEXIONES FINALES

En este apartado reflexionamos sobre algunas cuestiones asociadas a la consideración del conocimiento matemático especializado del profesor de Infantil desde la perspectiva de las conexiones entre contenidos, utilizadas para la elaboración de la Figura 1. Estas reflexiones nos llevan a considerar, por un lado, que hay todo un campo abierto para la realización de investigaciones que permitan obtener unacomprensión amplia y profunda del conocimiento de este profesor y, en particular, del contenido tanto del KSM como del KoT y KPM, subdominios más directamente ligados a aquel. Por otro, que se trata de un primer acercamiento que debe ser contrastado y enriquecido mediante el trabajo con profesores en activo y situaciones en la formación inicial que se basen en propuestas de formación que tengan como objetivo específico desarrollar este tipo de conocimiento.

Además, la propuesta que hemos presentado es una articulación del *Conocimiento Especializado* sobre la resta dentro del conjunto de los números naturales. Las relaciones mostradas tomarían una dimensión diferente si la propuesta fuera sobre la resta en los cuerpos numéricos Racionales o Reales. Una de las cuestiones que ha emergido (y que por no ser el foco de nuestro trabajo no hemos discutido) es la apariencia que poseería una propuesta de KSM ligada a la suma o a otra operación de las consideradas como tradicionales. Probablemente compartiría un tronco común amplio con la propuesta presentada, aunque se verían principalmente modificados aquellos contenidos directamente relacionados con la operación en cuestión (los ubicados en la primera línea superior del gráfico) y las primeras relaciones destacadas.

En la propuesta de KSM, la cual parte del PK sobre la resta propuesto por los profesores con los que trabajó Ma (1999), se identifican posibles secuencias implícitas de aprendizaje, presentes en las conexiones de simplificación-complejización, puesto que unos contenidos se construyen epistemológicamente sobre otros. Así, los contenidos de la resta relacionados, por ejemplo, con las propiedades, su ligazón con otras operaciones y sus significados y algoritmos, podrían constituirse en contenidos de aprendizaje del alumno de primaria, por lo que el profesor deberá tenerlo en consideración, potenciando las conexiones y contribuyendo a suavizar las transiciones. Nos podríamos preguntar, entonces, qué papel juega cada uno de los elementos del KoT (indicados en recuadros) en el saber de un profesor de infantil. Dilucidar esta cuestión podría ser importante para decidir en qué centrar la formación del profesor de infantil y cómo organizarla y justificarla. Consideramos que una comprensión significativa de la resta por parte del profesor de esta etapa le proporcionará una orientación clara sobre hacia dónde guiar el aprendizaje de sus alumnos. Posiblemente, el grueso de la formación deba centrarse en los contenidos que corresponden específicamente a la etapa, con la entidad y la densidad de conexiones apropiada, mientras que será necesario seleccionar los aspectos del contenido claves y las conexiones esenciales con otros pertenecientes a etapas posteriores, incluso con algunos de los contenidos aglutinadores de otros y que serán abordados de modo formal en un horizonte longincuo (e.g., límites, infinito, continuidad). Esa selección y desglose de las conexiones será un elemento esencial para tomar en consideración en futuras investigaciones.

Nuestro PK también pone de relieve una particularidad en la relación entre el contenido de aprendizaje del alumno y el conocimiento especializado del contenido del profesor de infantil, siendo esta, quizás, la etapa educativa en la que esa identificación es menos evidente o aparentemente más distante. Por ejemplo, en el caso de la designación matemática (Chamorro, 2005), mientras los alumnos se enfrentarán a actividades donde tengan que designar elementos sin ser conscientes de ello (e.g., procesos, clases, conjuntos, algoritmos), la visión profesional de los profesores debe llevarlos a ver que están sentando las bases para el uso significativo de símbolos, que les va a permitir adoptar los números como representantes de conjuntos de objetos dotados con la cantidad que cada signo indica, con los que a su vez podrán construir la secuencia numérica, para efectuar, a continuación, conteos y poder operar en situación de sustracción. El profesor de infantil que posee esta visión cohesionada de la resta será capaz de promover un aprendizaje más interconectado e integrado en sus estudiantes, especialmente eficaz para los aprendizajes posteriores (NAEYC y NCTM, 2013) y para facilitar una educación matemática continua (Fernández et al, 2011) entre etapas.

Esta primera mirada al conocimiento matemático del profesor se ha realizado considerando los conocimientos y destrezas que pueden promover en los alumnos (en términos de comprensión de los conceptos explorados) cuando el profesor posee tales conocimientos y potencia sus conexiones. Por otro lado, para adquirir una visión completa del conocimiento especializado de la resta que se requiere para su enseñanza desde infantil, habrá que continuar trabajando sobre cómo se aprende y cómo se enseña cada uno de los contenidos indicados.

Asimismo, es necesaria una reflexión, por parte de los formadores de profesores de infantil, sobre qué tareas pueden ser potentes para articular un sólido aprendizaje de los (futuros) profesores sobre estos contenidos y una visión amplia de los distintos tipos de conexiones. A este respecto, sería útil considerar la sugerencia de Ma (1999), sobre trabajar desde los PK, una herramienta que permite organizar el conocimiento de manera cohesionada, a través de conexiones *transversales* y de *complejización-simplificación* que pudieran suscitar una reflexión posterior sobre cómo deben ser desempaquetados para hacer el contenido accesible al estudiante. Aunque en este trabajo se han utilizado los PK con otro enfoque, en el contexto del trabajo de Ma (1999) fueron elaborados partiendo de los grupos de ideas necesarias para generar un conocimiento profundo de la resta con llevadas, propuestos por los propios profesores objeto de su investigación.

Al ser una propuesta sobre MTSK deseable, estaríamos hablando de un ETM de referencia que va desde el conocimiento matemático a su concreción en el profesor. Durante la formación tanto inicial como continua, habría que crear entornos que propiciaran la reflexión sobre cómo transformarlo en ETM idóneos para los alumnos (en función de la etapa educativa, por existencia de obstáculos de aprendizaje concretos, o de determinados aspectos socioculturales), puesto que en la construcción de estos influye notablemente el conocimiento especializado. Sería interesante proponer experiencias muy ligadas a la propia práctica (considerada de forma amplia), es decir, situaciones con las cuales los profesores se pudieran identificar y les permitieran explorar y desarrollar su conocimiento especializado. También habría que considerar experiencias que les permitieran enfrentarse a los mismos tipos de dificultades que sus alumnos pueden presentar (e.g., Pinto y Ribeiro, 2013) –por supuesto, a niveles distintos–, de modo que consigan, posteriormente, entender mejor las raíces de las mismas y sean capaces de gestionarlas eficazmente en situaciones de contingencia, en el sentido de Rowland, Huckstep, y Thwaites (2005). Pero, para que esto se pueda hacer realidad en la formación de profesores, deberíamos plantearnos un diseño de la formación del profesorado realizado junto a ellos. Consideramos que es importante potenciar encuentros de reflexión y concienciación de los propios formadores de profesores relativa a la responsabilidad de cada uno de nosotros. Esa reflexión se deberá basar, entre otros, en el hecho de que el mismo tipo de lógica que se discute respecto a la importancia del conocimiento especializado del profesor como un factor esencial para los aprendizajes de los alumnos (e.g., Nye, Konstantopoulos y Hedges, 2004), se aplique a cada uno de nosotros, como formadores de profesores, siendo nuestros alumnos los propios profesores o estudiantes para profesores (Jaworski, 2008). En ese sentido, el conocimiento del profesor sobre la resta ha resultado un desencadenante de reflexión sobre nuestra propia práctica, siendo esta una línea de trabajo complementaria a seguir para potenciar las relaciones efectivas entre teoría, práctica y formación.

Agradecimientos:

Este artículo ha sido parcialmente financiado por la Fundación para la Ciencia y Tecnología (Portugal) y por el Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola CEU de Sevilla (España).

REFERENCIAS

Aharoni, R. (2008). *Aritmética para Pais*. Lisboa: Gradiva.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 399-406.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Defining specialized knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceeding of CERME8* (pp. 2985-2994). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

Castro, J. P., y Rodrigues, M. (2008). Sentido de número e organização de dados, Textos de Apoio para Educadores de Infância. Lisboa: ME-DGIDC.

Chamorro, M. C. (Coord). (2005). *Didáctica de las matemáticas. Educación Infantil*. Madrid: Pearson

Clements, D. H. (2004). Major Themes and recommendations. In D.H. Clements, J. Sarama y A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging Young Children in Mathematics. Standards for Early Childhood Mathematics Education* (pp. 7-72). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Contreras, L.C., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M.C., y Climent, N. (2012). Un Estudio Exploratorio sobre las Competencias Numéricas de los Estudiantes para Maestro. *Boletim de Educaçao Matematica*, 26 (42b), 433-458.

Coutat, S y Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 97 – 126.

Fernández, S., y Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y

T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 291-301). Lleida: SEIEM.

Fernández, S., Figueiras, L., Deulofeu, J., y Martínez, M. (2011). Re-defining HCK to approach transition. In M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of CERME 7* (pp. 2640-2649). Rzeszów, Poland University of Rzeszów.

Hiebert, J., y Grouws, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. In F. Lester (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-404). NCTM: Information Age Publishing.

Hill, H. C., Rowan, B., y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371-406.

Jakobsen, A., Thames, M. H., y Ribeiro, C. M. (2013). Delineating issues related to Horizon Content Knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 3125-3134). Antalia, Turkie: ERME.

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (Vol. 4, pp. 1-13). Rotterdam: Sense.

Jung, M. (2011). Number Relationships In A Preschool Classroom. *Teaching Children Mathematics*, 17(9), 550-557. Kamii, C., Lewis, B., y Kirkland, L. (2001). Fluency in subtraction compared with addition. *Journal of Mathematical Behaviour,* 20, 33-42.

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US. Mahwash, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Martins, F., y Ribeiro, C. M. (2013). Atribuir sentido aos raciocínios associados às resoluções de alunos no caso da subtração: discutindo o conhecimento de futuros professores. In R. Cadima, H. Pinto, H. Menino y I. S. Simões (Eds.), *Atas da Conferência Internacional de Investigação, Práticas e Contextos em Educação* (pp. 192-200). Leiria: ESECS.

Montes, M.A., Aguilar, A., Carrillo, J. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013): MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. In B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceeding of CERME8* (pp. 2985-2994). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

NAEYC y NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2(1), 1-23.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257.

Pinto, H., y Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas, 3*(1), 85-105.

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. In P. Sullivan y T. Wood (Eds.), Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development. The international handbook of mathematics teacher education (Vol. 1, pp. 273-298). Rotterdam: Sense Publishers.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Schoenfeld, A.H., y Kilpatrick, K. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Tools and processes in mathematics teacher education* (Vol 2, pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15 (2)*, 4-14.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 251-274.

Thames, M., y Ball, D. (2010). What mathematical knowledge does teaching require? *Teaching Childrens Mathematics, 14*(4), 220-229.

LA ESTABILIDAD EPISTEMOLÓGICA DEL PROFESOR DEBUTANTE EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

Elizabeth Montoya-Delgadillo, Jaime Mena-Lorca, Arturo Mena-Lorca

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

Resumen. Este trabajo da evidencias acerca de la estabilidad epistemológica del profesor debutante, en cuanto a fortalecer cada dominio que enseña, por la vía de analizar su ETM-idóneo en el momento que desarrolla ese dominio con sus estudiantes. Para ello hemos clarificado los elementos del ETM-idóneo puestos en juego por el profesor, con el objeto de determinar el rol eventual de objetos de otro dominio en las génesis activadas por la correspondiente tarea.

Mostramos resultados relativos a si acaso los profesores debutantes favorecen la concreción de las génesis semiótica, instrumental y discursiva y por ende la circulación entre los distintos polos de los planos epistemológico y cognitivo del ETM, de modo de determinar si efectivamente la epistemología del profesor debutante es estable.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación se inscribe en la teoría del Espacio de Trabajo Matemático, ETM (Kuzniak, 2011), que en sus inicios fue conocida como teoría de Paradigmas y Espacio de Trabajo Geométrico (Houdement & Kuzniak, 1996; 2006).

El trabajo da evidencias acerca de la estabilidad epistemológica del profesor debutante, PD, –es decir, la persistencia de sus creencias y formas de actuar en relación con el conocimiento, su enseñanza y construcción en el contexto escolar (Porlán, Rivero, Martín, 1998) –, al cambiar su rol de aprendiz de la matemática y de su enseñanza por uno de profesor de matemática en ejercicio, en cuanto a fortalecer cada dominio que enseña, por la vía de analizar su ETM-idóneo en el momento en que desarrolla ese dominio con sus estudiantes o aborda tareas de modelación.

Para ello, hemos clarificado los elementos del ETM-idóneo puestos en juego por el profesor, con el objeto de determinar el rol eventual de objetos de otro dominio en las génesis activadas por la correspondiente tarea.

Nos hemos preguntado si, en su ejercicio docente, los PD utilizan estrategias que se ocupen de cada uno de los *polos* que constituyen los *planos epistemológico* y *cognitivo* que explicita la teoría del ETM y, más precisamente, si acaso esos profesores fomentan cada una de las *génesis –semiótica, instrumental* y *discursiva–* y, aún más, la *circulación* entre los distintos polos. (Cf. Kuzniak & Richard, 2014. Ver también Figura 1, más adelante).

Un ejemplo de lo anterior lo constituye la utilización de ecuaciones en el dominio de la geometría (y de las probabilidades, etc.): ¿es la ecuación solo un artefacto simbólico en la geometría o puede la aparición de esta última comportar un cambio de dominio, en el sentido de que la tarea no retorne al dominio de origen?

En general, lo anterior se relaciona tanto con identificar con claridad el dominio de trabajo como con el estudio en profundidad de las génesis que realiza el profesor debutante en el aula (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca, Mena-Lorca, 2012) en el ETM-idóneo en dominios específicos: análisis, álgebra, geometría, probabilidades.

Para estudiar la cuestión, seguimos durante un año a 6 profesores debutantes y realizamos 10 grabaciones en video, en sesiones de clase de 1,5 horas cada una. Primeramente clasificamos esas sesiones según los contenidos para determinar el dominio utilizado en cada caso; posteriormente hemos identificado episodios y analizado las tareas y las circulaciones desplegadas por esos profesores. Con el objeto de fortalecer algunas conclusiones, se analizaron algunas entrevistas abiertas y cuestionarios a profesores debutantes.

LA CUESTIÓN A INVESTIGAR: EL ETM DE PROFESORES DEBUTANTES.

La preocupación por la formación de profesores y de los egresados de esa formación que no logran impactar en el sistema educativo chileno y, similarmente, por los programas gubernamentales de formación continua que no logran el efecto que se espera de ellos, están presentes en este trabajo en forma implícita.

Es sabido que tales problemas tienen muchas aristas, pero creemos que clarificar el ETM que el PD sostiene o desarrolla en la clase es un problema que nos atañe como formadores de profesionales del área. Su superación permitiría mejorar la calidad de nuestros egresados de modo que puedan enfrentar con su formación los desafíos, permanentemente cambiantes, relativos a lograr aprendizajes en matemáticas de sus propios estudiantes. Se visualiza que la implementación de procesos de acompañamiento en las prácticas profesionales será efectiva en cuanto se involucren en ella tanto la institución formadora como los colegios, como parte de una alianza estratégica para mejorar en forma continua los desempeños de los profesores de matemáticas en las comunidades escolares.

Nuestro proyecto pretende aportar elementos que debería comportar esa alianza y sugerir cómo deberían desarrollarse los procesos de acompañamiento en relación a la construcción de conocimientos y habilidades propias del dominio de la matemática –como ser, la modelación matemática y la concepción de la matemática en la prueba PISA–.

La teoría del ETM nos provee de una perspectiva para analizar cómo el profesor debutante trabaja con la matemática, cómo se comporta él como matemático –su *ETM personal*–; también nos permite verlo como profesor en su concepción de la matemática que debe enseñar, en el proceso de transposición de esta con el objeto de elaborar propuestas didácticas que logren construcción de saberes matemáticos, y todas las reorganizaciones en su rol de profesor, su *ETM idóneo*. De igual manera, tenemos el espacio de trabajo constituido por lo que la comunidad sustenta, lo que esta entiende por tarea matemática, en cuanto a los procedimientos, algoritmos, conjeturas y pruebas, etc., el *ETM de referencia*.

Para un profesor debutante (PD), el aspecto paradigmático es relevante, incluso más que para un alumno en su práctica profesional de profesor, según describe (Montoya, 2014) en lo que llamó las *transiciones*. El PD, bajo el paradigma de la institución (liceo) a la que se incorpora –en la cual no se reconoce corresponsabilidad del aprendizaje–, enfrenta la complejidad de ser él el responsable del aprendizaje de sus alumnos. De hecho, la noosfera presiona al profesor centrando la crítica a la calidad de la educación en que este está realizando mal su tarea ya sea por desidia o por falta de recursos.

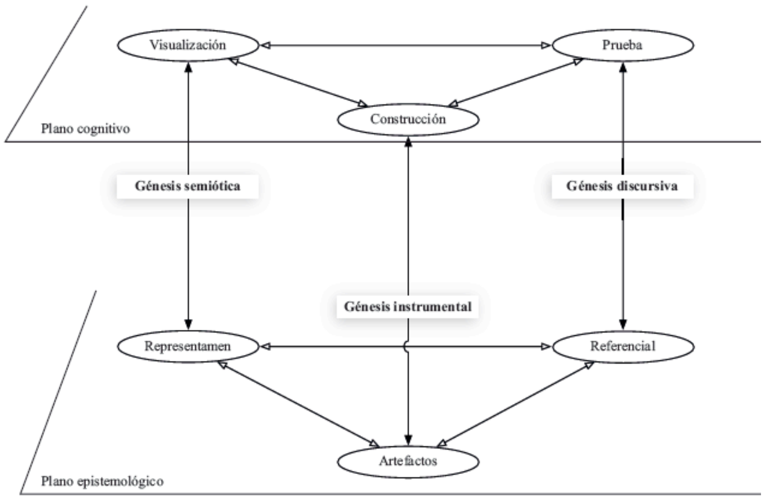


Figura 1: Espacio de trabajo Matemático y sus génesis.

Es claro que la epistemología del PD está afectada por su formación inicial, recientemente concluida, y por la comunidad que lo recibe como profesional. En términos de los elementos de la teoría del ETM representados en la figura 1 (Kuzniak y Richard, 2014), el PD tiene influencias del referencial recibido de la formación inicial vía tanto las concepciones que manifiestan sus profesores formadores en el ETM-idóneo como la concepción de estos en relación al idóneo que debe desarrollar el estudiante cuando egrese.

Lo anterior está tensionado por las exigencias que el propio profesor se hace como matemático: el ETM personal que debe desarrollar para responder a las exigencias de la matemática. En relación a esto último, al estudiante en formación inicial, en los cursos disciplinares matemáticos, le es exigido un ETM personal en el cual todas las génesis estén activas de tal forma que todos los polos de los planos estén articulados, siendo el referencial teórico el que los matemáticos de las respectivas áreas exigen. Las formas de demostración allí están sustentadas por la lógica formal pero tienen sus propios artefactos, representamen y representaciones, que en el plano cognitivo tendrán sus correspondientes visualización, prueba y construcción. Es decir, en el ETM personal estarán articulados los planos cognitivo y epistemológico, vía las génesis, como se dijo antes, y estos estarán presentes en los

PD formando parte de su epistemología, ya que aquella es la matemática y aquella la forma de hacer matemática que le ha sido enseñada y que en alguna medida ha experimentado. Por otra parte, su idóneo como profesional está en la transición del idóneo que la institución formadora expresa al idóneo que percibe en la institución en la cual se desarrolla como profesional.

LA ESTABILIDAD EPISTEMOLÓGICA

En definitiva, en el PD coexisten principalmente (y en transición) el ETM personal de su formación inicial y el ETM idóneo como profesional en formación. La epistemología del PD evoluciona en estos términos y la pregunta acerca de su estabilidad refiere al cambio que experimenta el idóneo teórico configurado en la formación inicial con los cursos de matemática, de didáctica y los ramos pedagógicos y las prácticas. Este teórico, expresado en los perfiles de egreso, dice que el profesional formado en la institución correspondiente será capaz de transponer adecuadamente los saberes para que sus alumnos construyan matemática. En el marco teórico del ETM, lo anterior equivale a que las propuestas didácticas del PD permitirán en los alumnos activar las génesis y lograr las circulaciones que desarrollen plenamente los distintos dominios de las matemáticas que el currículo exige. Es decir, que el estudiante aprenda construcciones propias de los dominios y sepa identificar las distintas visualizaciones del representamen, pueda instrumentalizar los artefactos del dominio y tenga la capacidad de "demostrar" así como de justificar los objetos que utiliza en las pruebas o en los procesos de instrumentalización.

(Montoya, 2014) da ya evidencia de que el ETM-idóneo del profesor en la formación inicial muestra una debilidad en la transposición de la demostración en geometría, es decir, que es difícil esperar un idóneo del profesional que active la génesis discursiva y logre una circulación apropiada entre el referencial y la prueba.

Lo anterior sugiere la necesidad de observar a los PD en el aula, ya que, por una parte, el discurso del ETM-personal del profesor interfiere en su ETM-idóneo, y, por otra, debido a su formación él cuenta con herramientas de otros dominios que pueden surgir en forma inapropiada en el proceso de construcción del conocimiento en el dominio específico.

APROXIMACIÓN METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN

Nuestras indagaciones y evidencias se enmarcan, según lo explicitado en la Introducción, en un seguimiento por un año a PD *en aulas*, esto es, a profesores con a lo sumo dos años de servicio, en su actividad de clases, como parte de un proyecto en el cual nos preguntamos por las concepciones geométricas y algebraicas desarrolladas en el aula de liceo en el sistema educativo chileno.

EVIDENCIAS DE LOS VIDEOS DE LOS PD

Los resultados de las grabaciones y el desarrollo teórico del ETM en Álgebra nos fueron dando evidencia adicional acerca de cómo la operatoria algebraica asumía un rol protagónico argumentativo implícito en las clases, al punto de inhibir las demostraciones en geometría y otros dominios no algebraicos, ya que, en la práctica, se consideraba que en cuanto las ecuaciones planteadas tenía solución se asumía que el resultado geométrico buscado era correcto. Esto nos permitió clarificar la fuerte influencia del ETM personal del profesor, el cual, como estudiante, percibió la importancia del álgebra en el desarrollo de la matemática. De esta forma, ante preguntas de los estudiantes el PD a menudo simplemente resuelve el problema con algoritmos algebraicos sin poner especial atención a las propiedades invocadas y sus justificaciones, que garantizan los procesos algebraicos en los procesos de enseñanza de la matemática en dominios específicos, es decir, una apropiada transposición del dominio.

Si bien la investigación realizada se enmarcó en un estudio de casos, y bajo esta perspectiva los resultados no son posibles de generalizar a la realidad de todos los profesores debutantes del país, queremos enfatizar que en las clases observamos un fuerte predominio de contenidos y tratamientos algebraicos, y a pesar de la evidente potencia de las técnicas algebraicas en determinados dominios como en la geometría y en las probabilidades, la falta de retorno al dominio origen impide el desarrollo del ETM en toda su dimensión.

Hemos observado que los profesores con frecuencia privilegian la algoritmia y '*algebrizan*' la geometría; una situación similar se da en otros dominios matemáticos. En este trabajo damos evidencias sobre la tendencia que las clases han indicado: a los PD se les dificulta hacer la apropiada transposición didáctica de los contenidos geométricos y algebraicos; de hecho, parecen divididos entre las exigencias de su institución formadora y aquellas que deben poner en juego en su enseñanza o, simplemente, muestran desconocimiento acerca de cómo transponer algunos saberes.

A nivel de las circulaciones (Montoya-Delgadillo et al., 2012), en las 60 sesiones de clase observadas se constata que los profesores debutantes activan las génesis semiótica e instrumental, en tanto que la génesis discursiva prácticamente no es desplegada: teoremas y definiciones son escasamente mencionados por los PD y quedan a nivel de fórmulas, y no hay intento de fomentar un tratamiento a nivel de pruebas; no observamos justificaciones ni la exigencia de propiedades en el momento de usar las "fórmulas".

En lo que sigue, mostraremos dos casos (extremos) en relación a lo dicho anteriormente, en el sentido que uno es representativo de la mayoría de las sesiones observadas de los PD y, el otro, un caso particular en que el PD activa las génesis en el ETM-idóneo. Los hemos elegido como representantes en término del contenido que abordan, esto es, uno de ellos impartió la única clase observada en probabilidades y el otro aborda las ecuaciones en su dominio algebraico.

El caso de la probabilidad

Considerando los diversos informe de la OCDE en relación a la inseguridad que declararon los profesores de Enseñanza Básica (7 a 13 años) en geometría, uno de los investigadores, con el objeto de abordar la priorización de los contenidos matemáticos, preguntó a 20 de sus estudiantes de postgrado, todos profesores en ejercicio y 17 de los cuales son PD (pero no pertenecientes al grupo en estudio): "¿En qué materias o contenidos se sienten más débiles al momento de enseñar?". El curso estaba formado por un 15% de profesores trabajando a nivel terciario, 33% a nivel básico y 52% en enseñanza media; el 75% declaró sentirse débil en el área de la estadística y probabilidad. Si se eliminan los de nivel terciario, este porcentaje aumenta considerablemente. La situación ha sido evidenciada por el investigador con otras cohortes en este mismo postgrado, pero sin registro formal.

Esto sugiere una de las razones que explica por qué encontramos solo un profesor que estaba dispuesto a desarrollar el tema de probabilidades en sus clases, que por lo demás está en las propuestas curriculares con máxima cantidad de horas tanto en media (14-15 años en adelante) como en básica (12-13 años). Otra razón a considerar es que la cantidad de cursos de estadística en las mallas de formación inicial se reduce a uno o a lo sumo dos cursos, y simplemente no hay cursos de didáctica de la estadística.

En el período que realizamos las grabaciones (2011-2012), solo PD3 trató el tema de las probabilidades, en dos sesiones de clases en un 1º Medio de liceo (14-15 años). En la primera sesión, identificamos 4 episodios. El primero consistió en introducir intuitivamente la noción probabilidad mediante aproximaciones al significado; esto parecía un recordatorio del tema, y los alumnos mencionaron *posibilidad, resultado, oportunidad, aproximación*. En el segundo episodio, calcula una probabilidad, demandando a sus estudiantes, mediante ejemplos, el cálculo correspondiente. En el tercero, distingue entre fenómeno determinista y fenómeno aleatorio, todo a través de ejemplos en los cuales hace participar a sus estudiantes. Finalmente, en el cuarto episodio, escribe la regla de Laplace y expone ejercicios para su resolución, sin escribir en la pizarra. En todos los episodios usó diapositivas para presentarlos, las cuales contenían dibujos de dados y bolas de colores.

A continuación mostramos un extracto de la clase donde PD3 muestra la regla de Laplace (en una diapositiva) y ejemplifica para el cálculo de las probabilidades.

PD3: Bien, pasemos a la siguiente entonces. Esos son los tipos de experimentos que existen y ¿sobre qué trabaja la probabilidad entonces? Se supone que los deterministas el resultado ya se puede conocer, pero en los aleatorios no hay una certeza de lo que pueda suceder; entonces la probabilidad mide la frecuencia con la que aparece un resultado determinado cuando se realiza, y este tiene una cantidad de sucesos determinados. ¿Cómo se calcula la probabilidad? Y esto es la regla de Laplace y se calcula en número de casos favorables dividido por el número de casos totales, y eso me va a dar la probabilidad de que un suceso pueda ocurrir. Por ejemplo, tenemos ejemplo para analizar: En una caja hay 12 bolas negras y 8 rojas ¿qué probabilidad

hay de sacar una bola negra?
Al: 12 de 20
PD3: Sería. Lo primero que hay que determinar es que la probabilidad es: casos favorables partido por casos totales… Para el caso de sacar una bola negra ¿cuántos casos favorables tenemos?
Al: 12
PD3: Son 12, cierto, porque dice sacar una bola negra ¿cuántas bolas negras tenemos?
Al: 12
PD3: Serían 12 dividido por los casos totales. Los casos totales son todos los casos que existen dentro del experimento. Son 12 bolas negras y 8 bolas roja ¿Cuántos casos tenemos en total? 20, la probabilidad es 12 de 20. Ahora, el caso de sacar una bola roja sería: los casos favorables son 8 partido por los casos totales que son 20 y eso es nada más la probabilidad para sacar este tipo de problemas. No es complicado, solamente tengo que analizar cuántos casos totales tengo y lo que me están pidiendo, cuántos casos favorables resultan del experimento. Arriba el total de casos favorables y abajo el total de casos del experimento.

Se observa que en esta clase PD3 introduce la noción de probabilidad, muestra la “fórmula” y termina pidiendo su cálculo. No se observa una circulación por la génesis discursiva que se explote o desarrolle, nada se justifica, y rápidamente se pasa al cálculo.

Este episodio termina con ejercicios realizados con la regla de Laplace para el cálculo de una probabilidad, relativos al dado y a colores por sabor de un jugo. En el caso del dado, se obtiene la probabilidad que salga un número de este, un par, un primo y la suma de dos de ellos.

Se observa que PD3, a pesar de sus motivaciones, impone una fórmula sin realizar la génesis discursiva. Sin embargo, realiza una circulación en el plano del descubrimiento recurriendo al artefacto simbólico fracción. Por otro lado PD3 recurre a elementos del representamen que alude a la fórmula, en el caso finito, como fracción “12 dividido por 20”, “8 partido por 20” y finalmente como probabilidad “12 de 20”.

En la segunda clase, identificamos 3 episodios. En el primero, PD3 muestra dos videos mediante los cuales introduce la idea que una probabilidad puede alcanzar valores muy pequeños, “baja probabilidad que un evento suceda”, y la enfatiza recurriendo a términos porcentuales (signos del representamen); desarrolla y explica que una probabilidad puede ser muy baja y enuncia una propiedad *ad hoc*. El segundo episodio muestra experimentos con dos sucesos consecutivos, desviando la atención hacia el cálculo para recordar la multiplicación de fracciones. El tercer y último episodio identificado es un experimento realizado en grupos por los estudiantes en la clase, que consiste en lanzar “varias” veces una moneda al aire y consignar si sale cara o sello.

Es en el último episodio donde nos queremos detener, pues, a pesar de los esfuerzos de introducción de las nociones matemáticas involucradas y de la motivación que provee, PD3 muestra que este experimento consiste en "comprobar la fórmula" dada en la clase en lo que se refiere al cálculo de la probabilidad de un suceso. A continuación mostramos un extracto de la clase en el cual la fórmula se vuelve la cuestión a comprobar y, por una parte, no se desarrolla una circulación apropiada en el espacio de trabajo, por otra, no se instrumentaliza el artefacto material "moneda" y, finalmente, a pesar de que un alumno, al igual que en el episodio anterior, da la respuesta correcta, PD3 señala que el experimento permitirá comprender la fórmula.

PD3: Bien muchachos, si me prestan atención vamos a poder hacer el experimento que nos va a permitir comprender de donde viene la regla que nosotros utilizamos para el cálculo de probabilidad. El experimento consiste en lo siguiente: nosotros sabemos cuál es la probabilidad de que yo al lanzar una moneda me salga un sello.

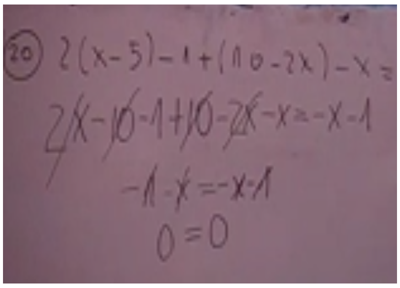
Al: Una de dos.

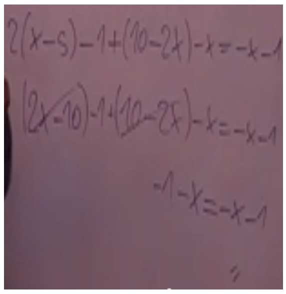
PD3: Es una de dos, es un medio; si nosotros eso lo calculamos en porcentaje, tenemos un 50% de que aparezca un sello. Veamos si esto se aplica, realmente, al experimento de probabilidad. Qué es lo que voy a hacer yo con la moneda que le acabo de entregar: voy a hacer el experimento a ver si el resultado final se acerca al 50%, vamos a ver si se acerca al 50%. Si cumple con la regla mediante el experimento que voy a hacer. En qué consiste el experimento, voy a lanzar una moneda 50 veces; la veo [verifica si la moneda es cara o sello] y el primer lanzamiento me salió sello; luego lanzo nuevamente, segundo me sale sello y así voy marcando. Luego que haya lanzado las 50 veces y tenga mi tabla de datos, los datos que me salieron, por ejemplo lanzo la tercera vez y me sale una cara, lanzo y me sale un sello, lanzo y aquí otra vez sale una cara; después, cuando tenga los 50 lanzamientos, voy a contar cuántos sellos me salieron en el experimento, y también voy a contar cuántas caras me salieron en el experimento. Me sale un número de caras y lo divido por 50 y lo multiplico por 100, para saber qué porcentaje corresponde el experimento. Me sale la cantidad de sellos, lo divido por 50, que es la cantidad de veces que yo hice la prueba de lanzar la moneda, y luego voy a comprobar si los resultados que les dan se acercan o no se acercan al 50%, que es la probabilidad que nosotros calculamos teóricamente… Hagan el experimento… cuando tengan los resultados me llaman para poder observar y poder hacer cálculo de probabilidad…

01:03:04 - 01:15:47 *[El profesor revisa los experimentos de los alumnos y comparte algunos resultados con la clase]*

El caso del profesor PD3 nos parece significativo, pues nos muestra la concepción que él tiene de las probabilidades y el rol que juega la fórmula en un experimento que obedece a la ley de los grandes números, evidenciando un ETM-idóneo influenciado por su ETM-personal desprovisto de un apropiado referencial. En la trascripción, uno puede observar que el alumno, antes de realizar el experimento, entrega la respuesta correcta; sin embargo, PD3 confunde la probabilidad con el 50% como uno de los signos de la probabilidad. La génesis semiótica no es activada apropiadamente. El artefacto material (moneda) se instrumentaliza, es realmente parte del proceso, pero ello no permite una circulación con los otros polos, puesto que el resultado es forzado por PD3 a un valor numérico dado en términos de porcentaje, a pesar de que la regla de Laplace da un número entre 0 y 1, y que el experimento no necesariamente da ½ ya que el experimento es finito.

El caso de las ecuaciones





Dos profesores de los 6 PD, PD5 y PD1, trabajaron las ecuaciones de primer grado en el tiempo de observación. Nos propusimos no hacer un estudio comparativo entre los PD, pero sí estudiamos los currículos de las universidades de procedencia, para obtener información y aproximarnos al ETM de referencia.

El caso siguiente corresponde a la manera diferente de desplegar el ETM-idóneo de PD5, a diferencia del resto de los PD que despliegan un fuerte trabajo algorítmico incluyendo en estos a PD1.

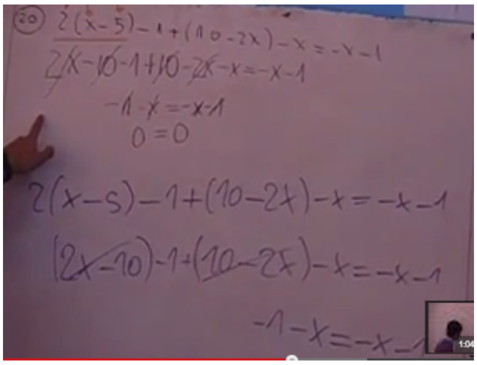


Figura 2: PD5 revisando resultados de los alumnos

El profesor PD5 plantea una ecuación dejando a los estudiantes en situación de ruptura, en la cual la algoritmia no es suficiente para establecer la solución de la ecuación. El profesor PD5 logra lo anterior llevando las respuestas a la pizarra de tres grupos distintos (ver figura 2) y confrontándolas frente al grupo curso. Aprovechando que ninguna de las soluciones da un resultado, PD5 hace preguntas que llevan a los estudiantes a encontrar distintos números que satisface la ecuación y llevándolos a concluir que hay "muchas soluciones" (Figura 2). Nosotros consideramos que PD5 activa la génesis discursiva apropiadamente recurriendo al referencial y per

Desde un punto de vista del ETM-idóneo, se observa la atención que despliega PD5 para exponer el caso de infinitas soluciones. Este episodio lo identificamos como uno de los pocos ejemplos de activación de la génesis discursiva, y naturalmente lo importante es que también activó las otras génesis en este dominio. En la génesis semiótica los signos de ecuación y variable son los utilizados y la visualización es solo a través de estos elementos del representamen, sin pasar por las gráficas que normalmente ayudan a robustecer el significado de este tipo de soluciones.

CONCLUSIONES

Dado que nuestra preocupación es la enseñanza-aprendizaje de la matemática, creemos que es muy importante poner en el centro del estudio la matemática, y que ese estudio acoja todos los otros aspectos relevantes en la construcción de la matemática en el aprendiz. La teoría ETM nos permite poner en el centro la matemática y ver el desarrollo de esta en cuanto a su relación con el sujeto que la está construyendo o ayudando a construir. Tal relación puede ser la de un aprendiz con la matemática (un estudiante que aprende matemática) o la de un profesor de matemática en su tarea de enseñar.

Es esa la razón por la cual tomamos este marco para estudiar a los profesores debutantes y nos preguntamos por su estabilidad epistemológica. Para aproximarnos a la conclusión global de nuestro proyecto, damos aquí algunas conclusiones parciales:

1. *Los profesores evaden algunos contenidos*. Los contenidos que los PD examinados tratan en las clases muestran que ellos no abordan temas como los del dominio de azar y estadística; también evitan abordar la resolución de problemas y la modelación, que en la actualidad son claramente exigibles en los currículos chilenos.

1.a. *Estadística*. Los PD estudiados presentan debilidades en estadística, puesto que en general ellos, en su formación inicial, no fueron preparados para realizar tareas como profesionales en términos de transposición de este saber. Los profesores formados para trabajar en la enseñanza básica mayoritariamente no tienen formación matemática en ramos disciplinares específicos, sino que la matemática va incluida en cursos de metodología u otros llamados de "didáctica general", en donde se abordan todas las disciplinas en conjunto. Los profesores formados para trabajar en la enseñanza media (liceo), mayoritariamente tienen una formación débil en Estadística y probabilidades; las mallas muestran cursos básicos en estas áreas que representan un porcentaje muy escaso en relación con las otras asignaturas del currículo universitario. Para ambos tipos de profesores, no hay cursos de didáctica de la estadística.

1.b. *Modelación y resolución de problemas*. A pesar de que las ideas de modelación y resolución de problemas están consideradas en lo que la prueba PISA llama *matemáticas para la vida,* en Chile se las ha incluido solo recientemente de manera expresa. Por otra parte, la formación inicial no las incluye como un saber que se debe enseñar a transponer; es por ello que es difícil que los PD las traten en los términos en que son planteadas: la resolución de problemas se sitúa como una aplicación directa de un contenido que se está desarrollando o ya se ha desarrollado, perdiendo gran parte de la riqueza que se pretende con ella, y lo mismo ocurre con la modelación.

2. *La demostración y su trasposición*. Los PD tienen dificultades para activar la génesis discursiva. La razón principal para ello está en la formación inicial, dado que no se enseña a transponer la demostración; es decir, en el ETM personal del estudiante en formación, en el polo referencial, la única prueba válida es la demostración de los matemáticos. Montoya-Delgadillo (2014) ya lo había evidenciado en el dominio de la geometría. El seguimiento de los profesores debutantes ha mostrado que en general no activan la génesis discursiva, ya sea porque simplemente se remiten a introducir fórmulas cuya aplicación posteriormente exigen sin mayor fundamento, o bien porque en la génesis instrumental la construcción cumple el rol de prueba, ya que el resultado, en cuanto existe o se puede conseguir con algún procedimiento, es la única justificación o validación del procedimiento –la obtención de la solución de una ecuación ante un problema geométrico, e. g.– .

En general, la circulación se da en el plano [sem-inst], conformado por las génesis semiótica e instrumental (ver figura 3 de Kuzniak y Richard, 2014), ya que solo se activan dichas génesis. En el caso del debutante que trabajó con la moneda, artefacto material, el PD logró una verdadera circulación en el plano [sem-inst]. Sin embargo, ese mismo profesor usó videos (para introducir la idea de que un evento es poco probable) claramente con un rol de visualización, y no se activó la génesis instrumental.

3. *La estabilidad epistemológica*. Como vemos, el PD reacciona en la clase en sus dos dimensiones: la profesional, y la personal como matemático. En este sentido podemos concluir que su epistemología es inestable, ya que su ETM-idóneo, determinado en primera instancia por el ETM de referencia recibido en su formación, le indica que debe transponer los saberes, pero se encuentra con que no ha tenido experiencia para activar la génesis discursiva (no lo enfrentaron a transponer en su formación inicial). Para esto último recurre a su ETM-personal, que finalmente le indica que los procesos de demostración no son viables en el nivel escolar del cual se ocupa. De este modo, queda solo con la posibilidad de realizar operatoria, la cual justifica sus resultados apoyados en algoritmias que él también utilizó como matemático cuando estaba formándose. Por tanto, su desempeño en el aula está tensionado entre lo que piensa como matemático y lo que piensa como profesor en un paradigma no siempre explícito por él. Por último, cabe señalar que estudiar el ETM-idóneo del profesor no se realiza exclusivamente en el aula, pero fue uno de los desafíos de esta investigación estudiar al PD en el aula por un período.

4. *Algebrización*. Entendemos que un proceso de inducción es el apoyo y

acompañamiento que recibe el individuo en los inicios de su vida profesional. En esta etapa se hace necesario que el profesor tome conciencia de que debe desarrollar y explotar en plenitud un dominio específico de acuerdo al contenido que quiere tratar; por ejemplo, si está en geometría y requiere de artefactos del álgebra, debe mantener momentáneamente a esta última a un nivel de herramienta de la geometría y no transformar el problema en uno puramente algebraico, sin retorno a la geometría. En esta dirección, se observó que los PD cambian de dominio y no siempre retornan al dominio origen; es decir, al enseñar cuestiones de geometría reiteradamente recurren al álgebra (como dominio de resolución) pero no siempre son conscientes de la necesidad de retorno al dominio de la geometría para dar respuesta y coherencia a la tarea realizada. Esto se agudiza en geometría analítica, ya que se la reduce a manejo operatorio, tal como en el caso de las técnicas de asociar expresiones cuadráticas a las cónicas, o similares. En los contenidos de estadística y azar, el álgebra desvirtúa el dominio y se lo convierte en aplicación de fórmulas que pierden su significado original.

Por supuesto, lo anterior no sugiere que no se deba recurrir a otro dominio de la matemática (álgebra, por ejemplo); muy por el contrario, ya que una de las riquezas de la matemática es el trabajo en distintos dominios o interdominios.

En los cursos disciplinares de su formación inicial, los PD no tienen la dificultad del cambio de dominio, ya que la técnicas utilizadas en cada dominio son claras, como así también son claros los procesos algorítmicos empleados, los que cumplen un rol de artefacto simbólico que no desvirtúa el dominio desarrollado; los artefactos algebraicos, por ejemplo, se instrumentalizan apropiadamente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 289-321.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. (Note pour l'habilitation à diriger des recherches). Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Paris VII. France.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME; número especial (aceptada).

Montoya, E., Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2012). *Los artefactos y la visualización: en un ambiente geométrico y algebraico*. Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático, Universidad de Montreal, Canadá, 23 al 26 de noviembre.

Montoya-Delgadillo, E. (2014). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. *Revista Enseñanza de las Ciencias*. (Aceptada)

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*; número especial, *17*(4-I), 191-210.

Porlán Ariza, R.; Rivero García, A. y Martín del Pozo, R. (1998). Conocimiento Profesional y Epistemología de Los Profesores, II: Estudios Empíricos y Conclusiones. *Enseñanza de las Ciencias*, *16*(2), 271-288.

PRACTICES OF ITALIAN TEACHERS WITH THE DERIVATIVE CONCEPT: A PROBLEMATIC MEETING BETWEEN ALGEBRA AND ANALYSIS IN SECONDARY SCHOOL

Monica Panero, Ferdinando Arzarello, Cristina Sabena

Mathematics Department, University of Turin

This paper reports on a study from a wider project of thesis, whose main focus is investigating, in the secondary school context, the transition between two important mathematics domains Algebra and Analysis. Following Kuhn (1969), we detect some fundamental paradigm shifts between the two. They represent a change in the way of thinking about and working with functions, so that the related MWSs come to be differently structured. The paper focuses on a fundamental process in mathematics, based on the idea of "generic". Through the analysis of how a teacher manages her students' work on the derivative function, our aim is discussing how the Analysis MWS differs from the Algebra MWS, in terms of cognitive processes and especially with respect to their genesis.

INTRODUCTION

In the Italian secondary school, Algebra and Analysis are introduced in two different and consecutive moments. Algebra is mainly presented as literal calculus and solution of first grade equations at the end of lower secondary school (grade 8) and acquires an increasing importance during the first two years of upper secondary school (grade 9-10), where it is identified with the study of numeric systems and of their properties, and the resolution of second degree equations, inequalities and systems. Analysis, instead, prevails as elementary Calculus in the curricula of the last year of upper secondary school (grade 13) with the systematic study of real functions of a real variable, limits, differential and integral calculus. Between these two phases, a preliminary work on elementary functions occurs, whose features are mainly algebraic and graphical. In the secondary school, the approach to Calculus is strongly based on the algebraic work, but is this enough to make students understand suitably the fundamental concepts of Calculus? Is a student well-prepared to face the study of Analysis at the university? Grounded on such concerns, we developed the idea of investigating what kind of articulation exists between the two mathematical domains.

THEORETHICAL FRAMEWORK

From an historical point of view, Analysis has been introduced in mathematics as infinitesimal calculus. Leibniz, Newton and the contemporary mathematicians began to notice some anomalies in the algebraic calculus when it involved infinitely small quantities. Such anomalies could not be explained within the universally accepted paradigms. As it is well known, the concept of paradigm is developed by Kuhn in his work on the scientific revolutions (Kuhn, 1969), as the set of beliefs, techniques and principles shared by a scientific community (Kuzniak, 2011). We could affirm that the introduction of the “infinitely small” has caused a paradigm shift in mathematics. It has entailed the adoption of a local perspective on functions and a new definition of equality of functions. Thus, two large reference Mathematical Working Spaces (MWSs from now on, Kuzniak 2011) are identifiable, that of Algebra and that of Analysis. One of the distinctions between the two MWSs relies on this shift of paradigm.

In this paper, we consider the notion of generic that is a fundamental idea in mathematics. It is at the base of a process we call “genericization”, that is generation of the generic case. We find this idea already in Euclid (see his “generic” proof of the infinity of prime numbers) and in some speculations of philosophers (e.g. Locke: see below), but it was particularly exploited within algebraic geometry at the turning of 19th century. The geometers introduced explicitly the notion of “generic point”, and the related practices in their discipline. However, while generic points were widely used, it is not easy to find their definition.

For that we can refer to Van der Waerden (1926):

> Indeed, by generic point of a variety, one usually means, even if this is not always clearly explained, a point which satisfies no special equation, except those equations which are met at every point (p. 197)

and to Enriques & Chisini (1915):

> The notion of a generic ‘point’ or ‘element’ of a variety, i.e., the distinction between properties that pertain in general to the points of a variety and properties that only pertain to exceptional points, now takes on a precise meaning for all algebraic varieties. A property is said to pertain in general to the points of a variety V_n, of dimension n, if the points of V_n not satisfying it form – inside V_n – a variety of less than n dimensions (p. 139).

An interesting point of view is given by Speranza (1996), who analysed the idea of “general triangle” through the words of the great philosopher Locke (1690): “[The general triangle] must be neither oblique nor rectangle, neither equilateral, equicrural, nor scalenon: but all and none of these at once”[1] (in Speranza, 1996, p.15). The idea of generic occurs in the mathematical practices leading to the research of a “generic stereotype” which represents all the basic features desired without any added specific singularity.

In Analysis, for example, the process of genericization occurs when we know how a function behaves for some values of x and we shift our reasoning on a “generic abscissa x”, which must belong to the function domain, but has no particular added characteristic.

Genericization is a practice used also in Algebra with the work on generic examples. For instance, let us imagine that we have to decide if the sum of two even numbers is even or odd. In Algebra, we can proceed empirically, testing several cases (e.g. 2 + 4 = 6, 4 + 8 = 12, and so on) and, then, inducing the general property: the sum is an even number. This is an example of generalization, that means inducing the general case, from a sequence of particular cases. From an epistemological point of view, generalization is an empiric induction, which entails an empiric, but not real proof.

However, we can follow another way in order to decide if the sum of two even numbers is even or odd: we can reason on a particular example, giving emphasis to a general feature that characterizes all the examples similar to the proposed one.

$$\begin{array}{c} 14 = \ \ 7 + \ 7 \\ 22 = 11 + 11 \\ \text{-----------------} \\ 36 = 18 + 18 \end{array}$$

As a consequence, it becomes useless to provide other examples: the given one can be conceived as generic. This is a "generic proof", that is "a proof carried out on a generic example" (Leron & Zaslavsky, 2009).

Inducing the general case and reasoning on the generic case are two distinct processes in mathematics. The former is typical of the transition from Arithmetic to Algebra, the latter instead is common to different mathematical domains. We saw examples from the literature within Geometry and Algebra domains. The purpose of this study is to investigate the idea of generic and the associated process of genericization also in Analysis.

In the context of the Symposium, this paper aims to give a specific contribution to the chosen topic, discussing how the Analysis MWS differs from the Algebra MWS, in terms of cognitive processes and especially with respect to their genesis.

Since a mathematical working space is structured on two levels, the epistemological and the cognitive planes, we need firstly to precise on which epistemological basis the process of genericization is generated. This process is often related to the use of the universal quantifier "∀": the mathematical sign for "for each", "for every" and "for all". We can remark that, on the one hand, the natural language makes a distinction between the terms "every" and "all". They can both be used to talk about things in general, but "every" has the distributive meaning of "all in each of its parts". So, for example, if we say "Every Italian citizen has a name and a surname" we want to underline the fact that "if taken one by one", to all Italian citizens has been given a name and a surname. But we would say "All Italian citizens older than 18 has the right to vote" in order to stress that the totality of Italian people can vote, without inner distinctions. In mathematics, instead, the expressions "for every" and "for all" are completely equivalent from a logical point of view.

These differences in terms of linguistic interpretation of the mathematical sign "∀" become very significant when we focus on the transition from Algebraic to Calculus practices and theories in the classroom. In order to analyse this transition, and take into account classroom practices and theories with functions, we use the notion of "perspectives" (Rogalski 2008, Vandebrouck 2011). A perspective on a given function f can be pointwise, global or local, according to the character of the properties of f that are taken into account. Thus, a perspective on f can be:

- *pointwise*, when one considers properties which depend only on the value of f in a particular point x_0 (for instance, "$f(x_0) = 3$");

- *global*, when one considers properties which are valid on intervals (for instance, "*f* is increasing in the interval [*a*,*b*]");
- *local*, when one considers properties which depend on the values of *f* in a neighbourhood of a point (for instance, "*f* is continuous in x_0").

Following Vandebrouck (2011), we remark that some global properties actually are universal pointwise properties: that means pointwise properties verified point by point, for every[2] point of the interval. So, we can identify another perspective, that we call *universal pointwise* perspective. All the universal pointwise properties are global, but the vice versa does not always occur. However, in the case of global properties that cannot be defined in a universal pointwise way, Vandebrouck observes that "global perspective and quantification become fundamental" (Vandebrouck, 2011, p.157). Thus, introducing global properties only as universal pointwise may not help the students to properly grasp a global perspective on the involved function. This means that knowing that some properties are valid point by point, for each point of a given interval (universal pointwise perspective), might not imply a full global perspective on the considered function. In order to account for this assertion, an example will be shown below in our analysis.

Through the lens of perspectives, we can better describe the general work done on functions in Algebra and Calculus domains. Within the Algebra domain, at least in Italy, it may not be explicit that the work is on functions, although every given literal expression could be the analytic expression of a certain function. Thus, one deals with a universal pointwise perspective, since the properties or the algebraic expressions are conceived valid for each *x* of the domain of definition. The work in Calculus domain involves pointwise and global perspectives on functions, and for the first time within the teaching of functions, also local implications are considered. We will illustrate below how perspectives can help clarifying that the process of genericization can be seen as a shift from a pointwise to a universal pointwise perspective on the involved function.

In our research, two important indicators of the way of thinking about an object, and so of the perspective adopted on it, are the praxeologies developed with a particular type of task involving the object and the semiotic resources activated in the solution.

Praxeologies are a basic construct in the *Thèorie Anthropologique du Didactique* by Chevallard (Chevallard, 1992): they describe the set of practices used for solving a certain type of task. A praxeology is composed of four elements: a type of task, a technique to solve it, a technology that is a justification of the used technique and a theory in which the technology finds justification.

Moreover, an implicit perspective can be revealed also by the semiotic resources that one activates for facing the posed problem, for finding a technique to solve it, for justifying or rejecting processes of reasoning and for showing theoretical properties of the object in question. Within the theory of the *semiotic bundle* (Arzarello, 2006), different semiotic resources, such as speech, gestures, written signs (drawings, sketches, symbols, …), are simultaneously and interactively activated while doing mathematics.

RESEARCH OBJECTIVE AND METHODOLOGY

As said before, the aim of this paper is to describe and analyse the process of genericization in Analysis, and our research approach is based on the idea of generic. In particular, we want to study the practice and the acquisition of the process of genericization in a secondary school context, so within the study of Calculus. Our focus is on the teacher's role in this dynamics and the question we ask is *How do teachers manage this process with their students?*[3] In this sense, the present study is linked to one of the aims, which Kuzniak (2011) highlights as fundamental for systematically exploring and describing a mathematical working space: "[Ces outils doivent permettre] la description des enjeux épistémologiques et didactiques propres à chaque domaine mathématique en relation avec une approche par paradigmes" (Kuzniak, 2011, p.22).

We chose the specific topic of the derivative and we observed the practices of three Italian teachers. We interviewed each teacher, and then we video-recorded during their lessons with 13th grade students (18-19 years old, last year of secondary school). In our analysis, we are interested in the types of praxeologies the teachers build and develop in class and the types of semiotic resources that are used. Indeed, this could certainly have effects on the perspectives adopted by students on a function and its derivatives.

By following Chevallard's "method of didactic moments" (Chevallard, 1999) to analyse teachers' didactic praxeologies, our focus is on three of his six didactic moments. More precisely, we are interested in the moment of the first significant meeting with a particular type of task, the moment of exploration of the type of task and of construction of a technique for it, and finally the technological-theoretical moment. We chose to analyse the teacher facing a specific type of task triggering the idea of generic: algebraically representing the derivative function. Every teacher finds herself to deal with this type of task during the lessons and they have all just defined the derivative of a function f in a point x_0, so they all start from a pointwise perspective on f'.

The analysis of the teachers' practices is based on perspectives in terms of both praxeology components and semiotic resources. More precisely, we are interested in

- the pointwise, global or local character of the given type of task, of the employed technique and of the proposed justification, as well as the articulation between them;
- the role of the chosen semiotic resources in highlighting the pointwise, global or local perspective on the involved functions.

TWO EXAMPLES OF TEACHERS' PRACTICES WITH THE IDEA OF GENERIC

The case of teacher T1

T1 has just introduced the derivative of a function *f* in a point x_0 as the limit of the incremental ratio of *f* as the increment *h* goes to 0 (Fig. 1), starting from the problem of the tangent.

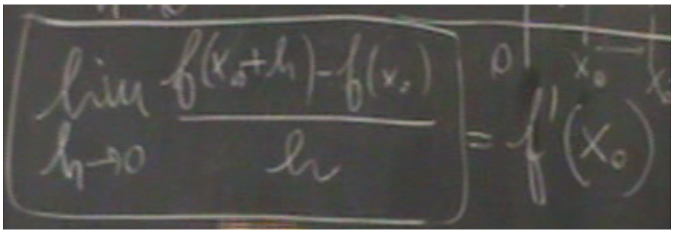


Figure 1: T1's technique for the derivative of a function *f* in a point x_0.

The teacher proposes to work on an example, in order to practice the new technique. She gives and solves the following task: determining the derivative of the function $y=x^2$ in the point of abscissa $x_0=2$. She uses the technique in Fig. 1 and finally finds $f'(2)=4$. Notice that the given task and the technique used for solving it are pointwise on the function f'. Here is how she comments the exercise and introduces the following one (in the transcript, Sn stands for the student n).

1 T1: Now, summarizing, what have we done? The concept of derivative, but calculated in a point. (*She points to an imaginary point in front of her, with her left hand, Fig. 2 on the left*) [...] The derivative of a function in a point, what does it give?

2 S1: A coefficient.

3 T1: A number, exactly. But now let's make a step forward. We have $y = x^2$ and we have calculated the angular coefficient[4] of the tangent line in the point $x_0 = 2$. (*She repeats the same previous gesture with her left hand, as in Fig. 2 on the left*) If I ask you now "What is the value of the angular coefficient in the point with abscissa $x_0 = 5$?" One should again work hard and do all the calculation. Right? In $x_0 = 1$... and so on. (*She turns her hands like something that unrolls*) You see, it's not so convenient, also from a practical point of view.

4 T1: So, what shall I do? The calculation in a generic point *x*. (*She joins the fingers of her right hand and then turns them down on the left palm which is open upwards, Fig. 2 on the right*) Ok? That is I call it *x*, instead of x_0. (*She repeats the same previous gesture with her right hand, as in Fig. 2 on the right*)

5 T1: And now we must be really careful! I call it *x*. Which outcome do I expect?

6 S2: A function.

7 T1: Can it be a number?

8 S3: With *x*.

9 T1: Yes, it will be a function of *x*. So, you understand that we can speak about "derivative function", which will be again a function of *x*.

10 S4: And then we can replace inside it...

11 T1: Perfect! S4 is saying "Of course, then, if I want the coefficient of the tangent in the point $x_0 = 5$, it will be sufficient to put $x = 5$ in the derivative function". Let's do it!

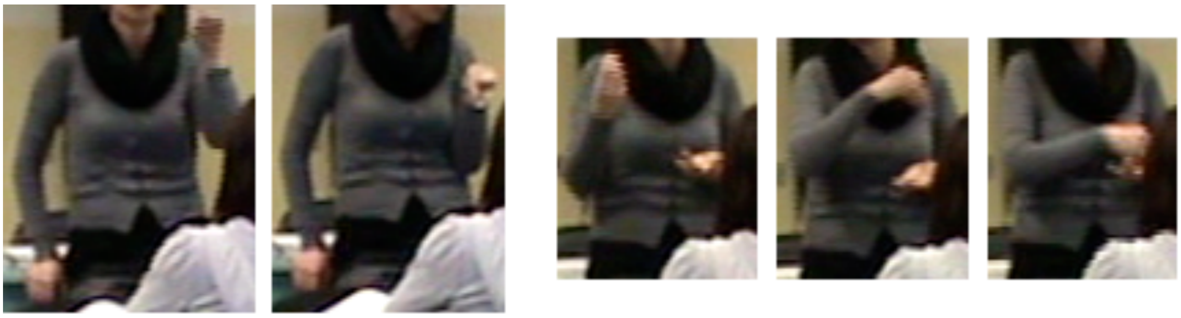


Figure 2: T1's different gestures to indicate "the point x_0" (on the left) [lines 1 and 3] and the "generic point x" (on the right) [line 4].

After this comment, the teacher solves the same task following the same steps with x instead of x_0. She obtains $f'(x)=2x$.

The first utterance and the first gesture used by the teacher [line 1] stress that the starting perspective is pointwise on f'. Then, she underlines that making other numerical examples is actually useless, since every one of these examples ($x_0=5$, $x_0=1$, …) would always entail the same calculations done for $x_0=2$ [line 3]. The case of $x_0=2$ is becoming a generic example. T1 introduces a semiotic technique: the replacement of x_0 with x [line 4]. The previous argument [line 3] can be seen as a technology for this technique. More precisely, the limits and the non-convenience of a pointwise perspective on f' are the teacher's justification for shifting to the generic sign x, which is universal pointwise. The generic sign x represents "every value of x_0". Even T1's gesture for accompanying the universal pointwise expression "the generic point x" [line 4] is different from the one used before for referring to "the point x_0" [line 1] (see Fig. 2). Finally, the teacher makes the students reflect upon the global expectations on the result [lines 5-9]: $f'(x)$ is expected to be globally a function of x, in which we can replace x with any number we wish [lines 10-11]. In this passage, another technique can be detected for finding out the derivative of f in a particular abscissa: the replacement of x with this abscissa in the expression of $f'(x)$. On the technological side, this technique is supported by the whole previous argument about the derivative function.

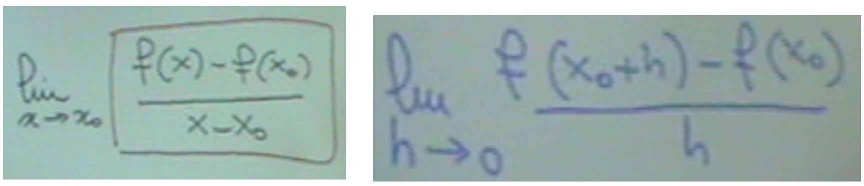


Figure 3: T2's techniques for the derivative of a function f in a point x_0.

The case of teacher T2

During the first lesson, T2 and her students have found the formula of the derivative of a function f in a point x_0, starting from the gradient of the tangent

line to f in x_0. The result is the technique in Fig. 3 (on the left), that is the limit of the incremental ratio of f as x goes to x_0. At the beginning of the third lesson, T2 shows also the equivalent technique for h that goes to zero (Fig. 3 on the right).

Then, T2 gives a task to the students, by saying what follows (in the transcript, Sn marks the intervention of the student n).

1 T2: We are going to calculate the limit of the incremental ratio for the function $f(x) = x^2$. Try and write it on your own. So, try and calculate the derivative for x^2 in any point x_0 of it.

2 S1: Any point?

3 T2: Any point... As usual, let's call it x_0.

Notice that the given task is universal pointwise on f' ["any point x_0", line 1] and the techniques the students dispose of are pointwise on f' (Fig. 3). T2's utterance in line 3 seems to reveal that the class is somehow familiar with the work on generic signs.

The students work alone for a while, the teacher walks through the classroom. When part of the class has solved the task, she makes all the steps at the whiteboard, obtaining $2x_0$. Then, she comments as follows.

4 T2: What have I discovered? I've discovered that when I have the function x^2, its derivative is... point by point... is $2x_0$.

5 T2: So, if I write a function here, and its derivative here (*she starts composing a table f | f' at the blackboard*), I've discovered that the derivative of the function x^2 is $2x$. (*She writes "x^2 | $2x$" in the first row of the table f | f'*) This is an automatic process, because if I have x^2, from this moment on, I won't calculate the limit of the incremental ratio anymore. I know that its derivative is $2x$. I've calculated it once and for all, in the general case of any point x_0, so I have it.

The teacher's first comment is universal pointwise ["point by point", line 4], which actually recalls the character of the given task on f' [lines 1-3]. The sign x_0 is used in a generic sense to represent "any value x_0 of the abscissa". Then, T2 suddenly jumps to a global conclusion [line 5], replacing x_0 with x. This semiotic technique is implicit in the change of variable from line 4 to line 5. T2 uses the table f | f' as a resource to systematize. As for the perspectives however, x_0 is used as a universal pointwise sign, while x has a global meaning. From a technological point of view, at this stage T2 does not make explicit the shift from x_0 to x. It follows an opaque praxeology, whose technique and related technology are only hinted. A student intervenes about this variable change.

6 S2: The independent variable changes from f to f'... Is it x_0 or is it always the same?

7 T2: It is a point x. [...] Let's take $f(x) = x^2$, which I'm able to draw, that is the parabola (*she draws the curve*). What have we discovered and proved? That if I take any point x_0 (*she chooses a point x_0 on the x-axis*), then the angular coefficient of the tangent line in the point of abscissa x_0 [...] is $2x_0$.

So, if I draw the tangent line here (*she traces the tangent in the correspondent point on the parabola*), this straight line has $2x_0$ as angular coefficient (*she writes* $m = 2x_0$).

8 T2: What does it mean? It means that I can make x_0 vary as I want (*she moves her hand forwards and backwards, Fig. 5*)... At this point, I can write x instead of x_0, for convenience.

9 T2: And point by point I have a formula, that is the following (*she writes* $f'(x) = 2x$) which point by point (*she moves the stick as in Fig. 6*) tells me the value of the angular coefficient of the tangent line.

10 S2: $f'(x)$ gives me the angular coefficient...

11 T2: Yes, as x varies. So, the variable is the same. Point by point, here I have a function that point by point automatically, as a machine, tells me the angular coefficient of the tangent line.

12 S2: Only, I don't understand the passage... If we know that m is $2x$, $f(x)$ corresponds to y, while m corresponds to the tangent. How can they be equivalent? I don't understand.

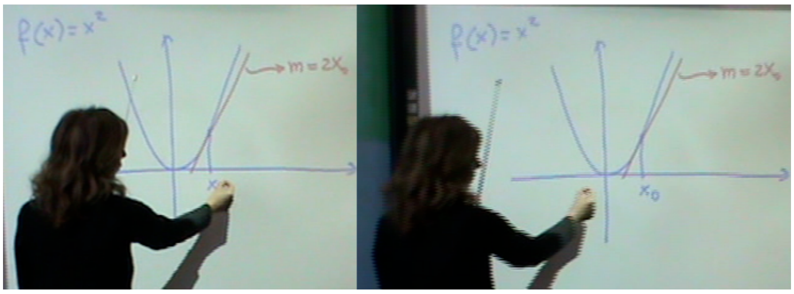


Figure 5: T2's gesture to accompany the words "I can make x_0 vary as I want" [line 8].

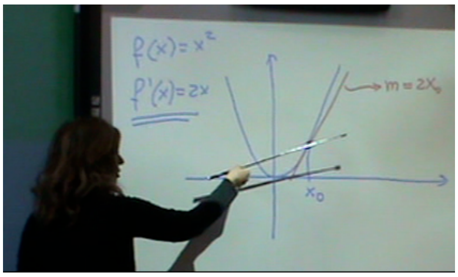


Figure 6: T2's gesture to show the tangent "point by point" [line 9].

As we can infer from S2's intervention [line 6], the opaque praxeology introduced by T2 induces doubts and confusion in the students. The teacher clarifies the generic role of x_0 and justifies, at a technological level, the shift from x_0 to x. Indeed, this change from a universal pointwise perspective to a global one was not so explicit in lines 4-5. T2 starts from stressing the pointwise basic character of the sign x_0, by choosing a particular point on the x-axis and the corresponding one on the parabola $y=x^2$. In order to make explicit the technology, she uses the graphical register as a resource. Then, she says "I can make x_0 vary as I want, so I can call it x" [line 8] and, at the same time, she moves her hand forwards and backwards on x-axis with a continuous gesture (Fig. 5). The previous hint to technology and technique [lines 4-5] is a little bit developed here, though in a very concise way. She justifies her change of x_0 into x (the used technique) as a convenience, since x_0 variation makes useless to specify any index for x. T2's utterance [line 8] and the continuous gesture (Fig. 5), combined together, underline the global aspect of the involved variables. This is the moment in which T2 moves from a universal pointwise perspective to a global one on the algebraic signs. But when she focuses again on the derivative function [line 9], she adopts a universal pointwise perspective ["point by point"] whereas the accompanying gesture (Fig. 6) is continuous and global on the variable x. Thus, we can remark that, in spite of a universal pointwise perspective made global on the sign x, the perspective on the derivative function remains universal pointwise. f' is presented "as a machine" which "point by point automatically tells me the angular coefficient of the tangent line" [line 11]. There is no explicit global reference to the function f'. This can probably explain the new doubt of the student S2 about the status of f' as a function [line 12]. He has a clear global image of the function f, thanks to the graphical register used in the teacher's drawing, but he can't understand how also the angular coefficient m (and so f') could behave like the function f does.

DISCUSSION AND IMPACT ON TEACHING

We have observed and analysed the practices of two teachers working on the derivative function. Notice that in both cases a semiotic genesis has occurred involving the signs x_0 and x in a process of genericization. T1 makes the numerical example become generic and reformulates the starting pointwise task in terms of a generic abscissa x. T2 immediately formulates the task in terms of a generic x_0 and then gives to it the global sense of x. Both praxeologies base their reasoning on a generic abscissa, denoted with x or x_0, in order to obtain a result that is valid as x varies globally.

This genericization on the signs x_0 and x is an algebraic practice that intervenes in the construction of a Calculus praxeology, whose object is the derivative function. How does this process on independent variables influence the work on the dependent variable expressed by $f'(x)$? For answering this question, we use the notion of perspectives. In the two analyzed examples, to the genericization on the independent variable corresponds a shift of perspectives on the derivative function: from pointwise to universal pointwise.

Now, let's recall our initial remark (see the paragraph on Theoretical framework) when we talked about the non-double implication between the universal pointwise perspective and the global perspective. Having constructed a universal pointwise perspective on f' does not automatically imply that this is also global. This passage has to be made explicit by the teacher. We can remark a difference in the work done by the two teachers on the derivative function. T1 explicitly discusses the global implications of the universal pointwise perspective on f': it is a function of the generic variable x [T1, line 9]. Instead, T2 gives a universal pointwise interpretation of the image $f'(x)$ for each point x: it is a formula which point by point gives us the angular coefficient of the tangent line [T2, line 11]. Without any global explicit indications, this work could inhibit the students from adopting a full global perspective on the derivative function.

From this discussion, three remarks turn to be relevant in teachers' Calculus practices. While working on functions, a teacher has to deal with old algebraic techniques and related technologies (such as the genericization), which intervene in the construction of the Calculus praxeologies. This can be a powerful bridge between the Algebra MWS and the Calculus one.

Thus, while the teacher structures the Analysis MWS in her classroom, she has to be very careful with regard to the perspectives activated on the involved functions. In particular, a delicate moment occurs when her goal is introducing the derivative function. Highlighting universal pointwise properties of *f'* in order to make the pointwise perspective evolve is a useful technique. But this may not be enough, at least not for all the students, for constructing a full global perspective on the derivative of a function as a function itself.

Finally, another remark can be on the semiotic resources used by the teacher to support the work in the classroom. Every semiotic resource, whether the user is conscious or not, has a certain potential with respect to a particular perspective. For example, drawing the graph of a function may foster a global perspective on it, and making a continuous gesture on the graph of a function (like T2's gestures in Fig. 5 and 6) may inhibit a pointwise perspective on it, in favor of a global one. But using a semiotic resource that fosters a global perspective may not be enough to obtain its activation, at least not for all the students. Therefore, in the work on functions, it is necessary not only a proper choice of the used resources, but possibly also the combined activation of other resources in order to focus the students' attention on the desired perspective.

In conclusion, perspectives and semiotic resources activated on functions, with attention to their mutual interactions, seem to be two important points in the teacher's management of the so-called *appropriate* Calculus MWS in class.

NOTES

1. This is the original quotation from the English translation we found in Speranza (1996, p.15).
2. "Every" is intentionally used here. We use "for each point" to stress the idea of the points taken one by one, but without a certain global image of the whole (universal pointwise, but not global). On the contrary, we use "for every point" to underline the idea of the whole in each of its parts (universal pointwise and also global).
3. This is a sub-question of the main research question of the theme 3: "This new topic deals with the role of the teachers and the interactions when forming a consistent but also efficient ETM. How to manage the interactions around the mathematical work in the classroom?"
4. In Italian, the coefficient of x in the equation $y = m\,x + q$ is called "coefficiente angolare", with reference to the property $m = \tan \alpha$, where α is the angle that the line forms with the positive direction of x-axis. Normally, an Italian teacher and her students refer to m as "coefficiente angolare" since the first time they study a straight line in the Cartesian plane (first year of upper secondary school). Although the slope of a line is strictly related to the angle which it forms with the x-axis, the name used partially hides this relation and students usually don't link, or at

least not directly, the *m*-value with the slope of the line. We think that the name used in Italian can evoke a certain mental image, different from the image linked to the English word "gradient" or the French word "coefficient directeur" for example, and we believe that this fact can actually influence the mathematical discussion and activity in classroom. For this reason, in the transcript we will use the literal translation "angular coefficient", instead of the correct English word "gradient".

REFERENCES

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(1), 267–300.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73–112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221–265.

Enriques, F., & Chisini, O. (1915). Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. Zanichelli, Bologna.

Kuhn, T. S. (1969). La struttura delle rivoluzioni scientifiche. Torino: Einaudi.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9–24.

Leron, U. & Zaslavsky, O. (2009). Generic proving: unpacking the main ideas of a proof. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*, pp. 297-297. Thessaloniki, Greece: PME.

Locke, J. (1690). *Essay concerning humane understanding*, it. tr. "Saggio sull'intelletto umano", UTET, Torino.

Rogalski, M. (2008). Les rapports entre local et global: Mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In L. Viennot (Ed.), *Didactique, Épistémologie et Histoire Des Sciences* (pp. 61–87). Paris: PUF.

Speranza, F. (1996). "Il triangolo qualunque" è un qualunque triangolo? *L'Educazione Matematica*, *17*, 13–27.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *16*, 149–185.

Van der Waerden, B. L. (1926). Zur Nullstellentheorie der Polynomideale, *Mathematische Annalen 96*(2), 183–208. En. tr. in Schappacher, N. (2007). A historical sketch of BL van der Waerden's work in algebraic geometry: 1926–1946. *Episodes in the history of modern algebra (1800-1950). Providence, RI: American Mathematical Society*, 245-283.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank the teacher Valeria Andriano and 5^E's students (academic year 2012-2013, Liceo Scientifico "G. Ferraris", Torino), and the teacher Milda

Gasparetto and 5^B's students (academic year 2012-2013, Liceo Scientifico "G. Arimondi", Savigliano) for their kind collaboration and availability.

LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DE LOS ÁNGULOS

Olimpia Figueras, Patricia Flores y François Pluvinage

Cinvestav UPN México

En México el estudio de los ángulos se inicia en el cuarto grado de educación primaria. Su complejidad implica que el Espacio de trabajo matemático apropiado expresado en los materiales oficiales encuentre correspondencia con el Espacio de trabajo matemático de referencia del maestro para que esta correspondencia contribuya significativamente a la construcción del Espacio de trabajo individual de los alumnos.

INTRODUCCIÓN

Para la escuela primaria el espacio de trabajo matemático apropiado expresado tanto en el plan y programas de estudio como en los diferentes materiales de trabajo, sienta las bases y puntos de referencia tanto conceptuales como cognitivos para la construcción del concepto de ángulo.

Como refiere Freudenthal (1983) algunos conceptos matemáticos parecen estar muy cerca del mundo físico, los ángulos están presentes en la cotidianidad, sin embargo, el concepto de ángulo compromete propiedades que no son tan evidentes, lo cual se hace patente en las diferentes maneras de definirlo como refieren Mitchelmore y White (1998) y Casas y Luengo (2005) quienes coinciden en que las definiciones más comunes se pueden clasificar en tres categorías: ángulo como región del espacio, como una unión de dos rayos que terminan en un punto común o como un giro.

Tales definiciones tienen sentido en contextos diferentes, como son los ángulos de polígonos que por ejemplo dan lugar al resultado bien conocido de la suma de los ángulos de un triángulo, o los ángulos de cambios de dirección que dan lugar en óptica a la ley de la refracción, o el ángulo como una región que obtenemos al cortar un pastel o cuando se considera la intersección de dos semiplanos.

En México en las últimas cuatro décadas, han tenido lugar tres reformas a la educación primaria[49], Cabe mencionar que tanto en las lecciones de los libros de texto de matemáticas en los años 70 como en las de los años 90 el ángulo se ha estudiado como giro. Sin embargo, la manera en como se propone a los maestros facilitar a los alumnos su comprensión, es diferente. En los años 70 en las lecciones se proponía que los alumnos leyeran y trazaran diversos ángulos para luego vincular su estudio a las propiedades de polígonos. En las lecciones de los libros de los años 90 se propone como introducción al estudio de los ángulos un juego que implica simular girar de un

[49] La reforma de los años 70 y la reforma de los años 90 presentaban en los libros de texto gratuito lecciones con los diversos contenidos escolares y en algunos casos el enfoque de las lecciones cambiaron. Actualmente se lleva a cabo una reforma educativa en la educación básica cuyos libros de texto se están elaborando.

lugar a otro para luego leer, medir y trazar ángulos para posteriormente estudiar los ángulos como propiedades de polígonos.

Uno de los casos que se presentan en este trabajo hace evidente cómo la introducción del ángulo como giro no resulta evidente para la docente y el ángulo en este contexto, no tiene cabida en su ETM de referencia.

También se presenta la experiencia de otra docente que propone a sus alumnos estudiar el ángulo como giro con base en diferentes experiencias y así enriquecer la comprensión de los estudiantes.

Con base en la presentación del ángulo como objeto de estudio en la escuela primaria se formuló la siguiente pregunta: ¿Cómo se establece la correspondencia entre los diversos Espacios de Trabajo Matemático (ETM) que confluyen en el salón de clases al estudiar el concepto de ángulo? La cual derivó en el siguiente objetivo: Identificar cómo la propuesta del ETM Apropiado (ETMA) sobre la enseñanza de los ángulos y que se concreta en los libros de texto (ETMA') es interpretada por el docente quien influye en la construcción del ETMI de los alumnos.

MARCO TEÓRICO: ELEMENTOS DE GÉNESIS APROPIADOS PARA LOS ÁNGULOS

En la clase de matemáticas simultáneamente están presentes diferentes ETM, los ya construidos y los que están en construcción; entre los primeros el apropiado (ETMA) también llamado idóneo (Kuzniak y Richard 2013) que se traduce en el ETMA' actividades y ejercicios plasmados en los libros de texto y materiales institucionales. Los ETM en construcción son los personales del maestro y de los alumnos a los que consideramos individuales (ETMI).

Los ETM se construyen con base en el conocimiento matemático y la experiencia, por ello su organización remite a dos planos: el epistemológico y el cognitivo (Kuzniak, 2011).

Con respecto a los ángulos, en la escuela primaria, el plano epistemológico implica el estudio de sus propiedades y sus elementos; este plano se articula con el plano cognitivo con base en la visualización, la construcción y la argumentación al considerar su identificación en diferentes situaciones. En este sentido la comunicación de las acciones es indispensable.

Al ser el objeto de la clase el estudio del ángulo, es particularmente interesante observar cómo se teje la relación entre la naturaleza epistemológica de los ángulos, los referentes cognitivos con los que se pretende facilitar su aprendizaje y la naturaleza cognitiva de quienes resuelven tareas con él. Este contenido es parte de la construcción del espacio de trabajo geométrico (ETG) en estudio de los ángulos se apega al paradigma de Geometría I o natural, que como explican Houdement y Kuzniak (2006) ya que implica que los alumnos pongan en juego su intuición para luego hacer una abstracción de la realidad, tal proceder se ubica en el nivel de la educación primaria.

La complejidad del objeto matemático 'ángulo' demanda del maestro claridad sobre qué es y cómo se mide, así como sobre las dificultades que implica su comprensión por parte de los alumnos y por lo tanto sobre su enseñanza. López (1987) expresa que este concepto exige un trabajo cognitivamente distinto al de la enseñanza de longitudes, áreas y volúmenes que se entrelazan con la aritmética usual. El autor menciona algunas de las características de los ángulos que rompen con la lógica de otros objetos matemáticos estudiados:

- Un ángulo puede ser 'agrandado' sin que cambie su medida;
- La figura del ángulo es potencialmente infinita (pero con medida finita).
- Con frecuencia la figura no determina unívocamente el ángulo (página 25).

Por ello se espera que con las actividades propuestas en los libros el maestro con base en la intuición de los alumnos promueva la comprensión sobre la idea de ángulo.

En la escuela primaria mexicana el estudio de este concepto se inicia en el cuarto grado y su construcción implica que el maestro lleve a cabo una serie de tareas que ayuden a su comprensión[50]. Los documentos oficiales (plan y programas de estudio, libros para el maestro, libros de texto y ficheros de actividades para los alumnos) constituyen la expresión del espacio de trabajo matemático apropiado ETMA que se particulariza en la construcción del ETG.

Para que los niños estudien qué son los ángulos en el libro de texto de cuarto grado hay tres lecciones y en el fichero de actividades hay dos fichas de trabajo, en quinto grado no hay lecciones el libro de texto pero hay cuatro fichas de trabajo y en sexto grado aparece el tema como repaso.

En el Plan de estudios para la escuela primaria se propone que los alumnos estudien los ángulos cuando:

- Comparen ángulos, en forma directa y con intermediario.
- Usen el transportador en la medición de ángulos.
- Clasifiquen figuras geométricas a partir del número de lados, número de lados iguales, ángulos iguales y número de ejes de simetría.
- Reconozcan diferentes triángulos respecto a sus lados y ángulos. (SEP 1999).

En el libro para el maestro se apunta lo siguiente respecto al estudio de los ángulos:

> La noción de ángulo y su medida es un aspecto que por primera vez se introduce en el libro de texto de cuarto grado. La idea que se maneja en éste es que los ángulos se describen cuando se realizan giros. La medición se inicia considerando giros menores de una vuelta. Cada giro se describe entre una línea de salida y una de llegada (sic). (…) En este nivel se utiliza la palabra grado más que su símbolo (SEP. 1999).

[50] Actualmente en México hay una reforma del Plan, programas de estudio y libros de texto de matemáticas, las lecciones refeidas estuvieron vigentes hasta el año 20011.

METODOLOGÍA

La investigación que aquí se reporta es parte de un estudio longitudinal en el que durante año y medio se observaron clases de matemáticas de maestros de primaria en servicio, del cual se retoman dos estudios de caso en los que se evidencian los enlaces entre los distintos ETM implicados sobre el estudio de los ángulos.

El primer caso refiere la experiencia de una maestra que tiene a su cargo un grupo de cuarto año que inicia con el estudio del ángulo y su medida. El segundo caso es sobre una clase de sexto grado en el aula de cómputo en la que la maestra propone una ruta diferente a la propuesta en las lecciones propuestas por los diseñadores en los libros de texto (ETMA').

Las clases fueron grabadas en video, se utilizó la observación no participante, un registro de campo para complementar los datos y al finalizar las clases las docentes fueron entrevistadas.

Para el análisis de los datos se siguió la siguiente ruta:

- Analizar la lección del libro de texto motivo de la clase.
- Elegir fragmentos de clase a manera de episodios que dan cuenta de significados y sentidos de las relaciones entre los ETM (el contenido matemático, el maestro y el alumno),
- Entrevistar al docente al término de la clase cuando fue posible con el fin de ampliar la información sobre lo sucedido en clase.
- Discutir los resultados del análisis y de los hallazgos encontrados en esta fase del estudio con expertos en matemática educativa con el fin de triangular el análisis.

En los dos casos referidos el Espacio de trabajo matemático de referencia (ETMR) de los maestros juega un papel decisivo en la construcción del Espacio de Trabajo Geométrico Individual (ETGI) de los alumnos.

LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO EN LA ENSEÑANZA DE LOS ÁNGULOS

El estudio de los ángulos se inicia con base en una propuesta dinámica: los giros, y se esperaría que implicara la actividad motriz del alumno para favorecer la comprensión del concepto desde una perspectiva intuitiva.

A continuación se presentan los episodios más representativos de los casos referidos.

Caso 1 Primer acercamiento al estudio de los ángulos

La Figura 1 es parte de la lección con la que se inicia el estudio de los ángulos, se propone un juego cuya base para avanzar son los giros con el propósito de que los alumnos comiencen a relacionar los giros con los ángulos y las fracciones de vuelta con su medida. La circunferencia trazada es el soporte para la orientación de los giros y la intersección entre los lados de los ángulos será el origen de los mismos; la figura se utiliza como introducción al uso del transportador, ya que posteriormente con ella se medirá la amplitud de los giros y se dará pie a la construcción de diferentes ángulos.

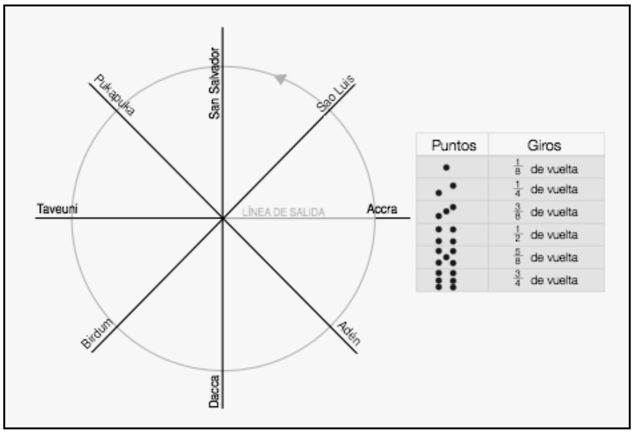


Figura 1. ‘La vuelta al mundo’,

Primera lección libro para el alumno de cuarto grado SEP (1999).

Con este juego se pretende favorecer una relación significativa entre el nivel epistemológico del contenido y el cognitivo de los alumnos.

Para la profesora el estudio de los ángulos es un reto y seguir con sentido las estrategias propuestas en el ETMA’ un conflicto porque para ella el juego no tiene relación con el estudio de los ángulos.

En este sentido el ETM de referencia de la maestra es un filtro para comunicar el sentido de los mensajes educativos del ETMA’ e influye en la construcción del ETMI de los alumnos.

Al ser la primera vez que se estudian los ángulos, los alumnos no cuentan con saberes que les sirvan como organizadores previos para la comprensión de la noción de ángulo. La interpretación de la lección por parte de la maestra juega un papel primordial ya que es un filtro para comunicar el sentido de los mensajes educativos del ETMA’ y de ésta depende que los alumnos empiecen a construir su Espacio de trabajo Matemático Individual y particularmente su Espacio de Trabajo Geométrico.

En la propuesta del ETMA’ se da por hecho una sola posibilidad de interpretación de la lección y que la secuencia propuesta lleva inequívocamente a la construcción del significado deseado, pero en la realidad de la clase se observa la confluencia de diversas interpretaciones.

Al inicio de la clase la profesora organiza la participación de los alumnos para que, antes de iniciar el juego, lean las reglas del juego, observen el tablero con el puntaje, hagan algunos ejemplos y respondan las preguntas propuestas en el libro de texto.

Durante las participaciones se revela la interpretación de la profesora y cómo ésta la comunica e influye en las respuestas de los niños.

Maestra: Para un punto. Si en mi dado me sale un punto ¿cuánto debo girar? [dibuja en el pizarrón dos segmentos que convergen en el punto de origen].

Niño: Un octavo de vuelta.

Maestra: Bueno está Accra aquí. [escribe la palabra Accra al final de uno de los segmentos trazados en el pizarrón] Aquí está la salida [señala el segmento de partida] ¿A dónde llego, si sale el punto número uno y tengo que avanzar 1/8 de vuelta?

Niña: A Aden.

Maestra: ¿A Aden? Si tienes que girar a la izquierda, ¿En Aden?

Niña: ¡Ah no! a Sao Luis.

Maestra: ¿Por qué ahí es 1/8? [la maestra dibuja la circunferencia como si fuera una vuelta completa con la flecha de dirección del giro] ¿Por qué Sao Luis es 1/8? Bueno, está dividido más o menos así [traza rayos que tocan la circunferencia formando ocho partes] ¿sí? De aquí para acá [señala en la circunferencia] ¿qué parte representa de todo el círculo?

Niño: Un octavo.

Como puede apreciarse la docente no se da cuenta de las ideas que subyacen al juego: el ángulo como giro, las medidas de la amplitud del giro como partes de vuelta, la orientación del giro y la introducción del transportador como la herramienta de medición de los ángulos.

Para la docente esta parte de la lección no tiene relación con el estudio de los ángulos ya que ella tiene como referencia el ángulo como región en una concepción estática del mismo, de esta forma la lección sobre ángulos comienza hasta la segunda parte de la misma en la que hay la representación que conoce sobre ángulos. En el fragmento seleccionado se observa cómo la maestra al principio sí se refiere al giro como parte de vuelta y los alumnos también; sin embargo, cuando la maestra propone que se explique por qué un giro equivale a un octavo, la visualización se centra en el círculo y los rayos que forman los lados de los ángulos son las divisiones correspondientes a los ocho sectores que lo dividen. Como consecuencia los giros como partes de vuelta no tienen sentido y cobran relevancia las partes del círculo.

Al finalizar la clase la profesora manifestó

Maestra: Para mí el reto fue trabajar la noción de ángulo (…) en esta parte de la lección [Figura 1] no veo que se trabaje, bueno, yo no lo veo, y en lo de abajo sí [segunda página de la lección]".

Como puede apreciarse la docente no 've' la relación del juego con el estudio de los ángulos, para ella el contenido cobra sentido hasta la segunda parte de la lección y en la segunda lección sobre el tema en la que aparece la palabra ángulo y el grado como unidad de medida.

Para la maestra esta parte tiene relación con las fracciones y algunas equivalencias por lo que su intervención está ligada a esta idea.

Maestra: No puse la noción de ángulo [como objetivo de la lección en la planeación] porque yo tenía conflicto de cómo pasar a la noción de ángulo a partir de identificar las partes en que se encuentra dividido el círculo y girar un cuarto, un octavo, un medio, tres cuartos. Como objetivo de la clase yo escribí: que los alumnos reconocieran en la circunferencia las partes en que estaba dividida y hacer la equivalencia entre cuartos, medios e ir avanzando según los puntos. Cuando leí la lección pensé: como que de ángulo no me brinda mucho.

Cabe señalar que en el libro de texto, el diseño de la representación de los giros en el tablero favorece que tanto la docente como los alumnos se remitan a fracciones porque ellos asocian el círculo y sus secciones con la partición de un entero. Además la tabla que muestra la equivalencia de los puntos del dado con la medida de los giros, resulta poco útil ya promueve que los alumnos no tomen en cuenta el valor del giro pues les bastar fijarse en los puntos obtenidos en la tirada del dado para avanzar en los sectores del círculo a manera de casillas.

Se puede afirmar que en esta experiencia el diseño de la lección (ETMA') no resultó claro para lograr los propósitos enunciados en el ETMA. Se propone un acercamiento intuitivo a partir de una concepción dinámica de ángulo, un giro, pero paradójicamente el diseño de la lección lleva a entrar en una experiencia estática de trasladar una ficha de un sector a otro. Los alumnos se implican en la actividad pero no hacen ningún tipo de reflexión propiciada por el docente sobre el estudio de los ángulos. Por otra parte, se observó que no hay correspondencia conceptual entre propuesta institucional y lo que el docente concibe como ángulo por lo que la estrategia didáctica del juego se utiliza como ejercicio de repaso sobre fracciones equivalentes.

Por lo anterior no se concretaron los propósitos de la lección con respecto a promover la actividad de los alumnos para que :

- Intuitivamente concibieran el ángulo como giro sobre una circunferencia.
- Utilizaran sus conocimientos de los alumnos de las fracciones 1/8, 1/2, 1/4 y 3/4; como transición a la unidad de medida: grado.
- Utilizaran el tablero como introducción al uso del transportador.

En la Figura 2 se muestra las relaciones con respecto a la interacción entre los ETM de los protagonistas y la propuesta institucional ETMA y ETMA'.

Al finalizar la clase, en la entrevista, al preguntar a la docente qué aprendieron los alumnos refirió:

Maestra: (…) Yo creo que los niños no hacían referencia a que se avanzó, a que se giró y yo siento que la clase era hacer más énfasis en eso. en que se girara, que se iba avanzando hacia un lado (…) y yo tampoco reafirmé esa parte, no la retomé. Yo también me fui a la partición y no cerré bien esa parte. Seguro lo voy a retomar después. Sí busqué información, pero no encontré nada con relación al inicio, viendo las dificultades voy a trabajar con más ejercicios, a identificar los giros de un medio, un cuarto y un octavo a partir de lo que es la circunferencia como unidad y de ahí trabajar con eso y con la plantilla [el transportador que se sugiere utilizar en la lección] ya la hice en plástico transparente para cada uno.

Con base en el diálogo con el entrevistador, la profesora toma consciencia del sentido del juego con respecto al estudio de los ángulos, lo cual influye en la actuación del profesor para mediar la actividad matemática en la siguiente clase.

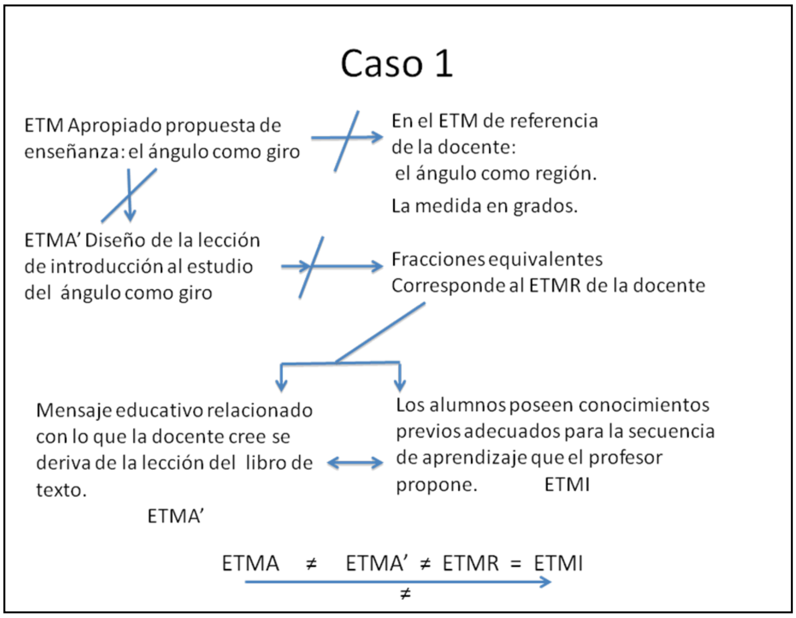


Figura 2. Confluencia entre los ETM sobre el estudio de los ángulos primera lección

Con la segunda lección, la profesora sigue las tareas de la misma, la primera tarea consiste en que los alumnos reflexionen sobre por qué la longitud de los lados del ángulo no afecta la medición del giro (ver Figura 3).

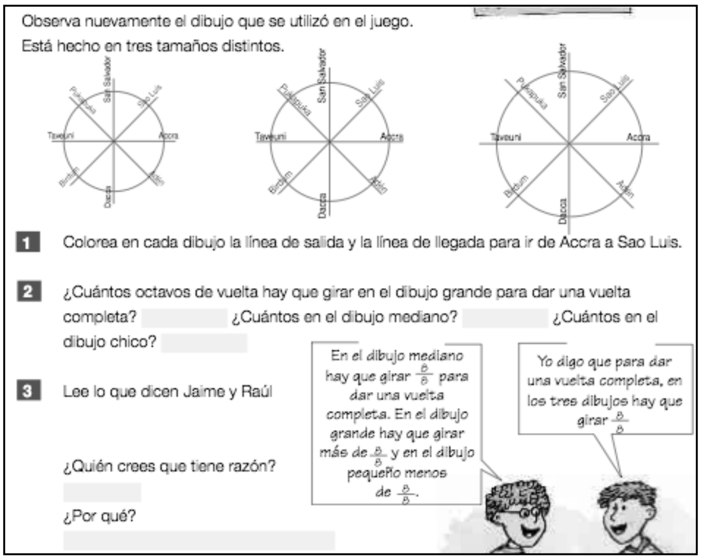


Figura 3. Reflexión la medición del giro y la longitud de los lados del ángulo. Segunda lección libro para el alumno de cuarto grado SEP (1999).

Al respecto en el libro para el maestro se hace esta sugerencia:

> En la lección 10 ante la pregunta ¿cuál de los siguientes ángulos mide más? (Ver Figura 3) Seguramente muchos niños pensarán que mide más el ángulo que tiene los lados más largos. Es necesario que el maestro propicie la discusión sobre este aspecto y haga notar que los dos ángulos miden lo mismo porque ambos se generan como un giro de 1/4 de vuelta (SEP. 1999).

Como puede apreciarse la sugerencia es una advertencia sobre una posible dificultad generada a partir de la visualización de los alumnos del tamaño de los lados de los ángulos pero la propuesta sobre cómo puede el profesor propiciar la reflexión y evitar la dificultad no es clara.

Al respecto la maestra se limita a guiar a los niños para que se refieran al giro como partes de vuelta sobre la circunferencia y que no se refieran a él como partes del círculo, en este sentido nótese (Figura 3) que la dirección de la vuelta no está señalada y que se ven círculos traspasados por segmentos.

En clase los niños concluyen que en todos los tableros tienen que girar lo mismo para dar una vuelta completa, porque la manera en que están divididos son octavos. La docente se remite nuevamente a la partición del círculo porque la visualización lo sugiere.

Maestra: ¿Por qué creen que Raúl tiene razón? Él dice que para dar una vuelta completa en los tres dibujos hay que girar ocho octavos, que en todos es lo mismo, ¿por qué? (ver Figura 3).

Niño: Porque son octavos.

Niña: Porque tienen que girar ocho octavos de vuelta.

Maestra: Están divididos en ocho octavos y no importa el tamaño que tengan los dibujos, nos vamos a fijar en los giros. Si pudiéramos encimarlos veríamos que la cantidad de giro es la misma aunque el círculo sea grande o pequeño, recuerden que estamos girando y a estos giros les llamaremos ángulos.

Los alumnos y la profesora aún tienen dificultades para distanciarse de la partición del círculo en sectores, no hay evidencia que haya una cabal comprensión de por qué si hay diferencias de tamaño de los dibujos que representan el tablero no las haya en el tamaño de los giros. La maestra menciona una posible estrategia para experimentar y comprobar que los giros son iguales independientemente del tamaño de los lados de los ángulos, pero no la llevan a cabo, la propuesta de una concepción dinámica del giro se estudia sobre tareas estáticas y representaciones poco favorables a la intuición sobre la idea de ángulo.

Para el docente fue una experiencia que le causó contrariedad, pues su ETMR entró en conflicto con el ETMA' y porque las orientaciones didácticas son pocas sobre una noción que no es fácil de iniciar y sobre la que los saberes sobre otros contenidos escolares pueden causar confusión.

Para la docente el giro es una estrategia didáctica no es un manera de concebir el ángulo y el contexto propuesto no la favorece. La interpretación que la profesora hace de las tareas que los alumnos llevan a cabo, influye en su manera de enseñar qué es un ángulo y cómo se mide. Ella siente la necesidad de procurar que los alumnos se apoyen en lo que saben pero se enfrenta a que la enseñanza de este contenido requiere tratamientos diferentes a los ya estudiados. Tal parece que la docente tiene una concepción de ángulo como definición escolar y no tiene experiencias en estudiar los ángulos en diversos contextos.

Caso 2 Alternativa para la comprensión del ángulo como giro

El segundo caso que se presenta es sobre la experiencia de una docente que tiene a su cargo la sala de cómputo y sus clases se caracterizan por tratar temas para ayudar a los niños a comprender mejor lo visto en clase de matemáticas con sus respectivos maestros. De esta manera la maestra puede apegarse o no a las propuestas del ETMA y ETMA' y repasar o enriquecer la comprensión de los alumnos sobre diferentes contenidos escolares.

La clase observada es la segunda sobre la idea de ángulo, para iniciar la maestra retoma lo que cuatro niños expresaron en la clase anterior sobre qué es un ángulo:

Maestra: [Anota en el pizarrón lo que dijeron los niños] Gerson dice que un ángulo sirve para medir cuánto tienen de abierto dos líneas, Ana y Sandra dicen que es el giro de una recta y Sara y Aranzazú dicen que es una abertura y que tiene una medida en grados.

Nos tenemos que poner de acuerdo en qué es un ángulo, ustedes hablan de líneas, de giro. Entonces ¿Qué es un ángulo?, ¿es la línea? o ¿es el giro? o ¿es la abertura? Todos coinciden en que se mide en grados. Pero ¿qué es el ángulo?, ¿serán las líneas? [Dibuja en el pizarrón dos segmentos que forman un ángulo] ¿Será la abertura? [Señala la región entre las líneas del ángulo] o es el giro que damos [traza el giro entre las líneas del ángulo con los dedos].

Niño: No son las líneas, Es lo que está entre las líneas.

Maestra: Dice Gerson que las líneas no son.

Niño: Los grados miden lo que está abierto.

Niño: Lo que está abierto entre las dos rectas.

Maestra: Entonces las líneas no son, vamos a ver esto [pega en el pizarrón una lámina] Pedro léelo por favor.

Niño: Cuando se hace un giro se describe un ángulo.

Maestra: Estamos hablando como dicen ustedes de la abertura ¿verdad? Cuando hacemos un giro estamos describiendo el ángulo, como dice él la abertura. La primera actividad la vamos a hacer con las máquinas, tenemos un juego llamado 'Atrapa meteoritos' en el que vamos a tener dos situaciones. En la primera vamos a estimar cuánto tiene que girar el radar para poder atinarle al meteorito, en la segunda situación ustedes van a colocar el meteorito; por ejemplo: Juan va a colocar el meteorito y Manuel tiene que ver a cuántos grados se encuentra para poderlo derribar (Figura 4).

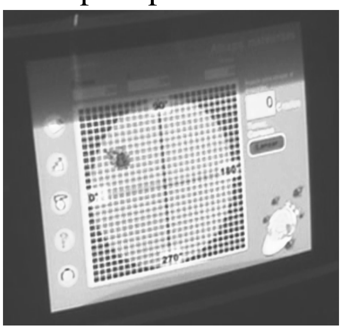


Figura 4. Primer juego 'Derriba al meteorito'

De entrada la docente promueve que los niños expresen lo que saben sobre qué es un ángulo, como puede apreciarse los niños tienen información del ángulo no sólo como giro sino como región y que la unidad de medida es el grado, también la profesora promueve la claridad en las expresiones y provoca la desestimación de las líneas como ángulos. Esto evidencia que la maestra tiene un ETG que coincide con el ETMA respecto al planteamiento del ángulo como giro.

El juego que la maestra utiliza para la clase, promueve que los alumnos, trabajen en parejas y consideren el ángulo como giro de una manera dinámica al estimar los grados en que se encuentra el meteoro a derribar. Los alumnos anticipan su respuesta y la comprueban si atrapan el meteorito

En la interacción, al estar jugando se observó que si uno de los miembros del equipo no estimaba de forma correcta, el compañero señalaba el lugar donde tendría que estar colocado el meteorito con base en los grados que mencionó su compañero, de esta manera el juego propició la observación de la posición de los cuadrantes del radar y las medidas de referencia para que con base en ellas estimar la posible posición.

La profesora advierte que puede haber varias respuestas debido a lo grueso del meteoro y los alumnos comprenden esta posibilidad al comparar sus repuestas.

Maestra: (…) Vamos a ver los resultados del segundo.
Niño: doscientos noventa.
Niña: Trescientos.
Niño: Trescientos cinco.
Maestra: Hay varias respuestas porque el meteorito está gordo, entonces en varios lugares lo pueden atrapar.
Niño: Doscientos noventa no puede ser no toca al meteorito.
Maestra: Tiene razón su compañero en doscientos noventa no se toca al meteorito, esa respuesta no puede ser.

Con esta tarea la profesora promueve la observación, la estimación de la medida del ángulo, la comprobación de su estimación.

La maestra propone otra situación para medir los ángulos

Maestra: Ahora trabajaremos con un camino, ustedes creen que si voy en el camino y de repente cambio de ruta ¿utilizamos los ángulos?
Niños: Sííí
Maestra: Bueno aquí tengo un camino señalado con flechas, se señala la salida y la llegada. Aquí hay dos preguntas ¿en qué punto tuvieron que girar más? y ¿en qué punto tuvieron que girar menos? Ojo no es lo mismo que el radar, en esta actividad me tengo que fijar en dónde estamos y a partir de ahí ahora sí cuánto voy a girar. A veces voy a dar un giro muy amplio, casi toda la vuelta. A veces no, sólo voy a dar un giro pequeño. Luego los medimos, primero estimamos y luego los medimos con el instrumento que les di. En qué punto tuvieron que girar más y en qué punto menos [les da una hoja con caminos a recorrer y un transportador hecho con mica,].
(…) Vamos a ver algunos resultados, ahora no estamos como en el meteorito, ahora sí debe ser exacta la medida. (…) El segundo resultado es…
Niño: Doscientos cincuenta
Niño: Doscientos cincuenta y cinco

Maestra: Chequen bien ese porque no hay varios resultados (…).

Niño: Para medirlos hay que colocar bien el centro en el vértice y medir el giro ente los dos lados.

Maestra A ver hemos visto varias situaciones, cuando nosotros hacemos un giro describimos un ángulo y es necesario medirlo pero son varias las situaciones donde necesitamos medir ángulos.

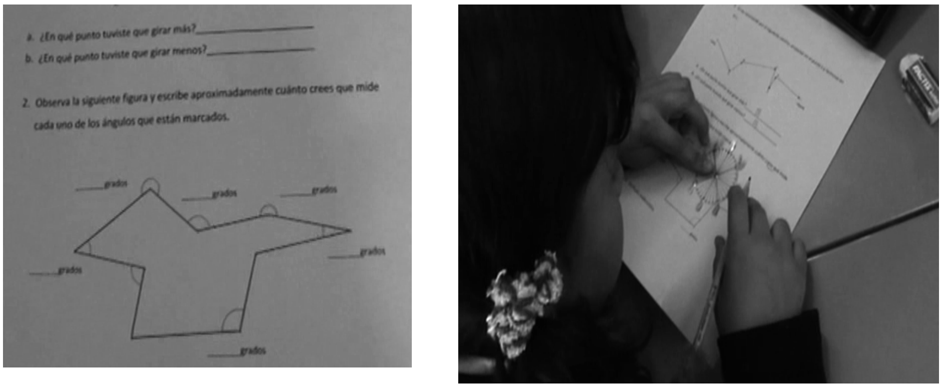


Figura 5. Los caminos y el uso del transportador

El tratamiento didáctico con la docente provee de experiencias a los alumnos es diferente de lo que se propone en el ETMA. La actividad matemática que propicia es que los alumnos estudien los ángulos en dos contextos diferentes pero con base en la idea de giro y los enfrenta a la necesidad de medirlos utilizando el transportador. Es evidente que la maestra tiene un ETG que le da pauta a considerar otro tipo de situaciones donde aplicar el conocimiento de los ángulos y aprovechar lo que ya saben los alumnos para enriquecer su conocimiento.

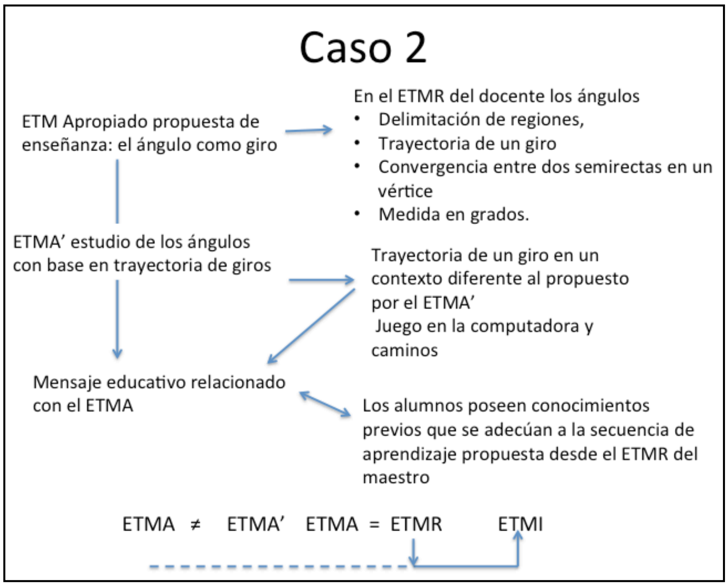


Figura 6. Confluencia entre los ETM sobre el estudio de los ángulos

En la Figura 6 se muestran las relaciones entre los ETM de los protagonistas y la propuesta institucional ETMA y ETMA', la maestra propuso actividades que enriquecieran los ETGI de los alumnos.

REFLEXIÓN Y DISCUSIÓN FINAL

Los dos casos reseñados dan lugar a considerar la necesidad de una mirada crítica tanto a la práctica docente como a lo adecuado de la manera de concretar lo dispuesto en el ETMA.

Es prioritario que en la formación de maestros se reflexione sobre los diferentes ETM presentes en la situación educativa ya que son un marco de análisis útil para la autocrítica de la actividad matemática. Al respecto el conocimiento matemático que el docente ponga en juego será fundamental para tomar distancia de ellos y adaptar y enriquecer la mirada.

Se hace evidente la influencia que tiene el ETM de referencia de los maestros para crear las condiciones para la construcción de un ETMI y un ETG básico de los alumnos para que aprendan más y mejor.

La complejidad que implica el estudio de los ángulos se observa en la propuesta que se dispone en el ETMA y en el ETMA', la propuesta de su tratamiento didáctico añade, además, otros retos para el maestro.

La autonomía del maestro también se apoya en la construcción de un ETMR sólido, que posibilite que los alumnos con base en diferentes experiencias construyan progresivamente los conceptos estudiados y así sea posible que comprendan la aplicación que tienen en cada situación. En los dos casos presentados, confluyeron dos tipos de acercamiento al estudio de los ángulos como giro y como región por lo que surge la siguiente pregunta los diferentes contextos en los que estudian los ángulos ¿Corresponden a ETM diferentes o sólo a marcos teóricos distintos en un mismo referencial: la Geometría Plana Euclidiana?

REFERENCIAS

Casas, L. y Luengo, R. (2005) Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las ciencias*. 23(2), 201-216.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. *Dordrecht*. Netherlands: D. Reidel publishing Co.

Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géometrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 11, 175-193.

Kuzniak, A. y Richard, P. Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. Recuperado de:

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_ES/Relime_Intro_es.pdf

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9 – 24.

López, A. (1987). El problema de las relaciones entre la organicidad del conocimiento matemático y sus didácticas. *Problemas de la enseñanza de las matemáticas*. UNAM-Porrúa. México. 25-27.

Mitchelmore, M y White, P. (1998). Development of angle concepts: a framework for research. *Mathematics education research journal*. 10 (3), 3-27.

Secretaría de Educación Pública. (1999). *Plan y programas de estudio 1993*. Educación Básica Primaria. México: SEP

Secretaría de Educación Pública. (1999). *Matemáticas cuarto grado*. Libro para el maestro. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública. (1999). *Libro para el alumno*. *Matemáticas cuarto grado*. México: SEP.

ETG IDOINES EN FRANCE, EN GRECE ET AU QUEBEC – UNE ETUDE COMPARATIVE SUR LA FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRE

Vincent Beck, Université d'Orléans et MAPMO

Annette Braconne-Michoux, Université de Montréal

Assia Nechache, Université d'Orléans et LDAR ,

Kostas Nikolantonakis, Université de Macédoine Ouest

Laurent Vivier, Université Paris Diderot – LDAR

INTRODUCTION

L'étude vise à comparer les Espaces de Travail Géométrique (Kuzniak, 2006) au cœur des formations initiales des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Elle prolonge celle de Nikolantonakis & Vivier (2014) où une première étude a été menée avec un examen grec proposé pour comparaison à des étudiants français.

Pour cette étude, nous nous appuyons sur un nombre plus important d'étudiants-professeurs (166 grecs et 103 français). Les items sont issus d'un sujet proposé aux étudiants français, sujet extrait d'un sujet du CRPE, hormis deux exercices repris, avec des variations, de la précédente étude (exercices 2 et 3). Pour compléter les analyses, ces deux derniers exercices ont aussi été proposés à 41 étudiants québécois.

Pour chacun des exercices, une grille d'évaluation basée sur une analyse a priori des exercices et permettant une utilisation du logiciel CHIC a été élaborée.

CONTEXTE DE L'ETUDE

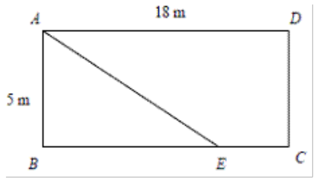
Les étudiants de l'étude se destinent tous à l'enseignement primaire. Les plans de formation des trois pays sont évidemment différents, nous ne les exposons pas ici (pour la France et la Grèce, voir Nikolantonakis & Vivier, 2014).

Le sujet a été proposé aux étudiants français dans les conditions du concours, sur les six centres IUFM de l'académie d'Orléans-Tours et les résultats concernent 103 étudiants. Les items de l'analyse ont été traduits en grec et proposés en examen en première année de l'université pédagogique de Macédoine Ouest. Indépendamment des questions de traduction, certaines questions du problème n'ont pas été posées aux étudiants grecs (tracé de la figure à l'échelle et tableur) puisqu'elles ne correspondent pas à des tâches usuelles du cursus grec. Il est à noter que c'était la première année que l'enseignant assurait cet enseignement (l'enseignant titulaire était en congé).

Au Québec, les exercices 2 et 3 ont été proposés à 41 étudiants de l'Université de Montréal, à la fin du trimestre consacré à la didactique de la géométrie. La démonstration en géométrie au secondaire a pratiquement disparu des pratiques enseignantes au Québec depuis plusieurs années. Ces deux exercices sont donc très éloignés des activités menées au cours du trimestre et des activités que les étudiants ont connu au cours de leur propre scolarité au secondaire.

RETOUR SUR L'ETUDE DE NIKOLANTONAKIS & VIVIER (2014)

Exercice 2 (avec figure) : Soit un rectangle ABCD tel que AB=5m et BC=18 m. Trouver la position du point E sur [BC] telle que l'aire de ADCE soit le double de l'aire de ABE.
Exercice 3 (sans figure) : Dans un triangle ABC, on note M le milieu de [BC] et on considère le point S sur (AM) tel que MS=MA et S≠A. Comparer les longueurs des segments [AB] et [SC].



Comme on pouvait s'y attendre, il y a une baisse de la proportion d'utilisation d'une équation puisqu'il n'y a plus de *x* indiqué sur la figure. Néanmoins, les pourcentages d'utilisation d'une équation restent forts ce qui est un indice d'un ETG idoine pour ce type de problème. Il y a également une baisse de la réussite mais on ne voit pas de lien entre « equ » et « OK » dans les graphes implicatifs. Cet ETG se retrouve en outre chez les étudiants québécois où l'algèbre est massivement utilisé.

On retrouve dans l'exercice 3 une très forte présence de l'ETG autour de l'égalité des triangles en Grèce avec une grande chute, attendue, pour les étudiants français.

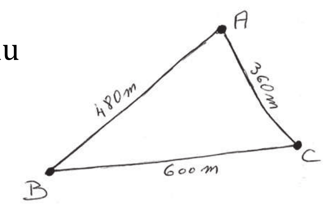
On peut penser que ces deux énoncés sont neutres pour les deux populations FR et GR car ils peuvent s'interpréter dans les ETG idoines des deux pays, même si l'interprétation est différente. En revanche, il ne s'agit pas d'un énoncé neutre pour la population QU car les démonstrations ne sont pas dans l'ETG idoine québécois.

	Exercice 2					Exercice 3				
	NR	**OK**	**equ**	**A/3**	**Surf**	**NR**	**OK**	**EgT**	**Surf**	**Sym**
FR1 (26)	8	81	81	8	/	12	69	54	31	54
GR1 (100)	14	70	85	15	/	12	77	86	0	0
FR (103)	15,5	54,4	64,1	23,3	1,9	16,5	49,5	6,8	42,7	15,5
GR (166)	10,2	44,0	62,0	17,5	3,0	6,6	53,0	88,0	2,4	0,0
QU (41)	0,0	51,2	82,9	46,3	46,3	0,0	73,2	9,8	4,9	0,0

Table 1. Résultats aux exercices 2 et 3

ETUDE DE L'ETG TRIANGLE RECTANGLE ET AIRE

A1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
A2-a) Calculer l'aire du triangle ABC. A2-b) En déduire la distance du point A à la droite (BC).
B1) J est situé à égale distance des points A, B et C.
B1-a) Que représente le point J pour le triangle ABC ?
B1-b) Préciser la position particulière de J dans ce triangle.



Nous étudions dans cette partie un ETG sur les triangles rectangles, aires et théorème de Pythagore avec l'exercice 2 et les premières questions du problème (l'énoncé proposait un contexte de course dans une école, la figure à main levée était donné).

Il avait été noté que pour l'exercice 2, très axé sur le calcul, les deux populations grecque et française présentaient un profil semblable. Hormis la question B, cela est confirmé par les graphiques élaborés par CHIC : l'ETG idoine est très proche dans les aspects calculatoires, aires, théorème de Pythagore. En revanche, pour les caractéristiques géométriques du point J, cela n'est plus le cas puisque cette question nécessite l'introduction du cercle de centre J, un intermédiaire dans le travail. Les résultats sont : centre du cercle circonscrit (66% FR ; 15,7% GR) et milieu de l'hypoténuse (47,4% FR ; 20,5% GR). Or les étudiants grecs connaissent le théorème sur le cercle circonscrit à un triangle rectangle. On peut penser que la différence provient d'un travail géométrique différent et donc d'un ETG idoine différent.

UN ETG COMPLEXE (EX3 ET PB B2 B3)

B2) On place un point K milieu de [AB] et un point I au milieu de [AC]. Montrer que AKJI est un rectangle.
B3) On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Montrer que si on se déplace sur le segment [KI], on reste à égale distance de A et H.

Il s'agit d'un ETG autour de la démonstration dans les triangles qui est *complexe* car il rassemble plusieurs ETG *simples* mais liés : des objets (triangle, rectangle, angles), des notions (équidistance) des théorèmes (droite des milieux et Thalès). Les procédures utilisées par les étudiants (notamment pour B2 et B3) sont nombreuses et les usages contrastés. On relève notamment 1) aucune utilisation de rectangles homothétiques, alors que l'on aurait pu s'y attendre de la part des étudiants grecs, 2) une forte utilisation de la caractérisation par trois angles droits des rectangles en France (42,7%) par rapport à la Grèce (12%) et 3) aucune utilisation de la propriété d'une droite perpendiculaire à deux parallèles en Grèce (contre 13,6% en France).

Globalement, on relève une faible réussite à B2 en Grèce (9% OK, 38,6% NR) contrairement au cas français (49,5% OK, 19,4% NR). La réussite baisse pour B3 et les non réponses augmentent à environ 50% pour les deux populations. Cet ETG *complexe* ne semble pas à portée de la plupart des étudiants grecs.

REFERENCES

Kuzniak, A., (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6.2.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2014). Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve, *RELIME*, 17.3 (accepté).

UN ESPACIOS DE TRABAJO MATEMATICO VIRTUAL EN LA FORMACION INICIAL DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

Miguel Delgado Pineda (UNED), Carlos Armando Cuevas (Cinvestav), Magally Martinez (UAEM)

Si bien la denominación de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) está referida al estudio de la didáctica empleada en un determinado marco físico, lo que interesa es la comprensión de las didácticas empleadas cuando emerge la construcción del conocimiento personal, y del grupo, relativo al trabajo matemático desarrollado en un marco escolar. Aquí presentamos una extensión de esta modalidad de actuaciones al entorno de la Formación Inicial del Profesor. Nuestro marco del Master de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria, pues ésta formación cambió hace poco en España y es muy demandada en México ahora debido a los nuevos programas de estudio. Nuestro objetivo es disponer de una formación práctica e integradora de carácter matemático y didáctico coherente con el trabajo personal. La materia objeto de estudio se corresponde con la Innovación Docente y la Investigación Educativa en áreas matemáticas. Este conocimiento debe ser adquirido por el futuro profesor de Matemáticas si se desea entender la formación profesional como un proceso continuo.

Nuestro ETM está concebido, inicialmente, para entornos con mínima, o nula, disponibilidad presencial de los estudiantes, por ello, se generó durante los últimos cursos académicos. En esta comunicación el estudio se centra en el curso 2012-13 de una universidad no presencial: Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED, España). Sin embargo, se articula para ser explotada de inmediato en cursos de formación de profesores proporcionados en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN (México D. F.). También se experimenta para emplearla en asignaturas matemáticas de grados de la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEM).

Este espacio de trabajo matemático se ubica en la plataforma telemática de enseñanza que acoge a los cursos de UNED, por ello podemos decir que se trata de un ETM Virtual. La principal herramienta telemática de este ATMV lo constituyen foros, y es complementada casi todas las restantes herramientas telemática, destacándose el sistema gestor de videoconferencia integrados en esa plataforma y la gestión de vídeo bajo demanda. A simple vista, el foro de trabajo matemático parece estar organizado para fomentar el trabajo individual aislado de los estudiantes, pues cada estudiante dispone de un hilo personal. En este foro destaca la topología de red estrella de los hilos personales y que crea el profesor. Cualquiera puede consultar un hilo, pero sólo el estudiante y el equipo docente insertar mensajes con ficheros o con simple texto en él. En los cuatro meses de la materia relativa a a la Especialidad de Matemática,s en 2012-13, se activaron 64 hilos personales más otros hilos temáticos, y se acumularon más de 1400 mensajes. Aproximadamente la mitad de los mensajes son contestaciones del profesor. El espacio de trabajo matemático se inicia con una videoconferencia, dos horas, vía IP, del equipo donde se establecen los protocolos de acción y se presentan los primeros retos matemáticos y didácticos que los estudiantes afrontarán. Cada estudiante que debe hacer frente a solventar seis retos de naturaleza didáctica o matemática, y dos trabajos prácticos. Además, se demandaron más videoconferencia, aunque sólo se les ofertó una de dos horas sobre las concepciones visuales de los objetos matemáticos.

Los estudiantes con una formación matemática (ciencia) pero no son expertos en la comunicación matemática, ni poseen estudios de carácter didáctico. Se encuentran de lleno con cómo, con cuantas y con qué cuestiones matemáticas enseñarán en el futuro y con quienes serán sus estudiantes. Inicialmente, a esos estudiantes se les remarca que no recibirán explícitamente doctrina temática alguna. Se les asegura que aprenderán todo lo necesario para desenvolverse en estas materias de cierto talante matemático- social. También, se le resalta la naturaleza matemática de la materia sin menoscabo de otras naturalezas visibles como la social y la psicológicas implícitas en estos saberes.

El estricto control de la estrella de hilos hace emerger en el estudiante la necesidad de colaboración sinérgica. De esta forma cada estudiante adquiere una perspectiva de naturaleza epistemológica de los contenidos matemáticos estudiados y otra de naturaleza cognitiva, consciente del pensamiento que resuelve tareas matemáticas-didácticas , empezando por él y continuando con el otro. En definitiva emerge la necesidad del estudio de las decisiones tanto matemáticas como didácticas y a reflexionar sobre las decisiones ya tomadas. En definitiva se enfrentan a problemas de optimización multiobjetivo, no necesariamente escalares. Si bien el matemático no debe creer una demostración, sino que debe poder recrearla siguiendo la coherencia demostrada por otros, no se debe pensar que un futuro profesor deba "hacer" teorías educativas en el aula si no ha experimentado como estudiante esa teoría. Intentar favorecer el aprendizaje de sus estudiantes mediante ETM requiere cierta experiencia personal, de ahí este ejemplo práctico.

De la experiencia se destaca que los estudiantes se sumergieron a desgana inicialmente, y al poco tiempo, quedaron prendidos de las acciones provocadas por el equipo docente. No se les imponía orden de pensamiento alguno, ni tesis de partida. Sólo se le pedía reflexión, y más reflexión, además de una forma agradable de exponer sus argumentos y trabajos.

Facultad de Ciencias Matemáticas
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Con la colaboración de: