ETM3

Troisième symposium

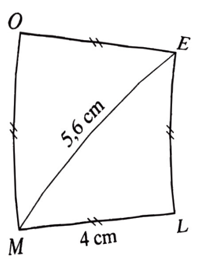
Espace de travail mathématique

24, 25, 26 octobre 2012

Université de Montréal • Pavillon Marie-Victorin

Thématique

1. Le travail mathématique et les ETM
2. Environnements technologiques et travail mathématique
3. Le travail mathématique et les aspects sociaux et institutionnels
4. Visualisation et représentation dans le travail mathématique



OELM est-il un carré?
Is OELM a square?
¿Es OELM un cuadrado?
OELM είναι ένα τετράγωνο?

université PARIS DIDEROT PARIS 7

University of Cyprus

Université de Montréal

turing.scedu.umontreal.ca/etm

ETM3

24, 25 et 26 octobre 2012
à l'Université de Montréal

Actes – Actas - Proceedings

Troisième symposium ETM

Espace de Travail Mathématique

Montréal – Lefkosia – Paris

Comité éditorial

Iliada ELIA – elia.iliada@ucy.ac.cy
Athanasios GAGATSIS – gagatsis@ucy.ac.cy
Fernando HITT – hitt.fernando@uqam.ca
Alain KUZNIAK – kuzniak@math.univ-paris-diderot.fr
Bernard PARZYSZ – parzysz.bernard@wanadoo.fr
Luis RADFORD – lradford@laurentian.ca
Philippe R. RICHARD – philippe.r.richard@umontreal.ca
Laurent VIVIER – laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Sommaire des contributions

Thème 2 – Environnements technologiques et travail mathématique

Responsables : Philippe R. Richard et Laurent Vivier

Thème 3 – Le travail mathématique et les aspects sociaux et institutionnels

Responsables : Fernando Hitt et Luis Radford

Thème 4 – Visualisation et représentation dans le travail mathématique

Responsables : Iliada Elia et Athanasios Gagatsis

université PARIS DIDEROT PARIS 7

University of Cyprus

Université de Montréal

ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE. POINTS DE VUE ET PERSPECTIVES

Alain Kuzniak et Philippe R. Richard
Université Paris Diderot et Université de Montréal

Ces actes du troisième symposium ETM sont consacrés à l'étude, au développement et aux usages possibles de la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) en didactique des mathématiques. Le travail mathématique et son fonctionnement dans le cadre scolaire sont à la base de l'approche par les ETM et, dans cette introduction, avant de présenter l'organisation thématique des contributions, nous résumons cette approche théorique. Celle-ci se propose, de manière non normative, d'enrichir l'étude didactique du travail mathématique des élèves et des professeurs.

1. Une perspective didactique sur le travail mathématique

L'enseignement des mathématiques a connu une profonde remise en question à partir des années soixante et ceci dans le monde entier. Avant cette période, les systèmes scolaires offraient deux types d'enseignement aux citoyens des pays développés. Aux enfants des milieux populaires était proposé un enseignement court et essentiellement utilitariste des mathématiques élémentaires. Les enfants de la bourgeoisie, destinés à prendre en main l'économie et la gestion du pays, avaient la possibilité d'accéder à un enseignement des mathématiques vues comme une école du raisonnement logique. Dans les deux cas, l'élève était placé en position de récepteur d'un savoir dispensé par des maîtres. À partir des années soixante, divers phénomènes ont contribué à changer les points de vue sur le rôle des mathématiques et sur la façon de les enseigner. Sans viser à l'exhaustivité, on peut signaler la réforme des mathématiques modernes, le développement des recherches sur les apprentissages des enfants ou encore, la massification de l'enseignement dans un contexte de concurrence économique et idéologique.

Pour notre propos, nous retiendrons deux profondes caractéristiques des changements qui se sont accentués depuis : d'une part, la mise en évidence de la diversité du travail du mathématicien vu comme l'acteur principal de la progression mathématique et, d'autre part, l'idée pédagogique de promouvoir l'activité de l'élève pour le rendre plus apte à développer ses connaissances dans un contexte de résolution de problèmes. Dans chaque cas, le travail mathématique est au cœur de l'évolution, ce qui conduit logiquement à donner à cette notion une place centrale en didactique des mathématiques.

Le travail auquel nous nous référons porte sur une activité rationnelle orientée vers un but particulier et pouvant s'appuyer ou non sur l'usage d'un certain nombre d'instruments et d'artéfacts spécifiques. En mathématiques, le but de cette activité sera centré sur les objets étudiés par les mathématiciens, « ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques » (Thurston, 1995, p. 29). Nous considérons alors que la recherche didactique doit s'interroger sur ce travail du double point de vue de l'apprentissage par les élèves et de l'organisation de cet apprentissage par le professeur, dans le cadre d'un enseignement favorisant le développement du travail mathématique de l'élève.

2. La notion d'Espace de Travail Mathématique

La notion générale d'Espace de Travail Mathématique (ETM) étend la notion d'espace de travail pour la géométrie, introduite par Kuzniak et Houdement (Kuzniak, 2006) dans l'étude de la didactique de ce domaine. Elle a été mise au point afin d'aider à mieux comprendre les enjeux didactiques autour du travail mathématique dans un cadre scolaire. L'espace ainsi conçu désigne un environnement pensé et organisé pour permettre le travail des individus résolvant des problèmes mathématiques. Dans le cas des mathématiques scolaires, ces individus ne seront généralement pas des experts, mais des élèves ou étudiants, confirmés ou débutants.

De l'étude particulière de la géométrie, nous retenons le principe d'articuler dans l'ETM deux niveaux (Kuzniak, 2011), l'un de nature épistémologique, en rapport étroit avec les contenus mathématiques du domaine étudié, et l'autre, de nature cognitive, qui concerne la pensée du sujet résolvant des tâches mathématiques.

Le travail mathématique résulte alors d'un processus qui va permettre de donner progressivement un sens, d'une part, à chacun des niveaux épistémologique et cognitif et, d'autre part, d'articuler ces deux niveaux grâce à différentes genèses. Dans le cas de la géométrie, l'ensemble du processus a pu être décrit à partir des éléments du diagramme suivant (Fig. 1), mais celui-ci nécessitera certaines modifications pour l'adapter au cadre général des ETM :

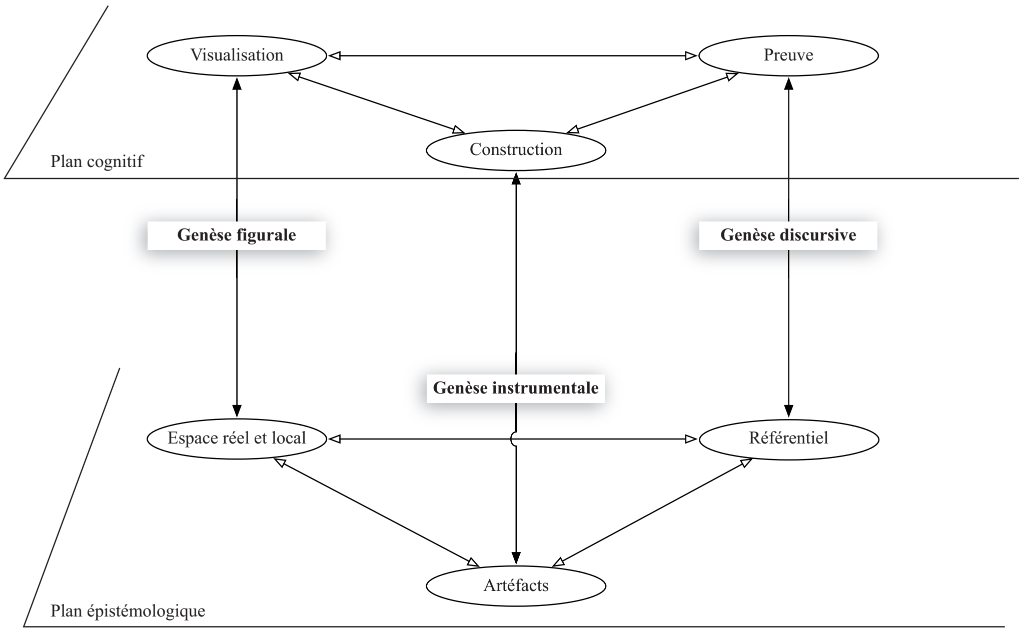


Figure 1 - L'espace de travail géométrique et ses genèses

2.1 Le niveau épistémologique et ses composantes

En ce qui concerne la géométrie, trois composantes en interaction sont caractéristiques de l'activité géométrique dans sa dimension purement mathématique :

– un espace réel et local comme support matériel, avec un ensemble d'objets concrets et tangibles ;
– un ensemble d'artéfacts tels que des instruments de dessin ou des logiciels ;
– un système théorique de référence basé sur des définitions et des propriétés.

Ces composantes ne sont pas juxtaposées, elles doivent être organisées selon un but déterminé qui va dépendre du domaine mathématique dans sa dimension épistémologique. Lorsque l'accent est mis sur le processus d'apprentissage de l'élève dans une situation didactique, ce plan épistémologique peut aussi se considérer comme un *milieu épistémologique* (Coutat et Richard, 2011).

Si les artéfacts et le référentiel théorique restent deux composantes de base de tout plan épistémologique associé à un domaine mathématique particulier, la composante liée à l'espace et aux configurations géométriques doit être modifiée pour l'étendre à d'autres domaines mathématiques. En accord avec une conception des mathématiques fondées sur des représentations sémiotiques qui va au-delà de la seule considération de systèmes de représentation, il semble pertinent d'utiliser la notion de signe ou *representamen,* au sens de Peirce. Ainsi, le signe ou le *representamen* est une « chose » qui en représente une autre que ce soit son objet ou peut-être aussi lui-même. Suivant le domaine mathématique concerné, les signes pourront être des dessins géométriques, des symboles algébriques ou des graphiques, voire des jetons, des maquettes ou des photos dans le cas de problèmes qui mettent en jeu de la modélisation. À la différence des signes de structure dyadique qui ne retiennent que la relation de référence entre le signifiant et l'objet représenté, l'idée d'un signe qui est aussi sa propre représentation invite à revisiter le processus sémiotique lorsque le travail mathématique est en jeu. Ceci est notamment visible lorsqu'un dessin géométrique, qui est lui-même une forme, est à la fois *representamen* et modèle de représentation (Coutat, Laborde et Richard, 2013).

2.2 Le niveau des processus cognitifs

La mathématique enseignée n'est pas un corpus désincarné de propriétés et d'objets réduits à des signifiants manipulables par des systèmes formels, elle est d'abord et principalement une activité humaine. Ainsi, il est essentiel de comprendre comment des communautés d'individus, mais aussi des individus particuliers, utilisent et s'approprient les connaissances mathématiques dans leur pratique de la discipline. Il est aussi essentiel de comprendre comment ils vont donner un sens à tous ces signes et objets tangibles. Cela implique un deuxième niveau de l'ETM centré sur le sujet vu comme un sujet cognitif. Cette ouverture sur le champ cognitif doit se faire en étroite relation avec les composantes du niveau épistémologique et, pour rester dans un cadre didactique, il est possible d'adapter l'approche sémiotique de Duval (1995, 2005). Pour l'activité géométrique, ces processus sont :

– un processus de visualisation relatif à la représentation de l'espace et au support matériel ;
– un processus de construction, fonction des instruments utilisés (règles, compas, etc.) et des configurations géométriques en jeu ;
– un processus discursif, qui produit des argumentations et des preuves.

Le processus de visualisation nécessite d'être précisé pour trouver sa place dans une extension aux ETM. Il doit être associé à des schèmes et des opérations d'usage des signes dont rien ne prouve a priori qu'ils relèvent tous de la visualisation en tant que telle, même dans une conception étendue de celle-ci (Fig.2).

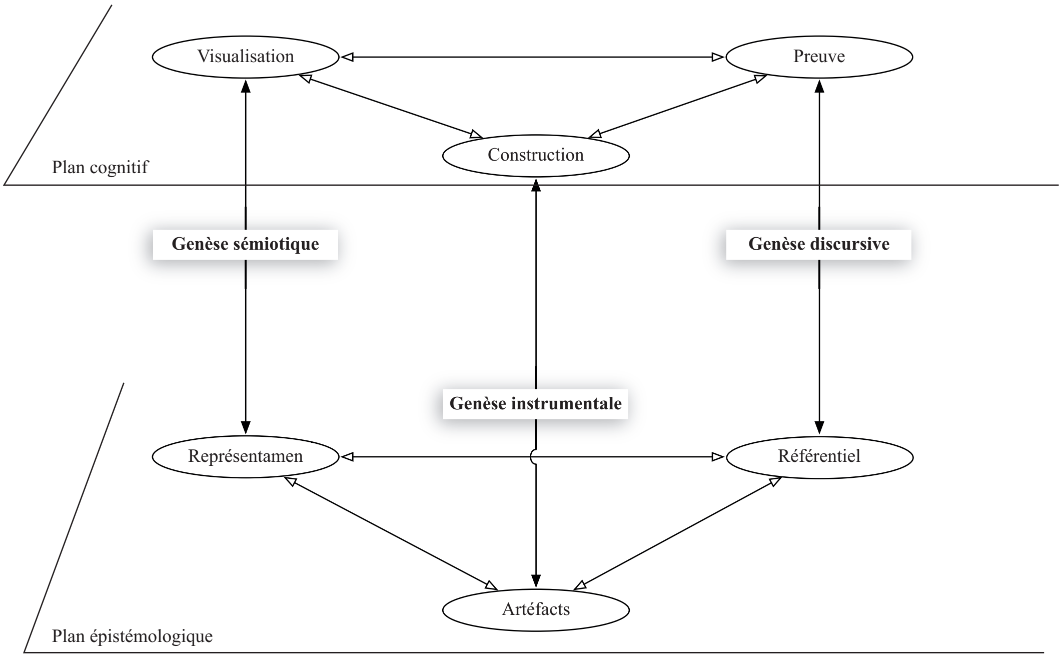


Figure 2 - L'espace de travail mathématique et ses genèses

Ce processus de visualisation « étendue » doit bien être distingué de la simple vision ou perception des objets, il peut être envisagé comme le processus de structuration des informations apportées par les diagrammes et les signes. Il nourrit l'intuition des propriétés et il contribue parfois à fonder cognitivement la validité de ces propriétés. Sous certaines conditions, il peut s'apparenter à un raisonnement de type discursivo-graphique (Richard, 2004) et pourra s'exprimer à l'intérieur de registres de représentation sémiotique déterminés.

3. Les ETM de référence, idoines et personnels

Dans le cadre théorique des ETM tout comme dans celui des ETG, la notion de paradigme oriente et structure l'organisation des composantes qui, par leurs fonctions différentes, participent à la spécificité des divers paradigmes en jeu. Un paradigme s'institue quand une communauté d'individus s'accorde pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines formes de pensée. L'espace de travail « paradigmatique » tel qu'il est alors défini par cette communauté sera appelé *ETM de référence*. Dans une institution scolaire donnée, la résolution d'un problème suppose qu'un *ETM idoine* a pu être organisé pour permettre à un élève de s'engager dans la résolution du problème. Cet ETM idoine doit nécessairement remplir deux conditions : d'une part permettre de travailler dans le paradigme correspondant à la problématique visée, d'autre part être « bien construit », dans le sens où ses différentes composantes sont organisées de manière valide. Son concepteur joue ici un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour des utilisateurs potentiels. En classe, la conception de cet espace va dépendre de *l'ETM personnel* du professeur. Lorsque le problème est proposé à un élève, son traitement mathématique par l'élève va être conduit dans l'*ETM personnel* de cet élève. De ce fait, l'*ETM idoine* n'est pas figé et il doit sans cesse être modifié pour s'ajuster aux contraintes locales.

Ainsi, le travail mathématique dans un cadre scolaire pourra être décrit grâce à trois niveaux d'ETM : la mathématique visée par l'institution est décrite dans l'ETM de référence. Celui-ci doit être aménagé par le professeur en ETM idoine pour permettre une mise en place effective dans les classes, où chaque élève travaillera dans son ETM personnel.

Le choix et l'organisation des tâches données aux élèves par leur professeur sont essentiels dans la constitution de l'ETM idoine, afin qu'il donne la possibilité aux élèves de résoudre de manière adéquate les questions proposées, c'est-à-dire de manière conforme aux attentes institutionnelles décrites de façon plus ou moins explicite dans l'ETM de référence. Ces choix et la gestion des activités vont dépendre en grande partie de l'ETM personnel du professeur. L'observation de l'activité des élèves permettra d'identifier leurs ETM personnels en y repérant d'éventuels sous-ensembles de pratiques stables.

4. Les genèses à l'œuvre dans les ETM

Le développement par un individu de son travail mathématique s'opère graduellement et passe par la mise en place progressive de son ETM personnel. Cette genèse globale de l'ETM suppose un ensemble de genèses qui sont interdépendantes et qui concernent toutes les composantes épistémologiques et les processus cognitifs. L'activation et le contrôle de ces genèses peuvent être initiés par les enseignants (au niveau de l'ETM idoine). Il importe de savoir dans quelle mesure, elles sont conformes, en amont, aux attentes définies dans l'ETM de référence (Kuzniak et Rauscher, 2011 ; Kuzniak, 2013).

Comme nous l'avons vu, les plans épistémologique et cognitif structurent les ETM en deux niveaux et ils aident à comprendre la circulation des connaissances au sein du travail mathématique. Comment dès lors articuler de façon opératoire les niveaux épistémologiques et cognitifs afin de rendre possible le travail mathématique attendu ? Il nous apparaît convenable de s'appuyer sur les trois genèses fondamentales issues du cadre théorique développé plus haut.

- Une genèse instrumentale qui permet de rendre opératoire les artéfacts dans le processus constructif qui contribue à l'accomplissement du travail mathématique ;
- une genèse sémiotique basée notamment sur les registres de représentation sémiotique, qui donne un sens aux objets de l'ETM et leur confère leur statut d'objets mathématiques opératoires ; cette genèse sémiotique assure ainsi la mise en relation entre syntaxe, sémantique, fonction et structure des signes véhiculés ;
- une genèse discursive de la preuve qui utilise les propriétés réunies dans le référentiel théorique pour les mettre au service du raisonnement mathématique et d'une validation non exclusivement iconique, graphique ou instrumentée.

Afin de définir le travail géométrique dans le cadre des ETG, Coutat et Richard (2011) décrivent les interactions spécifiques à la démarche géométrique (voir Fig. 4) en caractérisant les trois plans verticaux qui apparaissent naturellement dans le diagramme des ETG. Dans notre effort de construction théorique des ETM généralisant les acquis de la recherche sur les ETG, les plans verticaux ainsi introduits vont pouvoir être reliés aux différentes phases du travail mathématique mis en œuvre dans l'exécution d'une tâche : découverte et exploration, justification et raisonnement, présentation et communication. La réalisation effective de ces phases définira, de fait, un certain nombre de compétences mathématiques cognitives fondées sur la coordination des genèses dans leurs relations avec le plan épistémologique (Fig. 3).

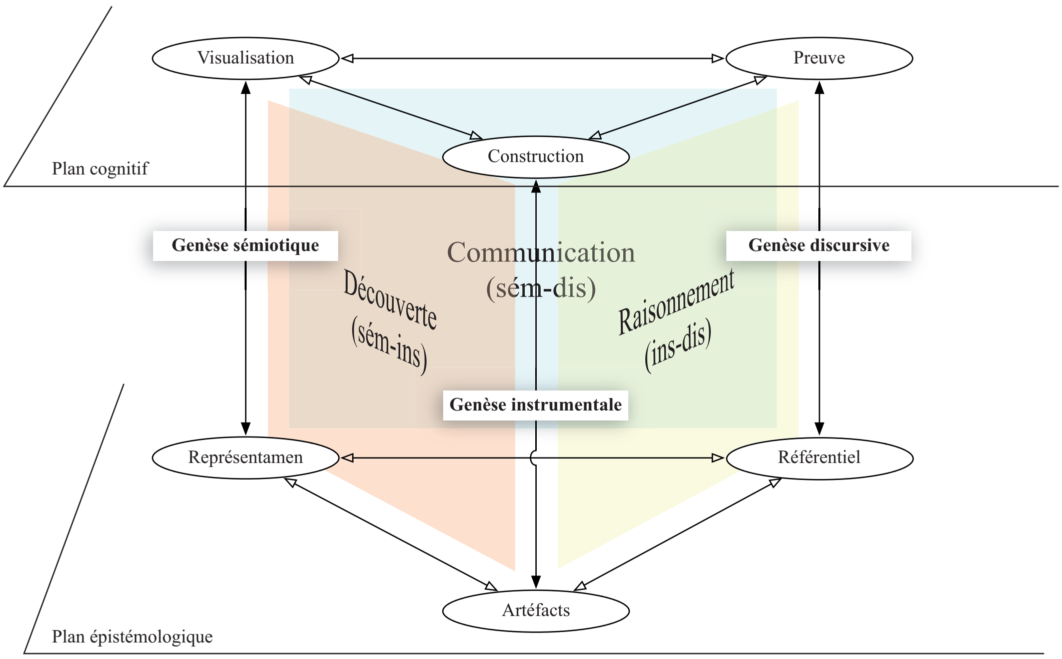


Figure 3 – Les plans verticaux dans l'ETM

Un premier type d'interactions (Sem-Ins) privilégie l'identification et l'exploration des objets en s'appuyant sur les genèses sémiotique et instrumentale pour développer une compétence liée à la découverte de la solution de problèmes mathématiques. Un second type d'interactions (Ins-Dis) développe le raisonnement mathématique fondé sur la justification des découvertes en articulant les genèses instrumentale et discursive. Enfin, un dernier type (Sem-Dis) est orienté vers la communication mathématique des résultats et il s'appuiera essentiellement sur les genèses sémiotique et discursive. La définition exacte de ces plans d'interactions et la description de leurs interrelations dépend du domaine mathématique spécifique étudié.

5. Sur les thèmes du symposium

Le travail mathématique fédère l'ensemble des contributions à ce numéro et il constitue le cœur scientifique autour duquel s'est constituée la cohésion de la communauté scientifique lors des symposiums. Sans se restreindre à l'élaboration d'un Espace de Travail Mathématique dans son sens technique, l'objet des communications retenues pour le numéro spécial vise plus largement à s'interroger sur les dimensions sémiotiques, cognitives et instrumentales du travail mathématique en n'excluant a priori aucune approche épistémologique ou didactique. Cet élargissement de la problématique à tout le travail mathématique sous ses différentes formes avait été soumis à la sagacité des contributeurs à partir de quatre thèmes de réflexion que l'on retrouve dans le présent numéro.

Thème 1 – Le travail mathématique et les ETM

L'objet de ce thème est, d'une part, d'approfondir le modèle théorique défini par les espaces de travail mathématique et, d'autre part, d'en explorer les utilisations comme outil d'analyse dans des études particulières. Utiliser ce modèle dans d'autres domaines que celui de la géométrie suppose une étude particulière et ciblée des domaines en question et amène à penser des ETM qui, comme en géométrie, peuvent s'appliquer à l'algèbre, à l'analyse, à l'arithmétique… Pour harmoniser les notations, ces espaces de travail spécifiques, associés à des domaines *d* particuliers, seront notés ETM_d, c'est-à-dire des $ETM_{\text{algèbre}}$, ETM_{analyse}, $ETM_{\text{arithmétique}}$, … L'espace de travail mathématique peut être vu comme une mise en réseau des diverses fibres que constituent les ETM_d. La question se pose alors de savoir comment s'organisent la fibration entre espaces ou le feuilletage des plans. Ces interactions entre les domaines sont essentielles pour comprendre le fonctionnement global du travail mathématique et elles forcent en outre la considération des processus de modélisation dans le cadre des ETM, au-delà des seules questions sémiotiques.

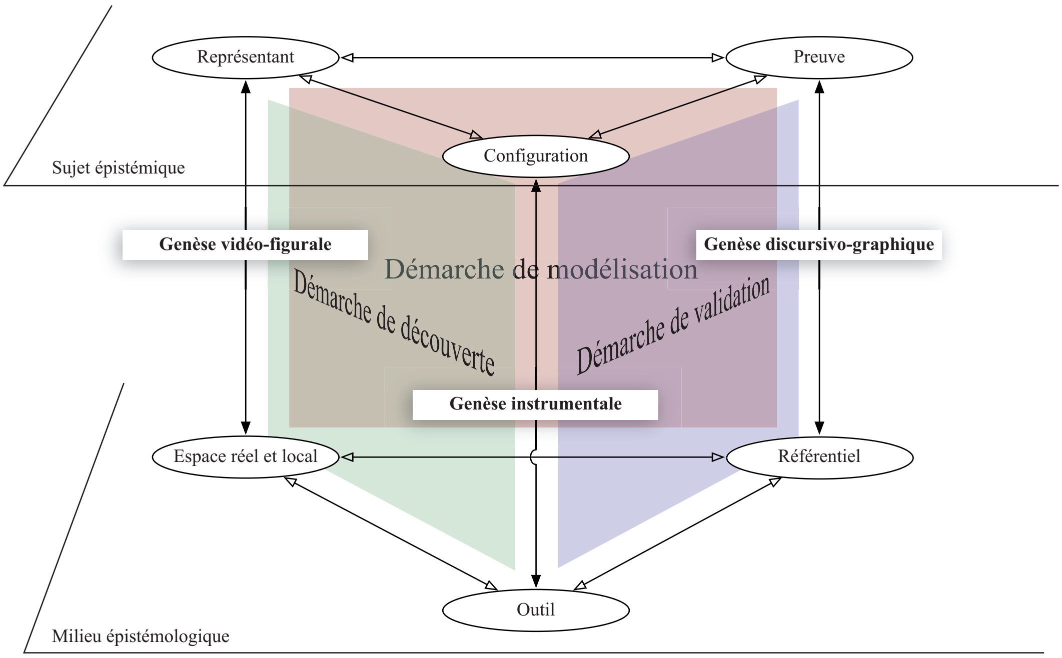


Figure 4 – Les plans verticaux dans l'ETG idoine

Thème 2 – Environnements technologiques et travail mathématique

Ce thème s'intéresse spécifiquement à l'utilisation d'environnements technologiques, non pour eux-mêmes, mais pour préciser dans quelle mesure ils affectent le travail mathématique. De fait, l'apparition contemporaine de nombreux instruments a contribué à donner un relief nouveau aux aspects constructifs et aux artéfacts qui soutiennent l'exécution du travail mathématique, tant au niveau attendu des élèves qu'au niveau de la recherche actuelle. On pourra retenir une double interrogation relativement à leur impact.

– En premier lieu, quelles potentialités offrent de tels environnements pour transformer le travail mathématique de l'élève ? Du fait de la prise en compte de diverses genèses, il reste avantageux de dépasser la seule approche instrumentale pour répondre à cette question.

– La seconde interrogation consiste à étudier en quoi l'utilisation d'environnements technologiques influence la construction épistémologique de l'élève, guidant son travail mathématique. Cela peut concerner, à titre indicatif, aussi bien la nature des objets mathématiques qu'il construit que les preuves mathématiquement acceptables, de même que son rôle en tant que moyen d'investigation.

Pour exprimer cette interrogation dans le cadre particulier de la géométrie dans des environnements technologique, Coutat et Richard (2011) ont proposé de caractériser les plans verticaux de l'ETG idoine en s'appuyant sur l'idée de démarches : validation, modélisation et découverte (Fig. 4). Au regard de la structuration de l'ETM proposé plus haut (Fig. 3), ces démarches constituent les manifestations des compétences mathématiques du sujet lors de son travail géométrique.

Thème 3 – Le travail mathématique et les aspects sociaux et institutionnels

De manière intrinsèque, la question des contextes est centrale dans la constitution du travail mathématique. Il peut s'agir d'une approche interne pour caractériser deux facettes du travail de recherche du mathématicien avec les contextes de découverte et de justification. Aux contextes précédents, on peut ajouter le contexte d'usage des mathématiques qui, souvent, est le contexte principal pour les élèves et les utilisateurs usuels des mathématiques, qui s'intéressent généralement à celles-ci pour la puissance de ses applications. Il est également possible d'élargir le regard sur le travail mathématique en observant le rôle des institutions particulières dans lesquelles ce travail s'insère, conjointement au jeu des interactions sociales et langagières. Le rôle de formation, initiale ou continue, des enseignants en mathématiques apparaît ici comme un levier institutionnel fondamental.

Thème 4 – Visualisation et représentation dans le travail mathématique

Du fait de la variété des représentations graphiques utilisées dans tous les domaines mathématiques, la question de la visualisation et de son rôle global dans le travail mathématique se pose inévitablement. Si la visualisation a fait l'objet de nombreux travaux en géométrie, beaucoup moins de recherches concernent la visualisation dans d'autres domaines mathématiques, encore que plusieurs publications contemporaines en soulignent l'importance (Guzmán, 1996 ; Alsina et Nelsen, 2006). Ce thème s'intéresse aux notions de flexibilité, à la genèse des registres de représentation sémiotique et plus généralement, à la place de ces registres dans le travail mathématique, traditionnel ou instrumenté.

RÉFÉRENCES

Alsina, C. & Nelsen, R. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. The Mathematical Association of America.

Coutat, S., Laborde, C. et Richard, P.R. (2014). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics* (18 p).

Coutat, S & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 16,* 97-126.

Duval, R. (1995). Why to teach geometry. *Icmi Studies on Geometry* Catania.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de sciences cognitives, 10,* 5-54.

Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos Básicos del Análisis*. Ediciones Pirámide.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education, vol 6.2. pp 167-188.*

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24. El espacio de trabajo matemático y sus génesis, traducción J. Lezama, Cicata.

Kuzniak, A. & Rauscher, J.C. (2011). How do Teachers' Approaches on Geometrical Work relate to Geometry Students Learning Difficulties? *Educational studies in Mathematics.77/1.* 129-147

Kuzniak, A. (2013). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. In *Rezat (ed) Transformation – A fundamental idea of Mathematics Education* . Springer.

Richard, P. R. (2004). L'inférence figurale: Un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational studies in Mathematics, 57(2),* 229-263.

Thurston W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society. 30(2).* 161-177.

ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO. PUNTOS DE VISTA Y PERSPECTIVAS

Alain Kuzniak et Philippe R. Richard
Université Paris Diderot y Université de Montréal

Este número especial de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME) es el resultado de distintos artículos elaborados para el tercer simposio Espacio de Trabajo Matemático (ETM), cuyo , objeto de estudio es el desarrollo y los usos posibles de la noción de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en la didáctica de las matemáticas. El trabajo matemático y su funcionamiento en el marco escolar están a la base del enfoque de los ETM. En esta introducción se sintetiza el enfoque teórico, no como algo prescriptivo sino como una propuesta sugerente para enriquecer el estudio didáctico del trabajo matemático de alumnado y profesorado. Seguidamente, se describe la organización temática de las contribuciones.

1. Una perspectiva didáctica sobre el trabajo matemático

A partir de la década de los sesenta se produjo un cuestionamiento fuerte de la enseñanza de las matemáticas a nivel mundial. Antes de este periodo, los sistemas escolares ofrecían dos tipos de enseñanza a los ciudadanos de los países desarrollados. De una parte, una enseñanza corta y esencialmente utilitarista de las matemáticas elementales, propuesta a los niños de los contextos populares. Y por otra parte, a los niños de la burguesía, destinados a tomar las riendas de la economía y la gestión de los países, se les daba acceso a una enseñanza de las matemáticas vista como una escuela del razonamiento lógico. En ambos casos, al alumno se le hacía desempeñar el rol de receptor del saber de los maestros. A partir de los años sesenta, diversos fenómenos contribuyeron a cambiar los puntos de vista sobre el rol de las matemáticas y sobre la manera de enseñarlas. Sin querer ser exhaustivos, podemos señalar la reforma de las matemáticas modernas, el desarrollo de las investigaciones sobre los aprendizajes, o incluso, la masificación de la enseñanza, en un contexto de mayor competencia económica e ideológica.

Para nuestros fines, subrayaremos dos profundas características de los cambios que se acentuaron desde entonces: de una parte, hacer evidente la diversidad del trabajo del matemático visto como el motor principal de la evolución matemática y, por otra parte, la idea pedagógica de promover la actividad del alumno con miras a hacerlo más apto para desarrollar sus conocimientos en un contexto de resolución de problemas. En este caso, el trabajo matemático está en el corazón de la evolución, lo que lleva lógicamente a proporcionar a esta noción un lugar central en la didáctica de las matemáticas.

El trabajo al que nos referimos está basado en una actividad racional orientada hacia un objetivo particular que puede apoyarse o no en el uso de un cierto número de instrumentos y artefactos específicos. En matemáticas, el objetivo de esta actividad estará centrado en los objetos estudiados por los matemáticos, «estos seres humanos que hacen que avance la comprensión humana de las matemáticas» (Thurston, 1995, p. 29). Por lo tanto, consideramos que la investigación didáctica, en el marco de una enseñanza que favorezca el desarrollo del trabajo matemático del alumno, debe interrogarse sobre este trabajo desde el doble punto de vista del aprendizaje de los alumnos, y de la organización de la enseñanza por el profesor.

2. La noción del Espacio de Trabajo Matemático

La noción general de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) amplía la noción de espacio de trabajo para la geometría, introducida por Kuzniak y Houdement (Kuzniak, 2006) en el estudio de la didáctica de este ámbito. Esta noción se precisa con objeto comprender mejor lo que, desde el punto de vista didáctico, se pone en juego alrededor del trabajo matemático en un marco escolar. El espacio concebido de esta manera designa, un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resuelver problemas matemáticos. En el caso de las matemáticas escolares, estos individuos generalmente no serán expertos sino alumnos o estudiantes, bien a nivel de principiantes o avanzados.

Del estudio inicial de este concepto en Geometría, conservamos el principio que articularel ETM en dos niveles (Kuzniak, 2011): uno de naturaleza epistemológica, en relación estrecha con los contenidos matemáticos del ámbito estudiado y, el otro, de naturaleza cognitiva, que concierne al pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas.

El trabajo matemático deriva, entonces, de un proceso que poruna parte da sentidode manera progresiva, a cada uno de los niveles epistemológico y cognitivo y, de otra parte, permite la articulación de estos dos niveles gracias a diferentes génesis. En el caso de la Geometría, el conjunto del proceso se describió a partir de elementos del diagrama precisado en la Fig. 1. Éste necesitará ciertas modificaciones para adaptarlo al marco general de los ETM:

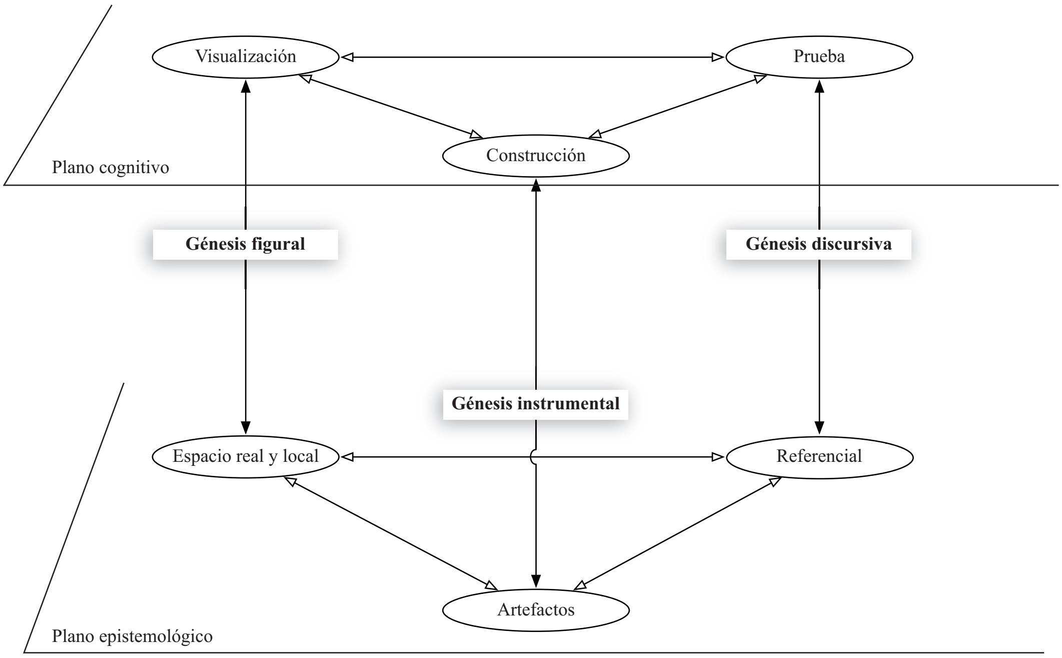


Figura 1 - El espacio de trabajo geométrico y sus génesis

2.1 El nivel epistemológico y sus componentes.

En lo que concierne a la Geometría, tres componentes en interacción son características de la actividad geométrica en su dimensión puramente matemática:

- un espacio real y local como soporte material, con un conjunto de objetos concretos y tangibles;
- un conjunto de artefactos como herramientas de dibujo o software;
- un sistema teórico de referencia basado en definiciones y propiedades.

Estas componentes no están yuxtapuestas, deben ser organizada según un objetivo que depende del ámbito matemático en su dimensión epistemológica. Cuando el acento se pone en el proceso de aprendizaje del alumno, en una situación didáctica, este nivel epistemológico se puede considerar también como un *medio epistemológico* (Coutat y Richard, 2011).

Si los artefactos y el referencial teórico son dos componentes base del nivel epistemológico, asociado a un ámbito matemático particular, la componente ligada al espacio y a las configuraciones geométricas debería ser modificada si se quiere a extender a otros ámbitos matemáticos. De acuerdo con una concepción de las matemáticas fundamentada en representaciones semióticas, que va más allá de la pura consideración de sistemas de representación, parece pertinente utilizar la noción de signo o *representamen*, en el sentido de Peirce. Así, el signo o representamen es "algo" que representa otra cosa, que sea su objeto o quizá él mismo. En función del ámbito matemático en cuestión, los signos podrán ser dibujos geométricos, símbolos algebraicos o gráficas, incluso fichas, maquetas o fotos, en el caso de problemas que ponen en juego la modelización. A diferencia de los signos de estructura diádica, tan habituales en matemáticas, la idea de un signo que también es su propia representación invita a considerar de otra manera el proceso semiótico cuando el trabajo matemático está en juego. Esto es especialmente visible cuando un dibujo geométrico (él mismo de una forma) es a la vez *representamen* y modelo de representación (Coutat, Laborde y Richard, 2013).

2.2 El nivel de los procesos cognitivos.

Las matemáticas que se enseñan no son un corpus desprovisto de propiedades y objetos reducidos a significantes manipulables mediante sistemas formales. De entrada, las matemáticas son principalmente una actividad humana. De esta manera, es esencial comprender cómo comunidades de individuos, pero también individuos particulares, utilizan y se apropian de los conocimientos matemáticos en sus prácticas de la disciplina. Asimismo, es esencial comprender cómo se va a dar un sentido a estos signos y objetos tangibles. Lo que implica un segundo nivel del ETM, centrado en el sujeto, que a su vez, se contempla como sujeto cognitivo. Esta apertura hacia el campo cognitivo se debe realizar en estrecha relación con las componentes del nivel epistemológico y, para continuar en un marco didáctico, se efectúa una adaptación del enfoque semiótico propuesto por Duval (1995, 2005). Para la actividad geométrica, estos procesos son:

- un proceso de visualización relativo a la representación del espacio y al soporte material;
- un proceso de construcción que depende de los instrumentos utilizados (regla, compás, entre otros) y configuraciones geométricas en juego;
- un proceso discursivo que produce argumentaciones y pruebas.

El proceso de visualización necesita ser precisado para encontrar su lugar en una extensión a los ETM. También, se debe asociar a esquemas y operaciones de uso de los signos, de los que nada nos prueba que dependan, a priori, de la visualización en sí, incluso en una concepción extensa de ésta (Fig. 2).

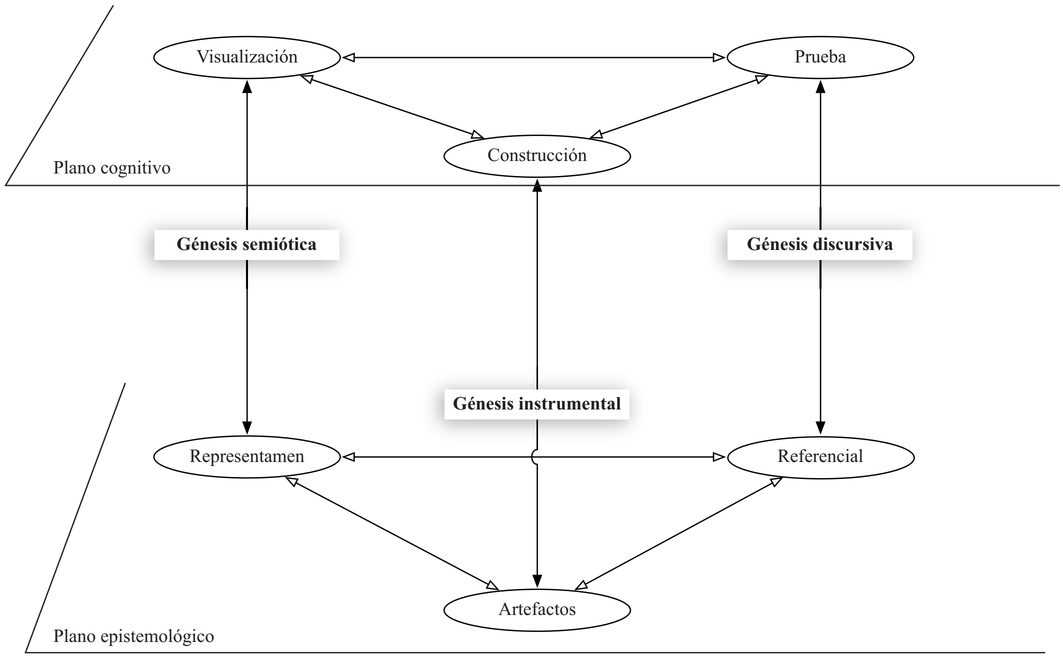


Figura 2 - El espacio de trabajo matemático y sus génesis

Este proceso de visualización «extensa» se debe distinguir de la simple visión o percepción de los objetos, y se puede considerar como el proceso de estructuración de las informaciones aportadas por los diagramas y los signos. Además, este proceso alimenta la intuición de las propiedades y, a veces, fundamenta cognitivamente la validez de estas propiedades. Bajo ciertas condiciones, puede emparentarse con un razonamiento de tipo discursivo-gráfico (Richard, 2004) y podrá expresarse al interior de registros de representación semiótica determinados.

3. Los ETM de referencia, idóneos y personales.

En el marco teórico de los ETM, así como en el de los ETG, la noción de paradigma orienta y estructura la organización de las componentes que, debido a sus funciones diferentes, participan en la especificidad de los diversos paradigmas en juego. Un paradigma se instituye cuando una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones, privilegiando ciertas herramientas o ciertas formas de pensamiento. Al espacio de trabajo «paradigmático», tal como es definido por esta comunidad, se le llamará *ETM de referencia*. En una institución escolar dada, la resolución de un problema supone que un ETM idóneo se puede organizar para permitir a un alumno comprometerse en la resolución del problema. Este ETM idóneo debe necesariamente cumplir dos condiciones: por una parte, posibilitar el trabajo en el paradigma correspondiente a la problemática considerada; de otra parte , estar «bien construido», en el sentido en que sus diferentes componentes están organizadas de manera válida. El diseñador desempeña un rol parecido al del arquitecto que diseña un espacio de trabajo para usuarios potenciales. En clase, el diseño de este espacio va a depender del ETM personal del profesor. Cuando el problema se proponea un alumno, el tratamiento matemático que éste le dá le conduce al ETM personal de este alumno. Debido a esto, el *ETM idóneo* no es fijo y se debe modificar continuamente para ajustarse a las restricciones locales.

De esta manera, el trabajo matemático en un marco escolar se puede describir gracias a tres niveles de ETM: la matemática considerada por la institución que se describe en el ETM de referencia. Éste es desarrollado por el profesor hasta alcanzar un ETM idóneo que permita un establecimiento efectivo en clase, donde cada alumno trabaja en su ETM personal.

La elección y la organización de las tareas propuestas a los alumnos por los profesores son esenciales en la constitución del ETM idóneo. Ofrece la posibilidad de resolver, de manera adecuada, lo que se les propone, es decir, conforme a las expectativas institucionales descritas de manera más o menos explícita en el ETM de referencia. Estas elecciones y la gestión de las actividades van a depender, en gran parte, del ETM personal del profesor. La observación de la actividad de los alumnos permitirá identificar sus ETM personales identificando posibles subconjuntos de prácticas estables.

4. Las génesis de los ETM.

El desarrollo por un individuo de su trabajo matemático se lleva a cabo gradualmente y pasa por el establecimiento progresivo de su ETM personal. Esta génesis global del ETM supone un conjunto de génesis que son interdependientes y que involucran a todas las componentes epistemológicas y a los procesos cognitivos. La activación y el control de estas génesis se pueden iniciar por los profesores (en el nivel del ETM idóneo). Es importante saber en qué medida, éstas se adecuan en su origen, a las expectativas definidas en el ETM de referencia (Kuzniak y Rauscher, 2011; Kuzniak, 2013).

Como lo vimos, los niveles epistemológico y cognitivo estructuran los ETM y ayudan a comprender la circulación de los conocimientos en el seno del trabajo matemático. ¿Cómo articular de manera operatoria los niveles epistemológicos y cognitivos con el fin de hacer posible el trabajo matemático esperado? Nos parece adecuado apoyarse en tres génesis fundamentales que derivan del marco teórico desarrollado previamente.

– una génesis instrumental que hace funcional les artefactos en el proceso constructivo que contribuye al trabajo matemático ;
– una génesis semiótica basada particularmente en los registros de representación semiótica, que proporciona un sentido a los objetos del ETM y les confiere su estatus de objetos matemáticos operatorios; esta génesis semiótica asegura, el establecimiento de la relación entre sintaxis, semántica, función y estructura, de los signos vehiculados;
– una génesis discursiva de la prueba que utiliza las propiedades en el referencial teórico para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y de una validación no exclusivamente icónica, gráfica o instrumentada.

A fin de definir el trabajo geométrico en el marco de los ETG, Coutat y Richard (2011) describen las interacciones específicas del enfoque geométrico (ver Fig. 4) caracterizando los tres planos verticales que aparecen en el diagrama de los ETG. En nuestro afán de construcción teórica de los ETM que generalizan los saberes adquiridos en la investigación sobre los ETG, los planos verticales introducidos, de este modo, se podrían conectar con las diferentes fases del trabajo matemático implementado en la ejecución de una tarea: descubrimiento y exploración, justificación y razonamiento, presentación y comunicación. De hecho, la ejecución efectiva de estas fases definirá un cierto número de competencias matemáticas cognitivas fundamentadas en la coordinación de las génesis en sus relaciones con el plano epistemológico (Fig. 3).

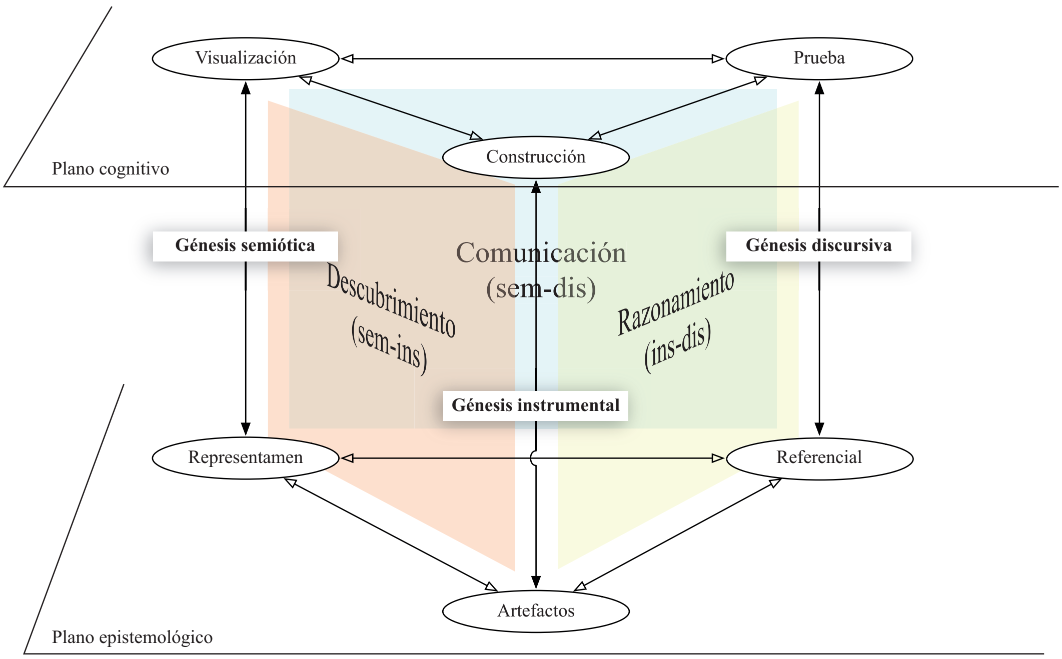


Figura 3 – Los planos verticales en el ETM

Un primer tipo de interacciones con objeto de desarrollar una competencia ligada al descubrimiento de la solución de problemas matemáticos privilegia la identificación y la exploración de los objetos apoyándose en las génesis semiótica e instrumental.. Un segundo tipo de interacciones desarrolla el razonamiento matemático, fundado en la justificación de los descubrimientos, articulando las génesis instrumental y discursiva. Finalmente, un último tipo está orientado hacia la comunicación matemática de los resultados y se apoya esencialmente en las génesis semiótica y discursiva. La definición exacta de estos planos de interacciones y la descripción de sus interrelaciones depende del ámbito matemático específico que se haya estudiado.

5. Temáticas de este simposio

El trabajo matemático que aquí se presenta no sólo recoge las contribuciones si no que es expresión de la "cohesión" y del "corazón" de la comunidad científica que ha participado en los simposios. Sin restringirse a la elaboración de un Espacio de Trabajo Matemático en su sentido técnico, el objetivo de las conferencias elegidas en esta monografía se interrogan ampliamente acerca de las dimensiones semióticas, cognitivas e instrumentales del trabajo matemático, no excluyendo a priori ningún enfoque epistemológico o didáctico. Esta extensión de la problemática al trabajo matemático en un sentido amplio se propuso a los participantes desde los cuatro temas de reflexión especificados en este número.

Tema 1- El trabajo matemático y los ETM

El objetivo de este tema es, por una parte, profundizar en el modelo teórico definido por los espacios de trabajo matemático y, de otra parte, explorar las utilizaciones que como herramienta de análisis tiene en estudios especificoss. Utilizar este modelo en otros ámbitos distintos al de la Geometría conlleva un estudio particular y específico de los ámbitos en cuestión para ser aplicados al Álgebra, al Análisis, a la Aritmética, entre otros… Para armonizar las notaciones, estos espacios de trabajo específicos, asociados a dominios específicos *d*, se denotaran ETM_d, es decir, $\mathrm{ETM}_{\text{àlgebra}}$, $\mathrm{ETM}_{\text{anàlisis}}$, $\mathrm{ETM}_{\text{aritmética}}$, etc.. El espacio de trabajo matemático se puede entender como una red que ponga en relación las diversas fibras que constituyen los ETM_d. La cuestión es saber, entonces, cómo se organizan la red de fibras entre espacios o la superposición de los planos. Estas interacciones entre los dominios especificos son esenciales para comprender el funcionamiento global del trabajo matemático y ellas obligarán, además, a considerar los procesos de modelización en el marco de los ETM, más allá de las puras cuestiones semióticas.

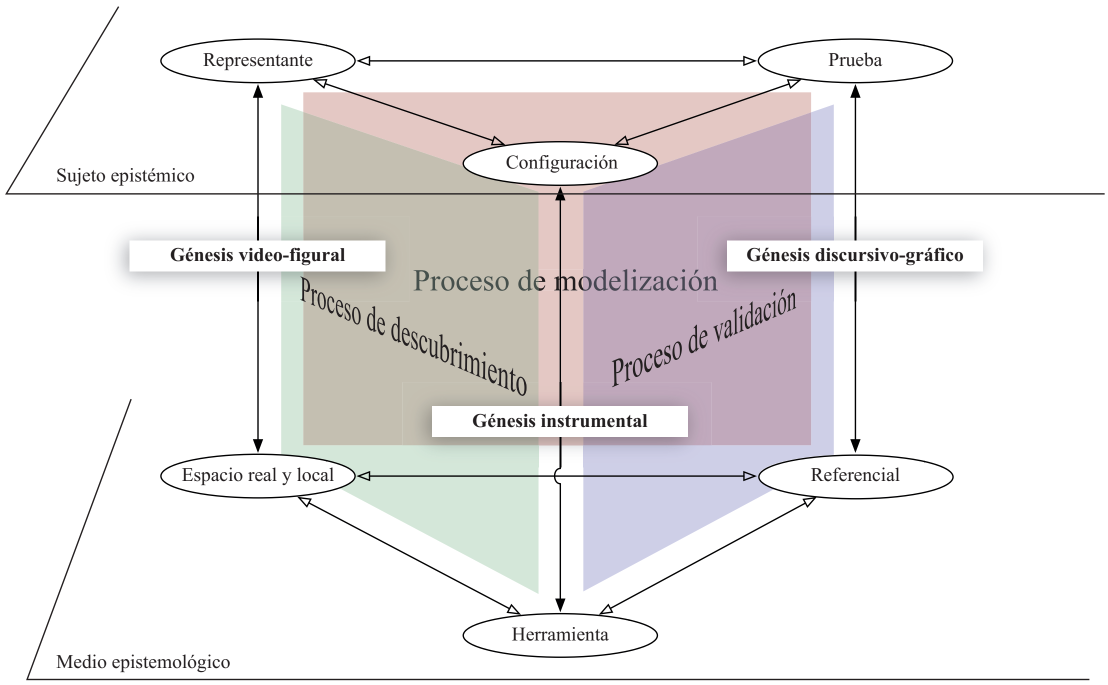


Figura 4 – Los planos verticales en el ETG idóneo

Tema 2 – Ambientes tecnológicos y trabajo matemático

Este temase centra específicamente enla utilización de ambientes tecnológicos y en qué medida afectan el trabajo matemático. De hecho, la aparición contemporánea de numerosos instrumentos ha contribuido a dar un relieve nuevo a los aspectos constructivos y a los artefactos que sostienen la ejecución del trabajo matemático, tanto en el nivel esperado de los alumnos como en el nivel de la investigación actual. Podremos considerar un doble cuestionamiento relativo a su impacto.

– En primer lugar, ¿qué potencialidades ofrecen estos ambientes para transformar el trabajo matemático del alumno? Como consecuencia de la inclusión de diversas génesis, es conveniente ir más allá del enfoque instrumental para responder a esta pregunta.

– La segunda cuestión consiste en estudiar en qué, la utilización de entornos tecnológicos influye en la construcción epistemológica del alumno, guiando su trabajo matemático. Ello puede concernir, a título indicativo, tanto a la naturaleza de los objetos matemáticos que él construye, como a las pruebas matemáticas aceptables, así como su función como medio de investigación.

Para expresar este interrogante en el marco particular de la Geometría en ambientes tecnológicos, Coutat y Richard (2011), propusieron caracterizar los planos verticales del ETG idóneo, apoyándose en la idea de procesos: validación, modelización y descubrimiento (Fig. 4). En lo que concierne a la estructuración del ETM propuesto arriba (Fig. 3), estos procesos constituyen las manifestaciones de las competencias matemáticas del sujeto en el momento de su trabajo geométrico.

Tema 3 – El trabajo matemático y los aspectos sociales e institucionales

De manera intrínseca, la cuestión de los contextos es central en la constitución del trabajo matemático. Se puede tratar como un enfoque interno para caracterizar dos facetas del trabajo de investigación del matemático con los contextos de descubrimiento y de justificación. A los contextos precedentes, podemos añadir el contexto de uso de las matemáticas que, con frecuencia, es el contexto principal para los alumnos y los usuarios habituales de las matemáticas, quienes se interesan generalmente en éstas debido a la potencia de sus aplicaciones. De la misma manera, es posible expandir la mirada sobre el trabajo matemático observando el rol de las instituciones particulares en las que este trabajo se inserta, junto al funcionamiento de las interacciones sociales y de lenguaje. El papel de la formación, inicial o continuada, de los profesores de matemáticas aparece ya como una palanca institucional fundamental.

Tema 4 – Visualización y representación en el trabajo matemático

Debido a la variedad de los gráficos utilizados en todas los ámbitos de las matemáticas, la cuestión de la visualización y de su rol en el trabajo matemático se plantea inevitablemente. Si la visualización fue el objeto de numerosos trabajos en geometría, son escasas las investigaciones que abordan la visualización en ámbitos matemáticos, aunque varias publicaciones contemporáneas subrayen su importancia (Guzmán, 1996, Alsina y Nelsen, 2006). Este tema se interesa por los conceptos de flexibilidad, en la génesis de los registros de representación semiótica y, más generalmente, en el lugar de estos registros, en el trabajo matemático, tradicional o instrumentado.

REFERENCIAS

Alsina, C. et Nelsen, R. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. The Mathematical Association of America.

Coutat, S., Laborde, C. & Richard, P.R. (2014). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géometrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics* (18 p).

Coutat, S & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 16,* 97-126.

Duval, R. (1995). Why to teach geometry. *Icmi Studies on Geometry* Catania.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de sciences cognitives, 10,* 5-54.

Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos Básicos del Análisis*. Ediciones Pirámide.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education, vol 6.2. pp 167-188.*

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24. El espacio de trabajo matemático y sus génesis, traducción J. Lezama, Cicata.

Kuzniak, A. & Rauscher, J.C. (2011). How do Teachers' Approaches on Geometrical Work relate to Geometry Students Learning Difficulties? *Educational studies in Mathematics.77/1.* 129-147

Kuzniak, A. (2012) Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. *In Rezat (ed) Transformation – A fundamental idea of Mathematics Education . Springer.*

Richard, P.R. (2004). L'inférence figurale: Un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational studies in Mathematics, 57(2),* 229-263.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society. 30(2).* 161-177.

SPACES FOR MATHEMATICAL WORK. VIEWPOINTS AND PERSPECTIVES

Alain Kuzniak et Philippe R. Richard
Université Paris Diderot and Université de Montréal

These proceedings of the third ETM symposium are devoted to the study, development and possible applications of the Space for Mathematical Work (ETM) concept in the didactics of mathematics. The mathematical work and its functioning within the school setting are the foundation of the ETM approach, and in this introduction, before presenting the thematic organization of the contributions, we will summarize this theoretical approach. Its goal is to enrich, in a non-normative manner, the didactic study of the mathematical work of the students and the teachers.

1. A didactic perspective on mathematical work

The teaching of mathematics has been subject to a profound reexamination since the beginning of the 1960s, and that in the entire world. Before this period, the school systems offered two types of teaching to the citizens of the developed countries. The children with working class background were offered a brief and essentially utilitarian training in elementary mathematics. The children of the bourgeoisie, whose destiny was to take in their own hands the economy and the governing of the country, were given the opportunity to have access to a teaching of the mathematics regarded as schooling in logical reasoning. In both cases, the student was placed in the position of recipient of knowledge dispensed by the teachers. Starting from 1960s, various phenomena have contributed to a change in the views on the role and the way of teaching of mathematics. Without pretending to be exhaustive, one can mention the reform of modern mathematics, the development of the research on the learning experience of children, or also, the massification of the education in a context of economic and ideological competition.

For the purpose of our discussion, we will retain two profound characteristics of the changes which have become accentuated since: on the one hand, bringing to light the diversity of the work of the mathematician viewed as the main actor in the advance of mathematics and, on the other hand, the pedagogical idea of stimulating the student's activity in order to enhance the student's ability to develop his or her knowledge in a problem-solving context. In each case, the mathematical work is in the core of the evolution, which leads logically to placing this concept centre stage in the didactics of mathematics.

The work we are referring to is a rational activity that is oriented towards a specific goal and is able to rely or not on the use of a certain number of specific instruments and artefacts. In the mathematics, the purpose of this activity must be centred on the objects studied by the mathematicians, "these human beings working to advance the human understanding of mathematics" (Thurston, 1995, p. 29). Therefore, we consider that the didactic research should be concentrated on this double point of view – the learning experience of the students and the organization of this learning experience by the teacher within the context of a schooling that favours the development of the mathematical work of the student.

2. The Space for Mathematical Work concept

The general Space for Mathematical Work concept (ETM) expands the work space concept in geometry, introduced by Kuzniak and Houdement (Kuzniak, 2006) in the study of the didactics in this area. It was developed in order to help for better understanding the didactical challenges around the mathematical work in a school environment. The space conceived in this way designs a well-thought and organized environment in order to permit the work of the individual solving mathematical problems. In the case of school mathematics, these individuals, generally, are not experts but pupils or students, experienced or beginners.

From the specific study of the geometry we retain the principle for articulation of two levels in the ETM (Kuzniak, 2011), the one of epistemological nature, in a close relation with the mathematical content of the studied area, and the other of cognitive nature, related to the thinking of the person solving mathematical tasks.

Therefore, the mathematical work results from a process which permits to impart, on the one hand, progressively a meaning to each of the epistemological and cognitive levels and, on the other hand, to formulate these two levels thanks to different geneses. In the case of geometry, the entire process could be described proceeding from the elements of the following diagram (Fig. 1), but it would need certain modifications in order to adapt it to the general framework of the ETM:

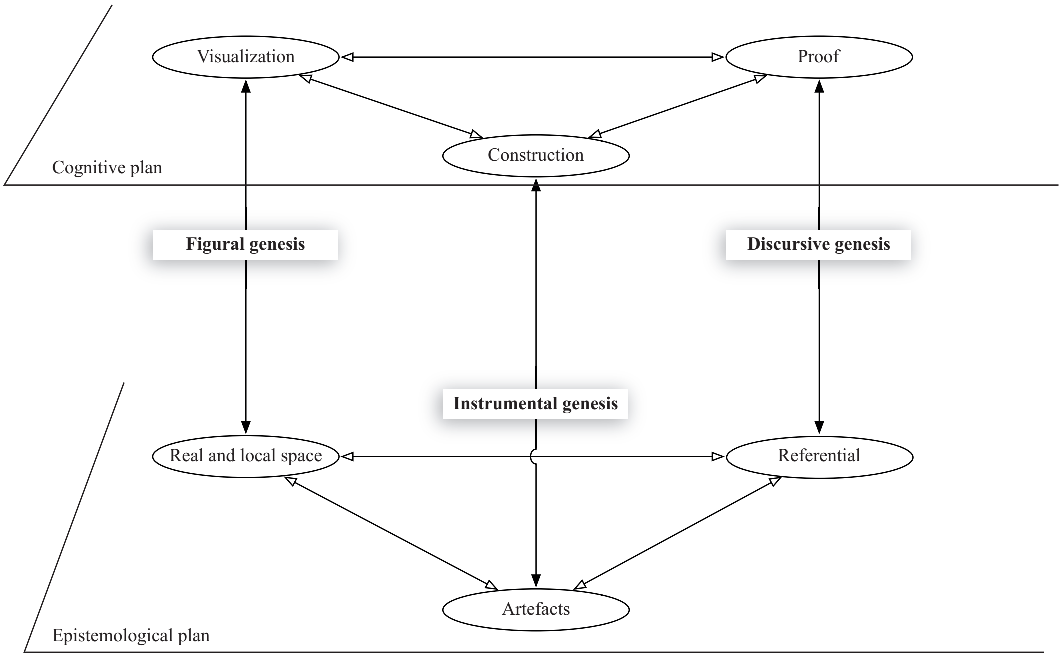


Figure 1 – The Space for Geometric Workspace and its geneses

2.1 The epistemological level and its components

As regards the geometry, three components in interaction are characteristic for the geometric activity in its purely mathematical dimension:

– a real and local space as support material, with one set of concrete and tangibles objects;
– a set of artefacts such as drawing instruments or software;
– a theoretical reference system based on definitions and properties.

These components are not juxtaposed, they must be organized according to a predetermined goal which will depend on the mathematical domain in its epistemological dimension. While the emphasis is on the process of learning of the student in a didactic situation, this epistemological plan can be considered also as an *epistemological environment* (Coutat and Richard, 2011).

If the artefacts and the theoretical referential remain two basic components of any epistemological plan associated with a specific mathematical domain, the component linked to the space and to the geometrical configurations must be modified in order to be expanded to other mathematical domains. In accordance with one concept of the mathematics based on semiotic representations, which goes beyond the single consideration of systems of representation, it seems pertinent to use the term sign or *representamen,* in the sense of Peirce. Therefore, the sign or the *representamen* is “something” which represents something else that can be its object or maybe also itself as such. Following the respective mathematical domain, the signs can be geometrical images, algebraic symbols or graphics and even tokens, models or photos in the case of problems that involve modelling. Unlike the signs with dyadic structure, which retain only the relation of reference between the signifier and the represented object, the idea of a sign, which is also its own representation, invites to revisiting the semiotic process when the mathematical work is at stake. This is particularly visible when a geometrical image, which itself is a form, is at the same time *representamen* and model of representation (Coutat, Laborde and Richard, 2013).

2.2 The cognitive process level

The mathematics that is taught is not a disembodied set of properties and objects reduced to signifiers that can be manipulated by formal systems – it is first of all and mainly a human activity. Therefore, it is essential to understand how communities of individuals, but also specific individuals, use and internalize the mathematical knowledge in their practice of the discipline. It is also essential to understand how they will impart a meaning to all these tangible signs and objects. This implies a second level of the ETM centred on the subject viewed as a cognitive subject. This introduction to the cognitive field must be made in close relation to the components of the epistemological level and, in order to remain within the didactical framework, it is possible to adapt the semiotic approach of Duval (1995, 2005). For the geometrical activity, these processes are as follows:

– a process of visualization related to the representation of the space and the support material;
– a process of construction and function of the used instruments (rulers, compass, etc.) and the respective geometrical configurations;
– a discursive process producing arguments and proves.

The process of visualization needs to be specified precisely in order to find its place in an extension to the ETM. It must be associated with the diagrams and operations of use of the signs, about which nothing proves a priori that they all pick up the entire visualization as such, even within its extended conceptualization (Fig.2).

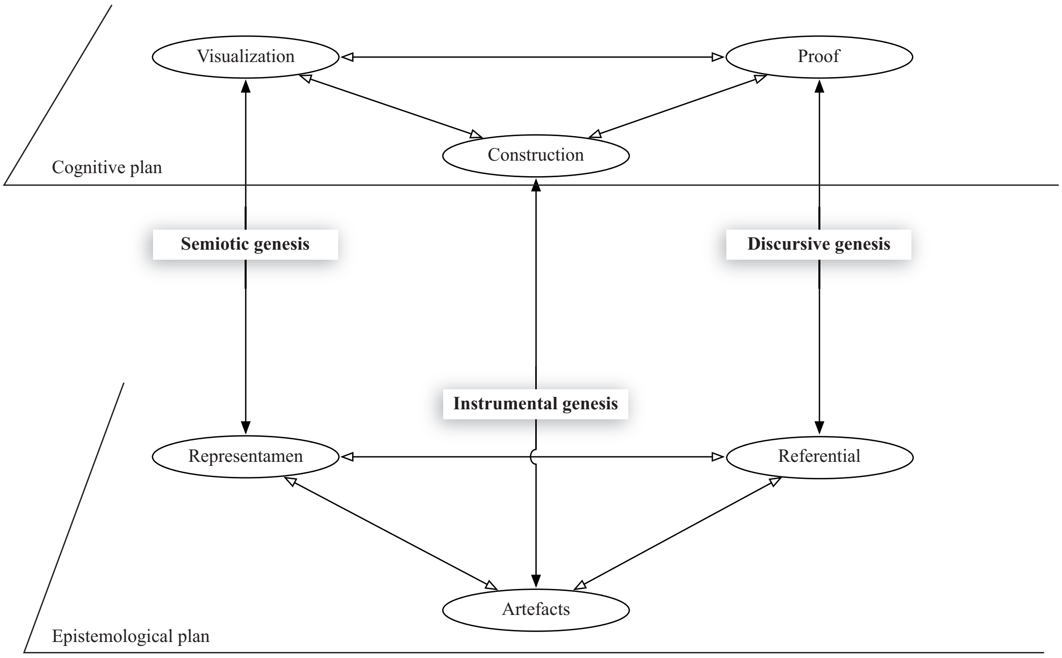


Figure 2 - The Space for Mathematical Work and its geneses

This process of "extended" visualization has to be well distinguished from the simple vision or perception of the objects; it can be envisaged as a process of structuring the information provided by the diagrams and the signs. It nourishes the intuition of the properties and sometimes contributes to establishing cognitively the validity of these properties. Under certain conditions, it can be likened to a reasoning of a discursive-graphical type (Richard, 2004) and can be expressed in the interior of the registers of a determined semiotic representation.

3. The reference, adequate and personal ETM

Within the theoretical framework of ETM, just as within that of ETG, the paradigm concept orients and structures the organization of the components which, due to their different functions, participate in the specifics of the different paradigms at play. A paradigm is instituted when a given community of individuals agrees to formulate problems and organize their solutions by prioritizing certain tools or certain forms of thinking. The "paradigmatic" workspace, such as it is defined by this community, will be called a *reference ETM*. In a given educational institution, the solving of a problem assumes that an *adequate ETM* could be organized in order to permit to a student to participate in the solving of the problem. This adequate ETM must necessarily fulfil two conditions: On the one hand, to permit work in the paradigm that corresponds to the problems in question; on the other hand, to be "well designed" in the sense that its different components are organized in a valid manner. Its designer plays here a role that is similar to that of the architect who designs a workspace for the potential users. In the classroom, the design of this space will depend on the *personal ETM* of the teacher. When the problem is assigned to a student, its mathematical treatment by the student will take place within the *personal ETM* of this student. Based on this fact, the *adequate ETM* is not fixed and has to be continuously modified in order to adjust itself to the local constraints.

Therefore, the mathematical work within school settings can be described at three ETM levels: The mathematics as seen by the institution is described in the reference ETM. It must be converted by the teacher into adequate ETM to permit its effective implementation in class where everyone will work in his/her personal ETM.

The choice and organization of the tasks given by the teacher to the students are essential in the constitution of the adequate ETM, so that the teacher gives an opportunity to the students to solve in an adequate manner the questions offered, i.e. in a way that is in conformity with the institutional expectations described more or less explicitly in the reference ETM. These choices and the management of the activities will depend to a large extent on the personal ETM of the teacher. The observation of the activity of the students will permit to identify their personal ETMs by identifying in them eventual sub-assemblies of stable practices.

4. The geneses of the work in the ETM

The development by an individual of his mathematical work takes place gradually and passes through a gradual approach to the implementation of his personal ETM. This global genesis of the ETM supposes the use of a set of geneses which are interdependent and concern all epistemological components and the cognitive processes. The activation and the control of these geneses can be initiated by the teacher (at the level of the adequate ETM). It is important to know to what extent they are in conformity upstream with the expectations defined in the reference ETM (Kuzniak and Rauscher, 2011; Kuzniak, 2013).

As we see it, the epistemological and cognitive plans structure the ETM in two levels and help to understand the circulation of the knowledge within the mathematical work. How then, proceeding from here, to formulate in an operative manner the epistemological and cognitive levels in order to make possible the expected mathematical work? We think that it is appropriate to use as a base the three fundamental geneses of the theoretical framework developed above.

- Instrumental genesis, which permits to make operational the artefacts in the constructive process contributing to the accomplishment of the mathematical work;
- semiotic genesis based namely on the registers of the semiotic representation which gives meaning to the ETM objects and confers to them their status of operative mathematical objects; in this way, this semiotic genesis ensures the relationships between syntax, semantics, function and structure of the conveyed signs;
- discursive genesis of the proof used by the properties combined together in the theoretical referential in order to put them in service to the mathematical reasoning and to a non-exclusively iconic, graphic or instrumented validation.

In order to define the geometrical work within the framework of the ETG, Coutat and Richard (2011) describe the interactions that are specific to the geometrical approach (see Fig. 4) by characterizing the three vertical plans which appear naturally in the diagram of the ETG. In our effort to provide a theoretical construct of an ETM by generalizing the achievements of the research on the ETGs, the vertical plans introduced in this way can be related to different phases of the mathematical work implemented within the execution of a given task: discovery and exploration, justification and reasoning, presentation and communication. The effective realization of these phases will define de facto a certain number of cognitive mathematical competences based on the coordination of the geneses in their relations with the epistemological plan (Fig. 3).

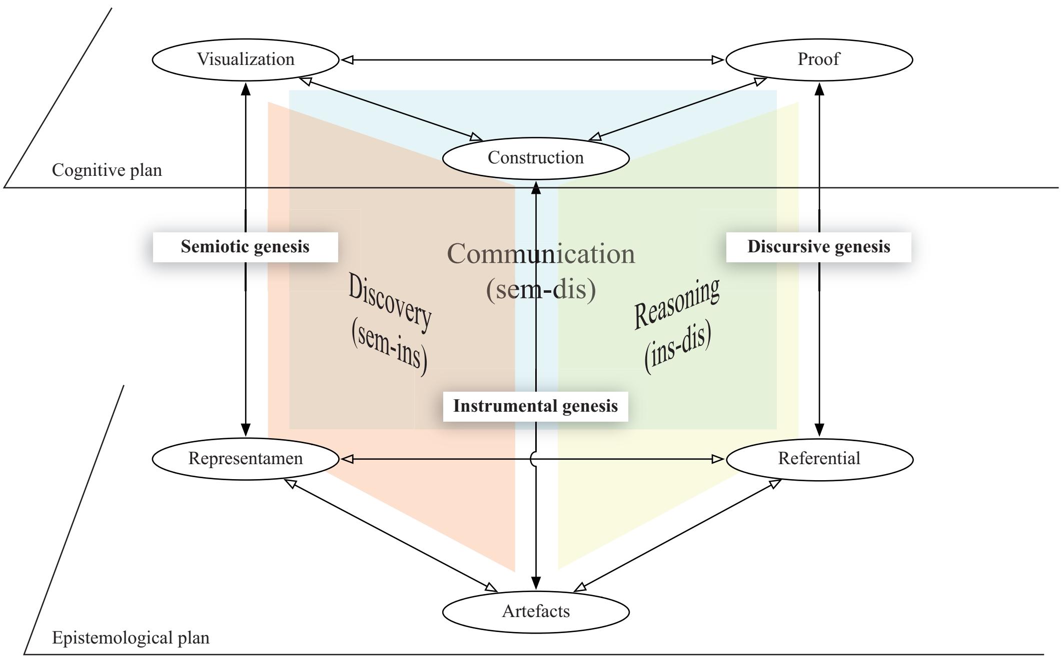


Figure 3 – The vertical plans in the ETM

A first type of interactions favours the identification and exploration of objects on the basis of the semiotic and instrumental geneses in order to develop a competence related to the discovery of a solution of the mathematical problems. A second type of interactions develops the mathematical reasoning on the basis of justification of the discoveries and formulating the instrumental and discursive geneses. And finally, one last type is oriented towards the mathematical communication of the results and is based essentially on the semiotic and discursive geneses. The exact definition of these plans of interactions and the description of their interrelations depend on the specific mathematical domain that is studied.

5. About the themes of the symposium

The articles in this issue are centred on the mathematical work and it constitutes the scientific core around which the cohesion of the scientific community was formed during the symposium. Without limiting themselves to the elaboration of a Space for Mathematical Work in its technical sense, the object of the articles retained for the special issue is devoted on a wider scale to the study of the semiotic, cognitive and instrumental dimensions of the mathematical work without excluding a priori any epistemological or didactic approaches. This expansion of the problematic to include the entire mathematical work in its different forms has been submitted to the wisdom of the contributors starting with four subjects for reflection, which one can find in the present issue.

Theme 1 – The mathematical work and the ETM

The object of this theme is, on the one hand, to go deeper into the theoretical model defined by the Space for Mathematical Works and, on the other hand, to explore their use as analytical tool in specific studies. The use of this model in other domains than geometry supposes a specific and targeted study of the areas in question and suggests thinking about ETMs which, as in the geometry, can be applied to the algebra, the analysis, the arithmetic… In order to harmonize the notations, these specific workspaces, associated to the specific domains *d*, will be notated as ETM_d, i.e. $ETM_{algebra}$, $ETM_{analysis}$, $ETM_{arithmetic}$, … The Space for Mathematical Work can be viewed as a network of diverse fibres constituting the ETM_d. Therefore, the question is to know how the links between the spaces or the browsing of the plans are organized. These interactions between the domains are essential for understanding the global functioning of the mathematical work and, in addition, they require taking into consideration the processes of modelling within the framework of the ETMs, besides the purely semiotic questions.

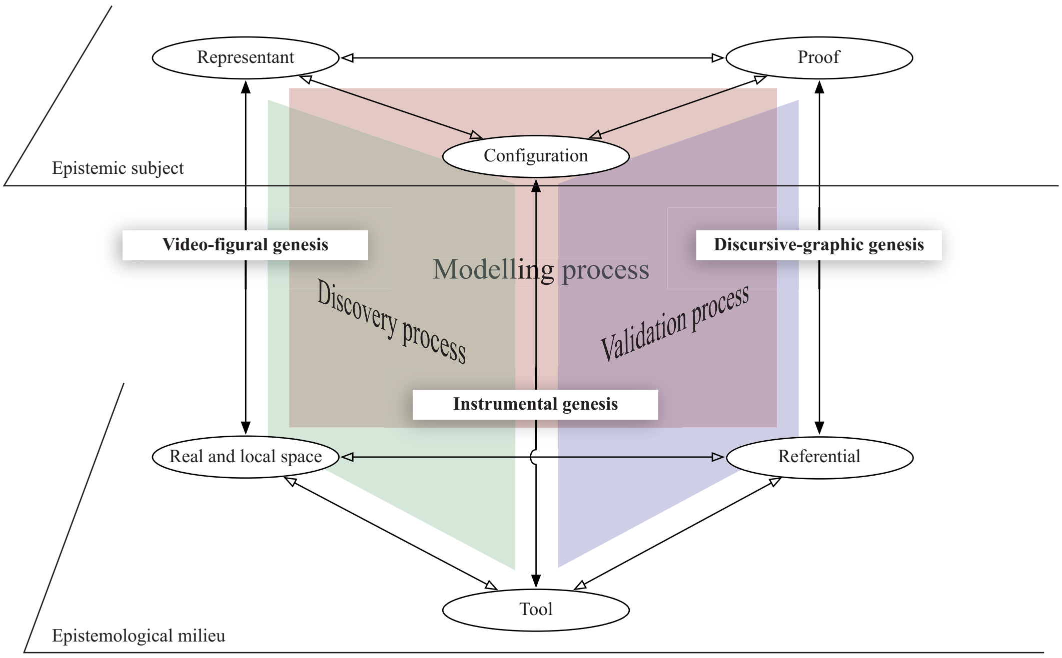


Figure 4 – The vertical plans in the adequate ETG

Theme 2 – Technological environments and mathematical work

This theme is interested specifically in the use of technological environments not for themselves, but to specify to what extent they affect the mathematical work. In fact, the emergence of many new contemporary instruments has contributed to the formation of a new relief of the constructive aspects and the artefacts supporting the execution of the mathematical work both at the level expected by the students and the level of the current research. One can put a double question mark with respect to their impact.

– In the first place, what are the potentials of such environments for transforming the mathematical work of the student? By taking into consideration the diverse geneses, it is advantageous to move out of the instrumental approach in order to answer this question.

– The second question requires to study in what aspects the use of technological environments influences the epistemological formation of the student, guiding his/her mathematical work. This can concern, for illustrative purpose only, the nature of the mathematical objects constructed and the acceptable mathematical proofs, as well as its role as a research instrument.

In order to express this question within the specific framework of geometry in the technological environments, Coutat and Richard (2011) have proposed to characterize the vertical plans of the adequate ETG by basing them on the approach idea: validation, modelling and discovery (Fig. 4). As regards the structuring of the ETM proposed above (Fig. 3), these approaches constitute the manifestations of the mathematical competences of the subject in the course of the geometrical work.

Theme 3 – The mathematical work and its social and institutional aspects

Intrinsically, the question of the contexts is central in the constitution of the mathematical work. It can be about an internal approach in order to characterize two facets of the research work of the mathematician with the discovery and justification contexts. One can add to the preceding contexts the context of use of the mathematic, which is often the main context for the students and the regular users, who are generally interested in it because of the power of its applications. It is also possible to expand the view on the mathematical work by observing the role of the specific institutions, into which this work is inserted, along with the play of the social and linguistic interactions. The role of the education, the initial or continuous one, and of the mathematic teachers appears here as a fundamental institutional lever.

Theme 4 – Visualization and representation in the mathematical work

From the fact of the variety of the graphical representations used in all domains of mathematics, the question about the visualization and its global role in the mathematical work inevitably arises. While the visualization has been object of numerous research works in geometry, there are much fewer works on the visualization in other areas of mathematics, although many contemporary publications emphasize their importance (Guzmán, 1996; Alsina and Nelsen, 2006). This theme is interested in the topics of flexibility, in the genesis of the semiotic representation registers and, more generally, in the place of these registers in the mathematical work, traditional or instrumented.

BIBLIOGRAPHIC REFERENCES

Alsina, C. & Nelsen, R. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. The Mathematical Association of America.

Coutat, S., Laborde, C. & Richard, P.R. (2014). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. *Educational Studies in Mathematics* (18 p).

Coutat, S & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 16,* 97-126.

Duval, R. (1995). Why to teach geometry. *Icmi Studies on Geometry* Catania.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de sciences cognitives, 10,* 5-54.

Guzmán, M. (1996). *El Rincón de la Pizarra. Ensayos de Visualización en Análisis Matemático. Elementos Básicos del Análisis*. Ediciones Pirámi

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education, vol 6.2. pp 167-188.*

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24. El espacio de trabajo matemático y sus génesis, traducción J. Lezama, Cicata.

Kuzniak, A. & Rauscher, J.C. (2011). How do Teachers' Approaches on Geometrical Work relate to Geometry Students Learning Difficulties? *Educational studies in Mathematics.77/1.* 129-147

Kuzniak, A. Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. *In Rezat (ed) Transformation – A fundamental idea of Mathematics Education . Springer.*

Richard, P. R. (2004). L'inférence figurale: Un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational studies in Mathematics, 57(2),* 229-263.

Thurston ; W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of American Mathematical Society. 30(2).* 161-177.

Annette Braconne-Michoux

Quel espace de travail géométrique pour les élèves au Québec ? Pour les futurs enseignants ?

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo describir los diferentes ETG se puede encontrar en el Programa de Educación in Quebec, en los libros de texto y en las salas de clase, en comparación con el ETM utilizado por los estudiantes universitarios que participan en los programas de enseñanza a las escuelas primarias. Ocurre que la distinción entre los ETG a los niveles primario y secundario de la educación no es clara. Tienden a ser conectados a algún tipo de parcelada GII (GII / gl), pero un estudiante puede salir bien cuando trabaja en una GI asumida (GI / gII). Así que los estudiantes universitarios que participan en los programas de enseñanza a las escuelas primarias funcionan en un ETG personal que puede estar cerca del de sus futuros alumnos. El desafío es, entonces, ofrecer a los estudiantes universitarios la oportunidad de trabajar en otro ETG durante su sesión de didáctica de la geometría.

PALABRAS CLAVE: GEOMETRÍA; ESPACIOS DE TRABAJO GEOMÉTRICO, EDUCACIÓN DE LOS FUTUROS PROFESORES EN LA ESCUELA PRIMARIA.

ABSTRACT :

This paper aims to describe the different GWS one can find in the Quebec Education Program, in the textbooks and in the classrooms, in comparison with the GWS used by university students involved in primary school teaching programs. It occurs that the distinction between the GWSs at primary and secondary levels of education is not clear cut. They tend to be connected to some kind of parcelled out GII (GII/gI) but a student can be successful when working in an assumed GI (GI/gII). So the university students involved in primary school teaching programs work in a personal GWS which may be close to their futures pupils' one. The challenge is then to offer the university students an opportunity to work in another GWS during their geometry training session.

KEY WORDS: Geometry, Geometrical Working Spaces, Presevice Primary School Teachers' Training

RESUMO:

Este trabalho tem como objetivo descrever os diferentes ETG pode ser encontrado na Educação em Quebec, em livros e salas de aula, em comparação com ETM usado por estudantes universitários que participam em programas de aprendizagem escolas primárias. Acontece que a distinção entre a ETG aos níveis primário e secundário de educação não é clara. Eles tendem a ser ligado a algum tipo de parcelar GII (GII / gl), mas um estudante pode ter sucesso quando se trabalha em um GI assumiu (GI / GII). Assim, os estudantes universitários que participam em programas educacionais para escolas de ensino fundamental operar em uma ETG pessoal pode estar perto de seus futuros alunos. O desafio é oferecer aos estudantes universitários a oportunidade de trabalhar em outro ETG durante a sua sessão de ensino de geometria.

Palavras-chave: Geometria, Espaços do Trabalho geométrico de futuros professores de Educação na escola primária.

Résumé

Cette contribution vise à décrire les différents espaces de travail géométrique liés aux programmes de formation de l'école québécoise au primaire et au secondaire, ceux qui sont mis en œuvre dans les manuels et dans les classes et celui dans lequel fonctionnent bon nombre d'étudiants dans le cadre de la formation initiale des maîtres. Il résulte de ces différentes études que la distinction entre les ETG visés au primaire et au secondaire n'est pas clairement explicitée. Il semble que ceux-ci s'appuient plutôt sur une géométrie GII morcelée (GII/GI) mais que les élèves peuvent réussir en travaillant dans un ETG personnel relevant d'une géométrie GI assumée (GI/gII). Il découle de ce constat que les futurs enseignants du primaire fonctionnent dans un ETG personnel proche de, voire identique à celui de l'élève du primaire. Le défi des cours de didactique en formation initiale des maîtres est donc d'amener les futurs enseignants du primaire à un ETG personnel distinct de celui de leurs futurs élèves.

Mots clés : Géométrie, Espaces de travail géométrique, formation initiale des maîtres du primaire

Introduction

Plusieurs recherches se sont intéressées aux difficultés rencontrées par les futurs enseignants du primaire, en mathématiques et tout particulièrement en géométrie (Boublil-Ekimova, 2010). Ces difficultés sont autant de l'ordre des connaissances géométriques théoriques que des conceptions de l'enseignement de la discipline (Burton, Detheux-Jehin et Fagnant, 1997). Mais, ce constat établi, on peut aussi se poser la question de l'origine de ces difficultés chez les étudiants. En analysant le parcours d'un étudiant au fil de sa scolarité, on peut imaginer trouver une explication au phénomène. Au Québec, les programmes de mathématiques actuels sont implantés depuis 2001 au primaire et 2005 au secondaire. Les manuels appliquant ces programmes sont contemporains et ont été approuvés par le ministère de l'éducation (MELS). Il est donc tout à fait vraisemblable que les connaissances des étudiants ne soient que le reflet (le fruit?) de l'enseignement qu'ils ont reçu et des apprentissages qu'ils en ont retirés. Nous allons donc analyser successivement les programmes du primaire et du secondaire et quelques activités extraites de manuels. Les activités choisies sont extraites de deux collections rédigées par les mêmes auteurs (Clicmaths au primaire, Perspective au secondaire; éditions Grand Duc – HRW) et portent sur l'étude des quadrilatères. Nous considérons que cette situation est particulièrement intéressante pour étudier l'évolution dans les attentes des auteurs en lien avec leur interprétation du programme. Les outils théoriques sur lesquels s'appuie cette étude sont les suivants : les paradigmes géométriques tels que définis par Houdement-Kuzniak (2006) et les espaces de travail géométrique (ETG) tel que définis par Kuzniak (2010). En particulier, nous étudierons le passage d'une « géométrie naturelle » (GI) à une géométrie « axiomatique naturelle » (GII), celui-ci ayant été identifié comme difficile à mettre en œuvre dans les classes alors qu'il est déterminant pour les apprentissages des élèves (Braconne-Michoux, 2008). Nous

nous attarderons aussi sur le rôle accordé aux instruments de géométrie dans les constructions géométrique, et sur la notion de figure géométrique comme objet théorique.

ESPACE DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE AU PRIMAIRE

On peut lire dans le paragraphe de présentation de la discipline :

> La pratique de la mathématique fait appel à l'abstraction. Bien que son enseignement gagne toujours à prendre appui sur des situations et des objets concrets, il doit néanmoins se donner comme objectif de traiter dans l'abstrait des relations entre les objets ou entre les éléments d'une situation. Ainsi, un objet triangulaire devient une figure géométrique, et donc un sujet d'intérêt pour le mathématicien, à partir du moment où il traite, par exemple, des relations qu'entretiennent entre eux ses côtés, ses sommets et ses angles. » (p. 124)

Dans ce préambule le passage de l'objet concret à l'objet abstrait est explicite : « l'objet triangulaire devient une figure géométrique » et le mot « figure » semble avoir le sens défini par Laborde et Capponi (1994), en tant que représentant d'un objet géométrique théorique. En termes de paradigmes géométriques, on pourrait inférer que le but de l'école primaire est d'amener les élèves à travailler dans une géométrie théorique de type GII.

Si l'on s'intéresse aux objectifs à atteindre en géométrie, on peut remarquer que la référence à un paradigme ou un autre n'est pas explicite. En effet pour chacun des cycles de l'école primaire on peut lire :

> Au *premier cycle* [1] l'élève […] dégage des régularités géométriques facilement observables et développe le sens de la mesure pour décrire son environnement, se le représenter et s'y mouvoir. …
>
> Au *deuxième cycle*, l'élève […] décrit et classifie des objets géométriques selon leurs attributs. Il construit des relations géométriques complexes et travaille avec des instruments et des unités de mesure non conventionnels relatifs aux surfaces et aux volumes. …
>
> Au *troisième cycle*, l'élève […] poursuit l'étude d'objets géométriques selon leurs attributs, la construction de relations géométriques, … » (p. 129)

On peut supposer qu'ainsi rédigé, le programme respecte d'une certaine façon la tradition québécoise où les propriétés des figures dont établies sur des cas isolés, validées le plus souvent par la mesure, puis généralisées. La liste des « savoirs essentiels » et la « progression des apprentissages » qui complètent le programme, précisent que les

Voir Annexe 1 pour la correspondance entre les systèmes scolaires français et québécois.

propriétés des figures à connaître concernent les longueurs de côtés, les valeurs d'angles, le parallélisme et la perpendicularité (le mot « diagonale » n'est pas dans le programme). Le classement attendu des figures est le classement inclusif mais les activités qui doivent aboutir à cette classification ne sont pas explicitées. Ce classement est-il établi en travaillant dans GI (visualisation, mesurage), dans GII (déduction), dans une géométrie GI assumée (GI/gII) (où les validations peuvent être faites par mesurage et où « certains théorèmes démontrables en GII, sont utilisés comme des outils techniques évitant la meure ou facilitant le calcul » (Kuzniak, 2010, p. 80)), ou dans une géométrie GII morcelée (GII/GI) (où « le modèle de référence est la géométrie d'Euclide […] (mais) les propriétés s'appuient pour leur genèse sur l'intuition de l'espace » (ibid. p. 80))? Aucune indication n'est donnée sur les activités à mener pour atteindre ces objectifs. On peut imaginer que, selon la tâche, l'élève sera amené à travailler en GI ou en GII et que le rôle de la mesure sera déterminant mais nous n'avons pas d'indication sur les ETG dans lesquels les élèves doivent travailler. On peut aussi remarquer que les constructions à l'aide des instruments ne sont pas mentionnées dans le programme. Elles sont évoquées une seule fois, dans les attendus de la compétence 2 en fin de 1er cycle : « [L'élève] construit des figures planes [..]. ». On peut donc s'interroger sur la place réservées aux constructions dans les enseignements et donc sur le rôle qui leur est attribué dans les apprentissages des élèves, en termes de paradigmes : GI ou GII? Ces remarques montrent que le programme de l'école primaire au Québec n'est pas explicite sur les objectifs à atteindre et les moyens pour les atteindre. L'ETG de référence au sens de Kuzniak, visé par l'institution, est donc très lacunaire. On peut raisonnablement penser qu'en fin de primaire il relève d'une géométrie GII morcelée (GII/GI) dans la mesure où des considérations que l'on peut qualifier de proto-axiomatiques sont à enseigner (attributs des figures) alors que les supports sur lesquels les élèves travaillent sont des dessins auxquels on attribue le statut de figures et que toutes les validations sont visuelles ou instrumentées : la mesure jouant un rôle déterminant dans le passage de GI à GII en lui accordant moins de précision dans la validation.

Que proposent les manuels? Dans le chapitre sur les quadrilatères de Clicmath 4e année primaire (voir figures 1 et 2), on trouve sur la même page deux activités où l'élève peut travailler dans GI ou en GI assumée (GI/gII). Les constructions demandées dans l'exercice 3 (figure 1) doivent être réalisées à la règle sur du papier quadrillé. Pour la construction du losange, l'élève peut mettre en œuvre des propriétés de symétrie, d'égalités de longueur ou de parallélisme. Il peut aussi la terminer « à l'œil » en se reproduisant globalement la figure prototypique qu'il connaît. Selon les procédures que l'élève mettra en œuvre, une telle activité pourra relever d'une GI assumée (l'élève applique des théorèmes comme des outils techniques) ou de GI (perception globale de la figure). La construction du parallélogramme peut se faire selon des procédures diverses qui relèvent des mêmes paradigmes (GI ou GI assumée) : translation du segment MN (glissement du côté qui « penche pareil ») ou tracé de deux segments de même longueur qui suivent le quadrillage. La construction du trapèze peut se faire dans GI; l'élève traçant deux segments de longueurs différentes en suivant le quadrillage.

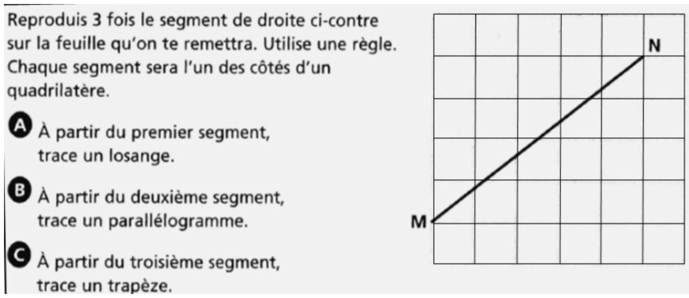


Figure : Clicmath 4e année (n°3 p. 65)

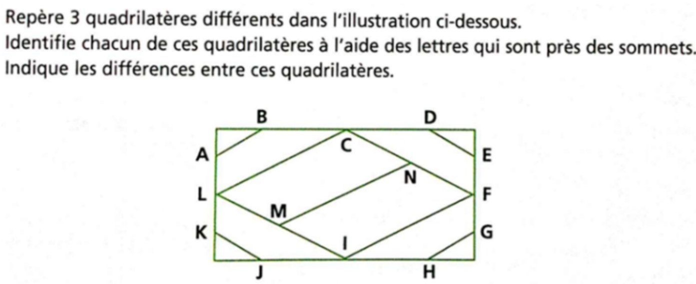


Figure : Clicmath 4e année (n°4 p. 65)

L'exercice 4 est un exercice d'observation qui demande à l'élève de repérer des figures et des sous-figures; il peut répondre de manière perceptive (apparence globale de la figure) mais aussi valider ses réponses en mesurant à la règle ou en vérifiant avec son équerre, :. Dans tous les cas, il travaille en GI.

Dans le même manuel, une année plus tard, on trouve dans le chapitre sur le cercle (figure 3), le problème suivant :

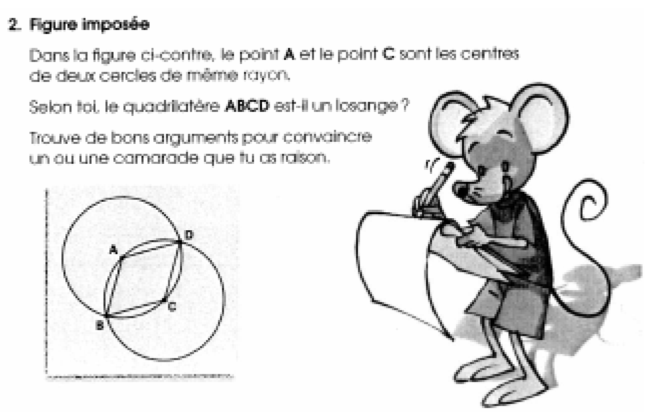


Figure : Clicmath 5e année Vol. A-1 (p. 53)

Pour répondre à cette question, l'élève peut tout d'abord dire : « c'est un losange parce que ça se voit » auquel cas il ne respecte pas le contrat. Il peut aussi mesurer les longueurs des côtés du quadrilatère (propriété connue) et se convaincre que celui-ci est un losange. Dans les deux cas l'élève travaille dans GI. Mais la consigne précise : « Trouve de bons arguments… ». Ainsi, par contrat, l'élève comprend qu'il ne peut se limiter à des réponses aussi laconiques. On peut alors imaginer qu'il va énumérer toutes les propriétés du losange et du cercle qu'il connaît (ou qu'il constate), espérant ainsi emporter la conviction de ses camarades. Il est peu vraisemblable que ces propriétés soient organisées selon un raisonnement hypothético-déductif (démonstration formelle). L'élève fonctionne dans une géométrie GI assumée (GI/gII). Concrètement, on peut penser que l'enseignant aura un rôle à jouer pour guider l'élève dans l'élaboration d'une « réponse convaincante ». D'ailleurs, dans le guide de l'enseignant, la réponse proposée est la démonstration qui se situe clairement dans GII (voir annexe 2). Nous avons ici un exemple où l'ETG de l'élève (ETG personnel) et l'ETG attendu par les auteurs du manuels (ETG idoine) ne sont pas les mêmes; le dessin n'a pas le même rôle, les validations sont le fruit de raisonnements distincts. Avec l'aide de l'enseignant, les élèves ont une opportunité d'approchée une nouvelle géométrie : GII morcelée où sont développés « des îlots hypothético-déductifs autour des propriétés de quelques figures de base » (Kuzniak, 2010, p. 80-81).

En résumé, nous pouvons dire que du point de vue des paradigmes géométriques, au primaire, les élèves travaillent spontanément en GI. Les propriétés des figures (triangles et quadrilatères) qu'ils connaissent sont établies à partir de généralisations. Elles tendent par habitude et usage répété à avoir un caractère théorique, faisant alors glisser l'élève de GI vers une GII morcelée (GII/GI). Mais ce glissement n'est pas assuré dans la mesure où, notre connaissance des pratiques enseignantes en témoigne, les élèves n'ont pas réellement l'occasion de faire la distinction entre les dessins qu'ils observent ou qu'ils produisent et les objets théoriques représentés et dont il est question lorsqu'on aborde le classement des figures par inclusion, par exemple. Ceci témoigne de la difficulté à gérer le passage de GI à GII (Braconne-Michoux, 2008). On pourrait dire que les différents ETG rencontrés à l'école primaire sont : un ETG visé par l'institution qui semble reposer sur une géométrie GII morcelée, un ETG apparaissant dans les manuels qui vise à rencontrer le précédent, en prenant en compte que les élèves commencent à travailler dans GI et un ETG personnel qui se situe clairement dans GI. Mais le passage entre GI et GII n'est jamais explicité et le dessin peut avoir le statut de figure, à l'insu de l'élève (voir figure 3).

ESPACE DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE AU SECONDAIRE

Les programmes du secondaire s'inscrivent dans la suite de celui du primaire et du point de vue du raisonnement et de la géométrie, on avance dans l'abstraction comme en témoignent ces extraits du programme de 1er cycle du secondaire :

> En géométrie, [l'élève] passe de l'observation au raisonnement. Il énonce et mobilise des propriétés, des définitions et des relations pour analyser et résoudre une situation-problème. Il construit des figures au besoin, à l'aide d'instruments ou de logiciels de géométrie dynamique. (p. 241)
>
> Il se familiarise avec les définitions et les propriétés des figures qu'il utilise pour résoudre des problèmes à l'aide de déductions simples. (p. 243)

Dans ce même programme, dans une note de bas de page à propos des contenus de formation, on peut lire : « *Dans un espace géométrique dont la dimension est donnée (0,* *1, 2 ou 3), une figure géométrique est un ensemble de points servant à représenter un objet géométrique tel qu'un point, une droite, une courbe, un polygone, un polyèdre.* » (p. 58)

Les termes du premier paragraphe semblent indiquer que l'ETG visé par l'institution s'approche d'une géométrie GII assumée (GII/gI) au sens de Kuzniak (2010). Dans le programme du second cycle, il semble que l'ETG que l'élève devrait maîtriser s'approche d'une géométrie GII morcelée (GII/GI). En effet, on peut lire :

> Au cours de sa formation, l'élève passe d'une géométrie intuitive, basée sur l'observation, à une géométrie déductive. C'est par les constructions et leur explicitation qu'il découvre les propriétés des figures. Petit à petit, il se dégage de la prise de mesures comme base de ses raisonnements pour recourir plutôt à la déduction. En s'appuyant sur des données, des hypothèses de départ ou des propriétés admises, il démontre des conjectures non évidentes qui servent, à leur tour, à en prouver de nouvelles. (p. 53)

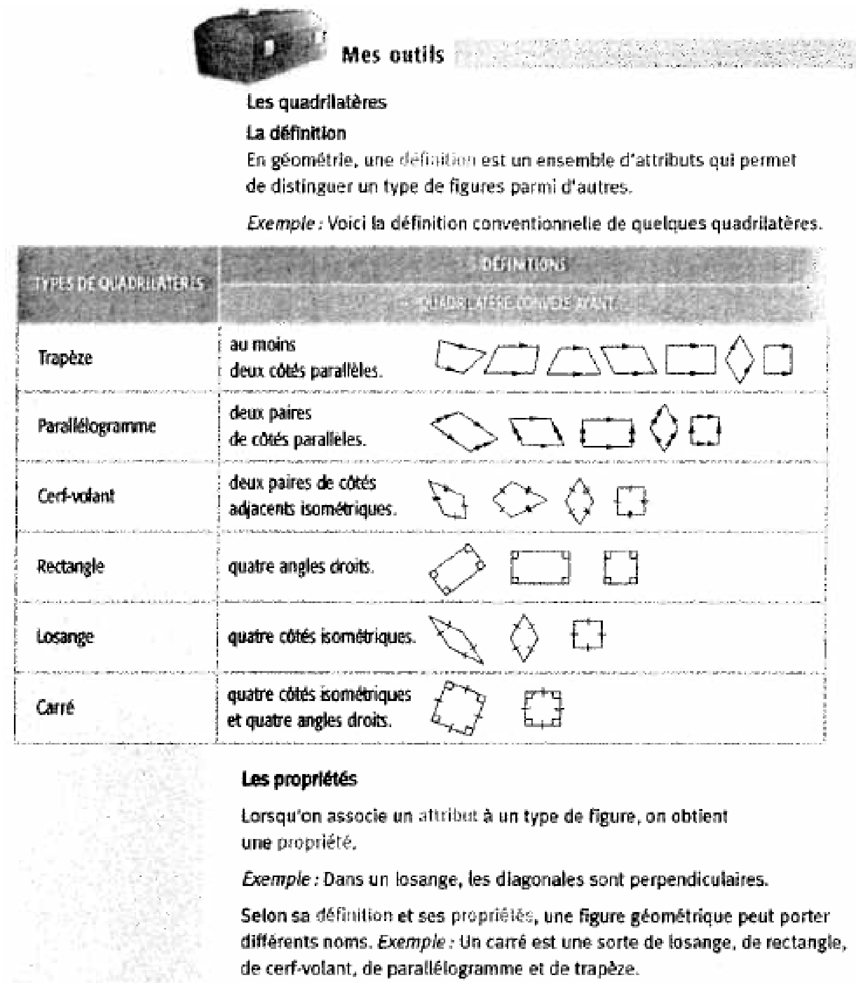
Si on se réfère aux contenus de formation c'est-à-dire aux propriétés géométriques que l'élève doit connaître à la fin de chaque cycle du secondaire[2], on s'aperçoit que celles-ci sont présentées sous le titre « Énoncés de géométrie euclidienne » et sont rédigées sous la forme de faits géométriques tels que : « *Toutes les médiatrices des cordes d'un cercle se rencontrent au centre de ce cercle* » (1er cycle, p. 261) ou « *Le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est équidistant des trois sommets* » (2e cycle, p. 131). Le programme ne donne pas d'exemple d'utilisation de ces propriétés au sein d'une démonstration ou d'un raisonnement hypothético-déductif. Le nombre de propriétés (les « attributs » de l'école primaire) à connaître est plus grand mais leur utilisation reste mal définie. On peut donc se poser la question du changement de paradigme géométrique dans le passage de l'école primaire au secondaire. L'ETG visé par l'institution est-il un ETG s'appuyant sur une géométrie GII morcelée (GII/GI) de façon à amener l'élève dans un nouvel espace de travail? L'étude des manuels pourrait nous apporter des éléments de réponses.

Pour cela, on reprendra en exemple le chapitre sur les quadrilatères, tel que proposé par le manuel Perspective de Secondaire 1, manuel rédigé par la même équipe qui a produit Clicmath et que nous avons étudié au paragraphe précédent. On peut constater que la trace écrite de la leçon (figure 4) se limite aux définitions des quadrilatères et qu'elles

---

Il est sans doute important de noter que l'étude des propriétés des figures géométriques s'arrête en secondaire 3. En secondaire 4 le programme de géométrie se réduit à la trigonométrie dans le triangle rectangle et en secondaire 5, ne sont abordées que les figures équivalentes (en aire ou en volume) et les transformations géométriques dans le plan cartésien. Les autres propriétés géométriques sont à lire dans le paragraphe « Recherche de mesures manquantes mettant à profit des propriétés de figures et des relations ».

sont toutes proposées à partir des côtés et des angles droits (donc reprises du primaire); les propriétés des diagonales sont évoquées en bas de paragraphe.



Mes outils

Les quadrilatères

La définition

En géométrie, une définition est un ensemble d'attributs qui permet de distinguer un type de figures parmi d'autres.

Exemple : Voici la définition conventionnelle de quelques quadrilatères.

TYPES DE QUADRILATÈRES	DÉFINITIONS QUADRILATÈRE CONVEXE AYANT
Trapèze	au moins deux côtés parallèles.
Parallélogramme	deux paires de côtés parallèles.
Cerf-volant	deux paires de côtés adjacents isométriques.
Rectangle	quatre angles droits.
Losange	quatre côtés isométriques.
Carré	quatre côtés isométriques et quatre angles droits.

Les propriétés

Lorsqu'on associe un attribut à un type de figure, on obtient une propriété.

Exemple : Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires.

Selon sa définition et ses propriétés, une figure géométrique peut porter différents noms. *Exemple :* Un carré est une sorte de losange, de rectangle, de cerf-volant, de parallélogramme et de trapèze.

Figure : Perspective Secondaire 1 vol. A1 (p. 88)

Le manuel de l'enseignant est néanmoins très précis sur les distinctions à faire entre définition (nombre minimal d'« attributs ») et propriété d'un quadrilatère ainsi que sur la classification inclusive des quadrilatères (voir Annexe 3). De ce point de vue, les auteurs du manuel prennent en charge, pour le professeur, le passage de GI à GII, prenant pour acquis que la géométrie de l'école primaire relève exclusivement de GI et celle du secondaire de GII.

Les activités proposées ensuite aux élèves vont montrer que le passage GI-GII est difficile à enseigner.

Ainsi, dans l'activité n°1 (figure 5), on peut s'interroger sur le fait que l'on ne demande pas de nommer les quadrilatères particuliers qui viennent d'être construits.

Situations d'application

À l'aide de tes instruments de géométrie, trace :

a) un parallélogramme ayant un côté de 5 cm ;

b) un losange comprenant un angle intérieur de 70° ;

c) un trapèze n'ayant que deux côtés isométriques ;

d) un parallélogramme ayant des diagonales perpendiculaires ;

e) un losange ayant des diagonales isométriques ;

f) un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires.

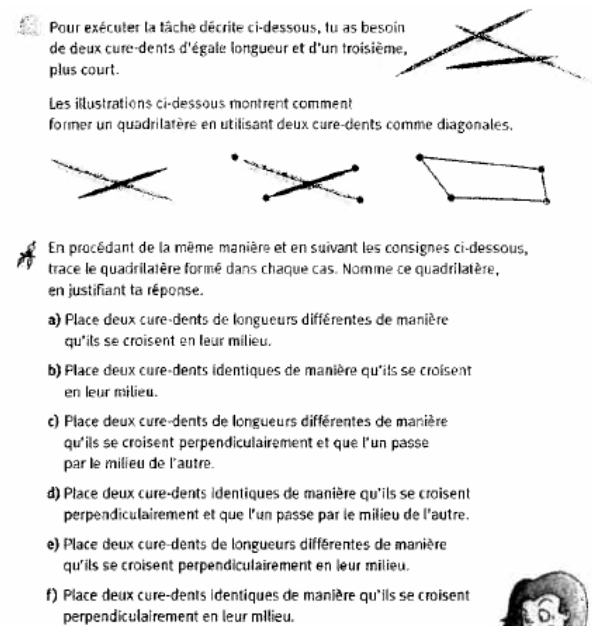
Figure : Perspective Secondaire 1 vol. A1 (activité 1 p 89)

Dans le manuel de l'enseignant (Vol. A1; partie 1), en commentaire à cette activité, on peut lire :

> En traçant les figures demandées, les élèves auront une autre occasion de manipuler leurs instruments de géométrie et d'améliorer leur habileté à construire des figures avec précision. Vérifier particulièrement leur habileté à tracer des lignes parallèles ou des lignes perpendiculaires. (p. 89)

Le corrigé (Annexe 4) se limite à donner les noms des quadrilatères particuliers. Il n'est donc plus question de travailler le passage de GI à GII. On peut alors espérer que l'enseignant aura l'initiative d'interroger les élèves sur les situations particulières associées aux trois dernières questions.

Dans l'activité 4 (figure 6), l'élève manipule des cure-dents pour ensuite tracer des figures. Sa validation est donc avant tout perceptive.



Pour exécuter la tâche décrite ci-dessous, tu as besoin de deux cure-dents d'égale longueur et d'un troisième, plus court.

Les illustrations ci-dessous montrent comment former un quadrilatère en utilisant deux cure-dents comme diagonales.

En procédant de la même manière et en suivant les consignes ci-dessous, trace le quadrilatère formé dans chaque cas. Nomme ce quadrilatère, en justifiant ta réponse.

a) Place deux cure-dents de longueurs différentes de manière qu'ils se croisent en leur milieu.

b) Place deux cure-dents identiques de manière qu'ils se croisent en leur milieu.

c) Place deux cure-dents de longueurs différentes de manière qu'ils se croisent perpendiculairement et que l'un passe par le milieu de l'autre.

d) Place deux cure-dents identiques de manière qu'ils se croisent perpendiculairement et que l'un passe par le milieu de l'autre.

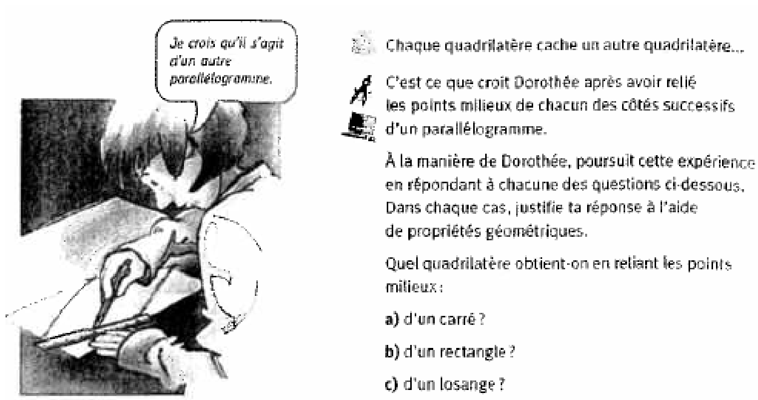
e) Place deux cure-dents de longueurs différentes de manière qu'ils se croisent perpendiculairement en leur milieu.

f) Place deux cure-dents identiques de manière qu'ils se croisent perpendiculairement en leur milieu.

Figure : Perspective Secondaire 1 vol. A1 (n°4 p 90)

Comme il lui est demandé de justifier sa réponse, il est invité à citer les propriétés des diagonales des quadrilatères, propriétés qu'il a découvertes dans l'activité d'introduction. Ici on peut considérer que l'élève travaille dans GI avec des outils de GII, donc dans un ETG s'appuyant sur une géométrie GI assumée (GI/gII).

L'exercice 9 p. 92 (figure 7) est un exemple de la difficulté à gérer le passage de GI à GII.



Chaque quadrilatère cache un autre quadrilatère...

C'est ce que croit Dorothée après avoir relié les points milieux de chacun des côtés successifs d'un parallélogramme.

À la manière de Dorothée, poursuit cette expérience en répondant à chacune des questions ci-dessous. Dans chaque cas, justifie ta réponse à l'aide de propriétés géométriques.

Quel quadrilatère obtient-on en reliant les points milieux :

a) d'un carré ?

b) d'un rectangle ?

c) d'un losange ?

Figure : Perspective Secondaire 1 vol. A1 (n°9 p 92)

En effet, la tradition québécoise veut qu'en géométrie, la figure soit faite en vraie grandeur, à partir de mesures données et à l'aide des instruments; le soin dans le tracé est déterminant. L'élève a toujours dans la possibilité de prendre des mesures pour établir une conjecture, sa conviction, voire sa validation. Mais dans cet exercice aucune mesure n'est donnée, le soin et la précision ne seront que des aides pour conjecturer. Les élèves ne connaissent pas le « théorème des milieux » dans le triangle et sont donc dans l'impossibilité de donner une justification qui relève de GII. La « meilleure » réponse qu'ils puissent donner est le constat de la position des diagonales du nouveau quadrilatère et la nature du quadrilatère qui y est associée. C'est d'ailleurs ce qui est proposé en corrigé dans le manuel de l'enseignant où les positions des diagonales sont décrites comme étant « verticales » et « horizontales » (voir Annexe 4). Cet exercice pourrait relever d'une activité en GII mais les élèves n'ont pas les moyens de l'aborder comme tel et ils restent dans une, validation instrumentée donc en GI. On peut aussi considérer que cette situation est révélatrice de la difficulté à gérer le passage GI-GII.

Enfin il nous parait intéressant de signaler que, comme en primaire, dans le chapitre sur le cercle on propose aux élèves d'étudier le quadrilatère formé par les rayons de deux cercles qui se coupent (voir figure 8).

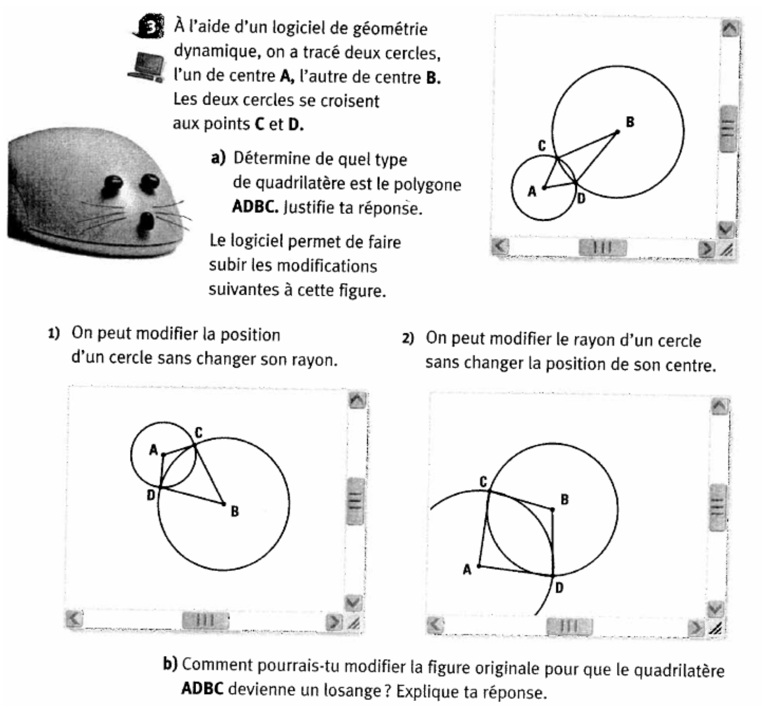


Figure : Perspective Secondaire 1 vol. A1 (n°3 p. 96)

Cette activité, présentée dans un contexte d'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique, se termine par la question posée en b) qui est proche de celle qui lui a été posée dans le manuel de 5e année primaire. La différence est que, ici, le losange n'est pas dessiné mais des images illustrant les variations des rayons et des centres sont autant de guides pour l'élève. On peut penser que l'élève donne la même réponse qu'en 5e année primaire, et continue de travailler dans le même paradigme. Le guide de l'enseignant donne une réponse plus laconique que dans le manuel de primaire comme si une telle réponse allait de soi pour les élèves (voir Annexe 5).

Cette brève étude montre que, dans certains manuels du secondaire[3], les tâches proposées sont des constructions en vraie grandeur (aux instruments) et les remarques (ou conjectures) attendues sont fortement liées à la qualité du dessin ou au thème étudié. La validation de la réponse est perceptive ou instrumentée. L'élève peut continuer de travailler en GI voire GI assumée (GI/gII), comme il le faisait à l'école primaire. Il arrive cependant qu'on lui demande des justifications et ce serait là l'occasion d'amener l'élève à changer de paradigme. Les justifications ou démonstrations demandées ne nécessitent qu'une seule propriété et l'élève confond la citation de cette propriété avec l'évidence du dessin qu'il a sous les yeux en se limitant à faire une phrase liant les informations qui sont dans l'énoncé et la conjecture qu'il vient d'émettre. (On pourra, à ce sujet, se reporter à l'analyse approfondie des problèmes de ce type faite par Tanguay (2002; 2010)). Dans l'ETG personnel, le dessin a un statut de figure mais l'élève n'est pas en mesure de distinguer les données du problème des conclusions qu'il peut en tirer à l'aide d'un raisonnement hypothético-déductif. On peut imaginer que les dessins à main levée apporteraient un grand changement dans l'activité des élèves en termes de raisonnement hypothético-déductif. On peut conclure que l'ETG proposé dans les manuels repose sur une géométrie GII assumée voire morcelée alors que les élèves peuvent continuer de fonctionner dans un ETG personnel s'appuyant sur GI.

ESPACE DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE DES ÉTUDIANTS EN FORMATION DES MAÎTRES

Les programmes actuels de primaire et de secondaire ont été implantés respectivement en 2001 et en 2005. Ainsi bon nombre d'étudiants d'aujourd'hui ont suivi l'enseignement que nous avons décrit dans les paragraphes précédents. La plupart des étudiants au Baccalauréat en enseignement primaire ont arrêté l'apprentissage de la géométrie en secondaire 3 soit, pour ce qui concerne l'Université de Montréal, 7 années avant d'aborder le cours de didactique de la géométrie. On peut donc facilement imaginer que leurs ETG personnels s'appuient sur une géométrie GI assumée, peut-être au mieux sur une géométrie GII morcelée, mais rares sont ceux qui fonctionnent dans un ETG personnel reposant sur une géométrie GII assumée. Autrement dit bon nombre d'étudiants ont un ETG personnel qui n'est sans doute pas très différent de celui d'un élève de primaire (Boublil-Ekimova, 2010). C'est là tout le défi de la formation initiale des enseignants en géométrie au primaire.

Afin d'illustrer notre propos, nous rapportons ici deux expériences de classe.

Nous avons demandé aux étudiants de faire l'activité proposée en introduction à l'identification des quadrilatères dans le manuel Presto 5e année (éditions CEC) (figure 9) :

D'autres manuels font des choix didactiques différents, en particulier à propos de l'institutionnalisation des propriétés des diagonales des quadrilatères.

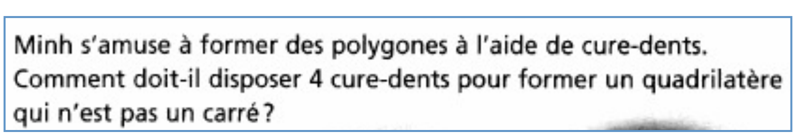

Minh s'amuse à former des polygones à l'aide de cure-dents.
Comment doit-il disposer 4 cure-dents pour former un quadrilatère qui n'est pas un carré ?

Figure 9: Presto 5^{e} année (activité d'introduction)

Plusieurs étudiants ont d'abord été déstabilisés par le fait de ne pas avoir de véritables cure-dents à leur disposition; leur remplacement par des stylos a été finalement accepté et certains d'entre eux n'ont produit que des carrés. Ils ne pouvaient former que la figure la plus particulière qui soit : un carré en position prototypique sur la table. Ces mêmes étudiants pouvaient reconnaître un losange parmi des quadrilatères, savaient en dessiner un en position prototypique. Ceux qui ont été en difficulté sur cette question étaient les mêmes qui avaient eu des difficultés à accepter les classifications inclusives des quadrilatères et des triangles. Pour eux les figures se distinguent les unes des autres de manière exclusive. Ces étudiants fonctionnant en GI ont alors des connaissances inadaptées à l'enseignement au primaire (Burton, Detheux-Jehin et Fagnant; 1997).

Nous avons aussi choisi de proposer aux étudiants l'activité reproduite ci-dessous (figure 10), extraite de Repères IREM (1993) et qui, a priori, demande un travail en GII morcelée à tout le moins.

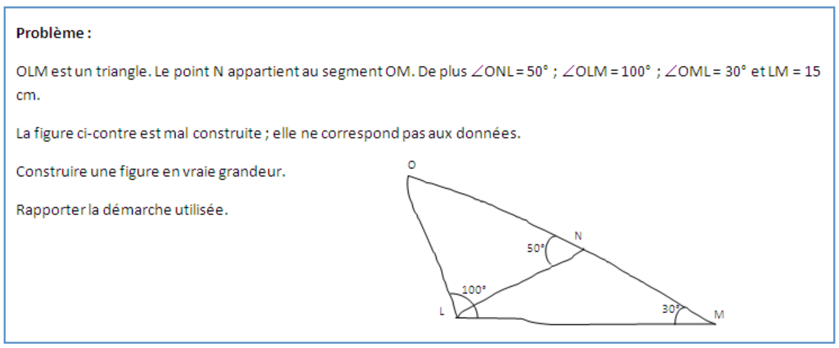


Figure 10: construction de triangles

Pour un grand nombre d'entre eux, la démarche a consisté à construire soigneusement, à l'aide des instruments, le triangle OLM en respectant les mesures indiquées. La position du point N sur le segment [OL] a été établie à l'aide du rapporteur qu'ils ont fait glisser sur le segment [OM] pour que le côté de l'angle passe par L, au besoin en utilisant une règle par-dessus le rapporteur pour garantir la « précision » de la construction. Alors que tous les étudiants connaissaient la propriété de la somme des angles d'un triangle, nombre d'entre eux ne l'ont pas utilisée pour organiser leur construction (utilisation de GII pour construction dans GI). Les validations spontanées ont consisté à vérifier que les mesures d'angle étaient exactes, en particulier que l'angle ∠LNO mesurait bien 50°. Rares ont été les étudiants à repérer que le triangle OLN est isocèle en L. La correction en classe a été l'occasion de valoriser leurs connaissances théoriques et leur mise en œuvre dans une construction. Cette activité a été une occasion unique de passage vers un nouvel ETG plus théorique.

En résumé, on peut dire que les étudiants au Baccalauréat en enseignement primaire – comme leurs futurs élèves – ont une perception de la géométrie comme un art de faire des constructions soignées à l'aide d'instruments (règle, équerre, rapporteur), avec soin et précision (fonctionnement relevant de GI). Même s'ils connaissent les propriétés théoriques (relevant de GII), les occasions de les utiliser dans des raisonnements hypothético-déductifs sont rares ; les propriétés se lisent et se déduisent avant tout sur le dessin. Les futurs enseignants et leurs élèves ont donc des ETG personnels très proches. Il est évident que ces étudiants ne sont pas responsables de cette situation. La formation de ces enseignants à propos de la géométrie représente donc un très grand défi. Les programmes du secondaire en géométrie se distinguant peu du programme de primaire – les changements de paradigmes ne sont pas clairement établis –, ne donnent pas la possibilité aux futurs maîtres du primaire de fonctionner dans un autre ETG que celui qu'ils ont utilisé eux-mêmes à l'école primaire et qu'ils auront à enseigner.

CONCLUSION

En conclusion, on peut voir que la tradition de l'enseignement de la géométrie au Québec du primaire jusqu'à la 3e année du secondaire, s'inscrit en GI puis, peut-être sur une géométrie GII morcelée (GII/GI). Mais nous avons vu que le passage GI – GII pouvait être difficile à gérer pour les auteurs de manuels. Le défi sur lequel repose la formation des maîtres du primaire en didactique de la géométrie est donc le suivant : amener les étudiants qui ne fonctionnent qu'en GI parce que les programmes le permettent jusqu'en Secondaire 3, à fonctionner dans une géométrie plus théorique (GII) pour que leurs connaissances personnelles se distinguent de celles de leurs futurs élèves. Nous avons vu que les contenus des manuels ne sont pas toujours un soutien pertinent et le temps de formation est très court pour permettre aux étudiants une telle adaptation. Aussi, en amont de ce défi, on peut aussi penser que c'est sur les enseignants actuels du secondaire que repose la charge, la responsabilité de faire passer les élèves de GI à GII (et de préférence une GII « pas trop morcelée ») alors que le programme n'est pas précis sur ce point. Autrement dit le défi de la formation initiale des maîtres du primaire deviendrait-il le défi de la formation des maîtres au secondaire?

BIBLIOGRAPHIE

Boublil-Ekimova, H. (2010) Lacunes géométriques des futurs enseignants *Annales de Didactique et de Sciences cognitives,* vol. 15, p. 97-118

Braconne-Michoux A. (2008) *Évolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2-6e.* Thèse de Doctorat; Paris Diderot-Paris 7.

Burton, J., Detheux-Jehin, M. et Fagnant, A. (1997) *Comment les enseignants évaluent-ils la géométrie au premier degré secondaire?* Liège, Service de Pédagogie expérimentale de l'Université

Frelet C. (1993) Une preuve pour construire en cinquième, *Repères IREM* n°12, p. 33-48

Guay S. et al. (2002) *Clicmaths* 2e cycle Primaire, manuel de l'élève B, éditions Grand Duc - HRW, Laval, Québec

Guay S. et al. (2003) *Clicmaths* 3e cycle Primaire, manuel de l'élève A, éditions Grand Duc - HRW, Laval, Québec

Guay S. et al. (2005) *Perspective* Secondaire 1 vol. A1, manuel de l'élève, éditions Grand Duc - HRW, Laval, Québec

Guay S. et al. (2005) *Perspective* Secondaire 1 vol. A1, guide de l'enseignant, éditions Grand Duc - HRW, Laval, Québec.

Houdement C., Kuzniak, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 11, p. 175-193

Kuzniak A. (2010) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives,* vol. 15, p. 75- 95

Lacasse C. (2003) *Presto 5e année* manuel A vol. 1. Collection Concerto, Éditions CEC, Anjou, Québec

Laborde, C. et Capponi, B. (1994) Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 14 (12), pp. 165-210

Parzysz, B. (1989) *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. Diplôme de doctorat. Université Paris-7. Ed. IREM Paris-7.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. GOUVERNEMENT DU QUÉBEC (2001) Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire. Enseignement primaire. Chapitre 6. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. GOUVERNEMENT DU QUÉBEC (2004) Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire Premier cycle, Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION. GOUVERNEMENT DU QUÉBEC (2007) Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire Deuxième cycle. Chapitre 6. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie.

Tanguay, D. (2002) Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie*, Vol. 2 (3), pp. 371-396.

Tanguay, D. (2010) *La géométrie : au carrefour du sensible et de l'intelligible*. Éditions Bande Didactique, coll. (Parenthèse), Montréal. 235 pages.

Auteur :

Annette Braconne-Michoux. Université de Montréal, Montréal, Canada.

ANNEXE 1

Correspondance entre les parcours scolaires québécois et français (enseignement général)

Québec			France			Âge d'entrée
Préscolaire		Maternelle	Maternelle	Cycle 1	PS, MS et GS	
Primaire	1^{er} cycle	$1^{ère}$ année	Primaire	Cycle 2	CP	6ans
		2^{e} année			CE1	7 ans
	2^{e} cycle	3^{e} année		Cycle 3	CE2	8 ans
		4^{e} année			CM1	9 ans
	3^{e} cycle	5^{e} année			CM2	10 ans
		6^{e} année	Secondaire	Collège	6^{e}	11 ans
Secondaire	1^{er} cycle	Secondaire 1			5^{e}	12 ans
		Secondaire 2			4^{e}	13 ans
	2^{e} cycle	Secondaire 3			3^{e}	14 ans
		Secondaire 4		Lycée	2^{nde}	15 ans
		Secondaire 5			$1^{ère}$	16 ans
	CEGEP	$1^{ère}$ année			Terminale	17 ans
		2^{e} année				18 ans

Dans les deux pays, la scolarité est obligatoire pour un enfant entre 6 et 16 ans.

ANNEXE 2

Clicmath 5e année (Vol A-1)

2. Le nouveau quadrilatère **ABCD** est un losange.

L'argumentation devrait contenir les éléments suivants.

- Les segments **AB** et **AD** sont des rayons du cercle de centre **A.**
- Les segments **CB** et **CD** sont des rayons du cercle de centre **C.**
- Dans un cercle, tous les rayons sont isométriques (donc les segments **AB** et **AD** sont isométriques et les segments **CB** et **CD** sont isométriques).
- Les deux cercles ayant le même rayon, tous les rayons des deux cercles sont isométriques (donc les quatre segments **AB, AD, CB** et **CD** sont isométriques).
- Un quadrilatère ayant quatre côtés isométriques est un losange.

ANNEXE 3

Perspective Secondaire 1 vol. A-1 : chapitre sur les quadrilatères (guide de l'enseignant) (p. 85C)

Entre nous

Au primaire, la plupart des élèves ont exploré la notion de figures géométriques comme un ensemble de représentations plus ou moins structuré, où les concepts sont plus liés à des images qu'à des mots. En effet, le nom de chaque figure était déterminé par son apparence et non pas à partir d'une définition précise. Selon cette conception, un carré ne peut pas être un rectangle, car un rectangle est plus long que large. En raison de l'image que les élèves ont à l'esprit, il n'est pas surprenant qu'ils et elles reconnaissent un losange que s'il est « bien » orienté.

Tout en apprenant à identifier de cette façon les figures de base (triangle, quadrilatère, cercle), les élèves, au primaire, ont cherché à déterminer les attributs de ces figures. Encore une fois, cette recherche était visuelle, et les élèves se servaient, au besoin, d'instruments de mesure. Ils et elles pouvaient constater, par exemple, qu'un rectangle a deux paires de côtés isométriques et parallèles simplement par l'observation. Les parallélogrammes ont ces mêmes attributs. Il faut comprendre que les attributs ne sont pas propres à une figure en particulier. Ce sont en quelque sorte des qualités indépendantes que les figures ont ou n'ont pas. C'est avec ce bagage de connaissances que les élèves commencent leurs études secondaires. Ce serait une erreur de faire table rase de tout ce qu'ils et elles ont appris, car cette façon de procéder pourrait prêter à confusion. Il vaut mieux bâtir sur ce qu'ils et elles savent déjà.

Voici de quelle façon pourrait se faire le passage du primaire au secondaire. La première étape consiste à dissocier l'identification des figures géométriques de leur apparence, c'est-à-dire à les définir tout simplement à l'aide de mots plutôt que d'images. Dans tous les cas, une définition a les caractéristiques présentées dans le tableau ci-dessous.

CARACTÉRISTIQUES	EXEMPLES
Une définition fait référence à un certain nombre d'attributs que possède la figure définie. Dans l'exemple ci-contre, il y a trois attributs.	Un rectangle est un *quadrilatère* ayant des *diagonales isométriques* qui *se croisent en leur milieu.*
Ce nombre d'attributs est minimal, c'est-à-dire qu'une figure qui ne possède pas tous ces attributs ne peut pas porter le nom de la figure définie.	Un quadrilatère ayant des diagonales qui se coupent en leur milieu, mais qui ne sont pas isométriques.  Cette figure n'est donc pas un rectangle.
Toutes les figures qui possèdent les attributs qui font partie de la définition peuvent porter le nom de la figure définie.	Puisqu'un carré possède tous les attributs qui font partie de la définition du rectangle, on peut affirmer qu'un carré est une sorte de rectangle.

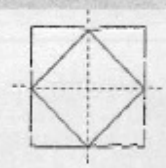
ANNEXE 4

Perspective Secondaire 1 vol. A-1 : chapitre sur les quadrilatères (guide de l'enseignant, p. 92)

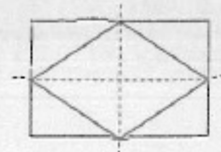
Corrigé de l'exercice 9 p. 92 (figure 7)

CORRIGÉ

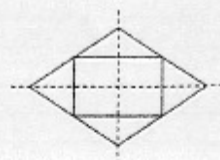
9. a) On obtient un autre carré. En effet, les axes de symétrie horizontal et vertical indiquent que les diagonales du quadrilatère tracé sont perpendiculaires, isométriques et qu'elles se coupent en leur milieu.



b) On obtient un losange. En effet, les axes de symétrie horizontal et vertical indiquent que les diagonales sont perpendiculaires et qu'elles se coupent en leur milieu.



c) On obtient un rectangle. En effet, les axes de symétrie horizontal et vertical indiquent que les diagonales sont isométriques et qu'elles se coupent en leur milieu.



Commentaire des auteurs

- Au numéro **9**, demander aux élèves de nommer les quadrilatères formés en reliant les points milieux d'un parallélogramme, d'un cerf-volant et d'un trapèze isocèle. La justification à l'aide de propriétés sera un grand défi pour les élèves.

ANNEXE 5

Perspective Secondaire 1 vol. A-1 : chapitre sur le cercle (guide de l'enseignant, n°3 p. 96)

3. a) Il s'agit d'un cerf-volant, car il a deux paires de côtés adjacents isométriques. Les côtés AC et AD sont isométriques, car ils correspondent à des rayons du cercle de centre A. Les côtés BC et BD sont isométriques, car ils correspondent à des rayons du cercle de centre B.

b) Il faut modifier le rayon d'un cercle afin que les deux cercles aient un rayon isométrique. Chacun des cercles doit passer par le centre de l'autre cercle. Si les deux cercles (cercle de centre A et cercle de centre B) ont des rayons isométriques, les côtés du quadrilatère seront isométriques et le quadrilatère sera un losange.

Travail mathématique et domaines mathématiques

Trabajo matemático y dominios matemáticos

Alain Kuzniak

Resumen. En el marco teórico de los Espacios de Trabajo Geométrico (ETG), la diferenciación entre las aproximaciones de la geometría se apoya sobre la noción de paradigmas geométricos. Con esta noción de paradigma, es posible de poner en evidencia diferencias epistemológicas en el enfoque de la prueba y también comprender y explicar variaciones en las génesis instrumentales y figurales. La extensión del marco teórico de los ETG a los Espacios de Trabajo Matemático llama la atención sobre el uso simultaneo de varios dominios matemáticos en el trabajo matemático. Vamos a discutir dos problemas descritos en un soporte geométrico al principio, pero con una solución que se puede dar en un otro dominio matemático. De un punto de vista educativo, el nuevo dominio no será necesariamente en el mismo paradigmático nivel o en el mismo nivel de desarrollo educativo o pedagógico. Estos diferentes niveles pueden ser una fuente de malentendidos y fracasos en la práctica escolar.

Palabras clave. Proceso de descubrimiento, Dominio matemático, Espacio de Trabajo Matemático, Modelización, Validación.

Abstract. Within the theoretical framework of Geometric Work Spaces (GWS), the notion of geometric paradigms is used to differentiate between approaches to geometry. Using the notion of paradigm, epistemological differences can be identified in proof forms and variations in instrumental and figural geneses can be understood and explained. The extension of GWS theoretical framework to Mathematical Work Spaces pays attention to simultaneous use of several mathematical domains in mathematical work. Two problems initially described in a geometric context and then solved in another mathematical domain will be studied. Paradigmatic levels or degrees of didactics and pedagogical development do not necessarily coincide in both domains. This possible differences of levels can lead to misunderstandings and malfunctioning in school practice.

Keywords. Discovery process, mathematical domain, Space for Mathematical Work, Modeling, Validation.

Resumo. No quadro teórico dos Espaços de Trabalho Geométrico (ETG), a diferenciação das abordagens da geometria baseia-se na noção de paradigmas geométricos. Com esta noção, é possível identificar as diferenças epistemológicas na abordagem da prova mas também compreender e explicar as variações nas géneses instrumentais e figurais. A ampliação do quadro teórico dos ETG ao Espaço de Trabalho Matemático chama a atenção para o uso simultâneo de vários domínios matemáticos no trabalho matemático. Discutiremos dois problemas descritos inicialmente através dum suporte geométrico, mas cuja solução pode ser dada noutro domínio matemático. De um ponto de vista educacional, o novo domínio não está necessariamente no mesmo nível paradigmático nem no mesmo nível de desenvolvimento educacional ou pedagógica. Estas diferenças de níveis podem ser uma fonte de mal-entendidos e de falhas na prática escolar.

Palavras-chave. Processo de descoberta, Domínio matemático, Espaço de trabalho matemático, Modelizacção, Validacção.

Résumé. Dans le cadre théorique des Espaces de Travail Géométrique (ETG), la différenciation des approches de la géométrie s'appuie sur la notion de paradigmes géométriques. Grâce à cette notion, il est possible de pointer des différences épistémologiques dans les approches de la preuve mais aussi de comprendre et d'expliquer des variations dans les genèses instrumentales et figurales. L'extension du cadre théorique des ETG aux Espaces de Travail Mathématique attire l'attention sur l'usage simultané de plusieurs domaines mathématiques dans le travail mathématique. Nous examinerons deux problèmes s'appuyant initialement sur un support géométrique mais dont la solution peut être donnée dans un autre domaine mathématique qui, d'un point de vue scolaire, ne se situe pas alors nécessairement ni au même niveau paradigmatique ni au même niveau d'élaboration didactique ou pédagogique. Ces différences de niveaux peuvent être source de malentendus et de dysfonctionnements dans la pratique scolaire.

Mots-clés. Démarche de découverte, Domaine mathématique, Espace de travail mathématique, Modélisation, Validation.

1. Positionnement de la recherche dans le cadre théorique des ETM

1.1. Domaines mathématiques

Dans le prolongement de nos recherches en didactique de la géométrie, nous avons introduit la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) qui étend celle d'Espace de Travail Géométrique (ETG). Les ETM permettent de préciser et de décrire la nature du travail mathématique attendu de la part des étudiants dans une institution donnée et aussi de décrire le travail de ces étudiants lorsqu'ils résolvent un problème.

Du fait de la structuration des mathématiques en différents domaines, il est nécessaire de bien étudier les articulations existant entre le travail dans ces domaines pour comprendre le travail mathématique dans son ensemble. Cependant, l'explicitation du découpage des mathématiques en domaines n'est pas évidente car, d'une part, les domaines évoluent dans le temps en fonction de l'évolution de la recherche en mathématiques et, d'autre part, ils dépendent aussi des institutions scolaires lorsqu'il s'agit des mathématiques enseignées. Pour rendre compte de cette division dans le cadre scolaire, les niveaux de co-détermination, introduits par Chevallard (1999), fournissent une échelle commode pour étudier les différents niveaux d'organisation des mathématiques du plus local (le sujet d'étude) au plus général, puisque la civilisation est placée au sommet de l'échelle proposée. Pour en rester à la discipline mathématique, Chevallard l'organise en domaines, sections, thèmes et sujets d'étude. Ainsi, dans le système français actuel, le domaine *fonctions* apparaît au collège en relation avec *organisation et gestion des données*. Il apparaît seul en seconde et disparaît en première englobé comme une section particulière de l'*analyse*. De la même façon, le domaine *géométrie* existe au collège en France mais n'est pas retenu dans les études PISA où il semble englobé dans un domaine dénommé *Espaces et formes* comme au Royaume-Uni.

Au-delà de ces variations institutionnelles, la différenciation des domaines mathématiques peut aussi plus fondamentalement reposer sur l'épistémologie des objets mathématiques et sur leurs relations avec des questions non mathématiques. Dans ce cadre, la géométrie élémentaire peut être considérée comme le domaine qui s'occupe de l'espace. Pour nous en tenir aux domaines les plus travaillés en didactique des mathématiques, en plus de la géométrie apparaissent un certain nombre de domaines : arithmétique, algèbre, analyse, probabilités et statistiques. Chacun de ces domaines sera relié à des thèmes non mathématiques comme le dénombrement, la symbolisation et la généralisation, la variation, le hasard, la décision. Cette liste n'épuise pas le sujet mais elle montre déjà la complexité et l'hétérogénéité des objets en jeu lorsqu'on se préoccupe du travail mathématique dans son ensemble.

Dans chaque domaine particulier, un autre type de questions porte sur la nature des objets et sur les relations entre les divers constituants de la théorie mathématique en cause, sur la minimalité et la cohérence formelle de l'axiomatique retenue. Dans le cadre de la géométrie (Houdement et Kuzniak, 1999), l'explicitation de ces questions a fait apparaître différentes approches que nous avons identifiées sous le terme de paradigme : un paradigme désignera, pour nous, l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique.

Enfin, il faut remarquer que les mathématiques ne sont pas la réunion disjointe des divers domaines qui les composent car ils entretiennent entre eux des relations complexes. De ce point de vue, l'approche globale par le travail mathématique enrichit la réflexion sur ces relations car elle précise les interactions entre domaines grâce à l'étude des méthodes, des registres en jeu et des passages d'un domaine à l'autre. Cette étude est importante d'un point de vue didactique et pédagogique car les recherches en didactique montrent que le professeur doit assumer et guider les changements de domaines. En didactique des mathématiques, Douady (1986) a particulièrement étudié l'influence de ces changements de domaines dans l'apprentissage. Dans sa terminologie, elle parle de changement de cadres. Pour Douady (1986 p.11), un cadre *est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations.* Du fait de sa référence aux images mentales, nous n'utiliserons par le cette notion de cadre qui s'avère ainsi bien plus large que celle de domaine mathématique puisqu'elle inclut une part de dimension cognitive que nous avons intégrée dans les Espaces de Travail Mathématique.

1.2. Changements de domaines mathématiques et changements de registres

Dans le cadre didactique qui est le nôtre, nous envisageons essentiellement les mathématiques comme une activité sémiotique particulière qui travaille les notions à partir de leur définition et explicitation dans des systèmes différents de signes organisés en registres de représentation sémiotique (Duval, 1996). Cette façon d'envisager l'activité mathématique dispense, dans une certaine mesure, de s'intéresser à que ce que quelqu'un a dans la tête, ce que nous cherchons à éviter.

De ce fait, l'étude de l'usage des registres de représentation sémiotiques devient essentielle pour comprendre l'activité cognitive du sujet propre à l'activité mathématique. Cette activité peut s'effectuer au sein du même registre de représentation par traitement ou bien elle suppose une conversion et un changement de registre (Duval, 1996). Ce changement de registre peut s'effectuer dans un même domaine mathématique ou, de fait, entraîner un changement de domaine mathématique. Ainsi, changements de registres et de domaines sont liés et nous souhaitons étudier ici la nature de leur relation à partir de deux questions duales liées au sens du changement.

(Q1) Est-ce que le changement de domaine est premier et a pour conséquence un changement de registre ?

(Q2) Est-ce qu'au contraire, le changement de registre est premier et il provoque implicitement un changement de domaine ?

Dans le premier cas, on peut supposer que c'est la nature épistémologique et sémantique des objets étudiés qui guide le travail mathématique alors que dans le second, la primauté donnée au changement de registre laisse plutôt penser que ce sont les points de vue techniques et syntaxiques qui pilotent le travail mathématique.

De plus, il faut aussi envisager ces questions du point de vue de l'enseignement et de l'apprentissage et donc se préoccuper de l'ETM idoine mis en place par le professeur et de l'ETM personnel des étudiants. Il importe notamment de voir si ces passages d'un domaine à l'autre ou d'un registre à l'autre sont assumés par le professeur et compris par l'élève, ou bien s'il s'agit de glissements subreptices et non explicites d'un domaine vers un autre prenant appui sur des changements de registres.

1.3 Le plan de l'étude

L'étude de l'influence d'un changement de domaines ou de registres sur la nature de l'Espace de Travail Mathématique nécessite une analyse de problèmes et de situations d'enseignement où apparaissent de tels changements. Nous appuierons notre analyse sur la structuration des Espaces de Travail Mathématique présentée dans Kuzniak et Richard (2014).

Nous aborderons cette étude de manière partielle à partir de deux problèmes où la géométrie est un des domaines impliqué dans le changement, ce qui nous permettra d'utiliser les résultats des recherches concernant les ETG, notés dans la suite $\text{ETM}_{\text{Géométrie}}$. Nous étudierons notamment comment s'effectuent les passages entre l'ETM_{G} et l'espace de travail $\text{ETM}_{\text{Domaine}}$ correspondant à autre domaine mathématique D. Dans ce cadre, nous envisagerons la question de l'homogénéité épistémologique des différents ETM en jeu. Autrement dit, nous chercherons à savoir si les paradigmes qui guident le travail mathématique dans chaque domaine sont équivalents du point de vue du statut de la preuve qui pourra être soit expérimentale en s'appuyant sur des artefacts, soit démonstrative hypothético-déductive en privilégiant un discours de preuve articulé sur le seul référentiel théorique. De la même façon nous interrogerons l'homogénéité institutionnelle des différents ETM et ainsi nous pourrons voir si les référentiels théoriques de chaque domaine bénéficient du même niveau d'élaboration axiomatique.

Nous utiliserons aussi dans la suite les différents plans verticaux de l'ETM (Kuzniak et Richard, 2014) qui visualisent l'articulation entre les trois genèses sémiotique, discursive et instrumentale. En adoptant le point de vue de Coutat et Richard (2011), ces trois nouveaux plans peuvent être associés à des formes de travail différentes mettant l'accent sur l'articulation de deux genèses particulières. Une première forme de travail articule une sémiose de type perceptif avec un discours de preuve (Plan Sem-Dis), la seconde s'appuie sur les genèses instrumentales et discursive (Plan Ins-Dis) avec l'intervention des artefacts et enfin la dernière provoque une première exploration des objets en s'appuyant sur les genèses sémiotiques et instrumentales (Plan Sem-Ins).

Nous observerons notamment le type d'entrée privilégié dans l'espace de travail pour résoudre les problèmes et ceci de manière à comprendre la circulation du travail entre les différentes genèses. Enfin, nous compléterons l'étude des questions Q1 et Q2 en observant l'impact des artefacts et des logiciels utilisés sur l'évolution de la nature de la validation en cas d'un changement de domaine lié aux instruments. Il s'agira de voir dans quelle mesure un travail orienté initialement par une preuve hypothético-déductive se transforme en preuve expérimentale sous l'effet des logiciels ou des instruments de mesure (question Q3).

2. Étude de deux problèmes

Nous considérerons dans la suite que l'on peut décrire le travail mathématique à travers l'articulation des différents plans que nous avons précisés plus haut et nous envisagerons les questions Q1, Q2 et Q3 en utilisant ces éléments théoriques pour étudier deux problèmes à support géométrique. Le premier, Charlotte et Marie, repose à la fois sur l'exploitation d'une figure et sur un possible changement de domaine, le second, le « carré plié », nécessite un changement de domaine ou de registre pour sa résolution.

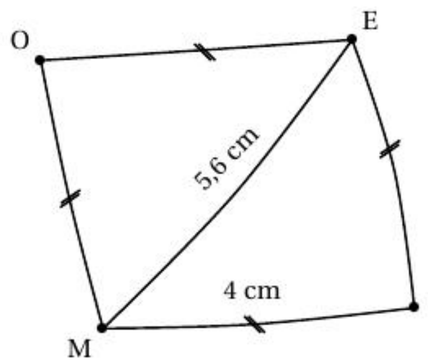
2.1 Un problème géométrique ambigu

Nous reprenons un exemple que nous avons plusieurs fois étudié : le problème de Charlotte et Marie. En plus de disposer d'une classification des réponses des étudiants (Kuzniak & Rauscher, 2011), une des raisons de cette reprise est le fait que ce problème a fait l'objet d'un sujet de Brevet des collèges (examen en fin de neuvième année) en 2012 sous une forme nouvelle. Dans cette nouvelle version, un dessin à main levée illustre l'énoncé.

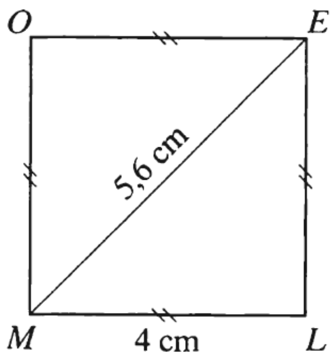
EXERCICE 2

Voici la figure à main levée d'un quadrilatère :

1. Reproduire en vraie grandeur ce quadrilatère .
2. Pourquoi peut-on affirmer que OELM est un losange ?
3. Marie soutient que OELM est un carré, mais Charlotte est sûre que ce n'est pas vrai.
   Qui a raison ? Pourquoi ?



Tandis que dans la forme initiale de l'énoncé, un dessin semblable à un carré et plus conforme à la réalité est donné et il n'y a pas la question 1 sur la reproduction du quadrilatère.



Dans ce cas, le problème est ambigu car l'origine de la figure n'est pas indiquée. S'agit-il d'un dessin déjà existant qui a été mesuré ou bien de la construction d'un carré ou d'un losange avec l'approximation qu'apportent les instruments ?

Notre étude (Kuzniak & Rauscher, 2011) a mis en évidence plusieurs types de solutions basées sur des approches empiriques. En effet, une majorité d'étudiants s'appuie sur une interprétation visuelle et perceptive du problème qui conduit soit à l'affirmation sans preuve que la figure est bien un carré (conviction perceptive) soit à une démarche de validation de cette affirmation qui s'appuie sur les instruments de construction.

Le travail de ces étudiants est initié dans le plan (Sem → Dis) avec un appui sur une identification visuelle de la figure qui donne une idée du résultat. Certains de ces étudiants en reste là convaincus par l'aspect iconique de la figure. Ils n'apportent pas une preuve discursive basée sur le référentiel théorique (Dis → Sem). Par contre, la plupart des étudiants s'engagent alors dans une démarche de validation sous sa forme expérimentale en utilisant divers instruments de dessin (Plan Ins-Dis). Certains vérifient avec une équerre que les diagonales sont perpendiculaires. D'autres ont aussi vérifié l'égalité ou la non égalité des longueurs des diagonales avec la règle ou le compas (les quatre sommets sont considérés ou non comme étant sur le même cercle).

L'usage des instruments de construction et de mesure intègre de fait l'approximation dans le travail demandé or, au niveau du collège, cette dernière relève presque uniquement du domaine intitulé *nombres et calculs* et non du domaine *grandeurs et mesure*. En effet, dans ce domaine, aucun travail de mesurage n'est prévu, ce type d'activité s'inscrivant dans une autre discipline, la physique. L'absence d'un travail spécifique sur l'approximation dans l'institution collège fait que l'ETM$_{\text{Géométrie}}$ idoine mis en place dans les classes ne donne pas aux étudiants les outils pour un traitement adéquat des résultats obtenus avec les instruments. Cette carence est en partie justifiée par le fait qu'à ce niveau de la scolarité, il y a un basculement attendu vers la Géométrie II sans recours aux instruments pour prouver.

Le recours à une figure à main levée devrait permettre de diminuer l'impact de la figure et favoriser l'entrée discursive en s'appuyant sur des propriétés démontrées et non plus sur des assertions vérifiées expérimentalement. Mais, la nouvelle formulation retenue ici est exemplaire de l'incohérence de l'ETM idoine actuel en France. En effet, la première question replace le problème dans le cadre des constructions et des instruments par sa demande d'une « reproduction » (sic) en vraie grandeur de la figure à main levée. Cette fois, il devient clair que le dessin obtenu est le résultat d'une construction et cette demande transforme radicalement le travail géométrique en privilégiant, de fait, le paradigme de la Géométrie I avec toute l'ambiguïté de ce type de problèmes donnés dans un ETG de référence supposé privilégier la Géométrie II.

Dans l'ETM idoine correspondant à ce niveau de scolarité, la solution de ces problèmes d'approximation géométrique attendue par les enseignants ne repose pas sur le mesurage mais sur l'emploi des théorèmes de Pythagore ou de Thalès. Ces théorèmes sont généralement associés à des configurations géométriques standards qui jouent le rôle de signe déclencheur. Dans notre problème particulier, il est attendu de prouver que la figure n'est pas un carré en montrant l'inégalité des nombres calculés grâce au théorème de Pythagore. Plusieurs raisonnements basés sur des approximations numériques sont alors possibles mettant en jeu un des différents niveaux de pensée approximative mis en évidence par Guilbaud (1985). En suivant sa classification, on peut considérer trois niveaux qui vont structurer de manière différente le travail mathématique en changeant la nature du référentiel théorique utilisé dans l'ETM$_{\text{Nombres}}$.

1) une valeur approchée indicative

2) un encadrement par des nombres décimaux

3) une suite indéfinie d'encadrements qui suppose les nombres réels.

Dans le cas du problème étudié, cela donne trois manières de le traiter :

1. Une première utilise une approximation de $4\sqrt{2}$ de la forme 5,66. Ce nombre est différent de 5,6. Cette assertion permet de conclure en Géométrie II que la figure n'est pas un carré.
2. Une seconde solution suppose que la longueur du côté (5,6 cm) est donnée avec une incertitude de 0,1 cm. Elle est ainsi comprise entre 5,5 et 5,7 et comme $4\sqrt{2}$ est dans cet intervalle, la figure peut donc être considérée comme un carré dans une approche paradigmatique qui correspond cette fois à la Géométrie I.
3. La dernière solution exploite la nature différente des nombres réels en jeu (5,6 et $4\sqrt{2}$) : ces deux nombres ne peuvent être égaux du fait de l'irrationalité de l'un d'eux. Dans ce cas, le niveau paradigmatique supposé alors dans ce nouvel ETM$_{\text{Nombres}}$ ne correspond pas à celui de attendu dans la classe où est posé le problème de géométrie faute d'un travail explicite sur les nombres réels à ce niveau de la scolarité.

Le problème de Géométrie initialement posé dans un ETM$_{\text{Géométrie}}$ se transforme en un problème de calcul numérique associé à un espace de travail des nombres, ETM$_{\text{Nombres}}$. Ce changement de domaine est implicite et résulte d'un glissement dû au changement de registre provoqué par le Théorème de Pythagore. D'autre part, du fait de l'absence d'un travail explicite sur les propriétés géométriques liées à l'approximation dans l'ETG idoine, les étudiants engagés dans ce type de démarche éprouvent des difficultés pour conclure. Cela entraîne chez les étudiants une grande variété d'interprétation des résultats et ils pourront soit mettre leur conclusion en accord avec ce qu'ils voient (« c'est un carré ») soit aller à l'encontre du vu et l'on retrouve, laissé à leur seule initiative, le conflit souligné par Parzysz (1988) entre le vu et le su.

2.2 Un problème géométrique nécessitant un changement de domaine

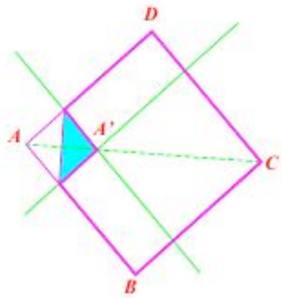
Le problème du carré plié relève de ce que Artigue, Cazes et Vandebrouck (2011) ont appelé des problèmes d'enseignes “shop-sign problems”. Dans ces problèmes avec support géométrique, deux surfaces sont déterminées par un point qui se déplace à l'intérieur d'un carré, d'un cercle ou d'un rectangle. Les deux aires changent conjointement en fonction de la position du point et il s'agit de comparer les aires. Ces problèmes sont posés dans le domaine géométrique mais leur solution nécessite un changement vers un autre domaine mathématique, algèbre ou analyse. Simultanément, un changement de registres avec des notations algébriques ou fonctionnelles est indispensable pour parvenir à la solution. La plupart du temps, les fonctions sont des polynômes du second degré qui sont au programmes des classes du secondaire où ces problèmes sont posés.

La résolution du problème du carré plié est très dépendante de la forme de la consigne et du milieu matériel fourni aux étudiants. Dans le cas que nous avons étudié, la tâche a été donnée dans un contexte réel sans formulation mathématique écrite :

> Un carré découpé dans une feuille bicolore est donné aux étudiants qui doivent le plier le long d'un diagonale et comparer les aires des deux parties visible dans chaque couleur.

Ce problème n'est pas original et a été utilisé dans une étude comparative franco-mexicaine (Kuzniak, Parzysz et Vivier, 2011). Nous donnons la formulation proposée au Mexique et qui permet au lecteur un accès plus aisé au problème :

> On donne une pièce carrée de papier ABCD de côté l. Une des faces du papier est blanche et l'autre bleue. Le coin A est plié sur un point A' situé sur la diagonale AC. Où doit être situé le point A' sur cette diagonale pour que la surface visible soit à moitié bleue à moitié blanche ?



Les étudiants ont dû résoudre le problème par équipes avec certaines contraintes portant sur les outils informatiques disponibles. Nous avons ainsi pu explorer les modifications induites dans l'ETM par les artefacts et vérifier l'impact de la genèse instrumentale sur le travail mathématique dans les quatre cas suivants : un travail avec uniquement l'usage du papier crayon, un environnement avec GeoGebra, un autre avec une calculatrice et enfin un dernier avec un tableur.

Le cas classique d'un environnement papier crayon sans outils informatiques

Les étudiants commencent par faire une modélisation de la situation en passant dans le cadre algébrique ce qui leur permet d'aboutir à une équation du second degré qui leur donne la valeur de x en fonction du côté du carré l :

$x=$ [illegible]

Le travail de ces étudiants avancés se situe dans le plan (Sem ↔ Dis) et il passe par un changement de domaine mathématique qui fait basculer la tâche dans l'algèbre. Les étudiants poursuivent alors leur travail dans ce plan pour valider le résultat par démonstration en s'appuyant sur la technique de résolution d'une équation quadratique en relation avec un traitement dans le registre algébrique.

Le changement de domaine et l'entrée dans l'$ETM_{\text{Algèbre}}$ supposent une maîtrise de la démonstration dans ce nouvel Espace de Travail pour parvenir à la solution. Cette solution repose sur la gestion simultanée et maîtrisée de deux ETM d'où sa difficulté.

Avec l'utilisation d'un DGS, GeoGebra

Par sa consigne, le professeur favorise une entrée instrumentale dans le travail mathématique et l'usage d'un logiciel aussi polyvalent que GeoGebra débouche sur l'exploration de plusieurs registres. Le travail personnel des étudiants va dépendre de leur maîtrise du logiciel : emploi du mode « trace » ou « lieu », connaissance du fait que le logiciel donne une valeur numérique de l'aire d'un polygone quelconque, lien avec les graphes de fonctions. Le travail est donc initié dans le plan (Sem-Ins) et l'un des enjeux de la situation sera de savoir comment s'effectue la transition vers la validation.

Chez les étudiants que nous avons pu observer, leur maîtrise du logiciel les a conduit rapidement à un changement de registre vers le registre graphique. Plus précisément, ils ont travaillé de la manière suivante en utilisant uniquement et directement GeoGebra, sans usage du papier.

– Dessin du carré plié avec la mise en évidence des aires de chacune des parties. Le point qui se déplace est le point A' sur la diagonale.

– Sur la même page écran, deux courbes sont tracées dans un repère cartésien : l'une représente l'aire du triangle bleu et l'autre celle de l'hexagone blanc. Le lien entre le point A' et les aires est fait grâce au mode « Trace » et non avec le mode « lieu ».

– De ce fait, le point d'intersection des graphes est obtenu par approximation et sa valeur numérique dépend de la valeur numérique de la longueur du côté. Il n'y a pas ici de généralisation du résultat en fonction de la variable l comme dans le travail algébrique précédent.

Ainsi, le travail a commencé dans le plan (Sem-Ins) et il a permis d'explorer un nouveau registre graphique sur lequel s'est s'appuyée la démarche de validation de type expérimental dans le plan (Ins → Dis). Du fait de l'usage du mode « trace », l'approximation est faite par ajustement. Le changement de domaine est implicite comme conséquence du changement de registre. Le travail mathématique est fondé sur l'exploration de nombreux registres (graphiques, nombres, écritures algébriques) qui conduisent à une preuve sans travail démonstratif. Cet espace de travail relève implicitement de l'Analyse mathématique ou pour garder la terminologie institutionnelle de l'étude des fonctions.

Avec une calculette graphique.

Cette fois, les étudiants ont commencé leur travail par écrit et par une phase de modélisation (Sem-Dis) : ils ont exprimer la valeur de chacune des aires en fonction de la variable x égale au côté du triangle plié. Ensuite, l'usage imposé, par le professeur, de la calculatrice les a obligés à passer par une exploration avec les instruments et une recherche de la solution approchée de l'intersection des deux courbes représentées sur l'écran de la calculette (Sem-Ins). Pour cela, ils ont utilisé simultanément les tableaux de valeurs et le zoom de la calculatrice dans une démarche proche de celle utilisée avec GeoGebra.

Sur la demande du professeur et du fait de la disponibilité des écritures algébriques, les étudiants ont pu résoudre l'équation du second degré associée à l'intersection des deux graphes et ils ont obtenu ainsi une valeur exacte dépendant de l. Ils sont ainsi revenu dans le plan (Sem-Dis) avec un travail algébrique, les artefacts ont nourri l'intuition mais leur usage n'est pas requis pour la preuve.

Ce travail mathématique très dirigé par le professeur correspond à l'espace de travail idoine attendu en classe de seconde (année 10). Il faut constater qu'il a provoqué des blocages et des arrêts dans la circulation à l'intérieur de l'ETM. Dans un premier temps, les étudiants ont effectué un changement explicite de domaine en modélisant la situation grâce à l'Algèbre puis le professeur les a forcés à une exploration graphique avec la calculatrice qui n'a pas débouché clairement sur une solution. Enfin, il leur a fait finir l'activité en résolvant l'équation trouvée au début de l'activité. Le rôle de l'exploration avec la calculatrice est entré en conflit avec le travail spontané de ces étudiants. Le domaine mathématique est celui des fonctions et il correspond à un $\text{ETM}_{\text{Fonctions}}$ où l'algèbre sert d'appui pour les démonstrations et la définition des fonctions (Vandebrouck, 2011).

Avec un tableur

Dans ce cas, l'usage imposé du tableur provoque immédiatement un changement de registre qui a rendu implicite le passage dans le domaine algébrique. En effet, les étudiants ont utilisé, comme variable dans le tableur, la hauteur du triangle plié et ils ont fixé les variations de cette variable grâce à la longueur de la diagonale en incrémentant les valeurs numériques avec un pas donné. Le tableur fournit alors les valeurs numériques des deux aires (celle du triangle et celle de l'hexagone) et le rapport de ces deux aires. Une valeur approchée du résultat est obtenue quand le rapport est égal à 1. Cette fois, le travail s'est effectué dans (Sem-Ins) avec un passage vers la validation orienté par l'ajustement dans le registre du tableur. Le domaine de travail est resté implicite et il n'est pas évident de savoir s'il s'agissait d'un travail de type numérique ou bien fonctionnel.

En conclusion, l'intérêt de ce problème est de confronter les démarches de validation et d'exploration lorsque l'on fait varier les instruments autorisés. Il a aussi clarifier la difficulté de conclure la phase de modélisation par une validation formelle lorsque l'usage des artefacts est imposé. On a pu repérer deux grandes formes de travail mathématique qui s'appuient de manière différente sur les changements de domaines et de registres

1. Le changement de domaine de travail (Algèbre ou Fonctions) est explicite et fait entrer dans un nouvel Espace de Travail ETM_D. De la maîtrise ou non de cet ETM_D va venir la solution. La démarche de preuve peut osciller entre preuve expérimentale et preuve démonstrative qui est celle attendu dans l'ETM_D idoine correspondant à ce niveau de scolarité.

2. Le changement de domaine de travail est implicite et il est basé sur un changement explicite de registre de représentation imposé par le professeur par le choix des instruments mis dans le milieu matériel. Les deux registres sont ici le registre graphique en relation avec le domaine des fonctions et le registre numérique (tableur) en relation avec le domaine algébrique. Le travail d'approximation est plutôt du type ajustement ou encadrement mais le professeur peut le faire basculer vers un niveau de pensée approximative plus élevé en introduisant le mode “lieu” à la place du mode “trace” dans le cas de GeoGebra et en faisant travailler la méthode de dichotomie dans le registre numérique dans le cas du tableur.

3. Conclusion

L'objet de cet article était d'expliciter la nature du travail mathématique dans le cadre scolaire lorsque des changements de domaines mathématiques et de registres de représentation sont nécessaires pour résoudre les problèmes posés. Nous avons appuyé la description de ce travail sur la structuration des ETM suivant les trois plans verticaux qui rendent compte des différentes genèses qui relient les plans épistémologique et cognitif. Cette structuration en différents plans permet une description plus précise du travail personnel des étudiants mais aussi une analyse de l'Espace de travail idoine que le professeur va pouvoir mettre en place. Ces analyses ne sont pas seulement descriptives mais visent aussi à penser et créer les conditions de la mise en place d'un ETM idoine grâce à la mise en évidence des points sur lesquels le professeur va pouvoir s'appuyer pour contrôler les changements de registres et les changements de domaines. Cet aspect est particulièrement sensible lorsque des artefacts technologiques sont introduits par le professeur dans l'espace de travail des étudiants.

Notre étude a permis d'observer que dans le travail idoine attendu, le changement de domaine mathématique s'effectue explicitement dans le plan (Sem-Dis) correspondant à une phase d'identification du problème poursuivie par une validation basée sur un référentiel théorique. Ce changement de domaine provoque dans le même temps un changement de registre de représentation qui apparaît comme une conséquence du changement explicite de domaine. Ce changement de registre complète alors le discours de validation de type démonstratif et il nécessite la maîtrise des techniques de traitements dans les registres de représentation associés au nouvel ETM. Le changement de domaine mathématique suppose une maîtrise technique suffisante par les étudiants des registres en jeu dans le nouvel ETM pour être efficace. Dans ces conditions, les étudiants peuvent fournir une réponse adéquate au problème proposé et présenter leur solution d'une manière conforme au type de validation attendu par le professeur dans l'espace de travail idoine.

De plus en plus fréquemment et conformément aux attentes institutionnelles, les enseignants recourent aux outils informatiques pour guider la phase de découverte de la solution. Nous avons vu que cet usage des outils faisait entrer les étudiants dans un nouveau registre qui de manière subreptice, i.e non explicite, les faisait changer de domaine mathématique. La transition de la démarche de découverte et d'exploration (Plan Sem-Ins) en une démarche de validation s'effectue alors plutôt dans un contexte expérimental (Sem-Inst → Dis) plutôt que démonstratif (Dis → Sem-Inst) souvent en contradiction avec les attentes du professeur. Ceci est dû à la non reconnaissance par les étudiants du nouveau domaine et/ou à une méconnaissance des règles de fonctionnement de l'ETM_D idoine qui lui est associé. En effet, comme l'ETM idoine mis en place par le professeur n'assume par une claire prise en charge des conséquences de l'exploration instrumentale sur la nature et le type de la validation, les étudiants enrichissent le référentiel théorique en s'appuyant sur cette première exploration instrumentale des propriétés alors que les professeurs attendent une justification des découvertes initiales qui utilise un référentiel théorique déjà-là.

Un autre élément vient perturber le bon fonctionnement de l'ETM lorsqu'il y a un changement de domaine mathématique qui nécessite un travail de gestion de l'approximation sur les données proposées par la machine. Cette gestion de l'approximation ne fait pas partie de l'espace de travail idoine développé par l'enseignant or de fait elle renvoie à différents paradigmes qui peuvent être en contradiction dans du point de vue de la nature épistémologique de la preuve (Kuzniak 2010). Cela explique les divers blocages rencontrés couramment dans ces activités de changements de domaines mathématiques notamment dans les problèmes de modélisation où expérimentation et démonstration apparaissent parfois contradictoires. Le changement non explicite de domaine mathématique et l'absence d'un travail explicite sur les relations entre l'approximation dans le domaine géométrique et dans le domaine cible impliquent un mauvais feuilletage entre les deux ETM.

Pour les surmonter, l'intervention du professeur doit se situer au niveau de l'explicitation du changement de domaine lié au changement de registre. La difficulté est ici d'assurer un niveau de compétence égale dans les deux ETM_D pour permettre les jeux entre domaines mathématiques correspondant aux *jeux de cadres* introduits par Douady (1986). Une autre manière de concevoir cette relation est de profiter de ce changement de domaine mathématique pour développer la maîtrise d'un des deux ETM_D en s'appuyant sur une meilleure maîtrise de l'autre domaine. Il est également possible de développer des outils informatiques qui assurent une médiation instrumentale et sémiotique en travaillant sur le traitement à l'intérieur du registre privilégié pour la solution comme dans les travaux sur les fractions d'Adjiage et Pluvinage (2007) ou ceux de Falcade et Mariotti (2011) dans le domaine géométrique. Néanmoins, notre analyse des interactions entre domaines et registres à l'intérieur des espaces de travail mathématique montre leur grande complexité ainsi que leur très difficile gestion par le professeur.

Références

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2007). An Experiment in Teaching Ratio and Proportion. *Educational Studies in Mathematics. 65*, 149-175.

Artigue, M., Cazes, C. & Vandebrouck, F. (2011). The shop sign family : a project for supporting teachers' use of ICT. *Poster at Cerme7. University of Rzeszow.*

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques. 19/2.* 221-265

Coutat, S. & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 16,* 97-126.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des mathématiques,* 7/2, 7-31.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de sciences cognitives, 10,* 5-54.

Falcade, R. & Mariotti, M.A. (2011). L'évolution des signes dans le processus de médiation sémiotique. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques.*

Guilbaud, G. Th. (1985). *Leçons d'à peu-près.* Paris:Christian Bourgois.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational studies in Mathematics.40.* 283-312.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, Annales de didactique et de sciences cognitives, 16, 9-24.

Kuzniak, A, Parzysz, B. & Vivier, L. (2013). Trajectory of a Problem:A study in Teacher Training. *The Mathematics Enthusiast Vol.10, No. 1 & 2*, 407-440.

Kuzniak, A. & Rauscher, J.C. (2011). How do Teachers' Approaches on Geometrical Work relate to Geometry Students Learning Difficulties? *Educational studies in Mathematics.77/1.* 129-147.

Kuzniak, A. & Richard, R. P. (2014). Espaces de Travail Mathématiques. Points de vue et perspectives. *RELIME, Numero extraordinario 1.*

Parzysz, B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures. *Educational Studies in Mathematics. 19,* 79-92

Vandebrouck, F ; (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 16,*149-186.

Autor
Alain Kuzniak, Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Diderot, Paris, France.

CIRCULACIONES Y GÉNESIS EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

Elizabeth Montoya-Delgadillo, Arturo Mena-Lorca, Jaime Mena-Lorca

emontoya@ucv.cl, arturo.mena@ucv.cl, jmena@ucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso – Chile

RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio de casos, como parte de un seguimiento de las prácticas de aula de profesores debutantes realizado por los autores. Entre otros aspectos, hemos observado que en tales prácticas el Álgebra interviene en los otros dominios a tal punto que esos profesores inducen en sus alumnos un Espacio de Trabajo Matemático en el cual, si bien se producen circulaciones entre las componentes de los planos cognitivo y epistemológico que involucran las génesis instrumental y semiótica, la génesis discursiva está casi ausente. Para estudiar la situación obtenemos información adicional de modo de entender el rol que juega el Álgebra en el desarrollo de otros dominios de la matemática. Luego presentamos un ejemplo de cómo un profesor debutante con esas características puede influir en el Espacio de Trabajo Matemático-personal de sus alumnos.

PALABRAS CLAVE: *Espacio de trabajo matemático, génesis*, *estudio de casos.*

RÉSUMÉ

Dans cet article, on présente une étude de cas, dans le cadre d'un suivi des pratiques de classe des enseignants débutants effectué par les auteurs. Nous avons pu observé qu'en Algèbre d'autres domaines mathématiques sont utilisés et, de ce fait, les enseignants développent pour leurs élèves un Espace de Travail Mathématique dans lequel la genèse discursive est presque absente même si il y a une circulation entre les composantes des plans cognitif et épistémologique. Pour étudier la situation nous utilisons des données supplémentaires pour comprendre que joue l'Algèbre dans le développement d'autres domaines des mathématiques. Nous présentons un exemple de l'influence d'un professeur débutant, avec ces caractéristiques propres, sur l'Espace de Travail Mathématique personnel de ses élèves.

MOTS CLÉ: *Espace de Travail Mathématique, genèses, étude de cas.*

ABSTRACT

In this paper we present a case study, as part of a monitoring of junior teachers' classroom practices. Among other things, we have observed that, in those practices, algebra intervenes in the other domains to an extent that they induce in their students a Mathematical Workspace in which, although circulations occur between the components of the cognitive and epistemological planes involved in the instrumental and semiotic geneses, the discursive genesis is almost absent. In order to study the situation, firstly we get further information in order to understand the role played by algebra in the development of other domains of mathematics. We then present an example of how a junior teacher may influence the personal Mathematical Workspace of his/her students.

KEYWORDS: *Mathematical Workspace, geneses, case study.*

1. INTRODUCCIÓN

Nos propusimos hacer un seguimiento por tres años a *profesores debutantes en aulas*, PD, esto es, a maestros con a lo sumo dos años de servicio, en su actividad de clases, como parte de un proyecto en el cual nos preguntamos por las concepciones geométricas y algebraicas desarrolladas en el aula.

Indagaciones previas señalan que, con frecuencia, los profesores privilegian la algoritmia y '*algebrizan'* la Geometría y otros dominios matemáticos. En este trabajo, mostraremos evidencias sobre la tendencia que las clases han indicado: a los PD se les dificulta hacer la apropiada trasposición didáctica de los contenidos geométricos y algebraicos; de hecho, parecen divididos entre las exigencias de su institución formadora y aquellas que deben poner en juego en su enseñanza o, simplemente, muestran desconocimiento acerca de cómo transponer algunos saberes.

Estudiamos la complejidad de esta cuestión con profesores debutantes en el sistema educativo chileno, principalmente en dos ejes de nuestro interés: Álgebra y Geometría. Nuestras primeras observaciones dan cuenta de que el profesor trabaja una geometría '*algebrizada'*, esto es, que cuando él propone un problema en Geometría, recurrentemente cambia a un dominio algebraico para resolverlo y se limita, por ejemplo, a resolver un sistema de ecuaciones, corriendo el riesgo de obstaculizar la construcción del objeto matemático en cuestión en el dominio geométrico.

Nuestro marco es la teoría del *Espacio de Trabajo Matemático*, ETM (Kuzniak, 2011). Ello nos ha permitido situar el problema en términos teóricos precisos y, en particular, analizar con detención el rol que cumplen las distintas *componentes* de los planos epistemológico y cognitivo del ETMG en la cuestión, y cómo estos se adaptan en un dominio algebraico, configurando un *espacio de trabajo algebraico*, ETMA.

2. Antecedentes Teóricos

Houdement y Kuzniak (1996, 2006) y Kuzniak (2004) identifican tres tipos de Geometría, GI, GII, GIII, que coexisten en la enseñanza y cuya función es favorecer que el alumno construya su propio *espacio de trabajo geométrico*, ETG, guiado por el docente. En este espacio, los problemas geométricos toman distinta interpretación y validez dependiendo del paradigma presente y de la institución elegida.

Actualmente, la teoría considera un espacio de trabajo matemático global, ETM, el cual depende del dominio matemático –así, el ETG es ahora ETMG, y además se tiene ETMA para el Álgebra, etc.– (Kuzniak, 2011), de este modo, en el ETM se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas matemáticos (geométricos, algebraicos…), en un *ambiente* organizado por y para el matemático (geómetra, algebrista…) mediante la articulación de dos planos, uno epistemológico y otro cognitivo (Kuzniak, 2011). (Ver Figura 1 de Kuzniak y Richard, 2014, en este *Número Especial*).
Es también de esa manera que un individuo configura un constructo teórico acerca de un objeto y/o contenido. Ahora bien, una tarea determinada propuesta por el profesor activa una o varias génesis en el alumno, lo que se puede evidenciar en cierta medida en la *circulación* que se realiza en la clase entre las componentes de los planos. Nuestra hipótesis es que la activación de todas las génesis (que se puede detectar en una circulación apropiada) permite que el estudiante haga una construcción suficientemente completa del objeto matemático bajo estudio. Una tarea que se limite a la génesis semiótica, por ejemplo, puede obstruir los aspectos operativos que ofrece y/o requiere el contenido1 en cuestión, o la validación de

Que eventualmente involucra varios objetos.

tal objeto. De esta forma, una circulación que activa solamente las génesis semiótica e instrumental se sitúa únicamente en el plano vertical "proceso de descubrimiento", señalado en la Figura 4 de (Kuzniak y Richard, 2014, en este *Número Especial*).

3. Pregunta de investigación y forma de abordar el estudio

Como se dijo al inicio, se hace necesario estudiar la aparente algebrización de la matemática en las aulas y el paradigma que esta tiende a inducir en el estudiante. Se hace necesario caracterizarla y ver los elementos que la constituyen. Para ello, en términos teóricos se requiere clarificar el rol que cumple un *representamen* propiamente algebraico en los dominios geométricos u otros, distinguiendo bien cuándo se está en un dominio algebraico propiamente tal (ETMA). Esto último requirió por su parte de ahondar en la teoría las ideas de artefacto simbólico y de génesis instrumental. A su vez, lo anterior llevó a preguntarse acerca del efecto de la algebrización del ETM-idóneo de un PD en el ETM-personal de los alumnos, para lo cual se estudió la génesis discursiva en un trabajo geométrico habitual en alumnos.

En esta investigación nos preguntamos en términos generales por el proceso de transposición (Chevallard, 1985) desplegado en aula por un profesor debutante, e indagamos cómo son llevados al aula sus propios conocimientos matemáticos en un proceso de enseñanza en Geometría y Álgebra. Nos interesa averiguar qué privilegia o deja de hacer cuando se inserta en una institución escolar que le demanda nuevas responsabilidades, respecto de las cuales ha recibido, en forma más bien teórica, elementos en su institución formadora. Más precisamente, nos preguntamos cuáles son las concepciones geométricas y algebraicas desarrolladas en clase por un profesor debutante.

Una hipótesis, ya sugerida, es que el recurso habitual a la *algebrización* de los problemas geométricos por los PD podría impedir que los alumnos instrumentalicen recursos propiamente geométricos y con ello obstruir la génesis discursiva. Otra hipótesis es que el recurso a la geometría ante una situación algebraica corra por su parte el riesgo de reducirse a una visualización icónica; en tal caso, puede que la situación algebraica no se enlace con la herramienta (Douady, 1984) geométrica, lo que obstaculizaría también la formación de un ETM apropiado en los alumnos, o que la pregnancia del ícono obstaculice una génesis discursiva correcta.

Por otra parte, con las tareas que propone y con el discurso que realiza, el profesor (o el conjunto de profesores de una institución, o los textos escolares) va constituyendo paulatinamente un paradigma en su curso (institución, etc.) de cómo se representa, cómo se opera y cómo se valida el trabajo con ese objeto.

Si acaso su enseñanza se limita a alguna(s) de las génesis, estaría instituyendo un paradigma en que los objetos matemáticos están en alguna medida distorsionados.

En adición a lo anterior, es posible que el profesor no pueda activar la génesis discursiva. Por ejemplo podría entender que el proceso de prueba corresponde exclusivamente al mundo matemático (Montoya, 2010) y por tanto es innecesario para los alumnos con quienes trabaja, o, por el contrario, intentar que sus alumnos remeden en lo que puedan (como una transposición compleja de realizar) los usos de los matemáticos al respecto. En esto influye además la escasa presencia de procesos de prueba en las mediciones internacionales, que tendería también a disminuir ante el profesor (y en el paradigma) la relevancia de la génesis discursiva.

Hemos seguido durante 10 sesiones de 1,5 horas a 6 PD. En la tabla 1 se muestran algunos de los temas tratados por los PD, que nos llevaron a caracterizar mejor los paradigmas dominantes en cada caso y nos permitieron, paralelamente, establecer o precisar aspectos teóricos del ETM que explicitaremos más abajo. De los videos analizados, seleccionamos dos, en los cuales aspectos relevantes del ETM-idóneo, si bien coincidentes con los de los otros PD, se evidencian con mayor claridad.

TABLA I
Profesores Debutantes

Profesor	Género	Nº de clases observadas	Nivel	Temas tratados	ETM desarrollado
PD1	F	10	2º Medio	Semejanza, Teorema de Tales, productos notables, fracciones algebraicas.	Clases observadas con un fuerte predominio en contenidos algebraicos y tratamiento algebraico
PD2	F	11	1º y 2º Medio	Función lineal - Función afín - Función valor absoluto. Resolución de Ecuaciones, Sistemas de Ecuaciones, Repaso.	Clases observadas solo en contenidos algebraicos. Fuerte predominio de un tratamiento algebraico.

Mostraremos extractos de las grabaciones y la pauta usada para examinar las circulaciones que se realizan en el ETM. Esta pauta procura identificar cómo se van activando las génesis por la o las tareas que el profesor propone en su clase. Con el objeto de describir la circulación, hemos rotulado cada componente de los planos como sigue: 1, representamen; 2, artefactos; 3 referencial; A, visualización; B, construcción; C, prueba.

4. Cuestionamientos teóricos

4.1 *Articulación y circulación entre componentes: génesis instrumental*

En la Figura 1 de la introducción se muestra el ETM con sus planos, sus componentes y sus génesis, las cuales articulan y hacen evolucionar los planos epistemológico y cognitivo (Kuzniak, 2011). Pensando en el ETM-idóneo, una propuesta de enseñanza puede activar y controlar estas génesis, es decir, desarrollar una circulación específica. También se puede analizar la circulación en el ETM personal como en el referencial y en el idóneo.

La génesis instrumental da cuenta de cómo un *artefacto* se convierte en un *instrumento* y de esta forma se integra al humano para construir conocimiento matemático (Artigue, 2002): el *artefacto* (Rabardel, 1995) es un objeto material o abstracto destinado a dar sustento a la actividad del hombre en la ejecución de un cierto tipo de tarea; el *instrumento* es lo que un sujeto construye a partir del artefacto. La *génesis instrumental* es el proceso de transformación de un artefacto en instrumento.

El proceso de *instrumentalización* (Trouche, 2002) se apoya en un reconocimiento de las funciones del artefacto y lo convierte en una herramienta matemática funcional al estudiante. Correspondientemente, el de *instrumentación* (Ibíd.) de las acciones matemáticas por el uso de la herramienta involucra la construcción de esquemas mentales personales y la apropiación de otros preexistentes para desarrollar y entender (de manera eventualmente distinta) la actividad matemática. La instrumentalización puede conducir al enriquecimiento del artefacto por un mejor aprovechamiento del mismo, pero también a su subutilización (Artigue, 2002). De allí la importancia de la pregunta de cómo potenciar el artefacto para que se instrumentalice en los paradigmas y así las génesis hagan evolucionar el ETM.

4.2 *El artefacto como instrumento teórico*

Los artefactos pertenecen al plano epistemológico (Houdement & Kuzniak, 1996, 2006; Kuzniak, 2011) y corresponden a todo lo que le permite al usuario manipular los objetos matemáticos, o, mejor dicho, su representación, con la finalidad de abordar la tarea en concordancia con la génesis discursiva.

Ahora bien, en el enfoque de Rabardel (1995), los artefactos están relacionados con sus usos y no deben ser considerados como entes transparentes. En este sentido, los instrumentos son entidades mixtas formadas por el objeto técnico (artefacto) –material o simbólico– y componentes cognitivas al momento de manipular al *representamen* (Peirce, 1978, Kuzniak 2011), relacionados con sus usos (esquemas de uso) –la génesis semiótica–.

Más aún, según hemos podido comprobar a partir de los casos analizados en el estudio, un *representamen* que un estudiante identifica como del dominio algebraico activa la génesis instrumental, iniciándose un proceso de instrumentalización para dar cuenta de una tarea geométrica, y los casos que hemos analizado dan cuenta de ello. Por ejemplo, ocurre con frecuencia en problemas de carácter geométrico que, si a un trazo desconocido se le asigna la variable "*x*", ello induzca a trabajar el problema geométrico en el dominio algebraico; esto parecería una manera de obrar no solo habitual sino apropiada, sin embargo, se corre el riesgo de que el profesor debutante obstaculice el desarrollo geométrico.

5. El caso de los profesores debutantes

A continuación presentamos evidencia en aula de dos profesoras debutantes, PD1 y PD2, cada una titulada en una universidad chilena (distinta) con tradición en formación de profesores, ambas con contrato regular en sus respectivos liceos. Las grabaciones se realizaron durante los años 2011 y 2012. Las clases que analizamos aquí corresponden a una de PD1 en Geometría (teorema de Tales) y otra de PD2 en Álgebra (sistema de ecuaciones lineales), realizadas ambas para alumnos de 15-16 años (2º año de liceo). Estos dos casos resultan ser distintivos en los respectivos dominios de interés en esta investigación, y muestran cómo un profesor debutante instrumentaliza una tarea con sus alumnos.

En las grabaciones se identificaron episodios y tareas que entregaron los PD. Con posterioridad a ello, se identificaron génesis y circulaciones en el ETM para su respectivo análisis.

5.1 *Teorema de Tales*

PD1 trató el teorema de Tales en su clase, e introdujo el tema mediante el problema de buscar una altura (medida inaccesible) de una pirámide sirviéndose del largo de un bastón. Este episodio es el que se muestra transcrito (ver tabla II). Posteriormente hubo un segundo episodio, que ejemplifica la situación con trazos desconocidos, y un tercero en que se muestra el teorema (general), y en el cual la tarea es determinar el trazo desconocido.

La práctica de aula de PD1 muestra que privilegia la figura en que se presenta el teorema en los textos escolares habituales en Chile. El centro de la tarea que propuso fue determinar el valor de una incógnita y resolver bien una ecuación, mostrando "pasos" para aplicar en forma correcta la algoritmia asociada; con esto, cambia el problema desde el dominio geométrico al algebraico. PD1 utiliza la componente visualización para transitar al referencial, sin activar la génesis discursiva en GI o GII.

En la Tabla II mostramos la presentación de la tarea asociadas al desarrollo de la clase de PD1.

TABLA II

Presentación del Teorema de Tales y la circulación en el ETM

Tarea	Circulación	Descripción y caracterización del ETG del Profesor	Intervenciones de estudiantes
Tarea de clase: *Determinar la altura de una pirámide median-te semejanza de triángulos.* Tarea genérica: *Determinar la medida de un cateto mediante la proporcionalidad de triángulos.*	3 1 A	Relaciona la semejanza con la proporcionalidad, estudiada la clase anterior según PD1. Los objetos que menciona son la pirámide y su altura, para determinar la altura de un bastón. En la pizarra se representa la pirámide (3D/2D) 2 mediante el dibujo de un triángulo rectángulo a mano alzada; no usa artefactos de manipulación, muestra dos triángulos rectángulos (sin indicar que lo son) donde los catetos corresponden a la sombra (ver I1, columna siguiente) y altura de una pirámide y un bastón, respectivamente. Obs. 1: PD1 no justifica la pirámide y tampoco hace relación con la semejanza, estudiada anteriormente. Obs. 2: ante intervención I2 responde que sí, y que a partir de esta idea nace el teorema.	I1: Un estudiante (pregunta por la sombra que se determinará, pues la configuración 3D/2D dibujada no se relaciona directamente con los objetos reales. I2: Un estudiante pregunta si esto permite determinar medidas de otros objetos.

En la tabla solo hemos puesto la tarea como la presenta la profesora PD1, sin continuar con el desarrollo y la descripción de la circulación, la cual se encuentra codificada en la segunda columna, según lo señalado en 3.43. En la transcripción que sigue, podemos constatar que PD1 cambia del marco geométrico al algebraico, no haciendo la génesis apropiada para mantener al alumno en el ETMG. Ante la primera pregunta del estudiante, que evoca una ecuación, ella promueve el uso del Álgebra con el objeto de plantear una ecuación cada vez que tiene un segmento desconocido. Esto evidencia el cambio en el *espacio de trabajo* y así la tarea geométrica es una excusa para pasar a las ecuaciones, como si fuese una "geometría aritmetizada" perdiendo el horizonte la tarea geométrica en sí. A continuación mostramos cuándo PD1 cambia el problema de proporcionalidad a uno de solución de una ecuación (de ETMG a ETMA).

[PD1]: "*Claro, sí, porque a lo mejor no solo lo podemos hacer para el caso de la pirámide, o sea, de ahí nació el teorema. Pero, por ejemplo, yo podría saber cuánto mide un edificio y quiero saber cuánto mide la sombra que proyecta ese edificio, o la sombra que proyecta un árbol, entonces vamos a ver más ejercicios de*

Una figura de tres dimensiones es trabajada en dos dimensiones (Duval, 2005).

Es decir: 1, representamen; 2, artefactos; 3 referencial; A, visualización; B, construcción; C, prueba.

> *aplicación, porque además no solo se aplica el teorema de Tales para el triángulo. Lo vamos a ver también para cuando las rectas son paralelas, cuando hay dos rectas secantes. Pero la idea es que entiendan que el teorema de Tales tiene que ver con lados proporcionales, entonces eso es lo que nosotros vamos a ir buscando, cuáles son los lados proporcionales".*

[A2]: (A PD1). *"Con el uno supongo que se verifica; con el 3, ¿qué se hace?".*
[PD1] "*En el caso, por ejemplo, de que fuera un 3, me diera 3x, estaría multiplicando, ¿cómo pasaría para despejar la ecuación?*".
[A2]: "*Dividiendo, pero profe, quedaría x, el x siempre tiene que quedar solo…* "
[PD1]: "*Claro, porque lo que queremos saber es la incógnita".*

Se observa que PD1 tiene un discurso frente al teorema de Tales que no activa. Más precisamente, PD1 no activa la génesis discursiva, y la hipótesis del teorema queda relegada al dibujo (a lo icónico): habla de lados proporcionales pero se centra en plantear la ecuación y despejar la "*x*", sobre todo en ejemplos en los cuales bastaba usar la proporcionalidad para determinar el trazo desconocido y la ecuación no era necesaria. PD1 activa la génesis instrumental, sin embargo postulamos que, a pesar de que la ecuación sea un artefacto simbólico en el dominio de la Geometría, al no ser aquella instrumentalizada geométricamente, ocurre que la tarea inicial cambia de dominio y de ese modo no se desarrolla ni se explota el ETM apropiado.

En términos globales, en la clase de PD1 se observa una circulación (A-1-2-B) en el ETM activada por las génesis instrumental y semiótica, pero no obtiene un desarrollo del dominio de la Geometría dado que su centro de interés es resolver ecuaciones.

5.2 *Figuras geométricas prototípicas y la algebrización de la Geometría*

En los textos escolares chilenos, en las clases y en las evaluaciones de medición a la calidad de la educación (nacional) se usan figuras prototípicas asociadas a teoremas clásicos. Por ejemplo, la que aparece en la Figura 1 (que aparece más abajo) es una de ellas.

Es interesante notar que tanto la expresión "teorema de Tales" como la figura prototípica de este y la ecuación correspondiente funcionan como *representámenes* del teorema, y se requiere de una articulación de las tres génesis para su comprensión correcta en el ETMG. A partir de los trabajos de Duval, es natural pensar que la figura prototípica funciona como ícono, más aun si la tarea se algebriza y la génesis discursiva es bloqueada por esto último.

Con el objeto de entender mejor lo que venían sugiriendo los videos de aulas, se realizó un estudio adicional con la ayuda de un tesista (Merino, 2012). Este estudio da cuenta de un aspecto del ETM personal de veinte estudiantes entre 16 y 18 años que han sido sometidos a un proceso de enseñanza como el que evidenciaban los PD.

Se presentó el dibujo de un triángulo isósceles ABC, de base AB. El triángulo incluye un segmento DE, donde D está sobre AC y E sobre BC, el cual es visual y claramente no paralelo a la base. Se dan las medidas de AD, DC y AB, y se pregunta si es posible determinar la longitud del trazo EH, donde H es el punto de intersección de DE con la altura del triángulo (trazada desde C).

Ante el problema, el 60% de los estudiantes procedió a calcular los valores de los segmentos con los valores asignados a los trazos en el dibujo, utilizando el teorema de Tales. Los restantes señalan que falta tener información adicional; de estos, sólo el 30% afirma que lo que falta es una condición: el paralelismo. La tarea fue planificada de tal forma que no siendo una actividad típica evidenciara lo que estábamos suponiendo que ocurriría, esto es, que los estudiantes visualizarían la figura prototípica y las correspondientes propiedades como un todo, sin verificar sus diferentes aspectos –como en el caso antes descrito, en el cual la hipótesis de paralelismo del teorema no está presente para un gran porcentaje de los estudiantes–.

5.3 *Sistema de ecuaciones*

PD2 aborda el problema de resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. El caso es aparentemente inverso al anterior, ya que, a pesar de que la institución sugiere resolver estos sistemas en forma geométrica, cambia de dominio. PD2 resuelve el sistema en la forma en que estos sistemas son tratados en textos escolares oficiales, pero no advierte que realiza una generalización inapropiada, que veremos a continuación.

El espacio de trabajo de PD2 tiene una fuerte vinculación entre las componentes visualización y artefacto. La clase se inicia (primer episodio) explicando qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales escritas en lenguaje simbólico vía sustitución de las ecuaciones y verificación de la igualdad numérica. Pero el centro de la clase consiste en determinar dicha solución, mediante el "método gráfico", i. e., solucionar el sistema con un tratamiento netamente geométrico: dibujar las gráficas de las ecuaciones involucradas, analizar si existen o no soluciones, dependiendo de la intersección eventual de las gráficas (Figura 1).

A continuación, el extracto de cuando PD2 busca la solución con el método geométrico:

[PD2] : (A los estudiantes). "*¿Cuál es el procedimiento? Lo primero que debemos hacer para encontrar las soluciones es graficar las ecuaciones. Paso número uno, entonces, graficar. Lo que vamos a trabajar ahora son solamente con rectas. Eso es lo que hemos visto hasta el momento, así que vamos a graficar solamente rectas. Después, con el paso del tiempo, vamos a ir avanzando en otras funciones. Paso número uno entonces, graficar cada recta en el plano cartesiano*".

[PD2]: "*Y una vez que ya tenemos graficadas las rectas hallamos el punto donde se intersectan las rectas. Hallamos el punto de intersección de las rectas*".

[A4]: (A PD2). *"¿Viene otro paso?*"

[PD2]: "*Es que no hay más pasos*"

[A3]: "*¿Eso era todo?"*

[PD2]: "*Sí, eso es todo. Recuerden que gráficamente era encontrar el punto de intersección y será la solución a ambas ecuaciones".*

Con esta tarea y su proceder, PD2 articula los componentes visualización y artefacto para llegar al referencial del ETG. Cabe destacar, a nivel de artefacto, que para esta actividad los estudiantes debían trabajar con una hoja de papel milimetrado, lo que sugiere precisión en la escala de los ejes, y por ende en la solución del sistema.

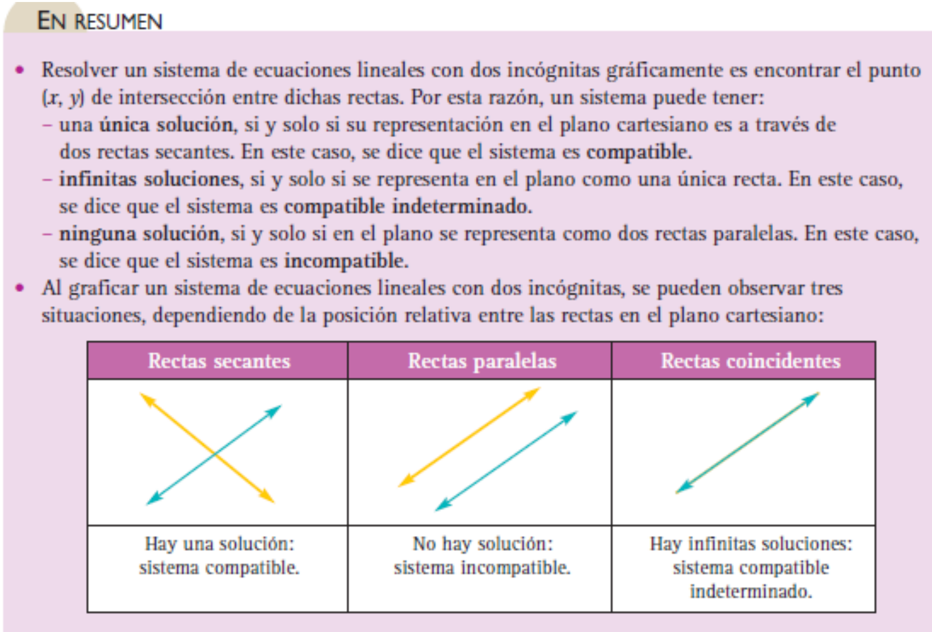
[PD2]: (A los alumnos). *"Aún no vamos a usar la hoja milimetrada, así que saquen cuadernos, lápices y presten atención".*

A continuación, la profesora muestra una presentación similar a la de la Figura 1 con la intención de explicar el método, y finaliza como sigue:

[PD2] (A los alumnos). *"Atención, es importante. Este método no es siempre útil totalmente porque a veces nos vamos a encontrar que el punto de intersección va a ser súper difícil de determinar y no se va a ver claramente en algunos casos".*

[PD2]: "*Al graficar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se pueden observar tres casos. Lo importante es que sepan que, cuando graficamos rectas, ocurren tres casos. Puede ocurrir que las rectas sean secantes, o sea, se corten en un punto, sean paralelas o que coincidan las dos".*

Lo anterior es presentado en textos (Cf. Figura 1), en los cuales hay observaciones más explícitas del dominio o pertinencia del método geométrico aludido, es decir, se indica expresamente que es un método para algunos casos y que por ello se requiere de otros que posteriormente se desarrollan.



EN RESUMEN

- Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas gráficamente es encontrar el punto (x, y) de intersección entre dichas rectas. Por esta razón, un sistema puede tener:
  - una **única solución**, si y solo si su representación en el plano cartesiano es a través de dos rectas secantes. En este caso, se dice que el sistema es **compatible**.
  - **infinitas soluciones**, si y solo si se representa en el plano como una única recta. En este caso, se dice que el sistema es **compatible indeterminado**.
  - **ninguna solución**, si y solo si en el plano se representa como dos rectas paralelas. En este caso, se dice que el sistema es **incompatible**.
- Al graficar un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se pueden observar tres situaciones, dependiendo de la posición relativa entre las rectas en el plano cartesiano:

Rectas secantes	Rectas paralelas	Rectas coincidentes
Hay una solución: sistema compatible.	No hay solución: sistema incompatible.	Hay infinitas soluciones: sistema compatible indeterminado.

Figura 1: Presentación habitual en un texto escolar Segundo Medio.

Es claro que resolver el sistema es una tarea algebraica y que recurrir a la solución geométrica es un proceso de visualización de esta tarea. Así, la génesis semiótica corresponde a ETMA y no a una génesis figural en ETMG. Los puntos (íconos geométricos) no son solución del sistema sino que corresponden a una aproximación, y la existencia de las soluciones depende del sistema numérico en que están planteadas las ecuaciones. Como vemos, una vez finalizado el tratamiento gráfico y el proceso de visualización, el estudiante puede determinar la viabilidad de la solución. Es decir, se produce circulación (o *proceso*) en el ETMA entre las génesis instrumental y semiótica, pero no la hay en la génesis discursiva, ni de las otras con esta última. Por lo tanto, el trabajo permanece en el plano vertical "proceso de descubrimiento" del ETMA, pero no se activa el proceso de validación (ver Figura 4 de Kuzniak y Richard, 2014, en este *Número Especial*), tanto en el ETMA como el ETMG. (Para activar la génesis discursiva en el ETMG, por ejemplo, habría sido conveniente incluir algún tipo de argumentación geométrica a partir de las situaciones representadas en la Figura 1).

En el primer párrafo de la transcripción, PD2 no realiza la génesis semiótica apropiada en Álgebra, ya que confunde el punto como ícono geométrico con el par ordenado que aproxima a la solución. Así, el método geométrico quedó a nivel de artefacto que no fue instrumentalizado.

6. Conclusiones

La teoría ETM ha mostrado ser una herramienta útil para analizar con categorías fecundas diversos procesos que subyacen a los aprendizajes y al proceso de transposición; en particular, es conveniente para poner atención en la articulación de los 'paradigmas' (*sensu lato*) sobre los cuales se basa la formación disciplinaria de un profesor y los que pone en juego en su enseñanza.

Respecto de la utilización del Álgebra en otros dominios, las evidencias mostradas (y otras) podrían tal vez ser consideradas como fundamento de la hipótesis de que aquello no debería ocurrir, y la de que habría que evitar la *algebrización*. Ahora bien, sabido es el rol importante rol que ha cumplido el Álgebra en el desarrollo de la Matemática, y ello no solo como herramienta de cálculo sino también como modelo a seguir (Mena-Lorca, Mena-Lorca, Morales & Montoya, 2012). Dado que ese rol no ha variado substantivamente, es importante incluir cuando corresponde el recurso al registro algebraico, etc. La cuestión al respecto, nos parece, es cómo hacer lo anterior de modo que no bloquee las génesis.

Además, hemos mostrado que sería deseable que los profesores articularan (intencionadamente) el plano epistemológico con el plano cognitivo, de manera de promover la construcción de un ETM adecuado en sus alumnos.

Los casos presentados aquí muestran claramente que ninguno de los procesos anteriores se lleva a cabo en los profesores debutantes estudiados. La formación inicial de los profesores debería poner atención explícita y especial a esta materia; nos parece, además, que el estudio aquí presentado entrega elementos adicionales para incorporar a esa formación.

Agregamos, a continuación, algunas conclusiones que pueden servir de guía para tener buen éxito en la construcción correspondiente.

Para ello, es necesario comprender los mecanismos y los procesos por los cuales son concebidos los artefactos, materiales o simbólicos, para proporcionar ayuda real al *geómetra* (o *algebrista…*). Además, se deben analizar y comprender los significados en sus dominios matemáticos. Así, el rol del profesor es fundamental para que potencie un trabajo geométrico del estudiante y no uno que se reduzca a “algebrización”, y para explicitar el ETM que se desea desarrollar. (Evidencias con otro PD muestran que en la enseñanza de la Probabilidades ocurre un problema similar al que hemos comprobado en la Geometría, la diferencia es que la validación aparente va por un proceso de experimentación, pero realmente queda a nivel de “comprobación de fórmula” previamente presentada por el profesor debutante).

Génesis instrumental: un cambio de espacio de trabajo

En los casos de PD1 y PD2, las tareas por ellos propuestas fueron abordadas con un artefacto simbólico, el cual no tuvo la génesis apropiada para apoyar el espacio de trabajo matemático original, lo que redunda en ineficiencia en el uso de ese artefacto a pesar de su potencialidad; es decir, si las génesis del ETM no se articulan apropiadamente en el dominio asociado a la tarea, pueden generar que se cambie de dominio debido a que el artefacto no se ha instrumentalizado –y no se puede esperar que el estudiante enriquezca el instrumento vía la componente referencial–. En algunos casos, este cambio de dominio puede ser sin retorno; con esto, el espacio de trabajo personal no se desarrolla en toda su dimensión.

Génesis semiótica: el representamen

Análogamente a lo anterior, tenemos que el representamen depende del dominio que se desea desarrollar y de la apropiada génesis semiótica. En el caso de PD2, la visualización de un punto en un dominio algebraico o geométrico difiere de acuerdo a la génesis semiótica del espacio de trabajo. En Montoya (2010) ya se había evidenciado que la inapropiada génesis discursiva generaba dificultades en sus utilizadores.

Por otra parte, el profesor debutante potencia dibujos “clásicos” que confunden o al menos generan obstáculos didácticos; el problema se origina cuando las representaciones tratadas desde un punto de vista gráfico no intencionan la circulación por el referencial. Una apropiada circulación entre las génesis en sus dominios específicos y claridad respecto del paradigma que se está desarrollando potencian el ETM personal. Una forma de activar la génesis discursiva o de mantenerse en ámbito geométrico podría ser a través del manejo semántico de las expresiones en los teoremas clásicos; por ejemplo, respecto del teorema de Tales, leer las proporciones que se generan, y hacer lo mismo cuando se plantea la ecuación que es utilizada para determinar uno de ellos. No proponemos, por cierto, que no se utilicen las ecuaciones; la idea es no plantear la ecuación y luego simplemente reemplazar “los números” de los trazos conocidos y usar la incógnita x , sino que la ecuación arrastre los significados en el lenguaje y la notación, y así las fracciones sean un modelo de la proporción que arroja el teorema.

La evidencia de 5.3 muestra que los estudiantes visualizaron y usaron el mecanismo de iconicidad (del paralelismo, por ejemplo), y con base en ello realizaron sus producciones. En general, su *referencial* es débil, dado que no considera hipótesis requeridas para que se cumpla una determinada propiedad.

La génesis discursiva

El marco teórico ETM acoge las ideas semióticas de Duval (2005) y, en particular, el mecanismo de iconicidad, mediante la génesis semiótica, pero especifica además otras génesis: la instrumental y la discursiva. Nuestro estudio confirma la evidencia de que el proceso de visualización es fundamental en determinadas tareas matemáticas (Ibíd.), pero muestra además que una determinada génesis puede estar complicando (u obstaculizando) la construcción del objeto matemático. Una génesis semiótica "defectuosa" redunda en que se utilicen argumentos incompletos por falta o bloqueo de la génesis discursiva, creándose así un paradigma en que la génesis discursiva no existe o se reduce a que el proceso algebraico fue bien hecho.

La transposición y el currículo

Como queda dicho, los planos cognitivo y epistemológico del ETM se pueden relacionar y articular apropiadamente para generar circulaciones en el ETM, de modo de activar las génesis y con ello desarrollar el dominio bajo estudio y generar un ETM personal apropiado en el alumno. Sería de esperar, por tanto, que la enseñanza organizara el conocimiento de modo que el proceso de transposición activara aquellas génesis. Al respecto, habría que tener especial cuidado en activar la génesis discursiva. Es inmediato entonces que, por tanto, la transposición de esta debe ser un tema en la formación inicial y continua.

Nuestro estudio de profesores debutantes muestra, sin embargo, evidencias en contrario. Por una parte, el recurso habitual a la *algebrización* de un problema geométrico puede impedir que los alumnos instrumentalicen recursos propiamente geométricos y con ello obstruir la génesis discursiva. La dirección contraria, esto es, el recurso a la geometría ante una situación algebraica, corre por su parte el riesgo de reducirse a una visualización icónica; en tal caso, puede que la situación algebraica no se enlace con la herramienta (Douady, 1984) geométrica, lo que obstaculiza la formación de un ETM apropiado en los alumnos, o que la pregnancia del ícono obstaculice una génesis discursiva correcta.

La consecuencia inmediata de lo anterior es que, en el caso de los profesores estudiados, el proceso de transposición aparta o incluso impide un funcionamiento apropiado del ETM y por tanto se obstaculiza la construcción del conocimiento matemático deseado.

De allí nuestro convencimiento de que las instituciones formadoras podrían beneficiarse grandemente de la inclusión de la teoría de Espacio de Trabajo Matemático en sus currículos.

Reconocimiento

Este trabajo ha sido financiado parcialmente a través del Proyecto de investigación del Fondo Nacional Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT) 1110988, Chile.

Referencias Bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*(3), 245-274.

Chevallard Y. (1985). *La transposition Didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'Apprentissage de la Géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 289-321.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175-193.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Institute de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques Paris VII. Paris, France.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9-24.

Kuzniak, A. y Richard, P. (2014). Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Este *Número Especial*).

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Morales, A. & Montoya-Delgadillo, E. (2012). Acerca de la noción de espacio de trabajo algebraico. Tercer Simposio Espacio de Trabajo Matemático, Universidad de Montreal, Canadá, 23 al 26 de noviembre.

Merino, R. (2012). *Estudio de la articulación entre visualización y razonamiento.* Trabajo Final Magíster en Didáctica de la Matemática. (No publicado). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Montoya Delgadillo, E. (2010). *Étude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili*. (Thèse de doctorat non publiée). Université Denis Diderot, Paris, France.

Peirce, C. (1978). *Ecrits sur le signe.* Paris, France: Seuil.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris, France: Armand Colin.

Trouche, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin et L. Trouche (Eds.). *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil du travail informatique : un problème didactique* (pp.187-214). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Autores

Elizabeth Montoya-Delgadillo. Instituto de Matemáticas (IMA), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile (PUCV), emontoya@ucv.cl

Arturo Mena-Lorca. Centro de Investigación Avanzada en Educación CIAE, e Instituto de Matemáticas (IMA), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile (PUCV), arturo.mena@ucv.cl

Jaime Mena-Lorca. Instituto de Matemáticas (IMA), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile (PUCV), jmena@ucv.cl

Bernard Parzysz

Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas

RESUMEN . Hoy , la enseñanza de la probabilidad hace un gran uso de la computadora, especialmente para simular varios experimentos aleatorios. Este artículo, que se refiere al marco teórico de los espacios de trabajo matemático de Kuzniak, estudio un tipo de tareas que se ofrecen a los estudiantes franceses con frecuencia. Para realizar estas tareas , la hoja de cálculo -plotter se utiliza a la vez como generador aleatorio , como lógico herramienta y como calculadora. Por esta razón, se ofrece a los estudiantes muchas indicaciones "técnicos" en el uso de software. Al mismo tiempo , se debe desarrollar un modelo de experiencia y simular con el uso del software , y que sea lo que debe navegar a través de varios paradigmas probabilísticos y estadísticos , y por lo tanto a través de múltiples espacios de trabajo, pero aquí no hay indicación explícita dada para ayudar a identificar el paradigma correcto. Además , la redacción de la tarea es a menudo ambiguo , por lo que es difícil determinar los paradigmas en los que se supone que debe funcionar.

PALABRAS CLAVE: Probabilidades, hoja de cálculo, experimento aleatorio, simulación, modelado, los espacios de trabajo matemáticos.

ABSTRACT. Today the teaching of probability makes a great use of software, especially to implement simulations of various random experiments. This paper, using the theoretical framework of Kuzniak's Spaces for Mathematics Work, studies an emblematic type of task frequently given to French 11th graders. In order to solve such a task the spreadsheet is used in turn as a random generator, a calculator and a logical tool. For this reason the student is given much 'technical' indications on how to use the software. Simultaneously he/she has to elaborate a model of the experiment, then simulate it with the software, thus he/she has to move through several probabilistic and statistical paradigms, and therefore through several workspaces, but this time hardly no explicit clue is given to help him/her identify the suitable paradigm. Moreover the wording of the task is often ambiguous, which makes difficult knowing in which paradigm you are supposed to work.

KEY WORDS: probability , spreadsheet , random experiment , simulation , modeling , spaces for mathematical work.

RESUMO. Hoje , o ensinamento de probabilidade torna grande utilização do computador , especialmente para simular vários experimentos aleatórios . Este artigo , que se refere ao quadro teórico de espaços matemáticos trabalho Kuźniak , estudar um tipo de tarefas oferecidas a estudantes franceses com freqüência. Para executar essas tarefas , folha de cálculo plotter é usado tanto como aleatoriamente como uma ferramenta lógica e uma calculadora. Por esta razão , os alunos são oferecidas muitas indicações "técnicas" no uso do software. Ao mesmo tempo , ele deve desenvolver um modelo e simular a experiência com o uso de software, e é isso que deve navegar através de vários paradigmas probabilísticos e estatísticos , e, portanto, em vários espaços de trabalho , mas não aqui nenhuma indicação explícita dada para ajudar a identificar o paradigma correto. Além disso , a formulação da tarefa é muitas vezes ambígua , o que torna difícil determinar os paradigmas que é suposto para trabalhar

Palavra-chave: planilha , experimento aleatório , simulação , modelagem, espaço de trabalho matemática

RÉSUMÉ. Aujourd'hui, l'enseignement des probabilités fait grand usage de l'informatique, en particulier pour simuler des expériences aléatoires variées. Cet article, qui se réfère au cadre théorique des espaces de travail mathématiques de Kuzniak, étudie un type emblématique de tâches fréquemment proposé aux élèves français de Première. Pour réaliser ces tâches, le tableur-grapheur est utilisé tour à tour comme générateur de hasard, comme calculatrice et comme outil logique. Pour cette raison, on fournit à l'élève beaucoup d'indications « techniques » sur l'usage du logiciel. Simultanément, il , il doit élaborer un modèle de l'expérience, puis le simuler à l'aide du logiciel, et pour ce faire il, il doit naviguer à travers plusieurs paradigmes probabilistes et statistiques, et donc à travers plusieurs espaces de travail, mais ici aucun indice explicite ne lui est donné pour l'aider à identifier le bon paradigme. En outre, l'énoncé de la tâche est souvent ambigu, ce qui rend difficile la détermination des paradigmes dans lesquels on est censé travailler.

MOTS CLÉS: probabilités , tableur , expérience aléatoire , simulation , modélisation , espaces de travail mathématique.

1. Introduction

L'enseignement des probabilités a considérablement évolué dans le cursus secondaire français (Parzysz, 1997), passant d'une conception purement « laplacienne » de la notion de probabilité, requérant l'équiprobabilité des événements élémentaires, à une approche beaucoup plus nuancée, et élargie, intégrant une conception de type « fréquentiste », dans laquelle la probabilité d'un événement lié à une épreuve aléatoire apparaît comme « limite » de la fréquence d'apparition de cet événement dans une suite de répétitions de l'épreuve. De même qu'en géométrie, la question de la modélisation apparaît comme un élément important de cette approche, et je me suis plus particulièrement attaché à voir si la notion d'espace de travail géométrique (ETG) de Houdement & Kuzniak (2006) pouvait se transposer, *mutatis mutandis*, dans le domaine des probabilités (Parzysz, 2011), en espace de travail probabiliste (ETP).

Poursuivant cette démarche d'investigation, et partant du fait que, aujourd'hui, les outils technologiques tiennent une aussi grande place dans un domaine que dans l'autre, je me suis intéressé aux usages du tableur-grapheur dans l'enseignement des probabilités au lycée, et plus particulièrement au rôle de la simulation informatique dans la démarche de modélisation. Ainsi que le fait remarquer Trouche (2005) :

> *Le développement des outils informatiques a eu des effets très importants sur le développement de certaines branches des mathématiques ou sur le développement de nouveaux domaines (...) et a donné un nouveau statut aux aspects expérimentaux de la recherche* (…). *Ces effets s'exercent aussi sur les mathématiques enseignées.* (…) *Les outils ont aussi des effets importants sur les modes de travail des élèves.* (…) *Enfin les outils mis en œuvre dans l'enseignement ont des effets profonds sur la conceptualisation.* » (p. 267).

C'est à cet aspect de l'activité mathématique en classe que je vais m'intéresser ici, en prenant comme support une activité de type courant proposée dans un manuel récent de la classe de première scientifique (programme entré en vigueur en septembre 2011).

2. Cadre théorique

Mon cadre théorique de référence comprend bien sûr la notion de paradigme inspirée de Kühn, appliquée à la géométrie par Houdement & Kuzniak (2006) et que j'ai entrepris de transposer aux probabilités en suivant le parallèle fait par Henry (1999) entre les deux domaines. Dans l'article cité plus haut, je définissais plusieurs paradigmes probabilistes mis en œuvre, de façon plus ou moins explicite, dans l'enseignement français, au collège et au lycée :

- celui de la « réalité », c'est-à-dire de l'expérience concrète effectivement réalisée à l'aide d'objets matériels (dés, pièces de monnaie, roue de loterie, jetons sortis d'une urne, etc. ;

- un paradigme P1, issu d'une première modélisation dans laquelle on associe à l'expérience concrète une liste des issues prises en compte et un protocole expérimental précis (expérience pseudo-concrète), assurant que l'expérience pourra être répétée dans les mêmes conditions, la répétition donnant lieu à des observations permettant d'attribuer une chance d'apparition à chacune des différentes issues ;
- un paradigme P2, obtenu en posant un « regard probabiliste » (Henry, 1999) sur l'expérience, dans lequel on définit l'expérience aléatoire générique, ainsi que la notion de probabilité. On entreprend alors d'étudier les propriétés de cette probabilité, c'est-à-dire qu'on construit une algèbre des événements, illustrée sur des modèles classiques (en particulier des « modèles d'urne ») et les principales lois de probabilité (binomiale, exponentielle, géométrique, normale…). Les outils associés sont : la démonstration de type mathématique, les techniques de calcul usuelles, divers registres de représentation (tableau à double entrée, arbre pondéré, diagramme ensembliste, graphiques statistiques variés…), ainsi que les outils du cadre de la statistique descriptive (SD), transposés à celui des probabilités (lien entre fréquence et probabilité, entre moyenne et espérance mathématique…). Le programme de probabilités de première scientifique[1] incite d'ailleurs à opérer un tel rapprochement : « *À l'aide de simulations et d'une approche heuristique de la loi des grands nombres, on fait le lien avec la moyenne et la variance d'une série de données* ». Mais il s'agit cependant de bien distinguer les cadres : SD d'un côté et P1/P2 de l'autre, comme nous le verrons plus loin (§ 4.).

Je me référerai également à la notion d'espace de travail mathématique (Kuzniak, 2011), avec ses trois composantes :

- un espace réel constitué d'objets matériels, auquel est associé un processus de visualisation ;
- un ensemble d'artefacts (outils, instruments) permettant d'agir sur ces objets, auquel est associé un processus de construction ;
- un système théorique de référence, auquel est associé un processus discursif (argumentation, preuve).

3. Un exercice emblématique

La simulation fait désormais explicitement partie des programmes de mathématiques, et en particulier dans le domaine des probabilités :

> *On peut simuler la loi géométrique tronquée avec un algorithme.* (…) *On peut simuler la loi binomiale avec un algorithme*.
>
> (Programme de première scientifique)

> *Le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable*. (…) *Des activités algorithmiques sont menées* (…), *notamment pour simuler une marche aléatoire. (...) La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondage.*
>
> (Programme de terminale scientifique[2]).

Comme le laisse entendre la référence à un algorithme, le mot « simulation » est ici à prendre dans le sens de « simulation informatique ». Ceci témoigne du souci des concepteurs des programmes de prendre en compte l'évolution technologique, mais restreint le sens initial du terme, qui est la substitution d'une chose (succédané) à une autre, afin qu'elle en tienne lieu lors de l'accomplissement d'une action donnée[3]. Dans le cas qui nous occupe ici, on peut néanmoins préciser davantage, comme le fait ce manuel de lycée : « *Simuler une expérience aléatoire, c'est remplacer cette expérience par une autre, plus économe, plus rapide, et qui permet d'obtenir des résultats analogues.* » (Seconde, Belin 2000). La difficulté

1 B.O. spécial n° 9 du 30 septembre 2010.
2 B.O. spécial n° 8 du 13 octobre 2011.
3 Faute d'un marteau, on peut par exemple utiliser une pierre pour enfoncer un clou.

consiste alors à pouvoir assurer que les résultats obtenus seront « analogues ». Un autre manuel précise : « *Pour simuler une expérience, on décrit l'expérience aléatoire et on la modélise : on choisit un modèle de tirage aléatoire de nombres qui doit avoir les mêmes propriétés que le phénomène simulé.* » (Seconde coll. Abscisse, Magnard 2004). C'est donc l'existence d'un modèle probabiliste commun à l'expérience aléatoire et à son succédané qui va garantir cette analogie, selon le modèle triadique de la figure 1 :

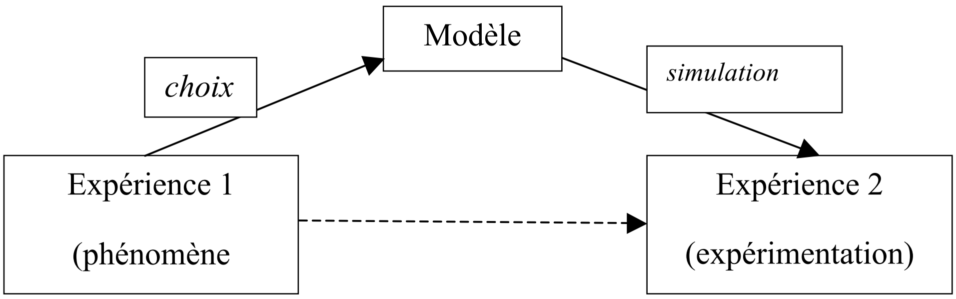


Figure 1

On peut ainsi utiliser un dé pour jouer à pile ou face ; il suffit par exemple de décider qu'un point pair correspondra à pile et un point impair correspondra à face. À l'équiprobabilité supposée d'apparition des six issues du dé correspondra l'équiprobabilité d'apparition d'un nombre pair et d'un nombre impair.

Un type d'exercice couramment proposé par les manuels comporte la simulation d'une situation réelle dans laquelle différentes issues peuvent se produire de façon imprévisible, selon le schéma général suivant :

1° simuler la situation à l'aide d'un tableur
2° observer le résultat de la simulation,
3° énoncer une conjecture sur la probabilité d'une des issues possibles de l'expérience, ou sur la valeur possible d'un paramètre qui lui est lié.

Nous allons étudier un exemple typique de ce type d'exercice, qui fait l'objet d'une séance de travaux pratiques proposée par un manuel de première scientifique[4] (dans ce qui suit, les extraits de l'énoncé figurent en encadré). Il s'agit donc, en fait et pour reprendre la terminologie de Kuzniak, d'étudier un *ETM idoine potentiel* relatif au domaine des Probabilités. Cet exercice présente en outre l'intérêt d'articuler la simulation de l'expérience avec la résolution du problème.

3.1. Première partie : la situation

(Situation réelle évoquée) « *On dispose de trois dés tétraédriques parfaits : un bleu, un rouge et un vert*[5]. *On lance ces trois dés et on s'intéresse au nombre de 4 obtenus. Une issue est un nombre à trois chiffres, par exemple 1 4 3. On considère le jeu suivant : si on obtient trois fois le nombre 4, on gagne 36 € ; si on l'obtient deux fois, on gagne 2 € ; sinon, on perd 1 €. L'objectif de ce TP est d'évaluer le gain moyen que l'on peut espérer sur une série de 2500 lancers.* »

4 T*ransmath Première S*, Nathan 2011, p. 303.

5 L'énoncé est accompagné d'une photographie couleur montrant les trois dés : on peut (doit) penser que les sommets de chaque dé sont numérotés de 1 à 4 et que le point marqué correspond au sommet qui est au-dessus du plan horizontal sur lequel on lance les dés, mais ce n'est pas totalement évident.

Commentaire. La situation « concrète » est décrite : éléments matériels en jeu (le manuel présente même une photographie des trois dés), règle du jeu. Et une question relative à ce jeu est posée.

L'espace de travail est constitué des objets matériels évoqués (les dés), des actions sur ces objets (2500 lancers), de la règle du jeu et de la grandeur à laquelle on s'intéresse (le gain moyen).

(Modèle semi-concret dans P1) « *On fait l'hypothèse de l'équiprobabilité des issues.* »

Commentaire. Cette hypothèse permet d'attribuer une probabilité à chacune des issues envisagées ; elle introduit en fait un modèle probabiliste de la situation. Ce passage par P1 est nécessaire, car c'est un *modèle* que l'on simule : « *la simulation a pour préalable de choisir un modèle* » (Ressources pour la classe de seconde, « Probabilités » p. 7). L'explicitation du modèle est destinée à assurer que c'est bien la *même expérience* que l'on répète, puisque c'est toujours le même protocole qui sera mis en œuvre (Parzysz, 2009). Mais dans la pratique le modèle est souvent escamoté : on fait comme si on passait directement de la situation réelle à la simulation. Ce « tour de passe-passe » est facilité par le fait qu'on ne considère que des épreuves aléatoires (lancer d'une pièce, d'un dé, tirage d'une boule dans une urne…) pour lesquelles il existe un modèle canonique, qui est alors considéré comme « transparent ». Mais le risque est alors que l'élève cherche par la suite à simuler directement la situation réelle, sans se rendre compte qu'il lui faut pour cela faire des hypothèses, c'est-à-dire élaborer un modèle, aussi peu élaboré soit-il.

Dans le modèle annoncé ici « une issue est un nombre à trois chiffres » et, comme chacun des dés peut amener 1, 2, 3 ou 4, il y a $4^3 = 64$ issues possibles. En vertu de l'hypothèse faite, chaque issue est donc affectée de la probabilité 1/64.

L'espace de travail de référence, dans P1, est constitué de l'ensemble des issues et de la probabilité associée à chacune d'elles ; on travaille dans le registre numérique, et plus précisément dans le cadre des rationnels.

3.2. **Deuxième partie : simulation**

La simulation est devenue aujourd'hui un outil usuel de l'enseignement des probabilités. Dans ce domaine particulier, il s'agit de, pour des raisons d'économie et de performance, de faire exécuter par l'ordinateur – ou la calculatrice – une longue séquence d'épreuves censées être analogues à l'expérience aléatoire simulée. Dans la programmation de l'épreuve par la machine intervient le générateur « aléatoire » de celle-ci, lequel est en fait parfaitement déterministe[6]. Mais « tout se passe comme si » les nombres produits étaient aléatoirement et uniformément répartis dans l'intervalle [0 ; 1[.

(Tableur) « *Simulez plusieurs fois cette expérience (...). Comment évolue la moyenne des gains en fonction du nombre de lancers ? Quel gain moyen peut-on espérer au bout de 2500 lancers ?* »

Commentaire. Le manuel est très détaillé sur cette phase, dont voici le début :

a) *Ouvrez une feuille de calcul et complétez les cellules A2 à D2 avec les formules adéquates.*

b) En E2, dénombrez les apparitions du 4 dans la plage de cellules B2 :D2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Expérience n°**	**Dé bleu**	**Dé rouge**	**Dé vert**	**Sorties du 4**	**Gain**		**Moyenne des gains**
2								
3								

6 La machine affiche en effet les termes successifs d'une suite récurrente, donc parfaitement déterministe (voir par exemple [Parzysz 2005]).

c) En F2, faire afficher le gain correspondant à l'issue obtenue à l'expérience n° 1. Saisissez l'instruction conditionnelle : =SI(E2=3;36;SI(E2=2;2 ;-1)). Justifiez qu'elle décrit bien la règle du jeu.

d) Dans la colonne H, on désire afficher la moyenne des gains obtenue en fonction du nombre de lancers. Quelle formule devez-vous saisir ? (...)

Une différence saute aux yeux par rapport à la géométrie : la guidance de l'élève est très forte, et il reste cantonné au rôle d'exécutant. Cette hypertrophie des instructions a pour fonction principale d'éviter à l'élève non familier du tableur d'être bloqué (en effet, s'il travaille seul chez lui, qui viendra l'aider ?). Les intitulés des colonnes sont donnés, et la première tâche de l'élève consiste à introduire la fonction « aléa » dans les cellules B2, C2, D2 ; il a ensuite à totaliser le nombre de 4 obtenus dans ces trois cellules (fonction « somme »). Il doit ensuite – plus délicat − utiliser une instruction conditionnelle pour faire calculer le gain correspondant ; le manuel vient alors à son aide en lui fournissant la formule à entrer. Enfin, il faut faire calculer la moyenne des gains, ce que l'élève sait – en principe – faire depuis le collège. Mais « *faciliter la prise en main des logiciels ne confère pas les compétences requises pour mener à bien des tâches complexes. La transparence que les interfaces sont censées fournir dépend de la proximité de ce qu'elles proposent avec les représentations initiales du sujet.* » (Rabardel, 1996). La demande de justification de la question c) a précisément pour objet de tester que l'élève a compris le sens de l'instruction donnée à la machine, mais elle risque d'être purement rhétorique, dans la mesure où l'élève est livré à lui-même. Cette question des compétences relatives à l'outil technologique est explicitement prise en compte dans un certain nombre de manuels, qui présentent des fiches spécifiques sur la prise en main des calculatrices (algorithmique), tableurs et logiciels de géométrie dynamique.

Notons au passage que cette partie soulève une autre question, indissociable de la simulation à l'aide d'outils technologiques. La première question demande en effet de « compléte(r) les cellules A2 à D2 » : il s'agit donc pour l'élève d'introduire la fonction ALEA dans les cases B2, C2 et D2[7]. Même si cette « boîte noire » ne lui pose pas problème, il faut malgré tout qu'il la considère comme un *véritable* « générateur de hasard », ce qu'elle n'est pas. Le problème, de nature déontologique, se situe plutôt du côté de l'enseignant : lorsqu'on demande à l'élève de faire une conjecture sur la base des résultats affichés, sur quoi porte cette conjecture ? Sur ce qui est effectivement demandé (comme on le ferait en réalisant effectivement l'expérience) ou sur la conformité du générateur par rapport à ce qu'il est censé produire, *i.e.* des valeurs d'une variable aléatoire équirépartie sur [0 ; 1[? Le recours au générateur impose donc de « faire comme si » il était réellement aléatoire et, en attendant les ordinateurs quantiques qui seront capables de fournir du *vrai* hasard, de lui faire confiance.

3.3. Quel modèle ?

Au-delà du guidage qui reflète la difficulté que les auteurs du manuel attribuent aux diverses tâches dévolues à l'élève, il faut remarquer que le modèle implémenté **n'est pas** celui qui est annoncé. En effet, l'observation des intitulés des colonnes montre que l'équiprobabilité supposée par le tableur est celle des quatre sommets pour chaque dé, et non celle des 64 nombres à trois chiffres possibles. Une procédure de simulation plus « congrue » − selon Duval − au modèle annoncé aurait consisté à faire afficher le nombre à trois chiffres obtenu de façon aléatoire et équiprobable et à lui associer le gain correspondant. Dans le contexte de la simulation, j'ai naguère plaidé pour la recherche d'un modèle aussi « proche » que possible de la situation réelle, au moins dans les débuts de l'apprentissage (Parzysz, 2009) : la notion de schéma d'expérience, première étape vers la notion de modèle probabiliste, peut alors se construire sur l'analogie constatée entre les tableaux du grapheur correspondant à des expériences diverses. Dans le cas qui nous occupe, les deux modèles indiqués ci-dessus sont bien sûr, du point de vue de la variable aléatoire G considérée, équivalents. Plus précisément :

- dans le modèle annoncé, les issues sont les 64 nombres à trois chiffres, dont un seul comporte trois chiffres 4, 9 comportent exactement deux chiffres 4, 27 comportent exactement un chiffre 4 et 27 n'en

7 Par exemple sous la forme ENT(1+4*ALEA()).

comportent aucun. La loi de probabilité de G est donc donnée par P(G = 36) = 1/64, P(G = 2) = 9/64, P(G = −1) = 27/32.

- dans le modèle entré dans le tableur, on a trois dés à quatre sommets numérotés 1, 2, 3, 4 et, pour chacun : p(1) = p(2) = p(3) =p(4) = ¼. Pour chaque lancer des trois dés on note le nombre total de 4 obtenus, de façon à lui attribuer un gain.

Mais le premier modèle aurait évidemment été assurément plus compliqué à implémenter dans le tableur, et c'est pourquoi les auteurs ont – mais implicitement − préféré une autre modélisation. Il n'en reste pas moins que la phrase « Une issue est un nombre à trois chiffres » apparaît, non seulement superflue, mais malheureuse puisqu'elle oriente l'élève vers un modèle différent de celui mis en œuvre dans le tableur. Il en va d'ailleurs de même pour la distinction des trois dés par leur couleur, qui n'apparaît pas *a priori* pertinente ici et dont la véritable fonction (implicite) est d'identifier chacun des trois dés, l'un donnant le chiffre des centaines, un autre le chiffre des dizaines et le troisième le chiffre des unités. En définitive, pour améliorer la congruence entre la situation réelle et la procédure de simulation, il aurait sans doute été préférable de se référer à trois lancers successifs du même dé, ce qui aurait conduit à un tableau tel que ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Expérience n°**	**1er lancer**	**2ème lancer**	**3ème lancer**	**Sorties du 4**	**Gain**		**Moyenne des gains**
2								
3								

On va à présent se situer dans le domaine de la statistique descriptive (SD) : le tableur va fournir une série de données sur laquelle on fera effectuer des calculs (ici, une moyenne).

En définitive, les fonctionnalités du logiciel (instrumentalisation) ici mises en œuvre sont :

- le générateur de hasard
- l'outil de recopie (2500 épreuves)
- le calculateur (somme, moyenne)
- l'outil logique (instruction conditionnelle).

Et on peut également y inclure le grapheur, puisqu'on trouve aussi dans l'énoncé la consigne :

f) Sélectionnez les colonnes A et H, puis représentez le gain moyen en fonction du nombre n *d'expériences.* »

Le registre des graphiques cartésiens, lié au processus de visualisation, possède ici, comme c'est le cas avec les logiciels de géométrie, un aspect dynamique, grâce au calcul sur ordre (touche F9) qui fait apparaître les fluctuations d'échantillonnage et la convergence de façon bien plus nette que le seul tableau. C'est un outil important, mais qui a néanmoins des limites – c'est le cas de le dire −, étant donné que la limite de la série des fréquences, dont on postule l'existence, n'est pas nécessairement accessible (en particulier si elle n'est pas décimale).

3.4. Quel(s) espace(s) de travail ?

Au départ de cette phase de simulation, et en se plaçant dans le modèle effectivement mis en œuvre par le logiciel, l'espace de travail idoine (virtuel) se situe à l'articulation entre P1 et SD ; il s'agit de « traduire » les hypothèses probabilistes (ici, l'équiprobabilité des issues pour chaque dé) en instructions pour le tableur. Le registres en jeu sont la langue naturelle (par exemple : « la probabilité d'obtenir 4 avec le dé rouge est ¼ ») et le langage symbolique propre au tableur

On travaille ensuite dans SD, avec des notions de statistique descriptive (somme, moyenne) et avec l'aide du tableur, dont l'apprentissage de l'utilisation est sans aucun doute l'un des objectifs du travail entrepris. La tâche de l'élève, relativement complexe, est de construire un tableau dans un but précis : faire afficher le gain moyen sur 2500 parties, dans le but de proposer une conjecture. Il s'agit donc d'abord d'élaborer une stratégie lui permettant d'y parvenir. L'aide fournie dans le manuel, même si elle élimine le côté heuristique de la démarche, permet de décortiquer cette stratégie en trois parties ; elle concerne, non seulement l'aspect « technique » (syntaxe du tableur) mais aussi la mise en œuvre de la démarche (copie d'écran) :

1° traitement individuel des trois dés :
- lancer le dé
- afficher le point marqué

2° mise en commun des trois dés :
- totaliser le nombre de 4 obtenus
- calculer le gain du joueur

3° répétition de l'expérience
- itérer 2500 fois le processus
- calculer le gain moyen du joueur.

Finalement, on voit qu'un tel exercice fait travailler l'élève dans plusieurs cadres différents, et en conséquence son espace de travail évolue de façon notable au fil de de la résolution : partant d'une situation réelle, il passe d'abord dans le cadre probabiliste (pour pouvoir faire fonctionner le tableur), puis dans celui de la statistique descriptive (pour faire calculer des paramètres associés à la distribution statistique obtenue), puis repasse dans le cadre probabiliste (via la loi des grands nombres), et revient enfin à la situation réelle pour énoncer le résultat obtenu. Les registres qui interviennent sont : la langue naturelle, le numérique, le symbolique et celui des graphiques cartésiens.

On a donc, pour la partie « simulation » de cet exercice, le schéma de la figure 2.

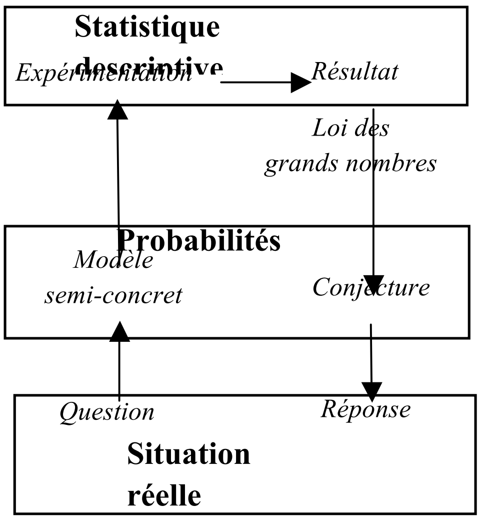


Figure 2

Remarque. Ici, P1 (assorti d'une « formulation naïve de la loi des grands nombres ») est suffisant, car c'est le modèle semi-concret qu'on implémente dans le tableur : il suffit d'identifier les différentes issues possibles et de leur affecter un nombre compris entre 0 et 1 (et de façon telle que la somme de ces nombres soit égale à 1). Mais on aurait aussi pu, à un autre niveau, se situer dans P2 et considérer trois variables de Bernoulli mutuellement indépendantes (une par dé), prenant la valeur 4 avec la probabilité 1/4

3.5. Troisième partie : résolution

Après la partie « Conjecturer », cet exercice comporte une partie « Démontrer », qui constitue de fait un autre exercice.

(Résolution probabiliste dans P2) *a) Quel est le nombre d'issues possibles lors d'une expérience ?* *b) Dénombrez les issues favorables à la sortie de trois numéros 4 ; de deux numéros 4.* *c) On appelle G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique en euros du joueur. Dressez le tableau de la loi de probabilité de G, puis calculez E(G).* *d) Quel lien faites-vous entre le résultat de la simulation et l'espérance mathématique de G ?*

Commentaire. Il s'agit cette fois d'un exercice classique de probabilités. On abandonne la simulation pour la résolution d'un problème. La tâche de l'élève consiste d'abord – questions a et b − à déterminer l'espace probabilisé dans lequel il aura à effectuer les calculs (ici, l'ensemble des 64 issues possibles muni de l'équiprobabilité), puis – questions c et d − à dresser la table de la loi de probabilité de la variable aléatoire G définie sur cet espace et à calculer son espérance mathématique. Pour finir, on lui demande de faire le lien entre la partie « statistique » (simulation) et la partie « probabilités ». Le seul résultat qu'il peut faire intervenir est une « *formulation naïve de la loi des grands nombres* (…) : *lorsque le nombre d'expériences augmente, la fréquence empirique se rapproche de la probabilité.* » (Ressources « Probabilités » pour la classe de troisième p. 8). Or, ici on a E(G) = $\sum x_i \cdot p(x_i)$, tandis que la moyenne des gains est $\sum x_i \cdot f(x_i)$ (*i* variant de 1 à 3 puisque G prend 3 valeurs) ; c'est donc en réalité la convergence de la *distribution* de fréquence vers la *distribution* de probabilité qui permet de conclure à la convergence de la moyenne vers l'espérance, et non la seule considération de la fréquence d'une issue particulière. Il s'agit là aussi d'une conséquence de la loi des grands nombres, mais elle nécessite de considérer la distribution de fréquences *dans son ensemble*.

La démarche peut cette fois être schématisée par la figure 3.

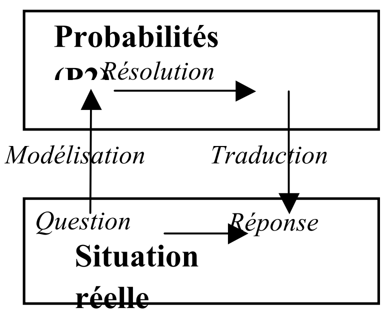


Figure 3

Remarque 1. Ici, P2 est nécessaire car on utilise des définitions et des résultats de P2 et on effectue des calculs. L'espace de travail idoine est constitué d'éléments de P2, comprenant des notions (variable aléatoire, loi de probabilité, espérance mathématique) et des outils de dénombrement (formule ou arbre).

Remarque 2. Cet exercice constitue de fait une approche de la loi binomiale (et c'est peut-être d'ailleurs l'un des objectifs des auteurs). On peut en effet considérer qu'on a trois variables de Bernoulli mutuellement indépendantes (une par dé) prenant la valeur 4 avec la probabilité 1/4 ; la somme X de ces trois variables suit alors la loi binomiale B(3, ¼) et la loi de probabilité de G est donnée par P(G = 36) = P(X = 3) = $\binom{3}{3}3^0/4^3$= 1/64, p(G = 2) = $\binom{3}{2}3^1/4^3 = 9/64$, et donc P(G = -1) = 27/32. D'où E(G) = 0 (les valeurs numériques des gains ont été choisies de façon que le jeu soit équitable, ce qui est peut-être un autre objectif, plus lointain, des auteurs). Mais bien sûr, muni de ces connaissances, on n'a plus besoin de simuler le jeu.

À l'issue de la séance, l'élève a été confronté à deux démarches successives : l'une de type expérimental (simulation) et l'autre de type théorique (calcul probabiliste). La question se pose donc du lien réel entre cette seconde partie (résolution dans P2) et la première (simulation dans SD *via* P1), d'autant plus que celle-ci n'est pas nécessaire puisque le calcul fournit à lui seul la réponse exacte.

La jonction ne s'opère que dans la dernière question (*Quel lien faites-vous entre le résultat de la simulation et l'espérance mathématique de G ?*). Mais, ici, le recours à la simulation était-il utile – sinon nécessaire – pour conjecturer le résultat ? C'est d'autant moins évident que le but de la résolution n'est pas de démontrer que l'espérance de G est nulle, mais de calculer cette espérance (et de constater qu'elle est nulle). L'idée des auteurs était peut-être en fait d'ordre « méta » : montrer aux élèves que le recours au tableur peut être utile pour conjecturer la réponse à un problème de probabilités ou, comme ici, pour contrôler la pertinence d'un modèle probabiliste[8].

4. Statistique et probabilités

Les deux facettes de l'activité étudiée apparaissent complémentaires, comme le montrent, d'une part le lien explicitement établi dans la dernière question, et d'autre part l'opposition « Conjecturer / Démontrer » dans les sous-titres. L'analogie des formules donnant, d'une part la moyenne d'une distribution statistique, et d'autre part l'espérance d'une variable aléatoire, semble, on l'a vu, un bon moyen de passer de l'une à l'autre, mais à condition de ne pas les confondre et de savoir à tout moment dans quel cadre on se situe. Les probabilités s'intéressent en effet à un modèle *théorique*, tandis que la statistique descriptive étudie une série de données issue d'un phénomène *observé*. Et, dans le cas d'une simulation sur tableur, ce phénomène consiste en la *réalisation* de l'itération d'un modèle probabiliste. Par exemple, dans le cas de l'exercice étudié, la moyenne des gains observée sur les 2500 épreuves peut être par exemple de 0,0544, tandis que l'espérance mathématique de gain de la variable est exactement 0.

Or, dans le cas qui nous occupe, la distinction entre le cadre de la statistique (SD) et celui des probabilités (P1) n'est pas rendue explicite, ne serait-ce que par la terminologie utilisée : le « gain moyen » dont il est question au départ n'est pas le même que le « gain moyen » qu'on représente graphiquement : le premier ressortit à P2 (puisque – dit le texte − on ne peut que l'« évaluer ») tandis que le second se situe dans SD. Qui plus est, une phrase telle que « Quel gain moyen peut-on espérer au bout de 2500 lancers » est difficilement compréhensible car, dès lors qu'on aura fait effectuer ces lancers par le tableur, on connaîtra la valeur du gain moyen correspondant aux 2500 lancers réalisés. Et, s'il s'agit de l'espérance de gain − suggérée par le verbe « espérer » − indiquer le nombre de lancers est superflu. Il y a en fait ici un « écrasement » du cadre probabiliste sur le cadre statistique, favorisé par la démarche envisagée par les auteurs : on veut apparemment, sans faire une étude probabiliste dans P2, se faire une idée de (« évaluer ») la valeur du gain moyen sur un grand nombre d'épreuves (ici, 2500), et pour cela on effectue une simulation. Si on observe (avec l'aide de la représentation graphique),

[8] Par exemple en prenant pour issues les triplets de points marqués, comme le suggère la coloration des dés.

qu'en augmentant le nombre d'épreuves la moyenne des gains est tantôt positive, tantôt négative, mais que sa valeur absolue devient de plus en plus faible (« Comment évolue la moyenne des gains en fonction du nombre de lancers ? »), on sera amené à conjecturer que cette moyenne fluctue autour de 0 (convergence de la suite des fréquences lorsque le nombre d'épreuves augmente indéfiniment). Cette fois encore, la démarche « naturelle » aurait consisté, non pas à *augmenter* le nombre de lancers, mais à *répéter* des séries de 2500 lancers, puisque la question initiale comporte explicitement cette référence[9]. Mais, de toute façon, on se situe uniquement dans le cadre statistique.

Venons-en maintenant à la résolution du problème de probabilités demandée dans la dernière partie de l'exercice, qui a pour but l'obtention de l'espérance mathématique de gain. La loi des grands nombres va encore intervenir ici, mais de façon différence : la limite (espérance de gain nulle) étant donnée, on peut prévoir que, à l'issue d'un grand nombre d'épreuves (en l'occurrence 2500), la moyenne des gains aura sans doute une faible valeur absolue. On se situe donc, au départ, dans le cadre probabiliste, pour en tirer une conclusion d'ordre statistique.

Nous avons en définitive pu voir que, au cours d'un tel exercice l'élève se trouve, selon le moment considéré, face à trois expériences différentes : l'expérience réelle (lancer de dés matériels), l'expérience modélisée (en vue de la simulation) et l'expérience simulée (réalisée par le tableur), associés à des cadres de référence différents et donc à des espaces de travail différents. Elles sont en interaction les unes avec les autres, et il importe de savoir à tout moment de laquelle il est question. On peut rapprocher ceci de ce qui se passe lors de la résolution d'un problème de géométrie élémentaire, qui fait intervenir de façon dialectique les paradigmes G1 et G2 : dans un problème posé dans G2, on commence par réaliser un dessin (G2 → G1) qui servira de support pour aider à faire des conjectures et/ou imaginer des stratégies de résolution, avec si nécessaire d'autres dessins (travail dans G1) ; puis, toujours avec l'aide du dessin on imagine une démonstration, complète ou partielle (G1 → G2) que l'on met ensuite en forme (travail dans G2), et on réitère éventuellement ce processus cyclique après chaque avancée dans la résolution du problème.

5. Conclusion

Dans l'exercice étudié ici interviennent trois cadres différents : celui de la « réalité » (la situation évoquée), celui de la statistique descriptive SD (associée au tableur) et celui des probabilités, présent sous deux paradigmes : P1 (modèle semi-concret) et P2, modèle plus élaboré dont l'étude fait l'objet du travail au niveau du lycée. Dans ce type d'activité, l'espace de travail personnel de l'élève est donc constamment amené à évoluer, tout d'abord dans une démarche de modélisation, puis dans une démarche de simulation du modèle élaboré, ensuite dans un retour au modèle pour conjecturer. Et, au cours de cette démarche, apparaissent tour à tour trois « expériences » distinctes. Il s'agit donc d'une démarche particulièrement complexe, même si la conscience de cette complexité peut parfois échapper à l'enseignant. Comme le faisait naguère remarquer Bruillard (1997) :

> *Il faut remarquer une dissymétrie importante entre les élèves et les enseignants. Ces derniers, experts dans leur domaine, décodent directement, sans même y penser, les résultats qui leur sont présentés. Ce n'est pas le cas pour les élèves, en cours d'apprentissage, qui ne disposent pas toujours des connaissances requises.*

D'autre part, dans ce type de tâches les fonctions du tableur sont multiples, car il intervient tour à tour comme générateur de hasard, comme calculateur et comme outil logique. L'ordinateur apparaît donc ici, non pas comme une simple commodité permettant d'obtenir les résultats une longue série d'épreuves répétées plus rapidement qu'en les réalisant réellement (c'est-à-dire comme un *outil*), mais en tant que partie prenante dans la démarche de modélisation (c'est-à-dire comme un *instrument*) :

9 On remarquera qu'ici non plus la congruence sémantique n'est pas prise en compte.

> *Adopter une perspective instrumentale, c'est se centrer sur les activités dans lesquelles l'apport des instruments est essentiel : des moyens, certes attachés aux tâches, non en tant que compléments ou substituts, mais comme parties intégrantes.*
>
> (*ibid.*).

Ce processus d'instrumentation nécessite du temps, celui de la genèse instrumentale par laquelle, selon Rabardel (1995) « *les représentations relatives aux systèmes techniques dans leur fonction instrumentale se construisent solidairement et en étroite articulation avec les représentations relatives au réel sur et dans lequel l'instrument permet d'agir.* » (p. 167). Mais il faut aussi que l'élève soit à même de disposer des éléments conceptuels permettant d'entreprendre la démarche de modélisation ; nous avons vu que, dans le cas présent, un modèle assez peu sophistiqué (le modèle pseudo-concret P1) est sans doute suffisant pour mettre en œuvre la simulation, mais que la congruence sémantique entre l'expérience concrète et le modèle implémenté dans le tableur n'est pas prise en compte. Plus généralement, la considération explicite, dans l'espace de travail idoine mis en place par l'enseignant, des divers paradigmes du domaine en jeu, ainsi que des diverses fonctions que le tableur est amené à y remplir, devrait pouvoir permettre de gérer de façon moins empirique les rapports de l'élève avec le tableur dans son espace de travail personnel.
Enfin, la comparaison de ce processus avec la démarche mise en œuvre dans la résolution d'un problème de géométrie avec l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique permettrait sans doute de dégager un certain nombre de points communs, mais peut-être aussi des différences, ne serait-ce que le fait que, contrairement aux logiciels de géométrie, les tableurs-grapheurs n'ont pas été conçus spécifiquement pour l'enseignement. Mais ceci est une autre histoire…

REFERENCES

Bruillard, E. (1997). L'ordinateur à l'école : de l'outil à l'instrument. *L'ordinateur à l'école : de l'introduction à l'intégration* (L.-O. Pochon & A. Blanchet, éd.), 97-118. IRDP, Neuchâtel.

Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM* 36, 15-34.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 11, 175-193.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 16, 9-22.

Parzysz, B. (1997). Les probabilités et la statistique dans l'enseignement secondaire, d'hier à aujourd'hui. *Enseigner les probabilités au lycée* (M. Henry, éd.), 17-38. Ed. APMEP/ADIREM.

Parzysz, B. (2005). Quelques questions à propos des tables et des générateurs aléatoires. *Statistique au lycée*, vol. 1 (B. Chaput & M. Henry, éds.), 181-199. Ed. APMEP / ADIREM.

Parzysz, B. (2009). Des expériences aléatoires au modèle, *via* la simulation. *Repères-IREM* 74, 91-103.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 16, 127-147.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains.* Armand Colin.

Trouche, L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour « Le calcul sous toutes ses formes »*, 265-289. Disponible à l'adresse :
http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/site_math_universite/CD-UE/Menu_pour_Internet.htm

Auteur

Bernard Parzysz. Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Diderot, Université d'Orléans, France.

JEAN-CLAUDE RAUSCHER, ROBERT ADJIAGE

ESPACES DE TRAVAIL ET RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE MODÉLISATION

Work Spaces and solving of a modelling problem

RESUME

Cet article s'appuie sur les observations, menées dans le cadre d'une ingénierie didactique (Adjiage & Rauscher, 2013), d'une séquence de résolution d'un problème de modélisation par des élèves de 10-11 ans. Nous revisitons ici cette ingénierie à partir du cadre ETM (Kuzniak, 2011, p. 20). Ceci nous permet de réinterpréter certains phénomènes et d'imaginer des pistes d'amélioration de notre dispositif. Nous analysons ainsi l'échec de certains élèves en termes de déficit du référentiel empirique et théorique dans leur ETM personnels, nous en déduisons des possibilités d'évolution de l'ETM idoine, nous interprétons des blocages en termes de dissociation des genèses visuelle et expérimentale, et nous analysons des progrès en termes de capacité à intégrer ces deux genèses grâce à une pratique écrite de l'écrit (Duval 2001, p. 191).

MOTS-CLES

Espaces de Travail mathématique, ETM personnel, ETM idoine, pratique écrite de l'écrit, modélisation, résolution de problèmes.

ABSTRACT

This paper relies on observations, lead in a didactical engineering context (Adjiage & Rauscher, 2013), of a sequence devoted to solving a modelling problem at grade 5. Here, we reconsider this study from the MWS standpoint (Kuzniak, 2011, p. 20). This allows us to reinterpret phenomena and to sketch features of an improved teaching schema. We thus: analyse student failures in terms of a lack in their empirical and theoretical system of reference; infer new guidelines for the appropriate MWS; interpret student difficulties in terms of dissociation of the visual and experimental geneses; analyse student progress in terms of the ability to integrate these two geneses, stemming from specific resources of writing (Duval 2001, p. 191).

KEY-WORDS

Mathematical work spaces (MWS), personal MWS, appropriate MWS, specific resources of writing, modelling, problem solving

RESUMEN

Este artículo se basa en observaciones, llevadas a cabo en el marco de una ingeniera didáctica (Adjiage & Rauscher, 2013), de la resolución de un problema de modelización por estudiantes del quinto grado de primaria. Visitamos aquí esta ingeniería a partir del marco ETM (Kuzniak, 2011, p. 20). lo que nos permite reinterpretar ciertos fenómenos e imaginar pistas de mejora de nuestro dispositivo. Analizamos asi el fracaso de algunos estudiantes en términos de déficit del referencial empírico y téorico en su ETM personal, deducimos posibilidades de evolucion del ETM idóneo, interpretamos los bloqueos en términos de disociación de génesis visual y experimental, y analizamos los progresos en término de capacidad de integrar esas génesis gracias a una práctica del escrito (Duval 2001, p. 191).

PALABRAS CLAVE

Espacio de trabajo matemático (ETM), ETM personal, ETM idóneo, práctica del escrito, modelización, resolución de problemas.

1. Introduction

Nous traitons dans cet article d'un travail de résolution d'un problème numérique, le problème dit du géant (*Figure 1*), par des élèves de 10-11 ans, et des modalités d'enseignement mises en place pour étayer ce travail dans le cadre d'une ingénierie didactique. La partie expérimentale de cette ingénierie a été menée en 2008 par le groupe ACODIS IUFM-UDS[1] (Adjiage et Rauscher, 2013). Elle repose sur l'observation d'une séquence de classe de six séances (TABLEAU I en annexe).

La résolution du problème du géant nécessite un processus de modélisation, c'est-à-dire, pour être bref, la substitution à l'univers représenté d'un univers représentant parce que « le problème posé dans l'univers représenté n'y est pas résoluble. » (Brousseau 2003, p. 13). Pour un « expert » s'appuyant sur ses connaissances théoriques et empiriques ce problème n'est pas vraiment un problème de recherche. En revanche, pour des élèves de 10-11 ans ne possédant pas un référentiel de connaissances bien établi, il devient le terrain d'une pensée mathématique de recherche comme la décrivent Bkouche, Charlot et Rouche (1991, p.144) : *« Résoudre un problème n'est pas une activité principalement déductive. L'esprit s'anime dans le désordre apparent de la pensée créatrice. Il fait des conjectures, cherche des exemples et des contre-exemples, amorce des raisonnements, remonte l'ordre déductif par l'opération d'analyse, renforce ou allège les hypothèses, etc. ».* Notre ingénierie nous a donné l'occasion de recueillir de nombreuses productions écrites des élèves. Celles-ci témoignent de ce travail de la pensée mathématique des élèves confrontés à ce problème bien particulier de modélisation. Nous utilisons ici le cadre ETM proposé par Alain Kuzniak (2011, p. 20) comme une coquille méthodologique qui nous permettra dans un premier temps :

- d'analyser le travail d'un expert résolvant ce problème dans un ETM de référence (ibid., p. 22)
- d'analyser la diversité des pensées mathématiques initiales des élèves abordant ce problème dans leurs ETM personnels (ibid., p. 22).

Dans un deuxième temps, nous aurons l'occasion de revisiter notre ingénierie pour repérer :

- l'occasion perdue d'aménager l'ETM idoine (ibid., p. 22) à partir des ETM personnels pour permettre aux élèves de développer des solutions efficaces à partir de leurs procédures initiales
- l'efficacité d'un ETM idoine que nous avons aménagé en nous appuyant sur une pratique « écrite de l'écrit » (Duval 2001, p.197). C'est dans cet espace idoine que bon nombre d'élèves ont pu finalement résoudre le problème en intégrant les modalités d'un processus de modélisation.

2. Le problème du géant et sa résolution

Figure 1. – Le pied du géant2

Enoncé : Cette photo a été prise dans un parc d'attraction en Angleterre. On y aperçoit une partie de la jambe d'un géant. Quelle est la taille de ce géant ?

1 Apprentissages en contexte et didactique des disciplines, groupe de la Vie Scientifique de l'IUFM de Université de Strasbourg alors composé de : Robert Adjiage, Tatiana Beliaeva, Virginie Deloustal-Jorrand, Jean-Claude Rauscher, Marie-José Remigy, Nicolas Séchaud

Le problème du géant est un problème de Fermi3 et répond au cahier de charge proposé par Peter-Koop (2004, p.457) dans ce cadre.

- Aucun nombre n'est fourni dans l'énoncé
- Résoudre ce problème nécessite de faire des hypothèses : taille d'un des hommes de la photo, proportions du géant, taille d'un pied d'homme…
- La réponse dépend des hypothèses et de la précision des mesures adoptées et des mesurages (stature d'un homme, semelle du géant, …)
- Personne ne connaît la « bonne » réponse, ni les élèves, ni le maître, ni les chercheurs
- La réponse ne peut être qu'une estimation ou une fourchette

Au cours d'études empiriques antérieures menées auprès de publics très divers (Rauscher, Adjiage & Beliaeva, 2010 ; Adjiage et Rauscher, 2013), nous avons relevé trois grands types de stratégies qui toutes mobilisent l'usage de rapports exprimant soit une mesure soit une dilatation (Adjiage 2005, p.101 ; Adjiage et Pluvinage 2007, p.154).

Les deux premières stratégies prennent en compte directement le réel du parc d'attraction représenté sur la photo. Elles postulent implicitement l'existence d'une dilatation entre ces deux univers. La troisième stratégie en revanche amène à raisonner sur les objets de la photo puis à passer au réel du parc moyennant une dilatation explicite.

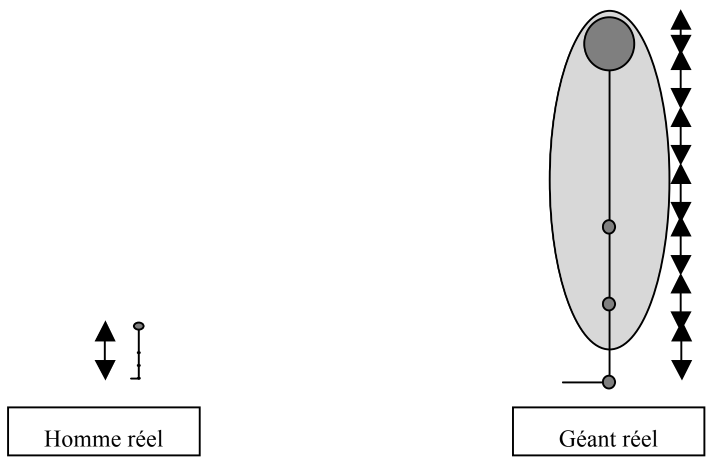


Figure 2. Stratégie 1 de résolution

La stratégie 1 consiste à étalonner le géant au moyen d'un élément, apparaissant sur la photo, dont on est capable d'estimer les dimensions réelles. Un des hommes de la photo est le plus souvent choisi et la stature qu'on lui attribue est en général 1,80m, taille moyenne des Britanniques. Combien de fois peut-on reporter cet homme sur toute la hauteur du géant ? Le géant n'apparaissant pas en entier sur la photo, on ne peut répondre qu'indirectement à cette question, en substituant au corps du géant celui d'un individu accessible en entier (soi-même, un camarade, …) au prix d'une hypothèse de similitude abusive : le géant est « fait » comme n'importe quel individu ou encore, en termes plus mathématiques, « le géant est le transformé par une dilatation d'un humain quelconque ». Or, sur la photo, un des hommes arrive à hauteur du mi-mollet du géant. Le rapport stature / mi-mollet, évalué sur le substitut choisi (soi-même, un camarade, …), se conserve donc en passant au géant. Sa valeur, située entre 6 et 7, permet d'obtenir un encadrement de la stature réelle du géant.

2 Photographie copiée de http://www.problempictures.co.uk/, avec l'aimable autorisation des auteurs.

3 Fermi était connu pour poser à ses étudiants des problèmes qui ne pouvaient être résolus qu'au prix d'une estimation raisonnable comme : « Combien y a-t-il d'accordeurs de pianos à Chicago ? »

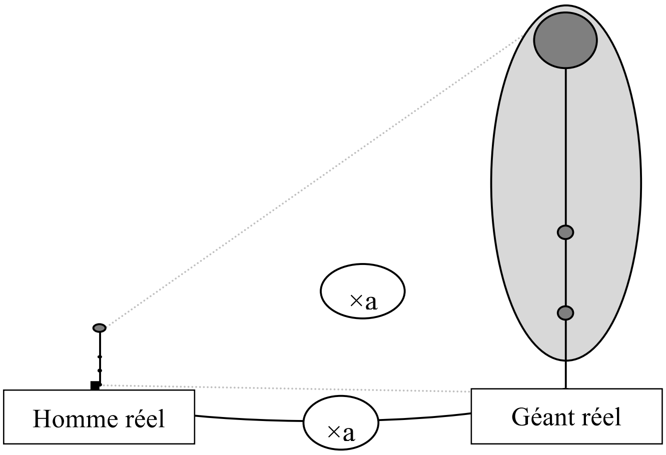


Figure 3. Stratégie 2 de résolution

La stratégie 2 postule aussi l'existence d'une dilatation d'un homme quelconque, notamment celui de la photo, au géant. Mais elle permet d'éviter le recours à un substitut en utilisant le rapport de deux segments homologues (le plus souvent le rapport des semelles ou des mi-mollets mesurés sur la photo) pour trouver une approximation du rapport de dilatation. On applique alors directement ce rapport de dilatation à la stature réelle estimée de l'homme pour obtenir une approximation de la stature réelle du géant.

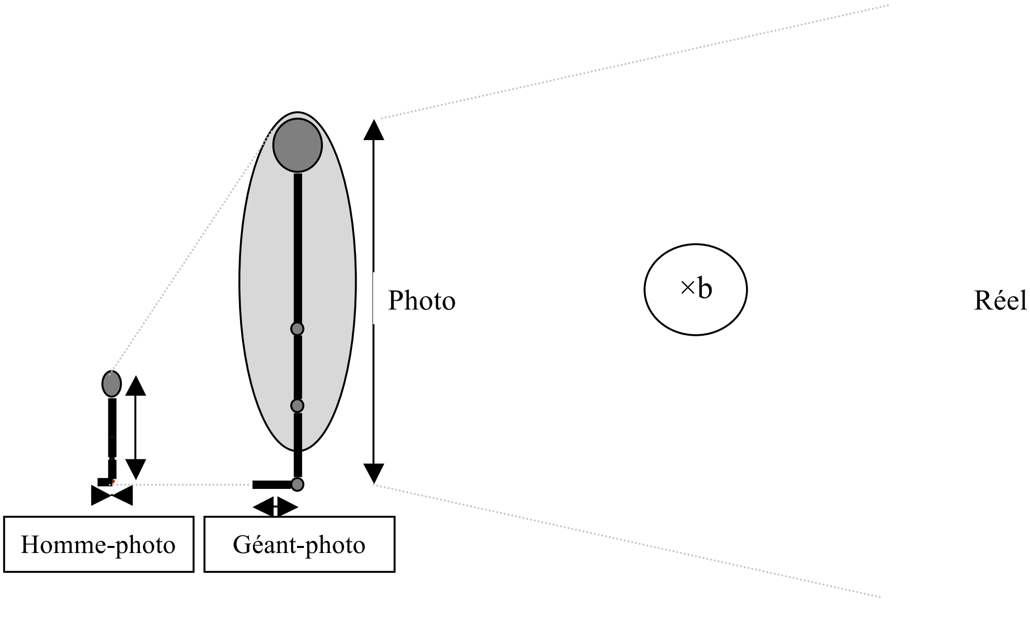


Figure 4. Stratégie 3 de résolution

Comme les précédentes, la stratégie 3 suppose l'existence d'une dilatation de l'homme au géant. Contrairement à la stratégie 2 qui se fonde sur le calcul du rapport externe (coefficient de dilatation), celle-ci s'appuie sur la conservation du rapport interne de deux segments du corps, le plus souvent le rapport stature / longueur semelle, ces longueurs étant mesurées sur la photo. On en déduit par quatrième proportionnelle une approximation de la stature du géant-photo. En estimant[4] le rapport de la dilatation b qui fait passer de la photo au réel, on peut alors calculer une approximation de la stature du géant réel.

3. l'etm générique en jeu dans la résolution du problème du géant

Le diagramme que nous présentons est adapté de Kuzniak (2011, p. 20). Il nous sert à décrire les ressources et le travail d'un individu, de quelque niveau qu'il soit, résolvant le problème du géant. Nous reprenons les trois genèses introduites par Kuzniak (ibid.), et nous instancions les trois composantes (ibid, p. 13) du plan épistémologique et les trois composantes du plan cognitif pour rendre compte de la spécificité de la tâche du géant. Nous décrivons ainsi trois pôles illustrés par des exemples. Chaque pôle est constitué d'une genèse et des deux composantes qu'elle relie. Cet ETM générique nous permettra de préciser des caractéristiques des ETM de référence et idoine, ainsi que des ETM personnels des élèves observés.

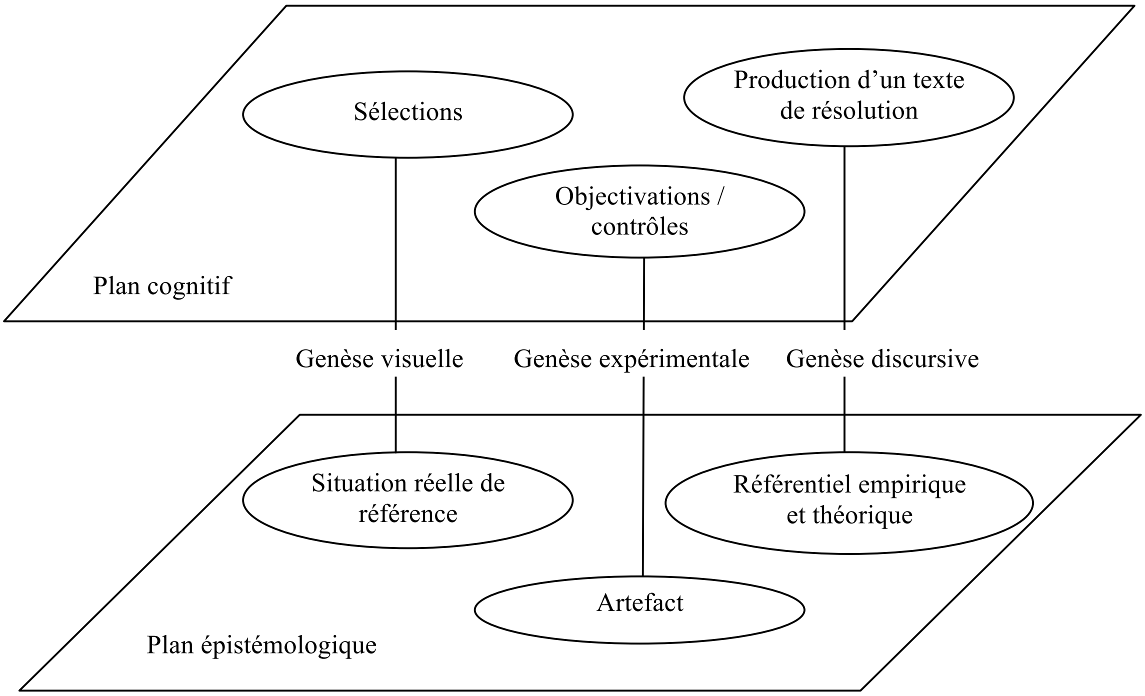


Figure 5. L'ETM de la résolution du problème du géant

Pôle 1

Situation réelle de référence : la photo et le parc qu'elle représente

Genèse visuelle : traitement de l'image

Sélection : isoler et/ou relier des éléments saillants de l'image (on ne voit pas tout le géant ; il y a deux hommes ; un homme arrive au mi-mollet du géant ; la semelle est aussi grande que le mi-mollet…)

Pôle 2

Artefact : instruments de mesure ou de report ; Internet pour la taille moyenne d'un adulte ; l'élève qu'on prend comme modèle ; des textes-élèves de résolution5

4 Le coefficient b peut être obtenu à partir du rapport de deux segments homologues dans la dilatation qui fait passer de la photo au réel, e.g. rapport de la stature réelle (estimée) d'un des hommes en train de discuter à sa stature-photo (mesurée directement sur la photo).

Genèse expérimentale : mesurages et mises en rapport ; navigation Internet ; sélection, comparaisons, déplacements, réorganisation d'écrits…

Objectivations / contrôles des éléments de preuve : rapport stature / mi-mollet ; modèle des proportions du corps humain ; complétude et cohérence de l'argumentation

Pôle 3

Référentiel empirique et théorique : connaissance du schéma corporel ; taille moyenne d'un adulte ; pertinence de unités utilisées ; proportionnalité

Genèse discursive : mise en rapport des repères visuels, des résultats expérimentaux, des repères empiriques et théoriques pour produire une preuve

Production d'un texte de résolution : écriture de la preuve

4. l'etm de référence

Dans quel ETM un expert résoudra-t-il le problème ? Son référentiel empirique et théorique devrait lui permettre d'appréhender instantanément la situation réelle de référence, constituée de la photo comme réduction de la partie du parc réel représenté. La question de la conservation des proportions de la photo au réel ne se pose sans doute pas. Elle est pour cet expert une donnée phénoménologique. Par ailleurs, un traitement visuel rapide de la photo, appuyé sur son référentiel empirique et théorique, devrait lui révéler que la résolution du problème passe par une hypothèse de proportionnalité. Même s'il est conscient que cette hypothèse est abusive, il sait aussi que trouver une solution acceptable passe nécessairement par des approximations. Le choix d'une des trois stratégies décrites en · est alors orienté par des éléments saillants et sans doute personnels du traitement visuel et/ou la plus ou moins grande correspondance de ceux-ci à des éléments du référentiel théorique (e.g. prise en compte d'un rapport externe ou interne). Une légère expérience de mesurage sur la photo ou sur lui-même, et la connaissance de la taille moyenne d'un adulte, qu'il peut sans doute trouver dans son référentiel empirique, suffiront à cet expert pour boucler le processus d'opérationnalisation de la situation (Julo, 1994, p. 50). Il lui reste à expliciter les éléments retenus pour former cette représentation et les traitements légitimes qu'il leur applique, puis de les organiser en un discours cohérent dans le cadre de limites qu'il précisera : hypothèse abusive mais raisonnable, approximation des mesures.

Ce qui caractérise cet ETM de référence est la richesse, la disponibilité et la précision du référentiel théorique et empirique qui orientent et légitiment les traitements visuels et discursifs, minimisent leur coût et permettent une sollicitation réduite du pôle expérimental.

5. les etm personnels initiaux des élèves observés

Au cours de la première séance du 23 mai (TABLEAU I en annexe), les élèves de la classe observée ont eu l'occasion de prendre connaissance du problème, d'envisager sa résolution et d'en débattre librement. Ils ont notamment entrepris les premières investigations de la photo : mesurer, dessiner des segments…. Par défaut de références empiriques, et aussi parce que les quelques éléments théoriques dont il dispose comme les schèmes de la proportionnalité sont à la fois mal stabilisés et peu reliés à son expérience personnelle, un enfant de 10-11 ans ne peut pas avoir la démarche d'un expert. Pour nombre des élèves observés, l'approche du problème a débuté par des évocations imaginaires : « C'est grand un géant, au moins comme un immeuble », avant de considérer non pas

---

5 La reprise de textes de résolution occupe une place importante dans notre ingénierie, en tant qu'outil de travail réflexif pour les élèves (voir 6.2.2)

« un » géant mais le géant de la photo et de traiter objectivement les informations fournies par celle-ci. En fin de séance, les élèves ont été invités à produire un premier texte répondant à la question suivante : « Quelle est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet de dire cela ? ». Les productions6 issues de cette séance nous permettent d'analyser les ETM personnels initiaux des élèves. Nous nous focaliserons sur la genèse visuelle en interaction avec le référentiel empirique et théorique, car ces éléments sont déterminants dans la résolution d'un problème dont l'énoncé repose essentiellement sur la photo d'un fragment de réel. Nous nous contenterons d'examiner ici six textes de résolution représentatifs de l'ensemble de la classe.

Ana

J'ai fait le calcul de chaque partie du corps
moitié de la jambe : 9,5cm
pied : 8cm
moitié de la jambe : 9,5cm
autre pied : 8cm
autre moitié de la jambe : 9,7cm
autre moitié de la jambe : 9,7cm
bras : 9,0cm
autre bras : 9,0cm
9,5+9,5+9,7+9,7+9+9+0,8+0,8 = 72,2m
La taille du géant est de 72,2m [erreur de calcul]

Genèse visuelle

- Isolement sur la photo de deux segments particuliers du géant : demi-jambe visible et pied, à partir desquels on peut estimer les longueurs de chaque segment constituant la « taille »
- Ces segments ne sont pas rapportés à un étalon

Référentiel empirique

- Mesures directes au moyen d'un double-décimètre
- Evaluation des tailles des segments invisibles (autre moitié de la jambe, bras) à partir des segments visibles
- Théorème en actes : la « taille » est égale à la somme de certains segments du corps (pieds, jambes, bras) ; le changement d'échelle d'une feuille de papier au réel se fait en substituant les mètres aux centimètres

Référentiel théorique

- Problèmes additifs

Cin

A mon avis le géant mesure 39,1m. Car déjà la taille de la [demi]*-jambe mesure 9,7cm (9,7 m). Donc j'ai fait 9,7m+9,7m= 19,4m et ça fait une jambe entier. J'ai fait 19,4+19,4 =39,1* [erreur de calcul] *et ça fait un corps entier*

Genèse visuelle

- Isolement sur la photo d'un segment du géant, la demi-jambe visible, à partir duquel on peut calculer la stature
- Ce segment n'est pas rapporté à un étalon

Référentiel empirique

- Théorèmes en acte : la longueur du corps entier peut-être engendrée à partir de deux doublages de la demi-jambe ; passage des cm au m (voir Ana)
- Mesures directes au moyen d'un double-décimètre

6 Les conditions dans lesquelles ces productions ont été réalisées sont décrites dans le TABLEAU I en annexe

Référentiel théorique

- Problèmes de doublage

Ass

Les deux hommes mesurent à peu près 1m80 ou 1m70. La chaussure mesure à peu près 2m. Le géant mesure 6m quand je fais 2×3=6m, 2 car sa chaussure mesure 2m à peu près et qu'il manque 3 parties du corps : tête, jambe, ventre. Donc je fais 2×3=6 donc le géant mesure 6m de haut par rapport aux deux hommes

Genèse visuelle

Isolement sur la photo la chaussure du géant par sa double pertinence :

- Segment du géant à partir duquel on peut reconstituer le corps entier
- Etalon car comparable[7] à un autre élément de la figure, un bonhomme, dont on peut estimer la taille

Référentiel empirique

- Théorème en acte : le référentiel empirique renvoie à un corps rudimentaire formé de trois parties considérées comme équivalentes (tête, ventre, jambes) pour le calcul de la taille
- Estimation de la taille d'un adulte

Référentiel théorique

- Problèmes multiplicatifs de type « un/ plusieurs » : une partie mesure 2m, trois parties mesurent 6m (à la manière de : 1kg vaut 2€, 3kg valent 6€)

Neh

A mon avis la taille du géant serait 26m. Bin en fait j'ai vu sur la photo qu'il y avait des hommes et un pied de géant. Alors déjà je sais que la taille d'un homme ça peut être entre 1m90 et 1m80. Donc le pied déjà, sa taille doit être 1m90 environs. Et après bin pour la taille du géant ça serait 26m environs.

Genèse visuelle

- Isolement sur la photo des hommes en tant qu'étalons
- Isolement sur la photo du pied du géant
- Mise en rapport du pied avec l'étalon-homme

Référentiel empirique

- Estimation de la taille d'un adulte

Référentiel théorique

- Rien n'est explicité

Ber

A mon avis la taille du géant est de 144m [erreur de placement de virgule]
Moi j'ai dit qu'il fallait faire 9×1,60 car 1,60 est la taille d'un homme et 9 çà veut dire 9 hommes.

Genèse visuelle

- Isolement sur la photo de l'homme en tant qu'étalon

Référentiel empirique

- Estimation de la taille d'un adulte
- Estimation du nombre de fois qu'un homme peut être reporté sur un géant sans expérimentation

Référentiel théorique

---

7 Il semble qu'Ass ait estimé que la chaussure du géant est un peu plus grande qu'un des deux hommes d'où le 2m

- Problèmes multiplicatifs de type « un/ plusieurs » ou dilatation

Don

La taille du géant fait à peu près 5,40m car la taille d'un homme mesure environ 1m80 puis je multiplie par 3,5
180 ×..... = 500   180×2= 360×1,5=540

Genèse visuelle

- Isolement sur la photo de l'homme en tant qu'étalon afin de permettre le calcul de la taille du géant par application d'un coefficient de proportionnalité

Référentiel empirique

- Estimation de la taille d'un adulte

Référentiel théorique

- Recherche d'un coefficient de proportionnalité
- Application d'un coefficient de proportionnalité

Remarque : Don, ayant sans doute identifié une situation de proportionnalité, part à la recherche d'un coefficient de dilatation de l'homme au géant (*180 ×..... = 500* [nous n'avons pas d'explication sur l'origine du 500]) et finit par opter pour 3,5

L'étude de ces six cas permet de dégager trois grandes approches :

- Un découpage du corps du géant en segments plus ou moins adapté au calcul de la stature (référentiel empirique d'Ana, Cin et Ass)
- Un étalonnage imaginé du corps du géant indépendamment de ses parties (référentiel empirique de Ber et peut-être de Neh)
- La recherche d'un coefficient de dilatation de l'homme au géant (référentiel théorique de Don)

Pour sortir de la photo et accéder aux dimensions réelles :

- Ana et Cin, qui restent polarisées sur le géant et lui seul, substituent de façon erronée les m aux cm (référentiel empirique : « sur la photo on mesure en cm, dans la réalité on mesure en m »)
- Neh, Ass, Ber et Don prennent en compte un élément extérieur au géant (un des hommes de la photo), estiment sa taille réelle et la mettent en rapport avec celle du géant (référentiel empirique ou théorique)

6. La question de l'etm idoine

On distingue dans les procédures initiales décrites en section 5 du rudimentaire, de l'inachevé et de l'erroné. Nous faisons l'hypothèse que ces défaillances proviennent avant tout de ce que les genèses visuelles sont en liaison avec des référentiels empiriques et théoriques très rudimentaires ou erronés. Pourtant, la variété des mises en rapport de repérages visuels avec des références empiriques ou théoriques, mêmes défaillantes, contient en germe les possibilités de développer des procédures complètes et efficaces dans le cadre d'un ETM idoine.

Décrivons tout d'abord comment nous procéderions aujourd'hui, informés par notre analyse a posteriori, notamment en termes d'ETM, avant d'expliquer comment nous avons effectivement procédé dans le cadre de l'ingénierie.

6.1. Pistes a posteriori pour un ETM idoine

Un tel ETM devrait a minima comporter un référentiel théorique et empirique intégrant la dualité proportions vs dimensions absolues. En particulier dans le cas du corps humain, les unités fixes (cm, m) ne sont la seule façon de mesurer la taille. Rapporter celle-ci à un segment du corps, ou à un autre corps, peut être pertinent et déboucher sur des résultats surprenants : on peut être grand et avoir les mêmes proportions que quelqu'un de petit. A cet égard, nous suggérons deux pistes d'aménagement d'un ETM idoine permettant de faire rebondir les élèves sur leur ETM personnel.

La première piste consiste à donner de la consistance et de la cohésion au référentiel empirique en proposant par exemple un travail de reprise d'écrits entre pairs complété par un travail expérimental. En effet, la comparaison de quelques textes de résolution bien choisis par l'équipe de recherche aurait donné à voir aux élèves la variété des représentations du corps et leur potentiel informatif dans le calcul de la stature du géant. Suite à ce premier travail, une mise en questions de ces représentations du corps aurait été possible. Par exemple, les trois parties du corps ont-elles même longueur ? Pour mesurer la taille d'un individu doit-on additionner la longueur de toutes ses parties : les deux pieds, les deux bras, les deux jambes ? Combien de jambes, de demi-jambes rentrent dans un corps entier ? Ce qui est vrai pour le géant est-il vrai pour tout corps humain et à tout âge ? Le produit de ce travail aurait pu déboucher sur la prise de conscience des insuffisances de certaines représentations et, a contrario, sur les possibilités de se doter de représentations du corps pertinentes pour la résolution du problème (stratégie1).

La deuxième piste consiste à renforcer le référentiel théorique, en privilégiant l'appui sur les expérimentations de la première piste plutôt que des considérations formelles. Dans le cas de Don, il aurait été ainsi possible de l'aider à prendre en compte le rapport de deux segments homologues dans sa recherche d'un coefficient de dilatation (stratégie 2). Dans le cas d'Ana et de Cin, il aurait été judicieux d'amener ces élèves à s'interroger sur la pertinence du rapport 100 : 1cm sur la photo correspond-il à 1m dans la réalité ?

Pour résumer cela, nous pourrions dire que, suite aux constats d'insuffisances révélées par les premiers textes de résolution, il aurait été opportun d'amener les élèves à développer une genèse expérimentale pour recadrer et enrichir leur référentiel empirique et théorique, composante minorée dans les ETM personnels initiaux et spontanés des élèves. Dans les faits, nous avons en partie procédé comme cela, mais sans prendre suffisamment appui sur la richesse et la diversité des idées initiales.

6.2. L'ETM idoine effectivement mis en place

6.2.1. L'ETM idoine initial et la nécessité de son réaménagement

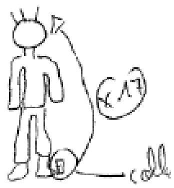
Lors des deuxième et troisième séances des 27 et 30 mai (TABLEAU I en annexe), les élèves ont eu à prendre connaissance de différents écrits de leurs pairs. Mais sans doute insuffisamment vigilants à ce que ces écrits nous révélaient de spécifique dans le rapport aux savoirs concernés, notre équipe a suivi la ligne générale de notre scénario : demander aux élèves d'une part d'élaborer un intervalle de plausibilité pour la taille du géant et d'en débattre, d'autre part de rédiger « des idées permettant d'avancer dans la résolution du problème ». Là où il aurait été souhaitable de pointer les insuffisances du référentiel théorique et empirique et d'y remédier, nous nous sommes trop vite placés dans une perspective de genèse discursive. Même si dans l'ensemble les idées émises furent encore ténues ou erronées, cette phase a néanmoins abouti à la productionErreur : source de la référence non trouvée par deux groupes d'élèves en particulier de textes faisant apparaître quelques éléments pertinents de la stratégie 1. Voici ces deux textes.

Groupe Ber, Neh, Ela, Cin ; 30 mai

On dit que les mesures sont possibles et impossibles parce que je sais que sur la photo l'homme mesure à peu près la moitié du pied, je prends la moitié du pied et [au moyen d'] *un stylo je regarde si c'est la taille d'un homme…. On fait ×9 car 9 personnes font environ tout le corps d'un géant.*

Groupe Cel, Bil, Ana, Don ; 30 mai

D'abord nous allons voir la taille de l'homme, elle est égale à 1m80. Ensuite nous allons prendre l'homme et on



le multiplie par 17 parce qu'on peut mettre 17 hommes à côté du géant. On a réussi cette étape car on a fait une expérience on a pris Bil puis une colle et on a fait 17 fois pour arriver jusqu'à la tête. [Un grand stick de colle est utilisé pour étalonner l'élève Bil, le plus grand de la classe]

Lors des séances ultérieures du 6 et 9 juin (TABLEAU I en annexe), lors des débats qu'il a menés, le maître s'est essentiellement appuyé sur ces deux textes. Il a notamment a mis l'accent sur les idées d'étalonnage du géant passant par l'étalonnage du corps d'un élève, et donc sur une expérimentation directe. On pouvait alors espérer que nombre d'élèves s'empareraient des éléments de la stratégie 1 ainsi mis en évidence, les ordonneraient et les coordonneraient pour produire des textes de résolution acceptables.

Mais en fait, dans les rédactions individuelles clôturant la séance du 9 juin, on constate que les élèves se centrent quasi exclusivement sur les manipulations menées dans la réalité de la classe en oubliant leur rapport à la photo du géant et à la réalité qu'elle représente. Beaucoup d'objets d'étalonnage ont ainsi été choisis au hasard, le plus souvent sans rapport avec le mi-mollet (les sticks de colle, quelle que soit leur taille, ont été plébiscités puisque c'était le choix du groupe de référence) et encore moins avec l'homme de la photo. Le 9 juin, suite à des incitations enseignantes, les élèves réintègrent la réalité de la photo et du parc mais n'explicitent pas suffisamment les liens avec la situation d'étalonnage en classe. Ainsi, entre le 6 juin et le 9 juin, une véritable schizophrénie semble s'installer et on est loin de l'appropriation espérée de la stratégie 1.

Les textes de Neh et d'Ana sont représentatifs de ces cheminements et montrent la nécessité de réaménager l'ETM idoine pour dépasser ce blocage.

Neh, 6 juin

Je fais 19 colles et je mesure 1m65 environ.
J'ai pris ma colle, je l'ai mis sur le pied et après j'ai compté jusqu'à ma tête, ça donne 19 colles.
Ma réponse :
Le géant mesure 32,35 m.
Ma méthode :
En fait, j'ai fait 19×1,65= 32,35m. Jai pris la mesure de combien fait ma colle et ma mesure.

L'analyse correcte des rapports entre les personnages et le pied du géant, menée le 23 mai (5), disparaît ici au profit de manipulations. En effet, Neh ne considère que le rapport entre le tube de colle et elle-même et ne dit rien du rapport entre le tube de colle et la photo. De même, elle ne s'exprime pas sur le fait de prendre sa taille comme base de calcul de la taille du géant.

Neh, 9juin

Je sais que la taille d'un bonhomme c'est 1,80m, je sais que si je prends un objet qui va à la moitié du mollet et que je le reporte ça fera 6× ma taille donc ça va faire pareil pour le géant.
La résolution du problème : 1,80×6=10,80. Le géant mesure 10,80m

Neh arrive à un résultat plausible. Par rapport au texte précédent on voit des ponts établis entre la situation d'étalonnage en classe et la photo : « ça va faire pareil pour le géant ». Mais ces articulations ne sont pas encore explicitées clairement. En particulier, le choix du mi-mollet reste opaque et son rapport avec la taille d'un homme n'est pas évoqué.

Le cas d'Ana montre de façon plus évidente encore ce clivage entre la situation de la photo et la situation d'étalonnage en classe.

Ana, 6 juin

Je vais prendre différente chose comme l'équerre, un tube de colle, l'effaceur et je vois si ça fait la même chose et je vais comparer :
Pour moi :
une règle : 4
colle : 15
équerre 8
Pour Naï :
une règle : 5
colle 15,30
équerre : 8
J'ai fait avec Naï, on a fait avec l'équerre, la règle et la colle. J'ai comparé et comme elle est plus grande que moi, ce n'est pas pareil. Je prends la colle et je mesure chaque partie de mon corps.
Je pense que le géant mesure 16m car j'ai mesuré chaque partie de mon corps et j'ai multiplié.

Ana procède à une série d'étalonnage de sa taille et de celle de son amie Naï sans donner du sens à ce travail. Le résultat final est déconnecté de ces expériences et semble faire référence à sa procédure du 23 mai (0).

Ana, 9 juin

Je fais 6×1,80=10,80, j'ai fait 6×1,80 pour trouver la taille du géant, j'ai utilisé la moitié de la jambe et il faut 6 fois la moitié de la jambe.

On voit bien réapparaître la réalité du parc mais aucune explication n'est donnée sur le rapport 6 ou la signification du 1,80. Aucun lien avec la situation d'étalonnage en classe n'est fait. A ce moment là, la compréhension de la stratégie 1 par Ana semble encore hors d'atteinte.

6.2.2. L'ETM idoine réaménagé par une pratique écrite de l'écrit

Afin de débloquer la situation, l'équipe a décidé d'agir sur le pôle expérimental de l'ETM idoine, mais pas à la manière décrite en 6.1 dont l'occasion avait été manquée. Les textes du 9 juin ne permettaient pas de décider si les élèves ne faisaient que répéter mimétiquement les avancées de la classe ou s'ils exprimaient la partie émergée d'un raisonnement plus abouti. Pour lever cette ambiguïté, nous avons mis en place le 17 juin un dispositif destiné à favoriser l'explicitation de leur argumentation. A cet égard, nous avons mis à la disposition des élèves un matériel (artefact) qui leur a permis de développer une « pratique écrite de l'écrit ». Opposée à « une pratique orale de l'écrit » (Duval 2001, p. 191), cette dernière est bien spécifiée par Tanguay (2005) comme étant :

> […] faite de pauses, de retour sur les propositions déjà énoncées, de réaménagements et simultanéisations (pour rapprocher des propositions ou blocs de propositions non contigus dans le texte), de recul, d'appréhension globale (pour saisir certains éléments de macro-organisation) ; bref, de réflexion. Toutes choses que ne permet pas cette « linéarisation de la pensée » (Duval 2001, p.191) imposée par une pratique orale du texte, faite de fluence, de séquencialité, d'irréversibilité. À travers une telle « pratique écrite de l'écrit », l'élève produit le texte de démonstration non plus à des fins de communication, mais pour « en contrôler et la validité et l'absence de lacunes. » (Ibid., p.197). (Op. cité, p.2)

Pour offrir cette possibilité d'expérimentation et de construction aux élèves, nous leur avons donné à examiner quatre textes, issus de leurs rangs, rédigés lors de la séance du 9 juin (TABLEAU II en annexe) et sélectionnés par l'équipe de recherche. Ces textes ont été choisis car on peut trouver dans leur réunion la quasi-totalité des éléments d'un raisonnement rigoureux. Même les textes les plus incomplets apportent des contributions qui ne figurent pas nécessairement dans les autres textes.

Dans une perspective d'expliquer sa solution à des élèves d'une autre classe de CM2, la consigne était d'abord de noter « ce qui est bien dans chacun de ces textes et ce qui manque pour comprendre la solution. » puis de proposer collectivement un cahier des charges pour une solution et enfin de rédiger individuellement sa solution.

Les élèves ont alors effectivement mis les textes en questions, repéré la présence ou l'absence d'éléments pertinents, relevé des imprécisions, proposé des améliorations (genèse expérimentale). Ils se sont bien engagés dans une pratique écrite de l'écrit. Ce travail a sans doute été déterminant pour amener deux tiers d'entre eux à expliciter les éléments et les articulations d'un raisonnement complet, comme le montrent les textes de résolution de Neh et Ana, une nouvelle fois représentatifs de ces cheminements.

Neh, 17 juin

Puisqu'on n'a pas le géant sous nos yeux, alors on prend un objet qui fait la moitié du mollet. Puisque sur la photo on voit que l'homme fait le mi-mollet du géant, alors on imagine que je suis le géant et que l'homme c'est l'objet. Après je le reporte de toute ma taille et ça fait 6 fois.
La taille d'un homme c'est 1,80m, alors je fais 6×1,80= 10,80m
Réponse : le géant mesure 10,80m

Le lien ténu, présent dans le texte du 9 juin de Neh, entre les actions menées en classe et la situation évoquée par la photo (« Ca va faire pareil pour le géant »), est à présent développé et la démarche de modélisation bien explicitée via une séparation claire mais articulée entre le modèle (son propre corps) et le représenté (le géant).

Ana, 17 juin

On a pris un élève de la classe. Puis on a pris un objet pour faire les hommes. Il faut prendre un objet puis le faire jusqu'à ce qu'on arrive à la tête. Il faut 6 ou 7 fois l'objet pour arriver à la tête et pour trouver la taille. Ex. il y avait des hommes à côté du pied du géant. On les a utilisés pour trouver la taille du géant. Un homme mesure à peu près 1m80. On prend 1m80 et combien de fois on a pris l'objet pour arriver à la tête.
1,80 × 6 = 10,80

Le texte du 9 juin évoquait quelques actions menées en classe mais ne faisait aucun lien avec la situation évoquée par la photo. Dans le texte du 17 juin, l'ensemble des éléments d'un raisonnement complet apparaissent presque tous mais ils sont désordonnés. Ana produit un texte intermédiaire, où elle tente d'assembler les pièces d'un puzzle, sans toutefois y parvenir totalement: « on a pris…puis on a pris... on les a utilisés…il faut… ».

Globalement, deux tiers des élèves ont tiré profit du traitement des écrits de leurs pairs pour combler les lacunes de leur propre texte et réorganiser ceux-ci pour produire un raisonnement acceptable. Cette genèse expérimentale particulière leur a permis de mettre en relation les repères visuels de la photo, les expérimentations menées en classe et les éléments pertinents du référentiel empirique, et donc de développer leur genèse discursive.

Mais il faut aussi évoquer le tiers des élèves qui n'ont pas produit des textes de résolution satisfaisants. Leurs textes montrent en général qu'ils n'ont pas compris les éléments clés de la résolution du problème, notamment ceux liés à la modélisation. Voici l'exemple de Naï qui illustre bien cela.

Naï, 17 juin

On prend 1,80m×7. 1,80m parce que c'est la taille d'un homme en général, 7 parce que quand on prend on objet qui nous arrive au mi-mollet et qu'on le reporte sur nous ça donne 7 fois.
Calcul : 1,80×7=12,60
(Quand il y a des personnes qui reportent un objet ça donne 6 ou 7 fois mais moi j'ai décidé de prendre 7 parce que c'est plus grand que 6 et je me dis que c'est mieux de prendre la plus grande mesure (7) car on parle d'un géant)

Aucun lien n'est fait entre le modèle (un élève) et le géant d'une part, entre l'objet reporté et l'homme de la photo d'autre part. De plus, Naï semble penser qu'il n'y a que deux coefficients possibles, 6 et 7, et choisit 7 parce qu'il débouche sur « la plus grande mesure», donc plus conforme à la taille d'un géant… Ces nombres ne sont pas interprétés comme des coefficients de proportionnalité mais comme des absolus. Nous voyons ici que les éléments du référentiel empirique sont reliés de façon erronée aux éléments d'un référentiel théorique défaillant dans l'ETM personnel de l'élève.

7. Conclusion

Dans une étude antérieure consacrée à l'observation de professeurs enseignant la géométrie au collège et au lycée (Kuzniak &Rauscher, 2011), la notion d'ETG s'était révélée pertinente pour voir dans quelle mesure ils tiennent compte ou pas des espaces de travail personnels des élèves pour permettre à ces derniers d'avancer dans les apprentissages. Ici, notre étude révèle le potentiel du cadre ETM pour analyser l'activité mathématique des élèves confrontés au problème du géant et parallèlement pour élaborer ou rectifier des modalités d'enseignement en conséquence. Ce cadre nous a en effet permis de revisiter notre ingénierie et de mettre au jour ou de réinterpréter trois points importants de celle-ci.

- Le premier de ces points concerne la prise en compte des ETM personnels initiaux des élèves qui révèle avant tout des déficits précis du référentiel empirique et théorique. En s'appuyant sur ceux-ci, nous avons pu dégager a posteriori des pistes pour développer une genèse expérimentale dans le cadre du référentiel idoine.
- Le deuxième point concerne l'interprétation des blocages qu'ont connus les élèves lors des séances du 6 et 9 juin en termes de dissociation des genèses visuelle et expérimentale, en bonne partie dues à la centration prématurée de notre scénario d'enseignement sur la genèse discursive
- Le troisième de ces points concerne la réussite de deux-tiers des élèves à produire une genèse discursive efficace en fin de parcours que nous expliquons maintenant par l'intégration, grâce à une pratique écrite de l'écrit, des genèses visuelle et expérimentale, cette dernière enrichissant, stabilisant et rendant plus disponible le référentiel empirique et théorique

De façon plus large, on peut penser que la notion d'ETM est un outil pertinent pour objectiver et réaliser le lien nécessaire entre la vigilance épistémologique et la vigilance didactique à exercer dans des situations de problèmes de modélisations proposés à de jeunes élèves. La perspective de notre étude serait ici de développer un cadre ETM de la modélisation à ce stade de la scolarité (10-11 ans) ou même de l'étendre à d'autres niveaux de scolarité. Le diagramme de la *Figure 5* pourrait être une base de travail pour un tel projet. Nous nous plaçons dans les limites d'une « initiation à la pratique de la modélisation » (Brousseau, 2003, p. 25) que nous résumons en quatre points issus de Legrand (Ibid., p. 34) :

- Partir d'un réel plus ou moins délimité et d'une question
- Choisir les objets et paramètres pertinents
- Construire des règles traduisant les relations entre objets
- Construire un modèle (monde imaginaire ou réel reconstruit) pertinent vis à vis du questionnement initial et assez mathématisé pour que l'on puisse calculer, comprendre comment ça marche.

Dans ce contexte, les genèses visuelle et expérimentale et leur articulation nous semblent être les composantes majeures de l'ETM idoine, en tout cas dans le travail d'approche des élèves indispensable pour aborder la phase finale de la genèse discursive. Nous insistons aussi sur le rôle majeur que devrait jouer la pratique écrite de l'écrit à l'intérieur de la genèse expérimentale dans le cadre d'une telle ingénierie.

RÉFÉRENCES

Adjiage, R., & Rauscher, JC. (2013, accepté pour publication). Résolution d'un problème de modélisation et pratique écrite de l'écrit. *Recherche en Didactique des Mathématiques*.

Adjiage, R. (2005). Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 95–129.

Adjiage, R., & Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 149–175.

Bkouche, R., Charlot, B., & Rouche, N. (1991). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. Bibliothèque Européenne des sciences de l'Education. Paris : Armand Colin.

Brousseau, G. (2003). Quels types de savoirs mathématiques utilise-t-on dans la modélisation ? In Raoult J.P. (Ed.), *La modélisation, recueil des contributions présentées le 26 novembre 2003* (pp.13–17). Paris : IREM de Paris 7.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Bern : Peter Lang.

Duval, R. (2001). Écriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ? In Barbin E., Duval R., Giorgiutti I., Houdebine J., Laborde C. (Eds.), *Produire et lire des textes de démonstration* (pp. 183-206). Paris : Ellipses.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques.* Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Kuzniak, A., & Rauscher, J. C. (2011). How do teachers'approaches to geometric work relate to geometry students'learning difficulties ? *Educational Studies in Mathematics*, 77, 129–147.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.

Legrand, M. (2003). Différents types de modélisation dans l'enseignement. In Raoult J.P. (Ed.), *La modélisation, recueil des contributions présentées le 26 novembre 2003* (pp.13–17). Paris : IREM de Paris 7.

Peter-Koop, A. (2004). Fermi problems in primary mathematics classrooms: Pupils' Interactive Modelling processes. In Mathematics education for the third millennium: Towards 2010 (Ed), *Proceedings of the 27th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Townsville* (pp. 454–461). Sydney: MERGA.

Rauscher, JC. (2006). L'écriture réflexive au centre de l'activité mathématique dans la résolution de problèmes de proportions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg*, 11, 75–102.

Rauscher, J.C., Adjiage, R., & Beliaeva, T. (2010). Modélisation et écrits réflexifs : des outils pour apprendre ? Réflexion à partir d'une expérimentation en CM2. In Danos P. (Ed.), *Actes du 36ème Colloque COPIRELEM. Auch 2009, L'enseignement des mathématiques à l'école : où est le problème ?* (cederom). Paris : ARPEME.

Tanguay, D. (2005). Introduction. In Tanguay D. (Ed.), Actes du colloque du *Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec GDM 2005* (pp. 1–4). Montréal : UQAM.

Vygotski, L. (1934). *Pensée et langage.* Rééd. 2002. Paris : La Dispute.

ANNEXE

TABLEAU I

23 mai	Première approche : « Quelle est à ton avis la taille du géant ? Qu'est-ce qui te permet de dire ça ? »
27 mai	Elaboration par groupe d'un intervalle de plausibilité pour la taille du géant et débat en classe à ce sujet.
30 mai	Analyse par les élèves de sept réponses produites lors de la première séance en vue de « découvrir des idées de résolution » ; production par groupes d'un programme d'actions à entreprendre pour résoudre le problème.
6 juin	Production d'un écrit de résolution suite à l'analyse collective de quelques textes du 23 mai.
9 juin	Questionnement collectif, dirigé par le maître, d'écrits de résolution précédents ; rédaction individuelle d'un nouvel écrit de résolution.
17 juin	Analyse individuelle de quatre écrits de résolution du 9 juin, choisis par les adultes ; rédaction individuelle d'un dernier écrit de résolution « dans la perspective d'une transmission à une autre classe ».
24 juin	Questionnaire bilan écrit renseigné par les élèves : Surprises ? Difficultés ? Expérience à refaire ? Apprentissages réalisés ?

Calendrier de la séquence

TABLEAU II

Elève numéro 1
J'ai fait 1,80×7 =12,60m. J'ai pris 1,80 car c'est la taille d'un homme et j'ai 7 car un homme rentre 7 fois dans le géant. Et après j'ai fait 1,80×7 = 12,60m. Le géant mesure 12,60m.
Elève numéro 2

Comment je fais ? Je sais que la taille d'un bonhomme c'est 1,80m et je sais que si je prends un objet qui va à la moitié du mollet et que je le reporte, ça fera 6 fois ma taille donc ça va faire pareil pour le géant. La résolution du problème : 1,80×6 =10,80.
Elève numéro 3 Il faut d'abord voir sur la photo et voir jusqu'où vont les hommes sur la jambe du géant et ça va jusqu'au mi-mollet donc on imagine qu'on est le géant et on prend un objet qui va jusqu'à la moitié d'un mollet puis après qu'on s'est choisi un objet jusqu'au demi mollet on regarde combien de fois il rentre dans le géant (nous) et ça donne pour tout le monde environ 6 et 7.Réponse du problème : 6×1,80 = 10,80m. Le géant fait 10,80m.
Elève numéro 4 Nous avons repris le problème or on a trouvé le mi-mollet. L'objet : l'homme 1,80m Calcul : 1,80×6 = 10,80 ; 1,80×7= 12,60 Le géant mesure entre 10,80 et 12,60

Les quatre productions du 9 juin soumises aux élèves le 17 juin

Autores

Jean-Claude Rauscher, jean-claude.rauscher@iufm.unistra.fr Irem de Strasbourg, Université de Strasbourg, France.
Robert Adjiage, robert.adjiage@iufm.unistra.fr, Université de Strasbourg, France.

La mesure et les logiciels de géométrie dynamique dans le paradigme du physicien-géomètre

Denis Tanguay
Loïc Geeraerts
UQAM

Dans Tanguay et Geeraerts (2012), nous proposons un cadre de travail en géométrie à travers lequel sont repensés les dialectiques empirisme-formalisme, inductif-déductif et le rôle du mesurage comme processus de validation. Il s'appuie sur près de cinq années de mise en œuvre, entre 2002 et 2007, dans des classes de sixième et cinquième où l'un des auteurs a été enseignant, et fait par ailleurs l'objet d'expérimentations[1] plus systématiques et encore en cours, dans des classes du secondaire à Montréal. Reconnu d'abord par nous comme point de convergence des vues d'un praticien et d'un chercheur, ce cadre a été pensé comme un ensemble d'hypothèses, modes et pratiques de travail visant à assurer une transition plus harmonieuse entre la GI et la GII (Houdement et Kuzniak, 2006). Nous en avons donc parlé comme d'un paradigme — au sens de « matrice disciplinaire », que lui donne Kuhn (1996) —, le *paradigme du physicien-géomètre*. On pourra alléguer que le terme *paradigme* est ici abusif : la « communauté scientifique » qui adopte et partage les convictions, savoirs et pratiques en cause ne compterait que deux membres ?!! Nous l'avons tout de même retenu d'une part, pour bien mettre en évidence le rôle d'articulation qu'a le cadre dans le passage entre deux paradigmes ; d'autre part, parce qu'il nous apparaît essentiel, pour des raisons que nous allons développer dans cet article, d'impliquer toute la classe dans les choix, les problématisations et les motivations à la source du travail visé : la communauté en question, pour nous, c'est donc en fait *la classe* !

Parmi ces problématisations mises en avant pour la classe, il y a celle de la fiabilité de la mesure, du type et du degré de certitude auxquels elle donne accès. Quand les mesures sont *données* directement par un logiciel de géométrie dynamique comme *Cabri* ou *GeoGebra*, la question se complexifie parce que le rapport des élèves à de telles mesures, à leur exactitude et à leur précision, n'est évidemment pas le même que pour des mesures *effectuées* et *lues* sur une règle graduée ou un rapporteur. Entre autres, la grande majorité des élèves est spontanément persuadée qu'il ne saurait y avoir « erreur de mesure » avec ces logiciels. Comment, dès lors, éviter que l'utilisation que les élèves en font ne se substitue à la démonstration et ne provoquent « un glissement implicite et potentiel vers un ETG[2] où l'expérience et les artefacts guident le travail » (Kuzniak, 2010, p. 79) ? Ce sont là parmi les questions abordées dans le présent article.

1. Un référentiel théorique physiquement intégré à l'espace local

Dans Tanguay (2007, 2005), nous avons fait valoir que le passage de l'argumentation à la démonstration (Duval, 1991) nécessite des élèves une véritable « décentration » — au sens que Piaget (1997, p. 504) donne à ce mot — par laquelle l'élève « reconsidère la

[1] Dans le cadre d'un projet de recherche CRSH du Canada n°169912.
[2] Espace de Travail Géométrique ; cf. Houdement et Kuzniak (2006).

primauté de ce qui est en jeu, la validité des enchaînements devant prendre le pas sur la vérité des propositions sans toutefois l'occulter… » (Tanguay et Geeraerts, 2012, p. 9). Ce « nouveau » point de vue relève d'un regard « méta » et ne sera possible, n'aura de sens pour les élèves que s'ils sont pleinement impliqués dans l'édification d'une théorie, dans la construction d'un réseau de résultats inter-reliés qui s'enchaînent dans la théorie de la même façon que les propositions s'enchaînent dans chaque démonstration : « on n'atteint pas pleinement l'idée de preuve en étudiant des preuves isolées » (Rouche, 1989, p. 9). Kuzniak (2010) met bien en évidence qu'en France[3], un travail sur des *îlots déductifs*, qu'il analyse comme relevant de la *Géométrie II morcelée*, est insuffisant pour empêcher que la géométrie du collège et du lycée ne glisse « subrepticement » vers la GI : « la preuve axiomatique […] est d'autant plus affaiblie que le référentiel théorique mis à disposition des élèves n'apparaît pas, même en filigrane » (op. cit., p. 87).

Dans le cadre que nous proposons, ce référentiel théorique est construit par la classe — nous verrons plus loin selon quelle perspective — et donne lieu à un outil[4], le classeur, intégré à l'espace local. Nous suggérons en effet de donner au référentiel la forme d'un répertoire de définitions et de « règles » — nous discuterons plus loin des différents statuts à donner à ces règles — dont chacune fait l'objet d'une fiche dans le classeur. Le contenu de chaque fiche est élaboré et décidé par le groupe classe mais chaque élève en transcrit sa copie qu'il insère dans son propre classeur. Le format des fiches (24 cm × 16 cm) et par conséquent du classeur est choisi pour que l'élève puisse l'ouvrir dans le haut du bureau tout en laissant libre l'espace de travail — au sens bien physique et concret —, celui où il mènera les constructions ou tracés à l'étude, examinera et codera des figures déjà tracées, organisera les fiches sorties du classeur quand elles sont susceptibles d'intervenir comme règles d'inférence (Duval, 1991) dans une démonstration en chantier, etc.

En effet, quand le travail vise une démonstration spécifique, on désamorce une des principales sources de déconvenue en faisant de l'ensemble des fiches le corpus (explicitement identifié) des résultats disponibles pour démontrer. Le contrat est alors clair sur ce qu'on « a le droit d'utiliser », et permet par ailleurs à l'enseignant de varier les scénarios : laisser libre accès au classeur, imposer un sous-ensemble de fiches suffisantes, etc. De leur côté les élèves, à l'issue d'une phase heuristique liée à une conjecture, peuvent ressentir le besoin d'utiliser des règles qui ne figurent pas encore dans le classeur et les proposer à la classe comme cibles de travail.

2. Une articulation, à plusieurs niveaux, entre les registres discursif et figural

Dans les fiches, chaque règle et chaque définition est énoncée discursivement et représentée figuralement. Les règles sont illustrées en tant qu'implication, l'antécédent et le conséquent étant chacun représenté par une *figure-clé* (Kerboeuf et Houdebine, 2005).

[3] Il ne fait pour nous aucun doute qu'un tel glissement est également observable dans la scolarité québécoise actuelle du secondaire (12 à 17 ans).

[4] Selon le modèle théorique des ETM en deux plans (Kuzniak, 2010, p. 74), le classeur peut donc être vu comme un artefact dans le plan des composantes, artefact tant au sens sens usuel d'objet physique fabriqué (par l'homme), qu'au sens plus élargi d'artefact symbolique (Rabardel, 1995) puisqu'il contient les définitions, propriétés et théorèmes sur lequel l'élève s'appuiera pour élaborer des preuves.

Incidemment, les équivalences qui ne sont pas retenues comme définitions donnent systématiquement lieu à deux fiches, une pour chaque implication. Pour plus de détails, notamment sur les fiches-définitions, on pourra consulter Tanguay et Geeraerts (2012, §3.2, §3.3, §3.4).

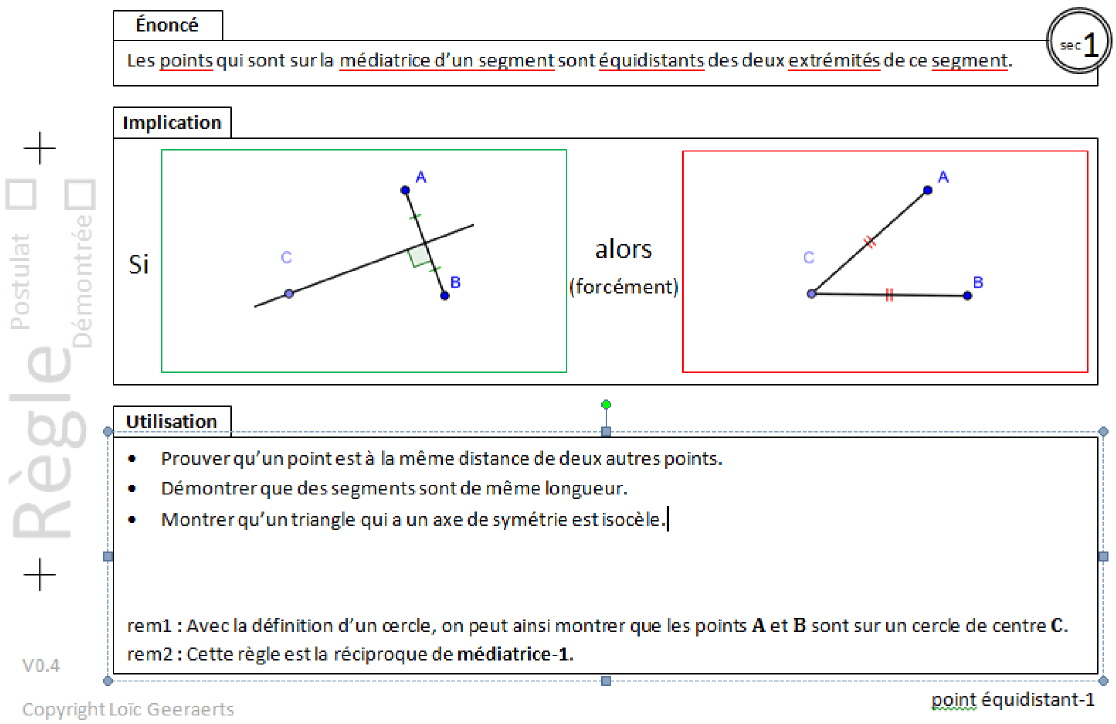


Figure 1 : deux figures-clés dans une fiche-règle

Il s'agit ici de plus que de l'articulation entre deux registres (Duval, 1993). Il s'agit en effet d'un aspect central de l'étude de la géométrie, constituant à la fois l'une de ses richesses mais aussi l'une de ses pierres d'achoppement : articuler le sensible et l'intelligible, apprendre « à utiliser ses perceptions et son intuition pour *guider* les raisonnements plutôt que de leur faire obstacle, […] travailler progressivement à distinguer ce qui doit relever des uns et des autres » (Geeraerts et Tanguay, 2012, p. 25). Les travaux de Duval (1995, 1991, …) ont mis en évidence que la structure par enchaînement d'inférences des démonstrations n'est ni naturellement, ni même facilement comprise des élèves, et que les raisonnements qu'ils mettent en œuvre spontanément, visant à convaincre et obéissant à des critères de pertinence, « […] ne permettent pas d'entrer dans le fonctionnement cognitif de la démonstration qui obéit, elle, à des critères de validité et cherche à prouver » (1995, p. 213). Dans la foulée de ces travaux, des dispositifs et outils d'enseignement — incluant des tutoriels — relativement pointus sont proposés, où le travail d'organisation des propositions occupe l'avant-plan : Duval (1991), Tanguay (2005, 2007), Richard et al. (2011), Guerrero Magaña (2011)…

Mais l'analyse du travail (représentatif) d'un trio d'élèves cherchant à reconstituer une démonstration via un déductogramme (Tanguay, 2007, §3.2) montre bien que l'élève qui « performe » vraiment et qui, de fait, trouve la solution pour son équipe, est celui qui fait constamment le lien entre les propositions manipulées (via des petits cartons) et la figure, allant même jusqu'à retracer la figure pour lui-même. Il s'agit typiquement de ces allers et retours dialectiques entre *sémantique* et *syntaxe*, que Barrier et al. (2009) identifient et décrivent comme étant au cœur même du processus d'élaboration des démonstrations.

Si l'on cherche à analyser un tel travail à l'aide du modèle en deux plans de Kuzniak (2010, p. 74), on voit bien qu'il engage, dans le plan des composantes, à la fois des énoncés (les « règles d'inférence », Duval, 1991) qui relèvent directement du référentiel, des figures tracées dans l'espace local, et d'autres énoncés — les « propositions d'entrée » pour chaque inférence (ibid.) — qui sont *particularisés à ces figures* et ne proviennent donc pas directement du référentiel. Les figures constituent des representamen (ou signifiants) mais aussi des *représentants* (génériques) d'objets théoriques. Ce sont les définitions et propriétés de ces objets théoriques qui fournissent les propositions d'entrée sus-mentionnées, après avoir été projetées dans les figures selon une direction dont la parallèle dans le plan cognitif pourrait être désignée par l'*instanciation*. Sans elle, le contrôle sémantique par les élèves est quasi-impossible. Mais elle peut par ailleurs s'ériger en obstacle quand l'élève n'arrive pas ensuite à remonter dans la direction inverse et à comprendre en quoi son travail (de démonstration) engendre des énoncés généraux, universels (cf. par ex. Chazan, 1993).

Ce contrôle sémantique de l'enchaînement déductif se fait principalement à travers le *codage* de la figure, à condition que l'élève garde une trace — par la mémoire, par un jeu de couleurs, en faisant plusieurs copies de la figure… — de la *sériation* des propriétés déduites (Tanguay et Geeraerts, 2012, p. 9). Ainsi, le codage tient certes d'une forme de visualisation mais c'est une visualisation qui doit en quelque sorte être décomposée, segmentée en différents « moments » selon une ligne de temps (artificiellement) générée, dont l'élève doit savoir retrouver la trace dans le discours déductif ; le processus sollicite donc en ce sens une coordination subtile et complexe entre les registres discursif et figural puisqu'en même temps, les propriétés codées sont puisées dans le référentiel. En outre, le codage doit parfois se faire en parallèle avec un travail de construction quand la figure n'est pas initialement donnée ou quand des éléments doivent y être ajoutés. Ces considérations montrent la complexité de l'activité de démonstration en géométrie. Il s'agit bien d'une démarche relevant principalement de la validation, mais qu'on peut difficilement circonscrire au plan vertical suggéré par la Figure 10 de Coutat et Richard (2011). On mesure bien aussi la difficulté qu'il y a à susciter chez les élèves ces coordinations, et la complexité de ce que peut être un dispositif didactique efficace pour le faire.

Nous faisons l'hypothèse, en grande partie corroborée par nos expériences d'enseignement, que les figures-clés représentant les règles figuralement dans les fiches favorisent le contrôle sémantique de l'organisation déductive, entre autres parce que la disposition gauche-droite des deux figures codées suggère la *sériation* des propositions. Si les deux registres (figural et discursif) sont coordonnés au niveau local de chaque règle, la possibilité de manipuler physiquement les fiches sur l'espace (réel) de travail permet aussi un contrôle visuel et kinesthésique de l'organisation syntaxique au niveau global. Ce contrôle peut être poussé plus loin encore avec la construction de déductogrammes selon le format spécifiquement adapté que nous proposons (Tanguay et Geeraerts, 2012, §3.5), sur lequel cependant nous ne reviendrons pas ici.

3. Des règles comme des lois de la physique

Mais rien dans ce qui précède ne semble répondre au problème de la *motivation à démontrer*. Comment éviter en effet que les élèves « ne voient dans la démarche de raisonnement formel, en particulier dans la démonstration, qu'une pratique imposée plus ou moins gratuitement par les professeurs, mais sans utilité réelle » (Pluvinage, 1989, p. 6). Quoi faire pour convaincre l'élève de 12 ou 13 ans, à qui l'on continue de demander constructions et mesures aux instruments, que les démarches déductives sur lesquelles ont le fait travailler ensuite ont du sens, et apportent une certitude qui est d'un autre ordre que celle à laquelle le mesurage lui a donné accès ? C'est ici que le « physicien » intervient.

Notre approche peut certainement être apparentée à celle du « débat scientifique » de M. Legrand : il s'agit d'entrer « dans un processus de dénaturalisation[5] et d'institution-nalisation systématique [des] objets de savoirs indispensables […] à la compréhension du jeu qui se joue dans les institutions scientifiques » (Legrand, 1988, p. 371). La classe est vue comme une communauté de chercheurs, l'abord de la géométrie y est analogue à celui qu'on initierait dans un laboratoire de physique, et la question de la fiabilité de la mesure et de l'empirisme y est ouvertement et systématiquement problématisée, discutée. On cherche à mettre en place le contrat (didactique) suivant : les résultats du cours de géométrie doivent, avant d'être intégrés au classeur (et donc d'être invoqués dans une preuve), faire l'objet d'une démonstration ou d'une vérification expérimentale. Quand celle-ci est faite aux instruments — règle graduée, équerre, rapporteur —, les imprécisions et les erreurs de mesure sont utilisées pour mettre en évidence le caractère hypothétique[6] du résultat. Selon notre perspective, résolument vigotskienne, l'enseignant doit faire la promotion active de l'état d'esprit qui préside : exiger que le signe d'approximation « ≈ » soit utilisé, plutôt que l'égalité, pour rendre compte de toute mesure obtenue aux instruments ; veiller le cas échéant à rendre cette idée explicite dans les formulations (« les deux segments *semblent* isométriques ») ; prévoir des activités où résultats expérimentaux et résultats théoriques sont confrontés, par exemple l'admirable séquence proposée par Jahnke (2007, §6). Quand la vérification expérimentale est faite avec des logiciels de géométrie dynamique, le problème se corse : nous en discuterons à la section 4.

[5] au sens où selon Legrand, la communauté scientifique (et son double scolaire, les enseignants de science) a hégémoniquement stabilisé et cristallisé — Legrand dit ici « naturalisé », un emprunt à Chevallard — les savoirs et démarches constitutifs de la rationalité scientifique, au point où ceux-ci n'apparaissent plus aux membres (aux enseignants) comme objets de savoir (à enseigner), et que ces derniers sont par suite incapables de reconnaître tout autre forme de rationalité, notamment la rationalité « quotidienne » des élèves. Pour les faire réapparaître comme objets de savoir, il faut défaire cette « naturalisation ».

[6] au sens que les sciences expérimentales donnent à ce mot (cf. Jahnke, 2007 ; Tanguay et Geeraerts, note 8, bas de la page 12). Pour une discussion approfondie sur les sens qu'ont pu avoir les mots « hypothèses », « axiomes » et « postulats » chez les Grecs pré-socratiques, voir Jahnke (2010). Son argumentation met sur la piste d'une conception de ces termes, chez ces anciens Grecs, qui supposerait une approche hypothético-déductive de la géométrie analogue à celle qui est usitée en physique.

Pour obtenir un engagement optimal des élèves, nous suggérons de travailler sur des résultats où l'intuition est en défaut — la somme des angles du triangle peut constituer l'un des premiers de ces résultats — afin que la démonstration apparaisse autant comme levier pour lever l'incertitude amenée par une éventuelle vérification empirique, que comme moyen pour *expliquer* (Hanna, 1995). Les résultats plus intuitifs qui émergent alors comme règles d'inférence nécessaires à la démonstration, s'ils ne font pas déjà l'objet d'une fiche, sont d'abord énoncés par la classe, puis proposés pour vérification expérimentale. Ce sont les « règles-postulats » (voir Figure 1, à gauche), qu'on ne démontre pas (pour l'instant). À plus longue échéance, l'enseignant a le rôle de repérer les règles-postulats que le développement de la théorie a rendu accessible à la démonstration. Quand par la suite elle est de fait démontrée, la règle change de statut et la case « démontrée » dans la marge de gauche de la fiche est cochée. Le groupe classe réalise ainsi progressivement l'articulation des îlots en réseau, ce à quoi contribue également le cumul des règles dans le classeur.

4. Les logiciels de géométrie dynamique, comme outils expérimentaux de vérification

L'usage le plus standard des Logiciels de Géométrie Dynamique (LGD) proposé par la littérature consiste à construire une figure, l'investiguer par déformation (dragging) et conjecturer telle ou telle propriété. Le problème c'est que pour les élèves, il est alors inutile de démontrer les propriétés conjecturées : le logiciel est si précis que ce qu'il nous laisse à voir est forcément vrai (Kuzniak, 2011, p. 86). Cela tient à plusieurs raisons :

- Graphiquement, la précision des tracés vectoriels[7] (au sens informatique) alliée à l'utilisation du zoom procure un sentiment de perfection (par exemple, quand trois droites sont concourantes).
- Numériquement, pour les mesures, le nombre de décimales auquel l'élève a accès lui donne l'impression que tous les nombres sont manipulés exactement par l'ordinateur.
- Généralement, le sentiment plus ou moins conscient de la supériorité de la machine sur l'homme (et donc sur l'enseignant…)

Dans notre cadre, quand le résultat est une règle-postulat que la classe se contente de vérifier expérimentalement, c'est son caractère hypothétique qui est compromis par la trop grande fiabilité allouée par les élèves au LGD. Quand il s'agit d'une conjecture[8] dont la démonstration est visée, c'est la pertinence même de cette démonstration qui sera remise en cause. Penchons-nous plus spécifiquement sur ce problème du point de vue de l'exactitude des mesures données par GeoGebra.

---

[7] Un tracé n'est pas produit à l'aide d'une matrice de pixels mais avec des fonctions que le logiciel traduit dynamiquement à l'écran. Ainsi, l'effet de pixellisation qui apparaissait à partir d'un certain niveau de zoom disparaît au profit d'une image toujours nette et dont les lignes, avec les LGD, gardent de surcroît toujours la même épaisseur.

[8] Au regard de leur statut logique, nous ne faisons pas de différence entre *postulat* et *conjecture*. Nous parlons de conjecture quand il s'agit d'un énoncé qui est l'objet premier du travail en cours et dont on envisage la démonstration. Le postulat est quant à lui un outil qu'on se permet d'utiliser parce que sa valeur de vérité a un caractère d'évidence. Donc de notre point de vue, la valeur épistémique sémantique (Duval, 1995, p. 217 et suivantes) de la conjecture est moins sûre que celle du postulat.

Exemple 1

Tant que le Théorème de Pythagore ou les critères d'isométrie des triangles ne sont pas disponibles, la règle « point équidistant-1 » (Figure 1) reste inaccessible à la démonstration. Elle est par ailleurs relativement intuitive. Supposons que la classe veuille en faire une règle-postulat en la vérifiant expérimentalement (cette règle-postulat intervient par ex. dans la séquence proposée par Geeraerts et Tanguay, §3). Dans la construction GeoGebra (GGB, version 4.0.38.0) suivante, le point D est placé sur la médiatrice de [AB]. Ayant fait afficher les distances entre A et D, puis entre D et B, avec les 2 décimales données par défaut, les élèves concluent à l'isométrie de [AD] et [DB], quelle que soit la position de D. On s'aperçoit par contre que pour certaines positions de D, ces distances diffèrent à la 15^{e} décimale. On peut donc se servir de ce dysfonctionnement pour faire douter les élèves et discuter avec eux de la réelle isométrie de [AD] et [DB]. Or, GGB fait apparaître ici un autre dysfonctionnement : la mesure de [AD] n'est pas exactement égale à la distance entre A et D. La mesure de [AD] est le nombre *c* dans la fenêtre « Algèbre », apparu automatiquement lors de la création du segment. La distance de A à B a été obtenue avec le bouton « Distance ou Longueur » en cliquant successivement sur les points A et B.

Les arrondis des mesures de [AD] et [DB] donnés par GGB sont les mêmes, alors que les arrondis des distances diffèrent. Il s'agit de bien faire valoir auprès des élèves que tous les nombres donnés par GGB sont des arrondis et que par conséquent, des mesures affichées égales ne permettent pas en théorie de conclure à l'isométrie. Par contre, la contraposée de [$k = l \;\Rightarrow\; \text{arrondi}_n(k) = \text{arrondi}_n(l)$] devrait, en toute rigueur, nous amener à conclure à la **non-isométrie** quand les arrondis, à la *n*-ième décimale pour un *n* fixé, sont différents.

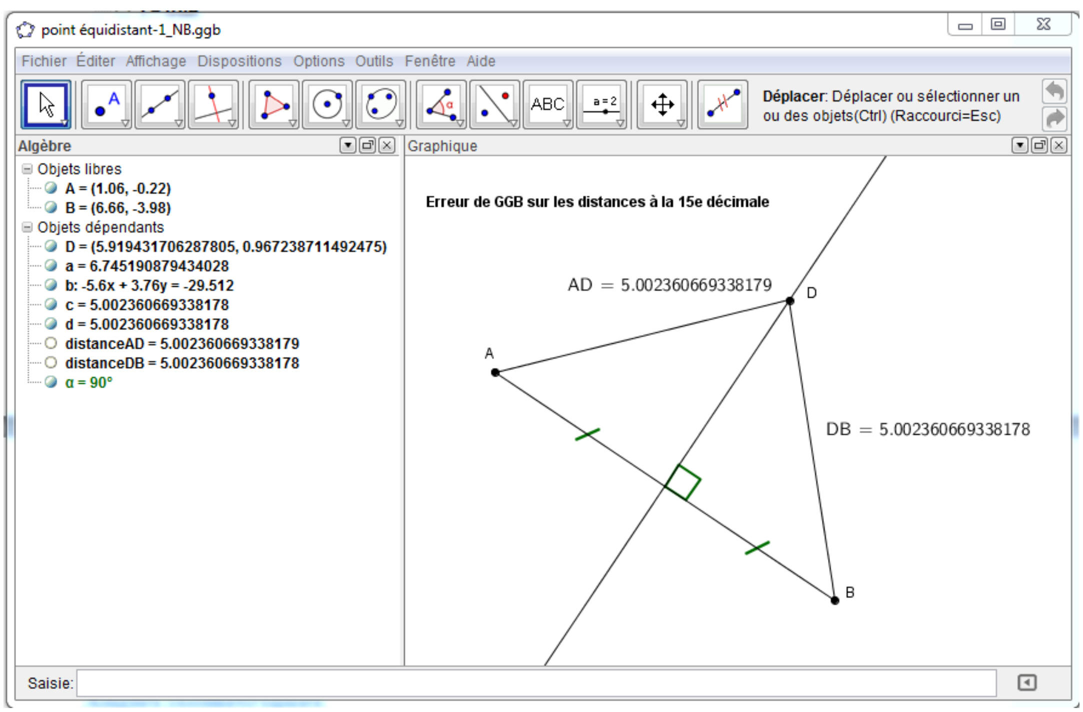


Figure 2 : une règle-postulat vérifiée avec GeoGebra

Cette démarche critique peut conduire la classe à se questionner sur la façon dont les nombres sont stockés dans le logiciel, voire dans un ordinateur : sont-ils représentés sous forme décimale ? Si oui, combien de décimales sont prises en compte ? Que se passe-t-il avec les nombres rationnels d'écriture décimale infinie ? Qu'en est-il d'un irrationnel comme π ? Ces questions créent des liens entre la géométrie et l'arithmétique mais surtout, permettent de développer un esprit critique vis-à-vis les informations données par les LGD. Nous pensons qu'une gestion appropriée de la situation par l'enseignant permet de préserver, vis-à-vis des élèves, le caractère hypothétique du résultat.

Exemple 2

Supposons maintenant que la classe s'interroge sur la somme des mesures des angles intérieurs des triangles. Dans une approche sur papier aux instruments, selon nos propres expériences d'enseignement, la dispersion des différentes sommes trouvées par les élèves est souvent trop importante pour qu'ils pensent à conjecturer la valeur 180. Par contre, l'utilisation de GGB fait apparaître clairement une somme constante de 180°, ainsi les élèves énoncent sans hésiter la conjecture. Comment, ici, aborder la motivation à la démonstration ? Ci-dessous, les figures obtenues en faisant afficher, par GGB, les mesures de chacun des côtés d'un triangle à 10 décimales, puis à 15. On constate, par simple inspection de la dernière décimale de chaque nombre, que la somme des mesures affichées ne donne pas 180 ni dans un cas ni dans l'autre.

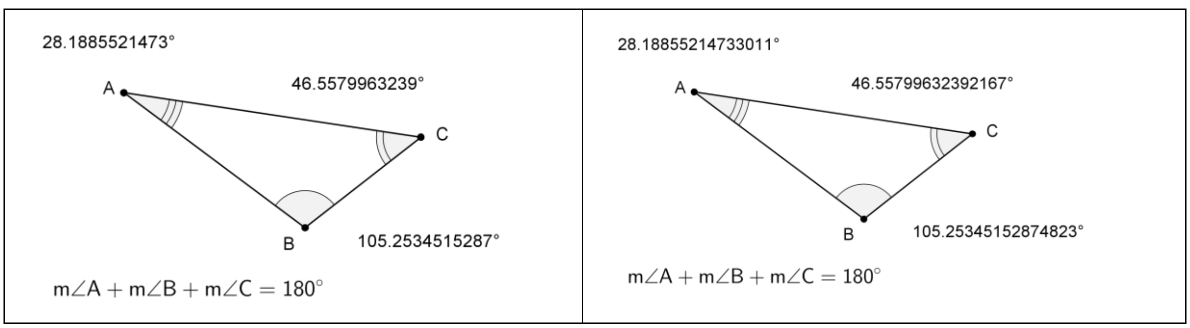


Figure 3 : des affichages GeoGebra contradictoires

Quand l'enseignant ou les élèves débrouillards font calculer la somme par GGB via le champ de saisie (en bas de la fenêtre), comme c'est fait dans le bas des deux affichages ci-dessus, un nouveau problème se pose : le logiciel donne invariablement 180 quel que soit le nombre de décimales demandées. Cela force l'enseignant à des discussions pointues : GGB ne calcule pas la somme à partir des arrondis affichés mais se sert des arrondis qu'il conserve en mémoire grâce à sa représentation interne des nombres, qui y ont vraisemblablement beaucoup plus de décimales. Le déroulement d'une telle leçon se sera alors trouvé fortement influencé par le fonctionnement du logiciel et aura nécessité, comme outil d'enseignement, une « instrumentation » importante (Vérillon et Rabardel, 1995). Mais un enseignant pourrait alors évaluer son enseignement comme détourné de son objet premier, la géométrie, au profit d'un enseignement de GeoGebra ! Une alternative possible, relevant de « l'instrumentalisation » cette fois (ibid.), est de préparer un fichier GGB dans lequel l'enseignant a forcé le logiciel à calculer la somme des arrondis affichés afin qu'elle ne soit plus constamment égale à 180°.

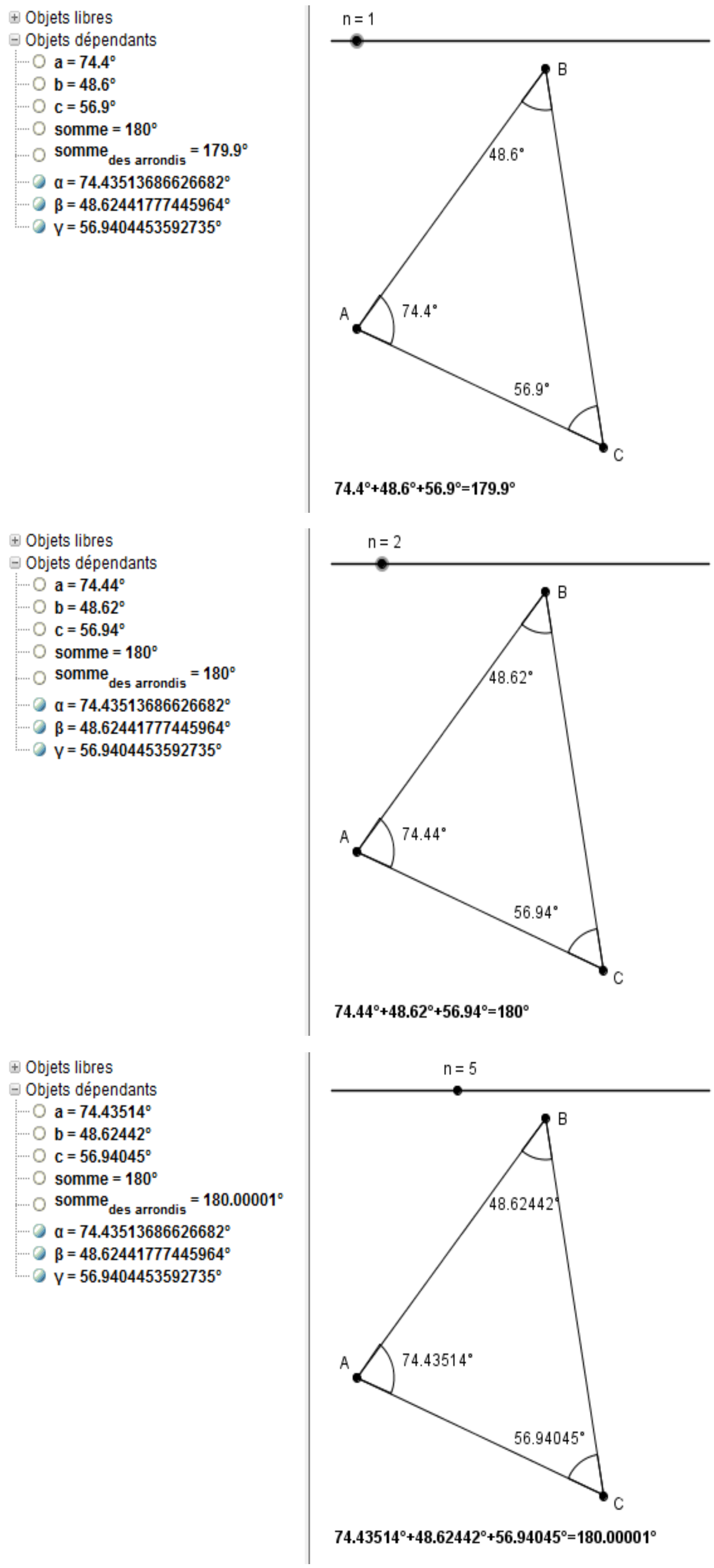


Figure 4 : une instrumentalisation de GeoGebra

Pour arrondir la mesure α d'un angle donné, il suffit d'utiliser la fonction d'arrondissement à l'unité et de faire une translation sur les chiffres de la manière suivante : a = round(10^n * α) / 10^n, avec n le nombre de décimales voulues. Ainsi, il est possible d'additionner les arrondis affichés plutôt que ceux utilisés nativement par GGB[9]. L'avantage d'un tel fichier, c'est qu'il donne lieu à des approximations de 180° qui ne restent pas constamment égales à 180, et que le besoin de démontrer reste alors vivant pour bon nombre d'élèves.

5. Conclusion

Sans négliger les fonctions usuelles qu'on prête aux LGD — outils de construction, avec l'opposition maintenant classique entre *dessin* et *figure* (par ex. Parzysz, 1988) ; outils d'exploration, permettant de repérer et énoncer des conjectures — ceux-ci peuvent être mis à profit pour des vérifications expérimentales donnant accès à des règles-postulats dont le caractère intuitif, le caractère « d'évidence » (Rouche, 1989) n'est pas propice à motiver des démonstrations. Seulement voilà, ce caractère d'évidence, l'enseignant ne veut pas le laisser dans les limbes, il veut en faire, tout comme le résultat lui-même, l'objet d'une discussion, d'une problématisation. En effet, en mettant en évidence certaines défaillances ou imprécisions des LGD, il est encore possible de garder vivant l'enjeu de vérité (Grenier et Payan, 1998) lié à chaque énoncé, que celui-ci soit une conjecture ou une règle-postulat. Les discussions de classe qui en résultent, coordonnées au travail sur les fiches — notamment la décision à prendre en classe sur laquelle des deux cases à cocher à gauche de la fiche-règle, voir la Figure 1 — augmente par suite le poids de l'institutionnalisation des énoncés et la signification des démonstrations où ceux-ci interviennent.

Le rapport à l'axiomatisation s'en trouve lui aussi changé, la « minimalité » du nombre des règles-postulats n'est plus un enjeu majeur, les processus impliqués sont intégrés à la construction de « théories locales », ayant recours à des « hypothèses » au sens de Jahnke, c'est-à-dire à des axiomes — nos règles-postulats — « qui ne sont pas plus des révélations d'êtres supérieurs que des expressions d'idées éternelles, mais simplement des constructions humaines » (Jahnke, 2010, p. 31 ; cité dans Tanguay et Grenier, p. 41, notre traduction). On cherche ensuite à connecter ces théories locales en réseau — l'enseignant a alors un rôle crucial par rapport aux tâches qu'il propose à la classe —, dans une démarche qui rapproche la géométrie des sciences expérimentales, avec des développements déductifs moins complexes que ceux de la géométrie euclidienne, et par conséquent des démonstrations dont on peut mieux contrôler, du point de vue de l'enseignement, la difficulté, l'accessibilité et la finalité.

Le cadre (ou paradigme !) du physicien-géomètre nécessite encore bien sûr réflexions et recherche, tant empirique que théorique. Parmi les questions à approfondir : celle de la technologie utilisée par les LGD du point de vue graphique, notamment sur l'abord des problèmes (et théorèmes) d'incidence ; la coordination du travail aux (bons vieux) instruments usuels avec le travail aux LGD ; que devient l'espace de travail lors des séances informatisées, etc.

[9] Des « équivoques » tout à fait analogues peuvent être mises à profit avec un logiciel comme Cabri-Géomètre. Par contre, utiliser CaRMetal, par ex., nécessiterait de revoir les trajectoires d'enseignement.

Bibliographie

Barrier, T., Durand-Guerrier, V. & Blossier, T. (2009) Semantic and Game-Theoretical Insight into Argumentation and Proof. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (éds), *ICMI Study 19 Conference Proceedings*, vol. 1, pp. 77-82.

Chazan, D. (1993) High School Geometry Students' Justification for their Views of empirical Evidence and mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, n°24, pp. 359-387.

Coutat, S. et Richard, P. R. (2011) Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* n°16, pp. 97-126.

Duval, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

Duval, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°5, pp. 37-65.

Duval, R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational studies in Mathematics*, vol. 22, pp. 233-261.

Geeraerts, L. et Tanguay, D. (2012) GeoGebra comme outil d'exploration, d'expérimentation et de représentation des démonstrations, pour construire une théorie avec les élèves. *Envol*, revue du Groupe des responsables de mathématiques au secondaire (GRMS) du Québec. Première partie au n°160, pp. 25-31, sous presse. Deuxième partie au n°161, à paraître.

Grenier, D. et Payan, C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol. 18, n°1, pp. 59-99.

Guerrero Magaña, L. (2011) El aprendizaje de la demostración a través de su estructura : una experiencia con estudiantes de bachillerato. In F. Hitt et C. Cortés, *Formation à la recherche en didactique des mathématiques,* pp. 251-256. Éditions Loze-Dion, Montréal.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics*, vol. 15, n° 3, pp. 42-49.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives,* n°11, pp. 175-193.

Jahnke, H. N. (2010) The Conjoint Origin of Proof and Theoretical Physics. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (eds), *Explanation and Proof in Mathematics, Philosophical and Educational Perspectives*. Springer, New-York.

Jahnke, H. N. (2007) Proofs and hypotheses. *ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 39 (1-2), pp. 79-86.

Kerboeuf, M. P. et Houdebine, J. (2005) Les figures-clés : une idée pour l'apprentissage de la démonstration en Quatrième. *Repères IREM*, n°59, pp. 83-103.

Kuhn, T. S. (1996) *The Structure of Scientific Revolutions*. 3rd edition. The University of Chicago Press, Chicago.

Kuzniak, A. (2010) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Proceedings of the First French-Cypriot Conference of Mathematics Education,* University of Cyprus, pp. 71-89.

Legrand, M. (1988) Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 9, n°3, pp. 365-406.

Parzysz, B. (1988) "Knowing" vs "Seeing". Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures. *Educational Studies in Mathematics*, n°19, pp. 79-92

Piaget, J. (1997) Commentaire sur les remarques critiques de Vygotski concernant *Le langage et la pensée chez l'enfant* et *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. In *Pensée & langage*, 3e édition, L. Vygotski. Éd. La Dispute. Paris.

Pluvinage, F. (1989) Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°2, pp. 5-24.

Rabardel, P. (1995) *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Éd. Armand Colin, Paris.

Richard, P. R., Fortuny, J. M., Gagnon, M., Leduc, N., Puertas, E. et Tessier-Baillargeon, M. (2011) Theoretical Fundaments for an Intelligent Tutorial System Towards the Learning of Geometry at a High School Level. *ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* n°43 (4), pp. 425-439.

Rouche, N. (1989) Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ? In *La démonstration mathématique dans l'histoire*. Colloque Inter-Irem Épistémologie et histoire des mathématiques, pp. 8-38. Besançon, France.

Tanguay, D. (2007) Learning Proof: from Truth towards Validity. Proceedings of the Xth *Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (RUME), San Diego State University, San Diego, Californie. http://www.rume.org/crume2007/eproc.html

Tanguay, D. (2005) Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°10, pp. 55-93.

Tanguay, D. et Geeraerts, L. (2012) D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, n°88, pp. 5-24.

Tanguay, D. et Grenier, D. (2010) Experimentation and Proof in a Solid Geometry Teaching Situation. *For the Learning of Mathematics*, n°30 (3), pp. 36-42.

Vérillon, P. et Rabardel, P. (1995) Cognition and Artefacts : A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10 (1), pp. 77-101.

KOSTAS NIKOLANTONAKIS, LAURENT VIVIER

ESPACES DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE EN FORMATION INITIALE DE PROFESSEURS DU PREMIER DEGRÉ EN FRANCE ET EN GRÈCE LORS D'UNE DÉMARCHE DE PREUVE

Resumen. En este trabajo se estudian los Espacios de Trabajo Geométrico personales y adecuados en Francia y Grecia para los futuros maestros de primaria. La disponibilidad del teorema sobre la igualdad de triángulos en los ETG adecuados permite de ver diferentes ETG personales con una diferencia marcada entre las poblaciones francesas y griegas. Un estudio estadístico de la población griega especifica el contexto geométrico idóneo en Grecia.

Palabras Clave: Espacio de Trabajo Geométrico, prueba, igualdad de triángulos, formación de maestros.

Resumo. Neste trabalho, estudamos os Espaços de Trabalho Geométrico pessoais e adequadas em França e na Grécia para futuro ensino fundamental os professores. A disponibilidade de o teorema sobre a igualdade de triângulos, a ETG adequado permite a você ver diferentes personal ETG com uma diferença acentuada entre o francês e populações gregas. Um estudo estatístico da população grega geométrica especifica o contexto ideal para a Grécia.

Palavras Chaves: Espaços de Trabalho Geométrico, prova, igualdade de triângulos, formação de professores.

Résumé. Dans ce travail, nous étudions les Espaces de Travail Géométrique personnels et idoines en France et en Grèce pour des futurs enseignants du premier degré. La disponibilité du théorème sur l'égalité des triangles dans les ETG idoines permet de relever différents ETG personnels avec une différence marquée entre les deux populations, française et grecque. Une étude statistique de la population grecque précise le contexte géométrique idoine en Grèce.

Mots-Clés: Espace de Travail Géométrique, preuve, égalité des triangles, formation des enseignants.

Abstract. In this work we study personal and suitable Geometrical Working Spaces in France and Greece for future elementary school teachers. The availability of the theorem on the equality (congruence) of triangles in suitable GWS allows to notice different personal GWS with a marked difference between French and Greek populations. A statistical study on the Greek population specifies the suitable geometrical context in Greece.

Key Words: Geometrical Working Space, proof, triangles equality, teachers training.

1. INTRODUCTION

L'étude vise à examiner les Espaces de Travail Géométrique idoines et personnels en France et en Grèce (Kuzniak, 2006, 2010 ; Houdement et Kuzniak, 2006) pour des futurs enseignants du premier degré (grades 1 à 5 en France et 1 à 6 en Grèce). On s'appuie sur les productions écrites en temps limité de professeurs en formation initiale durant l'année universitaire 2008-2009 (26 étudiants français et 100 grecs). La partie numérique du test a déjà été analysée dans (Nikolantonakis & Vivier, 2009) et nous étudions ici la partie géométrique, en nous focalisant sur quatre exercices qui s'appuient sur une configuration simple du triangle. Comme le montre l'analyse a priori, de nombreuses et différentes démonstrations sont possibles ; elles constituent des indicateurs pour repérer les ETG personnels et, à travers eux, les ETG idoines.

De fait, les étudiants-professeurs français montrent une pluralité de procédures, y compris des références aux transformations géométriques, contrairement à leurs homologues grecs qui, eux, utilisent systématiquement les cas d'égalité des triangles. Ces ETG personnels différents reflètent des ETG idoines différents. Plus particulièrement, comme cela avait déjà été évoqué dans (Kuzniak & Vivier, 2009), l'ETG grec est fortement influencé par une tradition euclidienne[1].

Après une présentation rapide du contexte et des ETG idoines français et grec, nous proposons une analyse a priori des exercices du test qui constitue une grille pour l'analyse des productions des deux populations grecque et française. Nous l'exposons en deux temps : d'abord une étude statistique pour la population grecque que nous comparons ensuite avec la population française afin de mettre en relief les différences entre ETG idoines. Le cadre théorique de l'étude est explicité en introduction de ce volume.

2. Contexte de l'étude

2.1 Deux systèmes de formation différents

En Grèce, dès l'entrée à l'université, sur concours, les étudiants se destinant au professorat du premier degré doivent faire le choix d'une université pédagogique où ils préparent, en quatre ans, un diplôme pour devenir professeur. En France, avant la réforme dite de la *masterisation*[2], pendant les trois premières années universitaires, les étudiants préparent une licence de leur choix. C'est seulement ensuite qu'ils préparent un concours spécifique pour l'enseignement primaire. Après obtention de ce concours ils sont, après validation d'une année de stage et de formation dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM), titulaires d'un poste d'enseignement du premier degré.

On relève donc une année universitaire de plus en France, mais en Grèce les quatre années de formation sont totalement attribuées à l'enseignement primaire contre seulement deux en France.

2.2 Contexte de l'étude

Les étudiants grecs ont passé, à l'issue du deuxième semestre de l'année universitaire 2008-2009, un examen de 3 heures dont la géométrie constitue environ la moitié des exercices. Dans cet article, nous analysons 100 de ces productions grecques, prises au hasard. Il s'agit donc de l'examen qui sanctionne le deuxième semestre. Nous faisons l'hypothèse d'un bon investissement des étudiants grecs dans ce test.

Le test passé par les 26 étudiants français est constitué d'une partie de l'examen grec du premier semestre à laquelle sont ajoutés des items de géométrie qui sont proposés à l'examen grec du second semestre. Les étudiants français ont eu 3 heures pour effectuer le test. Ce dernier s'est déroulé en fin de formation, à deux semaines des épreuves du concours. Il s'agit d'un ultime entraînement au concours et nous faisons également l'hypothèse d'un bon investissement des étudiants français dans ce test.

Le test a donc été élaboré pour les étudiants grecs puis traduit pour les étudiants français. Cela crée donc une dissymétrie puisque si l'on peut penser que les exercices sont en adéquation avec les ETG idoines grecs, il n'en n'est pas forcément de même du côté français.

2.3 Des ETG idoines différents

Pour la géométrie, les contextes de formation sont très similaires, à l'exception de deux points importants : en Grèce, une attention particulière est portée aux cas d'égalité des triangles et aux triangles semblables, dès

[1] Cette tradition est en fait une reconstruction tardive, voir à ce propos (Toumasis, 1990).

[2] Cette réforme a été menée à son terme mais les changements récents de politique éducative laissent tendent à revenir, en partie, au système de formation antérieur.

la fin du *gymnasio*, grade 9, et tout au long de la scolarité, y compris en formation des enseignants. En revanche, les étudiants français de l'étude ont eu peu de cours sur les triangles isométriques en classe de seconde[3], grade 10, et aucun à l'IUFM ; les triangles semblables ne sont essentiellement traités qu'à travers le théorème de Thalès. Ces notions semblent donc contenues dans l'ETG idoine grec mais pas dans l'ETG idoine français.

En France, si les transformations sont récemment délaissées au secondaire[4], les symétries axiale et centrale restent des objets importants de l'enseignement des mathématiques, avec une reprise à l'IUFM, alors qu'en Grèce, ces deux types de transformations sont à peine mentionnées dans le secondaire. Ces notions semblent donc contenues dans l'ETG idoine français mais pas dans l'ETG idoine grec.

Ainsi, dans les cours dispensés en formation des futurs enseignants sur l'égalité des triangles et les transformations géométriques, les deux systèmes montrent-ils des traditions différentes, ce qui oriente nécessairement les énoncés et les stratégies de résolution. On peut raisonnablement penser que, le cas échéant, un étudiant grec préférera utiliser le théorème sur l'égalité des triangles alors qu'un étudiant français s'orientera plutôt vers l'utilisation d'une transformation. Nous verrons que ce n'est pas tout à fait le cas pour les étudiants français car les configurations de base comme le parallélogramme constituent aussi des outils importants de la géométrie ; il n'y a pas d'équivalent français au théorème sur l'égalité des triangles utilisé en Grèce.

Ces différences reflètent des ETG idoines différents. Les exercices de l'étude sont donc a priori proches des ETG idoines grecs et notamment de l'ETG idoine sur l'égalité des triangles pour les exercices 3 et 4. Nous précisons cela à la section suivante ainsi que la *distance* de ces énoncés à l'ETG idoine français.

Une précision est également à apporter à propos du théorème sur l'égalité des triangles. Lors d'observations en février 2009 dans des classes du secondaire grec (*gymnasio* et *lykeio*) ainsi qu'en première année de formation universitaire des futurs enseignants du premier degré – ceux de l'étude –, il est très vite apparu une habitude sur l'utilisation des cas d'égalité des triangles : qu'il soit demandé par l'enseignant ou par choix de l'élève, on note une séquentialisation automatique des trois pas du théorème en numérotant trois lignes pour indiquer les trois vérifications à faire sur les angles et longueurs, toujours dans le même ordre pour chacun des trois cas d'égalité avec les codages Π-Π-Π, Π-Γ-Π et Γ-Π-Γ (Π pour *côté* et Γ pour *angle*). Nous estimons que cela fait partie de l'ETG idoine sur les triangles égaux.

3. LE TEST, ANALYSE A PRIORI

Nous proposons dans cette section une analyse a priori de quatre exercices soumis aux deux populations en lien avec les ETG idoines des deux pays : même ETG idoine pour les exercices 2 et 5, ETG idoines très différents pour l'exercice 3 et faussement proches pour l'exercice 4. Nous donnons pour chaque exercice les indicateurs retenus pour l'étude statistique avec, pour chaque question, les deux indicateurs généraux suivants :

NR : pas de réponse – l'exercice n'est pas abordé ou à peine (i.e. pas de travail)

OK : bonne réponse – la solution est trouvée, sans erreur de raisonnement mais avec possibilité d'implicites

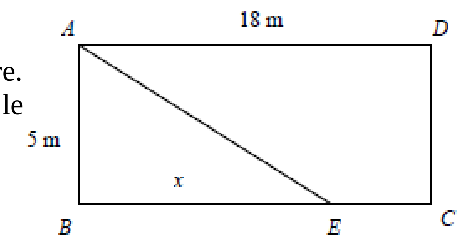
Autres : pour des procédures de résolution marginales

[3] Les triangles isométriques ne sont plus au programme du secondaire en France depuis 2009.

[4] Avant 2008, au collège, on voyait une transformation nouvelle par année (symétrie axiale, symétrie centrale, translation et rotation). Désormais, on ne voit plus les translations ni les rotations au collège.

3.1. L'exercice 2, un énoncé commun aux ETG idoines

Soit le rectangle ABCD de 5 m par 18 m de la figure ci-contre. Trouver la position du point E sur [BC], tel que l'aire de ADCE soit le double de l'aire de ABE.



Il s'agit d'un type d'exercice classique dans les manuels scolaires, en France comme en Grèce. On en trouve de nombreuses variantes au collège, plutôt dans les chapitres d'algèbre. Il s'agit d'un énoncé proposé dans les ETG idoines français et grecs, on ne s'attend donc pas à des différences importantes entre les deux populations.

Il faut également mentionner que la proximité de cet énoncé aux ETG idoines français et grec est renforcée par la présence du « x » sur la figure. La visualisation du x doit orienter les procédures vers l'algèbre et plus spécifiquement vers une mise en équation, identique dans les deux pays.

La procédure majoritaire attendue : (ABE)=$5x/2$; (ADCE)=$18\times5-5x/2$ d'où l'équation $90-5x/2=5x$ que l'on résout pour trouver $x=12$ (en mètre). Il s'agit d'une procédure avec un changement de cadre (géométrique/grandeur => algébrique). Il n'y a de fait pas de travail géométrique à proprement parler si ce n'est l'application de la formule de l'aire d'un rectangle et d'un triangle rectangle. Il est à mentionner toutefois qu'une décomposition méréologique[5] de la figure est nécessaire afin d'obtenir une équation. Mais cette décomposition est déjà indiquée et on peut supposer que cela ne posera pas de problème pour la plupart des étudiants, français comme grecs. En outre, ce type de décomposition méréologique est commune aux ETG idoines des deux pays.

Une variante de cette procédure consiste à utiliser la formule de l'aire d'un trapèze pour exprimer l'aire de ADCE : (ADCE) = $5\times(18+18-x)/2$. Il n'y a plus de décomposition méréologique.

Toutefois, d'autres procédures sont envisageables où l'essentiel du travail reste dans le cadre géométrique des grandeurs, sans algèbre. En complétant le rectangle ABEF, on peut découper le rectangle initial ABCD en trois aires égales par une décomposition méréologique. Le tiers de l'aire de ABCD est $1/3\times90$ m^2=30 m^2 et donc ABEF est un rectangle d'aire 60 m^2 avec un côté de 5 m, donc l'autre côté mesure 60 m^2/5 m=12 m. Cette procédure est à rapprocher de celle envisagée dans (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2013) pour un problème d'aire dans un carré.

Des adaptations de cette procédure sont possibles, notamment avec une mise en équation, surtout avec la présence du x qui pousse à travailler avec l'algèbre. Ainsi, après un découpage de ABCD en trois aires égales, peut-on s'attendre à une écriture d'une équation du type « $5x = 60$ », plus facile à résoudre.

Les deux procédures ci-dessus sont nos guides pour cet exercice. Elles sont relatives à des ETG différents. Dans le premier ETG, le traitement géométrique est réduit au calcul de l'aire d'un trapèze, soit par soustraction (décomposition méréologique) soit par application de la formule d'un trapèze, et à l'utilisation de formules simples. Dans la deuxième, le traitement géométrique est plus complexe car il y a une surfigure[6] à considérer, le rectangle ABEF, et la décomposition méréologique accompagne une reformulation des données du problème. Les calculs algébriques s'en trouvent largement simplifiés.

---

[5] La décomposition méréologique (Duval, 2005) implique un découpage de la figure de départ en sous-figures de même dimension. Elle suppose un raisonnement basé principalement sur la perception à travers des découpages et superposition de la figure : le pôle "espace réel et local" de l'ETG est le pôle dominant.

[6] Une surfigure est un objet géométrique qui n'est ni mentionné dans le texte ni tracé sur la figure et dont la considération, souvent par un tracé sur la figure, intervient au cours de la résolution du problème.

Indicateurs spécifiques :

A/3 : partage en trois aires égales

Equ : mise en équation

3.2. L'exercice 3 : Comparaison guidée, dans l'ETG idoine grec, de deux triangles

Sur la médiane (AM) d'un triangle ABC, on considère le point S tel que MS = MA.

a. Comparer les triangles ABM et SCM.

b. Comparer les segments [AB] et [SC].

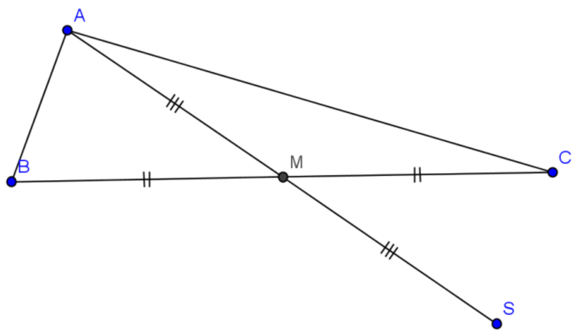


Figure 2 (non donnée aux étudiants)

Il s'agit d'un exercice très classique en Grèce, mais beaucoup moins en France où l'on ne pose pas la question de la comparaison des triangles : on parle plus volontiers de leur caractère isométrique ou superposable, ou bien on demande de comparer leurs aires. Ainsi, les étudiants grecs vont-ils certainement avoir une réponse consensuelle en référence à l'ETG idoine sur les triangles égaux alors que les étudiants français devront tout d'abord réinterpréter la question dans un ETG idoine français afin de trouver une procédure de résolution.

Questions a et b (analyse globale). On peut identifier trois procédures principales.

Procédure 1 : utilisation du cas d'égalité des triangles Π-Γ-Π, l'angle égal étant donné par l'égalité des angles opposés par le sommet.

Procédure 2 : M est le milieu commun des diagonales du quadrilatère ABSC qui est donc un parallélogramme. Les propriétés du parallélogramme permettent de conclure[7].

Procédure 3 : M est le milieu de [BC] et de [AS], et les propriétés de la symétrie centrale de centre M permettent de conclure.

Pour cet exercice, on peut s'attendre à différentes approches pour la population française. En revanche, on peut penser que la procédure 1 sera largement majoritaire pour la population grecque, notamment à cause de la question « comparer les triangles ». Des remarques relatives à la configuration du parallélogramme sont possibles car il s'agit d'un objet d'étude au secondaire en Grèce.

On relève ainsi trois ETG qui se distinguent pour l'essentiel par le référentiel théorique : un ETG autour des triangles égaux, un ETG autour de la symétrie centrale et un ETG autour du parallélogramme. Il est toujours possible, bien que largement hors contrat en France comme en Grèce, que des étudiants se limitent à une visualisation ou un mesurage de la figure en référence au paradigme GI.

Indicateurs spécifiques (a et b, globalement) :

[7] Il est peu probable que les étudiants grecs utilisent ces propriétés car ils disposent d'un ETG sur les triangles égaux. Les étudiants français les utilisant ne pourront pas conclure pour le a). On peut alors penser qu'il ne répondrons pas au a) ou bien qu'ils y répondront partiellement (par exemple en comparant les aires des triangles).

Egal : utilisation d'un cas d'égalité du triangle
Par : mention d'un parallélogramme
Sym : mention d'une symétrie centrale

3.3. L'exercice 4 : comparaison non guidée, dans l'ETG idoine grec, de deux triangles

Soit ABC un triangle isocèle (AB = AC).
On place sur la droite (BC) deux points D et E tels que BD = CE et qui n'appartiennent pas à [BC].
Montrer que le triangle ADE est isocèle.

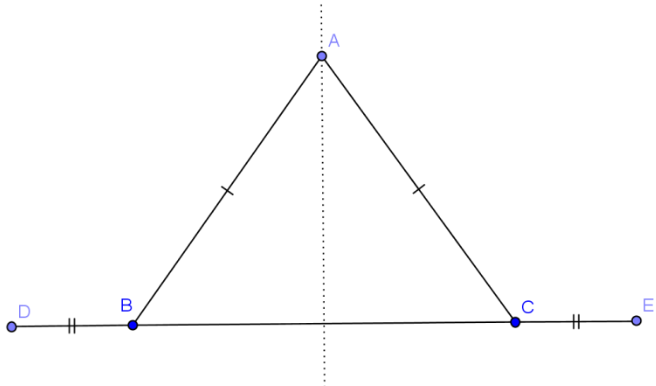


Figure 3 (non donnée aux étudiants)

Il s'agit d'un exercice classique en Grèce sur la comparaison des triangles. L'énoncé est très proche d'exercices typiques de l'utilisation des cas d'égalité des triangles. De ce point de vue, peu de différences sont attendues avec l'exercice 3 pour les étudiants grecs. La difficulté essentielle est que l'énoncé ne dit pas qu'il faut comparer deux triangles.

La transformation en jeu dans cet exercice est la symétrie axiale, plus familière des étudiants – français ou grecs. On peut penser que la proportion d'étudiants invoquant une symétrie sera plus importante qu'à l'exercice précédent, surtout pour les étudiants français vu l'importance des transformations géométriques.

Cet énoncé est clairement dans l'ETG idoine grec, mais aussi dans l'ETG idoine français. Ce type d'exercice est tout à fait en adéquation avec les ETG autour de la symétrie axiale et des triangles isocèles. Est-ce pour autant un énoncé neutre ? Nous verrons que non, car selon que l'on mobilise l'ETG sur les triangles égaux, en Grèce, ou autour de la symétrie axiale, en France, le travail à effectuer est très différent et n'a pas le même niveau de difficulté.

Procédure 1 : utilisation du cas d'égalité des triangles Π-Γ-Π. L'utilisation du théorème n'est plus simple et isolée et requiert des adaptations (Robert, 2005). L'angle égal provient de la propriété des angles d'un triangle isocèle via des angles supplémentaires.

Procédure 2 : utilisation des propriétés des triangles isocèles et des médiatrices : si M désigne le milieu de [BC], on montre que (AM) est la médiatrice issue de A dans ABC puisqu'il est isocèle ; (AM) est également la médiatrice de [DE] donc D et E sont équidistants de A et ADE est isocèle de sommet A. Une variante : considérer une surfigure avec le losange ABFC.

Procédure 3 : utilisation d'une symétrie axiale dont l'axe (AM) n'est ni donné ni tracé : D est l'image de E par la symétrie d'axe (AM) donc, comme A est sa propre image, [AD] est l'image de [AE] par la symétrie d'axe (AM) et comme une symétrie conserve les distances on peut conclure que AD = AE et que ADE est isocèle.

On retrouve des ETG similaires à ceux mentionnés à l'exercice 3 avec, en plus, un ETG autour de la médiatrice et/ou de la configuration du triangle isocèle[8].

Ce type d'exercice apparaît en France dans le secondaire en lien avec les triangles isocèles, la médiatrice et la symétrie axiale. Il s'agit donc d'un énoncé en adéquation avec les ETG idoines des deux pays. Pour autant, cet énoncé n'est pas neutre selon qu'il est résolu par un étudiant français ou grec. Un étudiant grec doit d'abord repérer des triangles égaux, des surfigures car ils ne sont ni mentionnés ni tracés, afin de pouvoir utiliser le théorème sur les triangles égaux. L'étudiant français qui utilisera une symétrie axiale doit repérer un axe de symétrie, également non tracé. Il y a donc deux surfigures à considérer ; elles sont faciles à repérer et les objets en jeu sont très présents dans les ETG idoines de chacun des deux pays. Néanmoins, l'étudiant grec dispose du théorème sur l'égalité des triangles et de la séquentialisation classique des trois pas, ce qui ne pose pas de problème majeur. Le résultat est alors une conséquence immédiate du théorème. L'étudiant français, après avoir considéré l'axe de symétrie, doit encore considérer la transformation en jeu et le travail à effectuer est loin d'être immédiat. Nul doute que des étudiants français peuvent considérer l'axe de symétrie mais, faute de savoir qu'en faire, ne le mentionneront pas. Comme on le voit, cet énoncé est loin d'être neutre : relativement facile du point de vue de l'ETG idoine sur les triangles égaux, il devient très difficile du point de vue de l'ETG autour de la symétrie axiale.

Indicateurs spécifiques :

Egal : utilisation d'un cas d'égalité du triangle

Sym : mention d'une symétrie axiale

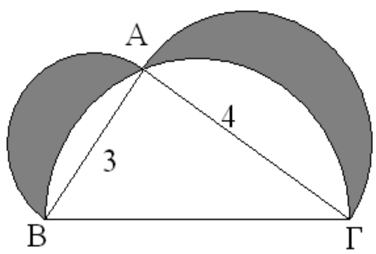
Med : mention de la médiatrice

3.4. L'exercice 5 : l'additivité de l'aire, un point commun aux deux ETG idoines

Soit ABC un triangle rectangle en A.

a. Dans la figure ci-contre les cercles de diamètres [AB], [AC] et [BC] forment deux lunules en grisées (une lunule est une surface comprise entre deux arcs de cercles).

Montrer que la somme des aires des deux lunules est égale à l'aire du triangle rectangle ABC.



Dans cette question, l'important est le découpage méréologique des aires en lien avec la propriété d'additivité. Même si tout est tracé, ce découpage n'est pas donné contrairement à l'exercice 2. Il faut calculer BC, l'aire du triangle, les aires des trois demi-cercles puis calculer les aires grisées par sommes et soustractions (trois opérations en tout).

Indicateur spécifique :

Add : utilisation de l'additivité de l'aire

4. ÉTUDE DE LA POPULATION GRECQUE

Les résultats globaux obtenus sur la population grecque (cent étudiants) sont à l'annexe 1 et les graphiques auxquels nous nous référons sont à l'annexe 2.

[8] Il s'agit d'un ETG comprenant les propriétés, les constructions et les représentations concernant les triangles isocèles.

4.1. Étude statistique globale avec CHIC

Dans cette première section d'analyse, nous utilisons le logiciel CHIC (Gras et al., 2009). Les trois diagrammes, similarités, implicatifs et cohésitifs, montrent tous la même structure générale.

En premier lieu, quel que soit le graphique considéré, les variables NR sont isolées. Les exercices que nous analysons sont tous des exercices de géométrie et il s'agirait d'une relation des étudiants à la géométrie. Est-ce le signe de lacunes dans les ETG ? On peut le penser car les exercices sont d'un niveau secondaire et les étudiants devraient tous avoir des notions de base pour aborder ces exercices. Il y a quand même 6 étudiants qui ne répondent à aucun exercice (d'autres ne répondent qu'à un des 4 exercices, mais la répartition semble aléatoire).

Globalement, et pour chaque exercice, la variable OK est similaire à la variable de la procédure attendue (3ab-OK et 3ab-egal ; 2-OK et 2-eq ; 5-OK et 5-add) avec un bémol pour 4-OK et 4-egal car l'indice de similarité est faible. On peut expliquer cela par le fait que l'utilisation du théorème sur l'égalité des triangles (86% et 88%) ne suffit pas pour réussir cet exercice et qu'il faut être plus précis sur la justification des arguments pour conclure par ce théorème.

On retrouve ce lien entre les variables OK et les variables des procédures attendues dans l'arbre cohésitif avec toujours de bons coefficients : réussir les exercices 2, 3 et 5 *implique* l'utilisation de la procédure attendue : 2-OK⇒2-Eq, 3ab-OK⇒3-Egal et 5-OK⇒5-Add. L'exercice 4 est un peu différent car il est en quelque sorte subordonné à l'exercice 3 du fait que le théorème sur l'égalité des triangles n'est pas explicitement demandé. Cela se traduit par deux *méta-règles* relatives à l'égalité des triangles « (4-OK et 3ab-OK) ⇒ 3ab-Egal » ainsi que « (4-OK et 3ab-OK) ⇒ (3ab-Egal ou 4-Egal) ». Cela dit, si l'on modifie les variables à considérer dans la construction de l'arbre cohésitif :

- sans les trois variables de l'exercice 3, on a bien « 4-OK⇒4-Egal » (indice 1) comme pour les autres exercices,
- sans les deux variables Egal, on a alors « 4-OK⇒3ab-OK » (indice 1) qui s'explique vraisemblablement par la subordination de l'exercice 4 à l'exercice 3.

Les ETG personnels des étudiants grecs semblent bien en adéquation avec l'ETG idoine grec.

4.2. Exercices 2 et 5 : décomposition méréologique

À l'exercice 2, la population grecque a répondu à 70% correctement. 85% des étudiants utilisent une équation dont 15% une équation simple provenant du découpage en trois aires égales (2-A/3=1). Il est à noter que les étudiants qui ont vu le découpage en 3 aires égales ont tous réussi l'exercice. Cela n'est pas surprenant car ils ont bien analysé la figure géométrique et les traitements algébriques pour résoudre l'équation sont élémentaires.

Ainsi, la similarité entre 2-A/3 et 2-OK est meilleure qu'entre 2-eq et 2-OK, ce qui peut s'expliquer par :

- la résolution d'équation pose problème à 12% des étudiants
- la mise en équation pose problème à 4% des étudiants (avec, possiblement, un problème dans le traitement géométrique de la figure).

À l'exercice 5, la population grecque a répondu à 65% correctement. 26% n'ont pas répondu ce qui est un taux bien supérieur aux autres exercices, peut-être par manque de temps puisque c'était le dernier exercice. Tous les étudiants qui ont traité l'exercice (74%) ont utilisé l'additivité de l'aire et parmi eux, 9% incorrectement. Pendant le cours, des exercices similaires avec les demi-cercles avaient été résolus.

On remarque, dans le graphe implicatif (cf. annexe 2), que 5-OK *implique* 2-OK, ce que l'on peut également remarquer dans l'arbre cohésitif avec la méta-règle (5-OK => 5-Add) => (2-OK => 2-Eq). On peut penser que réussir l'exercice 5 met nécessairement l'accent sur la décomposition méréologique qui est utile pour réussir l'exercice 2.

4.3. Exercices 3 et 4 : utilisation du théorème, l'ETG idoine grec

Les exercices 3 et 4 sont assez proches, et même équivalents pour la variable NR sur le graphe cohésitif. Ceci laisse supposer qu'ils sont perçus et traités à peu près de la même manière par les étudiants. De fait, les deux exercices sont traités avec le théorème sur les triangles égaux.

À l'exercice 3ab, la population grecque a répondu à 78% correctement en utilisant l'égalité des triangles et en utilisant, à plus de 80%, le vocabulaire euclidien attendu. 14% n'ont pas répondu à la question b.

À l'exercice 4, la population grecque a répondu à 50% correctement en utilisant l'égalité des triangles. 88% des étudiants ont utilisé l'égalité des triangles mais parmi eux, 38% d'une manière erronée. 12% n'ont pas répondu. Seulement un étudiant a utilisé une autre méthode avec la médiatrice. Aucun étudiant grec n'a utilisé une symétrie ou un losange.

Dans cet exercice 4, il n'y a pas d'indication sur la démarche à suivre mais les étudiants font *naturellement* une comparaison par le théorème des triangles égaux. Le nombre d'utilisation de ce théorème est tout à fait comparable à celui de l'exercice 3, très guidé, et est toujours très élevé (plus de 80%). Mais les sources d'erreurs sont plus nombreuses (38%). Cela confirme que l'ETG autour des triangles égaux constitue un ETG idoine fondamental dans l'enseignement grec, il est largement disponible pour les étudiants et est, de ce fait, un élément des ETG personnels largement partagé, laissant peu de place pour des ETG alternatifs.

5. COMPLÉMENTS AVEC LA POPULATION FRANÇAISE

Nous nous focalisons sur les différences entre ETG plus que sur les réussites car, comme on peut s'y attendre, les étudiants grecs réussissent mieux les exercices qui avaient été élaborés pour les évaluer.

Comme cela était attendu vu les ETG idoines, l'exercice 2 est traité de manière très proche de celle que mettent en œuvre les étudiants grecs : 21/26 soit 81% de réussite et autant de mise en équation (70% et 85% pour la population grecque) mais seulement 2/26 soit 8% d'étudiants repèrent le découpage en 3 aires égales. À noter : 3 étudiants proposent un résultat pour x et proposent ensuite un calcul pour le vérifier.

Le manque de référence théorique, conjugué à une influence de l'énoncé qui demande de comparer deux triangles, se perçoit bien dans l'exercice 3 chez les étudiants français qui tentent d'utiliser le théorème sur les triangles isométriques (14/26=56%). Qu'ils se souviennent ou non du théorème vu en seconde, ils tentent vraisemblablement de le reconstituer à partir de la figure et de l'énoncé. Il n'est jamais complet : on relève souvent un manque de justification et d'arguments essentiels comme l'égalité des angles.

Les étudiants français interprètent correctement le fait que M est le milieu de [BC] même si cela n'est pas dit (omission très courante dans l'ETG idoine grec mais exclue de l'ETG idoine français). En revanche, l'interprétation du a) se fait de différentes manières : usage d'un synonyme d'*égal* comme *identique*, *isométrique*, *semblable* ou *les mêmes* pour 17 étudiants, usage du terme *symétrique* pour 5 étudiants systématiquement lié à la symétrie centrale, la comparaison des aires ne concerne que deux étudiants.

Ce que l'on remarque en outre, et cela provient vraisemblablement d'une inadéquation de l'ETG idoine en France pour effectuer ce type d'exercice, c'est la variété des procédures : 14/26=56% utilisent une symétrie centrale et 8/26=31% utilisent un parallélogramme. Finalement, 18/26=69% des étudiants réussissent cet exercice (78% dans la population grecque).

Pour l'exercice 4, on retrouve les mêmes caractéristiques qu'à l'exercice 3 mais exprimées différemment. Seuls 3/26=12% tentent d'utiliser un résultat sur les triangles « identiques » sans doute influencés par l'exercice 3 car ici il n'y a pas à s'adapter à un ETG inconnu. 2/26=8% utilisent une symétrie axiale et 4/26=15% utilisent une médiatrice. Pourtant, ces deux dernières procédures ont été largement travaillées durant l'année universitaire et on peut penser que le problème est double : d'une part la médiatrice (ou l'axe de symétrie) n'est pas tracée et d'autre part, même si un étudiant pense à l'utiliser, il y a encore beaucoup de chemin à parcourir pour arriver au résultat : il est donc possible que l'étudiant ne se lance finalement pas dans la résolution, faute de savoir où cela mène. On note tout de même 14/26=54% de procédures *autres* menant souvent à la valeur OK=0. On peut citer une rotation d'angle x, « des triangles isocèles égaux » et plusieurs constats visuels. Finalement, cet exercice a été, comme pour les étudiants grecs, moins bien réussi avec seulement 5/26=19% de réussite (50% dans la population grecque) ce qui correspond à ce que nous avons identifié dans notre analyse a priori : il ne s'agit pas d'un énoncé neutre relativement aux ETG idoines français et grec.

L'exercice 5 a été réussi par 14/26=54% des étudiants (65% dans la population grecque), avec systématiquement une utilisation de la propriété d'additivité de l'aire (sans surprise).

6. CONCLUSION

En Grèce, avec un ETG de référence fortement lié à la tradition euclidienne, on remarque un ETG idoine autour du théorème d'égalité des triangles bien installé qui induit des ETG personnels en adéquation avec cet ETG idoine. De ce fait, les étudiants grecs, face à un exercice de géométrie, se placent immédiatement dans cet ETG. Bien entendu, cela n'est pas toujours aussi systématique et il n'y a qu'à considérer les exercices 2 et 5, où cet ETG n'est pas du tout convoqué, pour s'en convaincre. Il y a donc des indicateurs, sans doute implicites, qui déclenchent chez les élèves l'utilisation du théorème sur l'égalité des triangles. Parmi ces indicateurs, on peut penser que des demandes de comparaison d'angles ou de longueurs intervenant dans des triangles jouent un rôle important. Mais cela ne suffit pas pour expliquer le phénomène de l'exercice 4, puisque l'énoncé y est très peu détaillé. Dans l'exercice 4, c'est l'importance de la visualisation de la figure qui ressort : plusieurs triangles égaux se *voient*. Malgré un recours massif à ce théorème, on remarque un manque de souplesse dans son utilisation qu'il faudrait mieux comprendre[9]. Cela est peut-être lié à un manque de procédure alternative pour résoudre un exercice de géométrie, c'est alors dans le curriculum qu'il faudrait chercher la cause. Mais on ne peut écarter la difficulté liée aux adaptations, quelle que soit la procédure.

En revanche, chez les étudiants français, il n'y a pas d'ETG idoine autour des cas d'égalité des triangles. On remarque alors qu'en l'absence d'ETG adéquat pour résoudre une tâche, les étudiants montrent, par nécessité, une certaine flexibilité de leurs ETG personnels, avec l'utilisation des ETG autour de transformations géométriques et même l'émergence d'un ETG autour des triangles isométriques à partir d'un processus de visualisation. Cela semble également favoriser l'utilisation de surfigures comme on peut le penser avec le parallélogramme à l'exercice 3 et la médiatrice à l'exercice 4.

Par ailleurs, il est possible que les tâches de construction participent à l'identification de surfigures intéressantes pour l'étude d'une configuration. On peut par exemple penser à un exercice de tracé d'un parallélogramme avec 3 sommets donnés qui est souvent proposé au collège en France : ceci peut expliquer que certains ont réussi à identifier cette surfigure dans l'exercice 3, alors que les tâches de constructions instrumentées sont très peu proposées aux étudiants grecs.

Enfin, concernant les décompositions méréologiques, on peut remarquer une différence entre les deux populations. Si pour l'exercice 2 ce type de décomposition ne constitue, sans surprise, pas de problème, en revanche on note une chute conséquente de la réussite pour les étudiants français à l'exercice 5. Bien entendu, l'identification des différentes sous-figures et les calculs d'aire à faire en parallèle sont bien plus complexes dans l'exercice 5 que dans l'exercice 2, d'où la chute de réussite, même visible, bien que plus modérée, chez les étudiants grecs. La différence entre les deux populations provient vraisemblablement d'un entraînement plus marqué pour ce type d'exercices dans l'enseignement en Grèce, et notamment dans l'année universitaire en question.

Cette étude a permis de montrer, au regard des thèmes abordés, l'adéquation forte des ETG personnels avec l'ETG idoine dans le cas de la Grèce. La différence des ETG idoines nécessitent, pour les étudiants français, d'effectuer des adaptations ce qui semble entraîner une flexibilité et une certaine richesse dans les réponses

[9] Une piste pour cette compréhension, à mentionner à mon avis. Ce que Tanguay (2005) désigne comme « l'obstacle de la prégnance de la valeur de vérité » (Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 10, pp. 55-93, section 3.1) : l'évidence, ici, de l'isométrie des triangles en cause s'impose d'emblée et agit comme un écran, un obstacle à l'essor de l'élaboration de l'enchaînement déductif escompté.

qui contrastent avec les réponses stéréotypées, parce que justement issues de l'ETG idoine grec, de leurs homologues grecs. On peut se demander si les étudiants grecs montreraient la même flexibilité si on leur proposait des exercices issus de l'ETG idoine français.

RÉFÉRENCES

Duval, R. (1995). Why to teach geometry, in *ICMI Studies on Geometry*, Catania, 53-58.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique et sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, vol. 10, 5-53.

Gras, R., Régnier, J.-C. & Guillet, F. (Eds) (2009*). Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. RNTI-E-16 Toulouse : Cépaduès.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométrique et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences cognitive*, IREM de Strasbourg vol. 11, 175-193.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, vol. 6.2, 167-187.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en france, *Annales de didactique et sciences cognitives,* IREM de Strasbourg, vol. 15, 75-95.

Kuzniak, A., Parzysz, B. & Vivier, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training, *The Mathematics Enthusiast, Special Issue : International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education*, Guest Edited by Manuel Santos-Trigo & Luis Moreno-Armella, Vol. 10, 1 & 2, 407-440.

Kuzniak, A. & Vivier, L. (2009). A French look on the Greek Geometrical Working Space at secondary school level. *Proceedings of Cerme 6*, Lyon, France.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies, in *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques*, Gagatsis, A., Kuzniak, A. Deliyianni, E. & Vivier, L. éditeurs, 171-186, Lefkosia, Chypre.

Nikolantonakis, K. & Vivier, K. (2010), Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce, dans Régnier, J.-C., Spagnolo, F., Di Paola B. & Gras, R. (éds) *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire*. Prolongements des débats. 165-186. *QRDM Quaderni di Ricerca in Didattica – GRIM* ISSN on line 1592-4424, Palerme: Université de Palerme. Consultable: http://math.unipa.it/~grim/QRDM_20_Suppl_1.htm

Robert, A. (2005). Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 10, 209 – 249.

Toumasis, Ch. (1990). The epos of euclidean geometry in Greek secondary education (1836–1985) : Pressure for change and resistance, *Educational Studies in Mathematics*, 21(6), 491-508.

ANNEXE 1

Populations : 100 étudiants grecs et 26 étudiants français (certaines sommes dépassent légèrement 100% car certains étudiants ne se limitent pas à une réponse comme par exemple à l'exercice 4 où un étudiant grec mentionne la médiatrice sans que cela n'influence sa procédure de résolution).

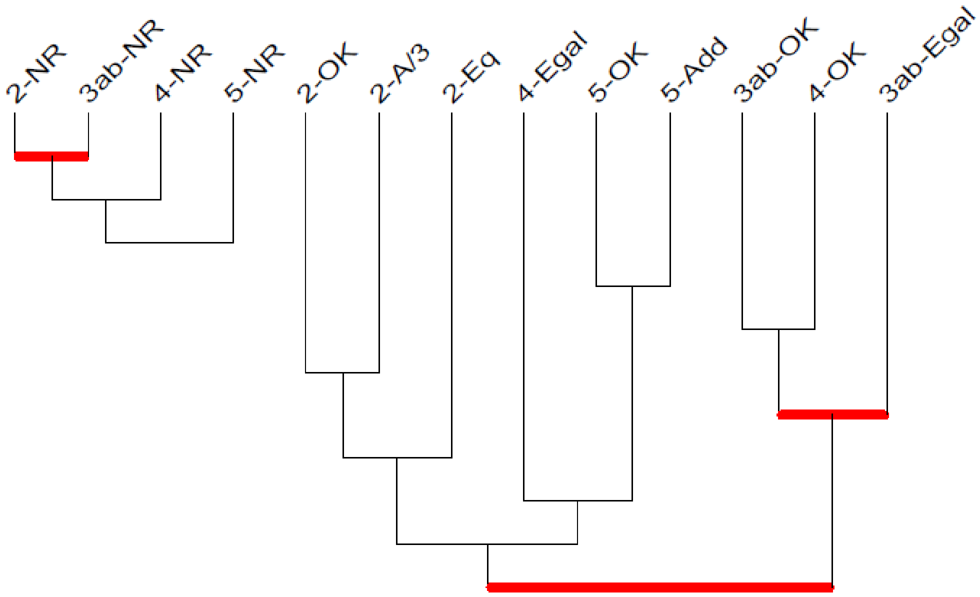
Exercice 2	NR	OK	A/3	Equ	Autres
Grecs	14%	70%	15%	85%	4%
Français	2 (8%)	21 (81%)	2 (8%)	21 (81%)	3 (12%)

Exercice 3ab	NR	OK	Egal	Sym	Parall	Autres
Grecs	12%	77%	86%	0%	0%	0%
Français	3 (12%)	18 (69%)	14 (54%)	14 (54%)	8 (31%)	2 (8%)

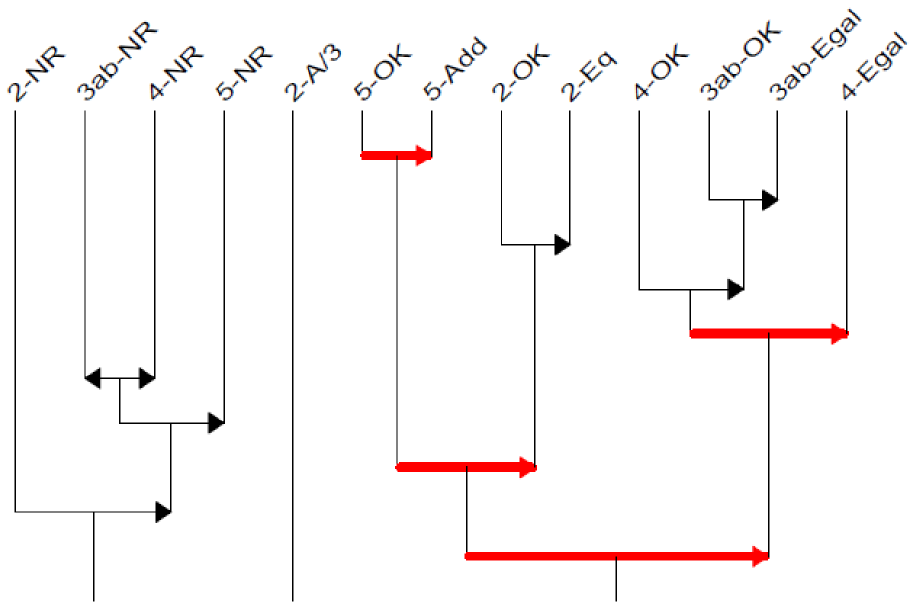
Exercice 4	NR	OK	Egal	Sym	médiatrice	Autres
Grecs	12%	50%	88%	0%	1%	1%
Français	4 (15%)	5 (19%)	3 (12%)	2 (8%)	4 (15%)	14 (54%)

Exercice 5	NR	OK	Add	Autres
Grecs	26%	65%	74%	0%
Français	8 (31%)	14 (54%)	14 (54%)	4 (15%)

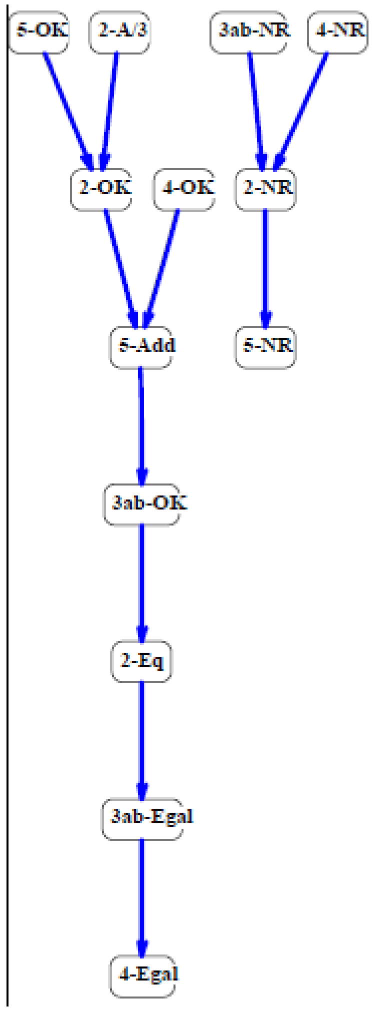
ANNEXE 2



Arbre des similarités



Arbre cohésitif



Arbre implicatif (niveau 98)

Auteurs :

Kostas Nikolantonakis. Université de la Macédoine Ouest, Grèce. nikolantonakis@noesis.edu.gr

Laurent Vivier. Université Denis Diderot – Paris 7, Laboratoire de Didactique André Revuz, France. laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

MATHIEU BLOSSIER, PHILIPPE R. RICHARD

LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE EN INTERACTION AVEC UN LOGICIEL DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE TRIDIMENSIONNELLE

Résumé

Il arrive souvent que les didacticiels pour l'enseignement des mathématiques se constituent en référence à des modèles informatiques, laissant implicites les modèles d'apprentissage qui découlent de l'usage de l'outil et qui auraient pu contribuer à sa conception. Dans le jeu des allers et retours entre les concepteurs et les usagers, si les nouvelles possibilités de développement communautaire facilitent déjà le raffinement de l'outil logiciel selon les demandes enseignantes, il favorise aussi l'appropriation au comportement humain qui utilise déjà l'outil. Ce n'est donc pas tant dans les mathématiques représentées qu'il faut chercher les modèles d'apprentissage, mais plutôt en regardant les interactions de celui dont l'action «interroge» un milieu logiciel qui lui «répond». En considérant les conceptions de l'élève et l'espace de travail mathématique qui émergent d'interactions réelles ou potentielles, notre propos vise à rendre compte du travail mathématique engendré par l'usage du logiciel de géométrie dynamique tridimensionnelle GeoGebra 3D.

Mots clés

Didactique des mathématiques, modélisation instrumentée, représentation, conception, espace de travail géométrique, géométrie dynamique tridimensionnelle.

Resumen

Los tutoriales para enseñar matemáticas se suelen referir a modelos informáticos, dejando implícitos los modelos de aprendizaje que derivan del uso de la herramienta y que hubieran podido contribuir a su diseño. En el juego de ida y vuelta entre los diseñadores y los usuarios, si las nuevas posibilidades de desarrollo comunitario pueden facilitar el perfeccionamiento de la herramienta informática en función de unas exigencias docentes, favorece también la apropiación la comportamiento humano que utiliza ya la herramienta. No es tanto en las matemáticas representadas que se tiene que buscar modelos de aprendizaje, sino que hace falta observar las interacciones del usuario cuya acción «interroga» un medio informático que le «responde». Teniendo en cuenta las concepciones del alumno y el espacio de trabajo matemático que surgen de las interacciones reales o potenciales, nuestro propósito tiene como objetivo dar cuenta del trabajo matemático que genera el uso del software de geometría dinámica tridimensional GeoGebra 3D.

Palabras clave

Didáctica de las matemáticas, modelización instrumentada, representación, concepción, espacio de trabajo geométrico, geometría dinámica tridimensional.

Abstract

It often happens that software for the teaching of mathematics is constituted in reference to data-processing models, leaving implicit the models of training which rise from the use of the tool and which could have contributed to its design. In the back and forth motions between the originators and the users, if the new possibilities of community development already facilitate the refinement of the software tool according to the teaching requests, it also supports the appropriation to the human behaviour, which already uses the tool. It is thus not necessary to seek the models of training by studying represented mathematics since it can be achieved by looking at the interactions of him or her whose actions "question" a software medium which "answers him". By considering the pupil's conceptions and the mathematical workspace which emerge from real or potential interactions, our matter aims at giving an account of the mathematical work generated by the use of the software of three-dimensional dynamic geometry GeoGebra 3D.

Keywords

Didactic of mathematics, instrumented modelling, representation, conception, geometrical work space, three-dimensional dynamic geometry.

Resumo

Os tutoriais para ensinar matemática, muitas vezes referem-se a modelos de computador, deixando modelos de aprendizagem implícitas decorrentes da utilização da ferramenta e que poderiam ter contribuído para o seu design. No jogo de ida e volta entre designers e usuários, se as novas possibilidades de desenvolvimento comunitário pode facilitar o desenvolvimento da ferramenta de software com base em requisitos de ensino, também favorece a apropriação eo comportamento humano que utilizou a ferramenta. É representado em ambas matemática você tem que olhar para os modelos de aprendizagem, mas é necessário observar as interações do usuário cuja ação «interroga» um computador significa a «responder». Levando-se em conta as concepções dos estudantes e espaço de trabalho matemático decorrente de interações reais ou potenciais, o nosso propósito é destinado a explicar o trabalho matemático gerado pelo uso de software de geometria dinâmica tridimensional GeoGebra 3D.

Palavras chave

Didática das matemáticas, modelização instrumentada, representação, concepção, espaços de trabalho geométrico, geometria dinâmica tridimensional.

1. INTRODUCTION : PLACE DE LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Si l'institution, dans la description du curriculum de l'enseignement public français ou québécois, insiste sur la place importante à donner à l'étude de la vision dans l'espace et à la manipulation des figures à trois dimensions, on constate chez les élèves une faible culture de cette géométrie. En France, la disparition progressive des problèmes de géométrie du plan, au lycée, n'est que plus flagrante pour ce qui est de l'espace. Les derniers programmes, initiés en 2009, font le lien avec les connaissances du collège, mais ne les approfondissent que très légèrement ; la géométrie dans l'espace ne semble plus qu'être un contexte pour s'exercer dans les autres domaines mathématiques. Au Québec, une lecture attentive des principaux manuels scolaires montre en outre que la géométrie dans l'espace se limite essentiellement à un calcul d'aire ou de volume, avec parfois quelques descriptions de propriétés des solides. Toutefois, les situations proposées n'engagent pratiquement jamais le sens proprement géométrique ni la réflexion dans l'espace. Le sens spatial de l'élève est quand même sollicité, mais le modèle géométrique se subordonne aux autres contenus de formation (arithmétique, algèbre et analyse fonctionnelle), ce qui restreint malheureusement les possibilités d'interprétation géométrique des phénomènes de l'espace.

Par ailleurs, dans nos sociétés très modélisées, les enjeux sociaux, économiques et politiques n'ont jamais accordés autant d'importance au contrôle de l'espace. De l'aménagement urbain jusqu'à la production d'images pour le cinéma ou les jeux vidéos, le citoyen en devenir est sans cesse confronté à la nécessité d'une analyse cohérente de son environnement. L'école et la société évolueraient-elles en sens opposé?

La question précédente a des allures provocatrices, mais elle a le mérite de poser pourquoi l'institution scolaire en est-elle arrivée là. Y aurait-il un décalage entre une approche traditionnelle de la géométrie, où la représentation statique des figures est au cœur de l'étude des propriétés du curriculum, et les caractéristiques dynamiques du raisonnement, de la visualisation, de la figuration et de l'instrumentation (Richard et al, 2013), aussi bien dans l'exercice de la géométrie que dans l'interprétation des phénomènes de l'espace? Ne peut-on pas favoriser le travail mathématique de l'élève au sein d'un Espace de Travail Géométrique (ETG) idoine (Kuzniak, 2006) qui intègre l'usage d'un outil de géométrie dynamique tridimensionnelle, surtout lorsque cet outil se développe conjointement en référence au modèle géométrique et à l'activité de l'élève?

En toile de fond, la notion d'espace de travail qui soutient notre propos reprend la perspective de Coutat et Richard (2011) dans laquelle l'ETG se considère expressément en interaction avec le sujet, c'est-à-dire l'espace de travail qui se crée aussi par une démarche, soit-elle en instance de réalisation. Elle se prolonge avec la généralisation aux compétences mathématiques cognitives des ETM que l'on retrouve à la Figure 3 de l'introduction de ce numéro spécial.

L'outil de géométrie dynamique que nous employons est le logiciel libre GeoGebra, dans sa composante «3D»[1]. Il s'agit d'un logiciel pour lequel participe un grand nombre de développeurs et qui s'enrichit à la suite de son usage dans les écoles. Bien que la géométrie tridimensionnelle marque la continuité thématique de notre texte, nous portons une attention particulière à deux types de visualisation des figures

[1] Voir http://www.geogebra.org/ .

dans l'espace : la projection perspective classique (au sens de la peinture de la Renaissance) et la projection stéréoscopique (celle qui permet de voir le relief dans les salles de cinéma). Le succès relativement récent du « cinéma 3D » peut-il être transposé à l'activité géométrique dans l'espace ?

Formulons notre propos à partir d'une question précise : existe-t-il une classe de problèmes pour laquelle la projection stéréoscopique améliore de manière significative le caractère idoine de l'espace de travail géométrique, par rapport à la projection perspective ? À ce stade de notre recherche, la classe de problèmes étudiée s'articule autour de deux activités d'apprentissage. La première est un questionnaire s'appuyant sur un dessin statique : la projection stéréoscopique élargit-elle son domaine de fonctionnement ? La seconde est plus complexe, et permettra dans une recherche aboutie d'évaluer les possibilités du sujet à s'engager dans le travail mathématique.

Nous analysons a priori les observables attendus, en nous référant au modèle des ETG de Kuzniak (2006) et au modèle de connaissances de Balacheff et Margolinas (2005) afin d'offrir un double regard sur l'interaction sujet-milieu (Blossier et Richard, 2010). C'est-à-dire que même si l'espace de travail, dans son aspect de démarche potentielle, et la conception, connaissance particulière par rapport à un sujet donné, sont tous deux caractéristiques du système sujet-milieu, le premier focalise le sujet et le second, le milieu.

Nous appuierons cette analyse par les premiers résultats expérimentaux, qui nous permettent d'envisager une poursuite féconde de notre recherche.

2. La géométrie dynamique tridimensionnelle : un obstacle didactique singulier

2.1 *La géométrie dynamique en tant qu'outil*

Dans la construction d'un ETG idoine (au sens de Kuzniak, 2006), la géométrie dynamique occupe une place qui requiert une attention particulière. Ses rapports avec les référentiels théoriques de Géométrie I, II et III ne sont pas toujours bien définis et explicites. Selon Houdement et Kuzniak (2006) :

> Quand l'élève construit son espace de travail, il a tendance à écraser le pôle théorique pour se replier sur le dipôle espace-artéfact plus évident et matériel. Il lui accorde ainsi une fonction de validation indépendamment de l'horizon visé.

Ces auteurs précisent ainsi la notion d'ETG personnel. Selon Coutat et Richard (2011), en tant que support expérimental, la géométrie dynamique offre une articulation entre les paradigmes géométriques GI et GII, de même qu'entre les ETG personnel, idoine et de référence. L'enjeu de cette articulation se concentre dans les démarches de modélisation et (surtout) de validation. En revanche, la démarche de découverte est moins problématique, peut-être dans la mesure où il s'agit de géométrie du plan : pour la perception visuelle statique, les écrans offrent aujourd'hui un rendu de qualité équivalente, sinon supérieure, au papier-crayon.

La démarche de découverte, dans le cas de la géométrie dans l'espace, est plus complexe : hormis la maquette, les supports classiques (tableau, papier, écran) sont par nature à deux dimensions, tandis que le monde est perceptible dans trois dimensions. Comme le souligne Chaachoua (1997), en géométrie dans l'espace, le choix du mode de représentation des objets devient primordial, et conditionne la mise en relation du dessin et de la figure.

Dans la conception d'un ETG idoine s'appuyant sur un outil de géométrie dynamique 3D, le contrôle devra s'exercer – en addition des contrôles liés à la géométrie dynamique – sur les ambiguïtés et les limitations engendrées par le mode de représentation choisi : en essayant de les éviter (dans le cadre actuel de notre recherche) ou de les exploiter (Mithalal, 2010).

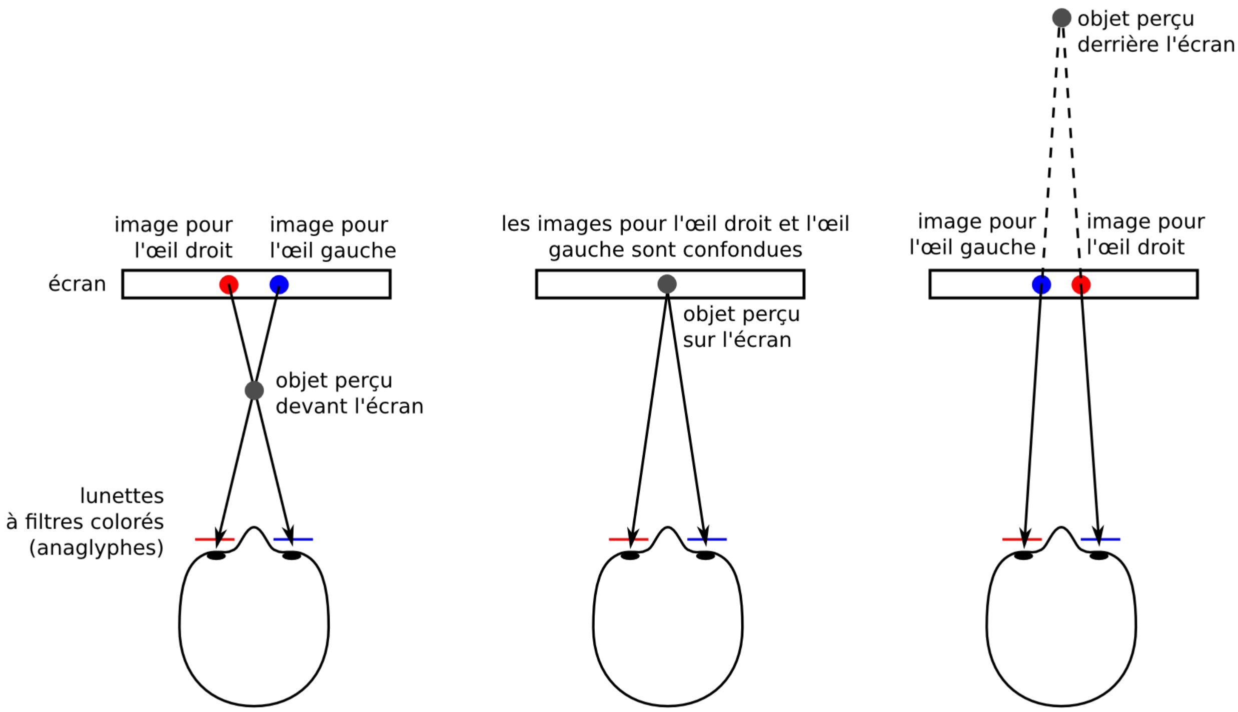


Figure 1. Principe de la projection stéréoscopique (vue de dessus). Deux images du même objet, une pour chaque œil, sont projetées sur l'écran. Grâce aux filtres, chaque œil ne perçoit que l'image qui lui est destiné (dans la figure, le filtre rouge masque à l'œil gauche toutes les images rouges, qui se confondent avec le blanc de l'écran). Le cerveau fusionne les images perçues et « place » l'objet devant, sur, ou derrière l'écran.

2.2 *Reconstituer sur un écran le réel dans ses trois dimensions*

Ces questions sont étudiées depuis longtemps par le cinéma, qui n'a cessé de chercher à rendre l'espace dans sa réalité la plus complète. Lipton (1982) décrit avec précision les conditions techniques et physiologiques liées à la production de « l'effet de relief ».

De nombreux indices permettent de transmettre l'information de profondeur : le plus ancien est sans doute la taille relative des objets (plus un objet est éloigné, plus il est vu petit) et la perspective (telle qu'apparue en Europe à la Renaissance) ; on peut également citer l'occlusion partielle (un objet situé derrière un autre n'est pas visible en totalité), la lumière et les ombres, la texture, l'effet de parallaxe... Tous ces indices sont dits « monoculaires » : il ne nécessitent pas l'usage des deux yeux pour être perçus. À cette catégorie, on doit ajouter celle des indices « binoculaires » : l'écart entre l'image vue par l'œil gauche et celle vue par l'œil droit permet au cerveau de reconstituer l'information de profondeur – c'est le fondement de la projection stéréoscopique (celle utilisée dans les films 3D, Figure 1) ; il faut ajouter à cet indice principal celui de la convergence (les axes de vision de chaque œil se croisent sur l'objet fixé) et d'accommodation du cristallin (pour créer une image nette de l'objet fixé).

Beaucoup ont pu faire l'expérience « réelle » de la profondeur en étant spectateur du cinéma « en relief ». Cette technique de stéréoscopie est souvent perçue comme surpassant tous les autres indices de profondeur. Pourtant, de nombreuses difficultés techniques en rendent l'usage encore expérimental (Blondé et al., 2010). Par ailleurs, d'après la recension et les études de Lipton (1982), on peut estimer que dans la population, entre 2% et 5% n'ont pas de vision stéréoscopique, et entre 10% et 15% en ont une perception différente, qui les rend insensibles aux systèmes de projection courants.

Le rendu d'une figure dans l'espace est donc un exercice complexe, qui demande de tirer parti des différents indices de profondeur : ils doivent se combiner pour fournir une information la plus riche possible, et éviter de se contredire les uns les autres (Figure 2).

Figure 2. Cube impossible (photomontage, Okami No Ti[2]). La structure générale, la perspective et la texture suggèrent qu'il s'agit d'un cube composé de poutres à section carrée. Cependant, l'occlusion partielle du second poteau est un indice contradictoire typique des figures impossibles, comme celles qui sont exploitées par Vicente Meavilla[3] dans l'enseignement des mathématiques.

2.3 *GeoGebra 3D*

Nous nous attachons ici à décrire les principes généraux qui président au développement de la géométrie dans l'espace pour GeoGebra et au comment ces principes entrent en résonnance avec notre recherche depuis la didactique des mathématiques.

La production des indices pour l'information de la profondeur peut être séparée en deux familles. D'une part, il y a les indices « synthétisés » (projection perspective, stéréoscopie, éclairage, parallaxe, etc.), et d'autre part, les indices « symbolisés » (projection parallèle ou perspective cavalière, codage des parties

[2] Licence d'œuvre en usage partagé : http://im-possible.info/english/art/montage/okami-no-ti.html .
[3] Voir le site : http://im-possible.info/english/art/vicente/index.html .

cachées, lignes de rappel, etc.). Ces indices raffinent les enjeux des genèses vidéos-figurales et discursivo-graphiques dans l'interaction entre l'élève et le milieu (voir introduction, figures 3 et 4).

Nous désignons comme « synthétisés » les indices qui reproduisent le réel à la manière de l'appareil photo, de la caméra, de l'œil ou des deux yeux (Figure 3a) ; par exemple la parallaxe est synthétisée par le logiciel lorsque la figure est tournée, à la manière du four à micro-ondes qui fait tourner une tasse. Nous désignons comme « symbolisés » les indices qui sont de l'ordre du codage (Figure 3b). Dans la terminologie utilisée par Chaachoua (1997), les premiers interviennent dans le dessin comme modèle du monde réel, les seconds sont des conventions qui permettent d'étendre le domaine de fonctionnement du dessin.

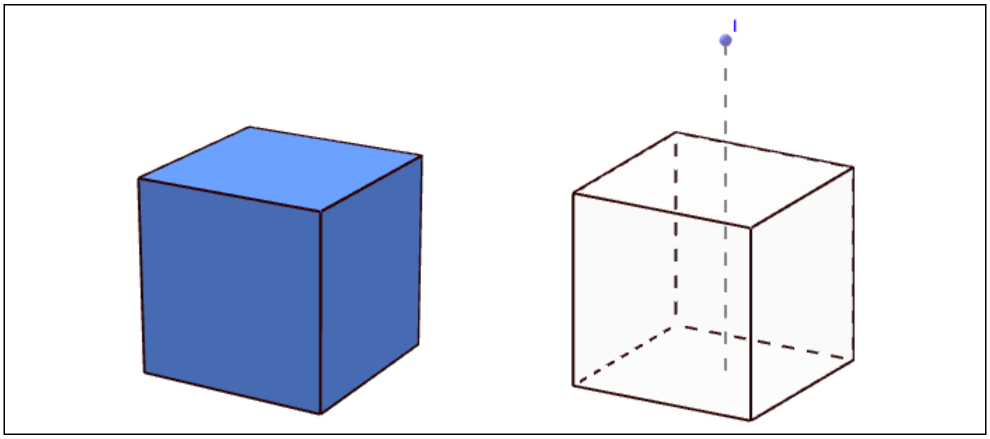


Figure 3 a) Indices synthétisés : perspective à points de fuite, éclairage ; *b*) Indices symbolisés : perspective parallèle, segments cachés en pointillés, ligne de rappel du point I.

Du point de vue didactique, les indices synthétisés relèvent essentiellement de la genèse vidéo-figurale : ils sont essentiellement perceptifs. Les indices symbolisés s'appuient sur des conventions de représentations et, plus généralement, ils se placent en partie sur la genèse discursivo-graphique.

Ces indices sont communément utilisés par les logiciels de géométrie dynamique dans l'espace – auxquels on peut adjoindre entre autres les logiciels de conception assistée par ordinateur. Une partie importante de notre recherche se concentre sur ces indices afin d'en mesurer les effets sur le sujet ; c'est le cœur de l'activité d'apprentissage que nous développons ci-après.

Dans la suite, nous nous intéressons précisément à la projection stéréoscopique en lien avec les différentes genèses.

3. Activités d'apprentissage : un questionnaire et un problème

Notre ingénierie didactique se concentre tout d'abord sur un questionnaire, avant de s'attaquer à une activité de travail mathématique plus riche. Le questionnaire permet d'évaluer la capacité du dessin (statique) à illustrer la situation spatiale d'un point par rapport à un cube. Le problème propose, sur la base d'une question ouverte, de compléter la construction d'une figure à l'aide de GeoGebra, et évalue ainsi la projection stéréoscopique dans la genèse instrumentale. Il pointe également quelques enjeux de cette représentation lors de l'activité d'institutionnalisation (au sens de Brousseau, 1998).

3.1 *Le point est-il au-dessus ?*

Le questionnaire est constitué d'une série de figures statiques, produite soit selon la projection perspective (Figure 4a), soit selon la projection stéréoscopique (Figure 4b), reconstituée à l'aide de lunettes anaglyphes (Figure 5).

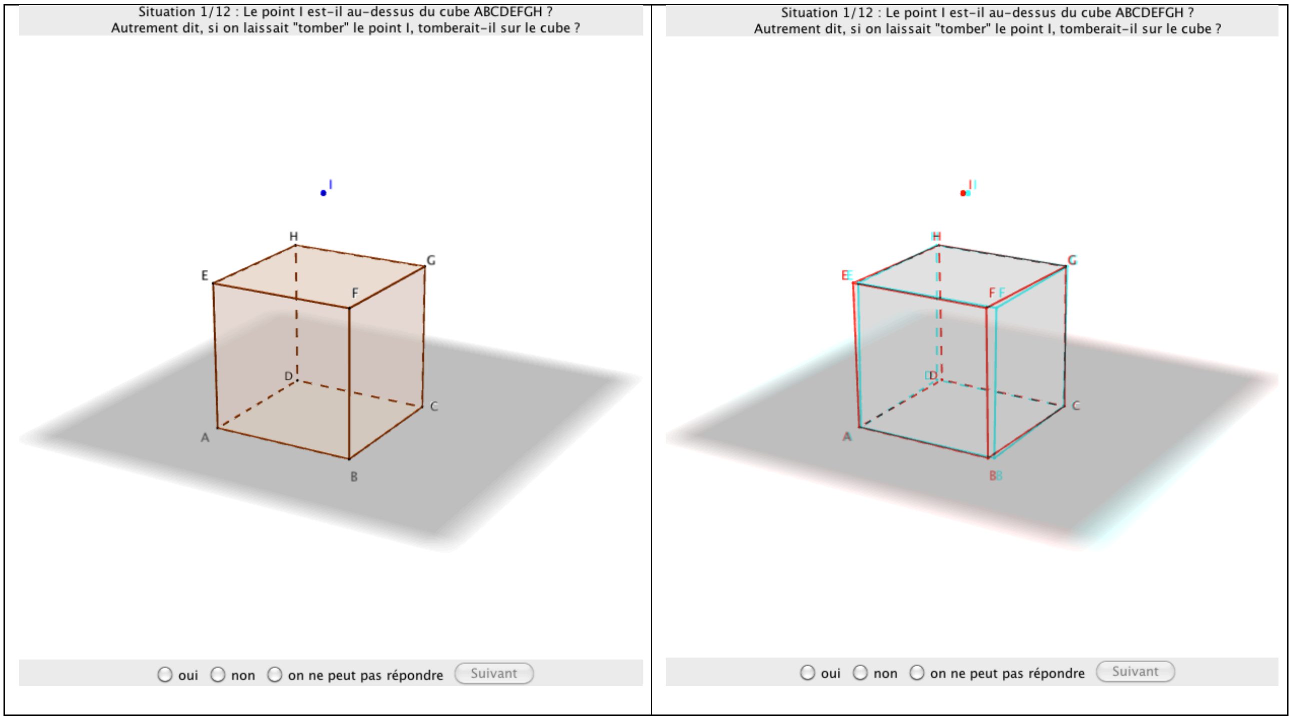


Figure 4. Questionnaire, (a) projection perspective, (b) projection stéréoscopique.

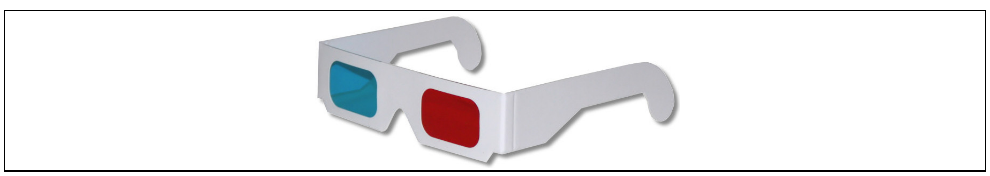


Figure 5. Lunettes anaglyphes.

Toutes les figures sont composées d'un cube ABCDEFGH et d'un point I : l'élève doit répondre à la question « Le point I est-il au-dessus du cube ABCDEFGH ? Autrement dit, si on laissait 'tomber' le point I, tomberait-il sur le cube ? », en choisissant parmi « oui », « non », « on ne peut pas répondre ». Dans la projection, ce point I n'est jamais situé en-dessous de la droite (GH).

Chaque élève est soumis à la même série de 12 dessins, en commençant en projection perspective, et en poursuivant en projection stéréoscopique avec 12 dessins correspondant aux mêmes 12 figures. Chacune des figures a été produite à l'aide de GeoGebra ; nous avons donné la réponse qui correspond à la position du point I dans représentation interne au logiciel, en 3 dimensions (Figure 6).

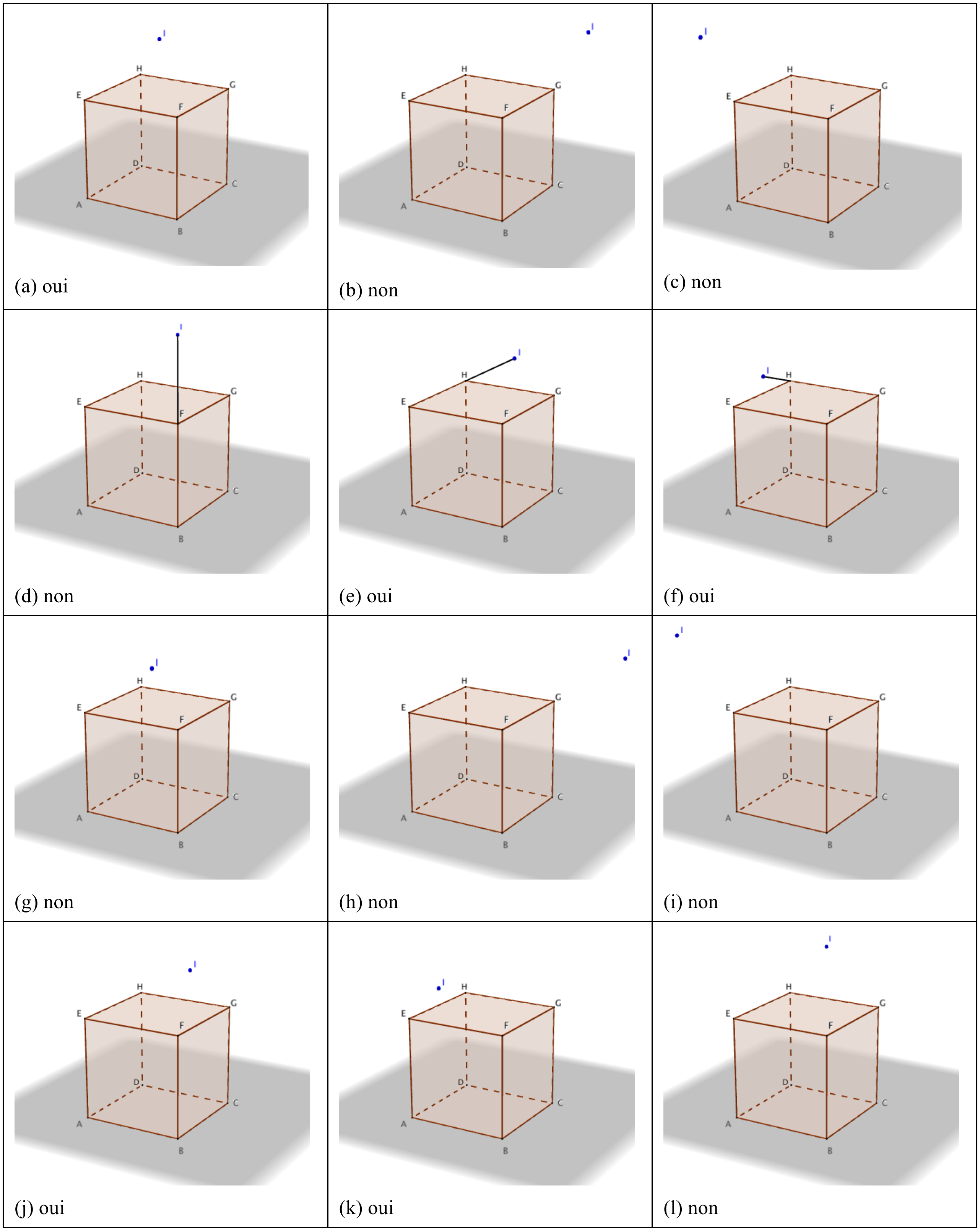


Figure 6. Dessins du questionnaire (projection perspective).

On peut noter, dans les cas (d-e-f), une « contradiction » entre la position du point I dans la représentation interne, et l'indice proposé par le segment qui semble prolonger une arête du cube (on peut rapprocher cette situation de la Figure 2). Les cas (l-j-k) présentent la même position du point I dans l'espace, sans les segments de prolongement.

Le modèle de Balacheff et Margolinas (2005) permet de décrire avec précision la conception qui intervient dans chaque mode de projection. La classe de problèmes est ici : « situer un point dans l'espace par rapport à un solide » ; les opérateurs mis en œuvre sont l'observation de la projection sur l'écran (en 2D) et le relevé des indices de profondeur (synthétisés ou symbolisés) ; le système de représentation relève de la genèse vidéo-figurale (sorte de comparaison au réel qui se représente lui-même) ou de la genèse discursivo-graphique (langage conventionnel des figures) ; la structure de contrôle consiste, essentiellement dans une démarche de modélisation, en allers et retours entre la figure de référence et ses représentations dans l'espace réel et local.

Une première expérimentation a été opérée sur trois classes d'élèves de 6ème, constituant une population de 66 élèves ayant, dans leur cursus antérieur (école primaire), manipulé et décrit notamment le cube et le parallélépipède rectangle :

- comme on pouvait s'y attendre, dans les situations triviales (point à gauche ou à droite du cube, cas b-c-h-i), les élèves répondent correctement dans les deux projections (à plus de 90%)
- en projection anaglyphe, les élèves répondent en accord avec le modèle dans 78% des cas, ce qui s'éloigne significativement du hasard (au seuil de 95%).
- pour les situations avec segment de prolongement, en perspective, les élèves répondent de manière significative (au seuil de 5%) en accord avec le prolongement les situations dans les cas (d) et (f).
- les situations avec segment de prolongement font baisser les performances en projection anaglyphe, de manière significative (au seuil de 5%) ; la réponse attendue reste cependant prépondérante (71% des réponses).
- dans les situations où le point I est « au-dessus » du cube dans la projection, sans segment de prolongement (cas a-g-j-k-l), les élèves répondent « oui » de manière significative en projection perspective (47% des réponses) ; les élèves donnent la réponse attendue de manière significative en projection stéréoscopique (82% des réponses).

Ces résultats indiquent que la projection stéréoscopique construit un ETG plus idoine, du moins dans le cadre de la genèse vidéo-figurale.

3.2 *Où placer la lampe ?*

Dans l'activité précédente, le sujet est soumis à un milieu qui le contraint à une perception passive et statique. Cette situation repose donc essentiellement sur la genèse vidéo-figurale et déborde peu sur les autres genèses en jeu dans l'ETG. Nous abordons maintenant la deuxième activité d'apprentissage afin d'explorer davantage les différentes genèses.

« Une lampe est posée sur une table de chevet de forme cubique. L'ombre portée au sol forme un quadrilatère, dont l'aire est égale à 9 fois l'aire d'une face carrée de la table de chevet. Où se trouve l'ampoule de la lampe ? »

Une maquette du problème est proposée à l'élève dans son milieu de travail (Figure 7).

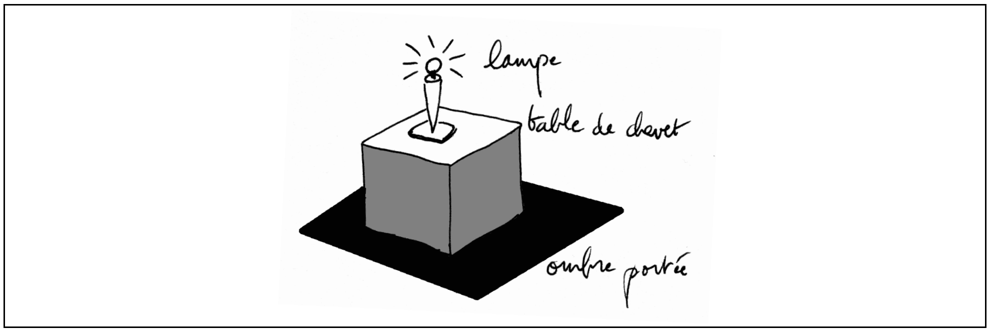


Figure 7. Maquette du problème.

Une figure GeoGebra est fournie aux élèves, avec un cube et un point I situé au-dessus du cube, dans une configuration proche de celle de la maquette (Figure 8). Un groupe d'élèves travaille en projection perspective ; un autre groupe en projection stéréoscopique.

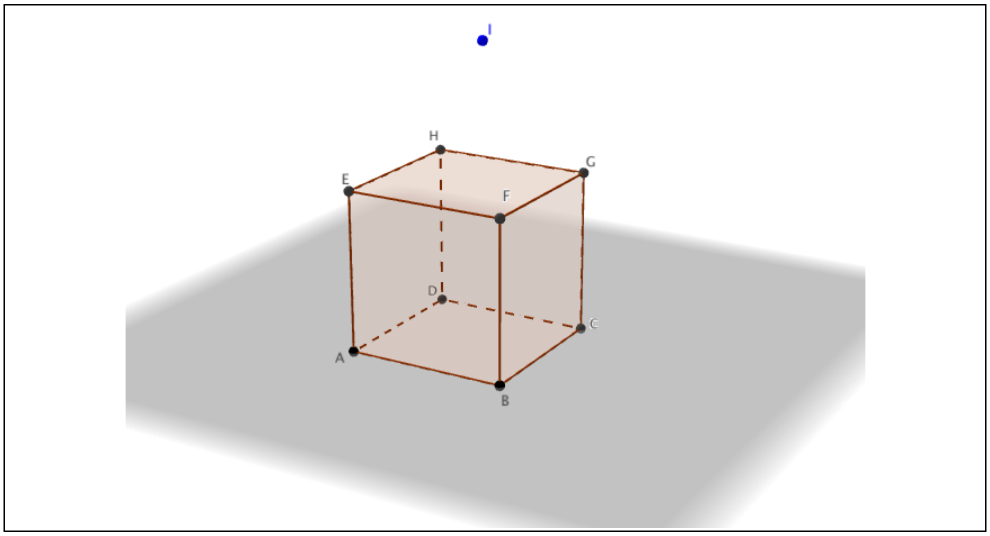


Figure 8. Figure GeoGebra de départ (projection perspective).

Il s'agit de repérer si le caractère idoine constaté dans l'activité précédente est encore prégnant dans ce travail mathématique. L'activité sera proposée à des élèves de 3ème : leur cursus du collège a approfondi leur connaissance des solides de base (dont la pyramide), de plus ils savent appliquer le théorème de Thalès dans des problèmes de géométrie plane.

Dans la suite, nous analysons a priori les étapes attendues dans l'activité de l'élève.

3.2.1 *Résolution du problème : construction*

Il est essentiellement question, pour l'élève, de construire le quadrilatère de l'ombre portée (quadrilatère JKLM à la Figure 9).

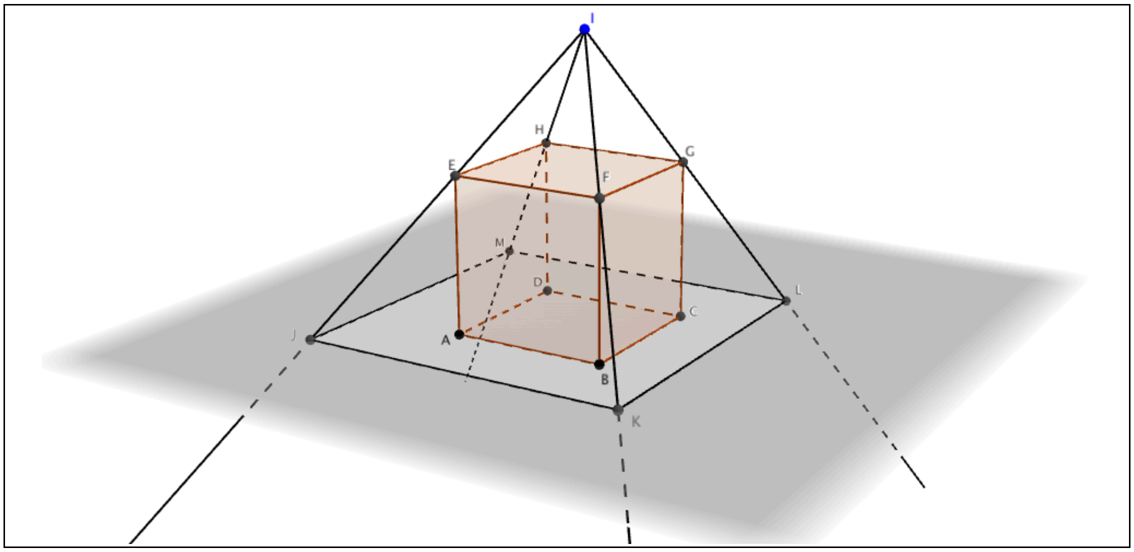


Figure 9. Construction de l'ombre portée.

Il s'agit de résoudre le problème : « construire, en trois dimensions, une demi-droite à partir de deux points, et l'intersection d'une demi-droite avec un plan » ; les opérateurs mis en œuvre sont l'observation de la projection et le relevé des indices de profondeur, les outils de construction manipulés à la souris (par exemple, cliquer sur deux points pour construire une demi-droite), l'outil de déplacement d'un point (souris), le déplacement, la rotation et le zoom de la figure ; le système de représentation est la comparaison à la maquette ; la structure de contrôle consiste en l'adéquation à la maquette et la résistance de la figure au déplacement.

Notre hypothèse de travail est que la projection stéréoscopique produit un dessin dont le domaine de fonctionnement est plus proche de celui de la maquette, et permet au sujet d'exercer un meilleur contrôle sur sa construction.

L'expérimentation vise à mesure le caractère idoine de l'ETG créé avec la projection stéréoscopique, en observant chez l'élève réalisant la figure :

- Le temps de construction ;
- La nécessité de tourner la figure (et sa fréquence) ;
- Le ressenti exprimé par l'élève (réponse à un questionnaire : « la construction t'a-t-elle semblé facile à réaliser ? »).

3.2.2 *Résolution du problème : conjectures*

Le sujet passe ici d'une activité de construction à une activité davantage centrée sur l'expérimentation : l'opérateur principal est le déplacement (point I et figure) à la souris, mais aussi au clavier (flèches pour les 6 directions). La sollicitation par l'élève d'oracles (par exemple pour les aires des carrés ABCD et JKLM, Figure 10) vient compléter la structure de contrôle déjà décrite.

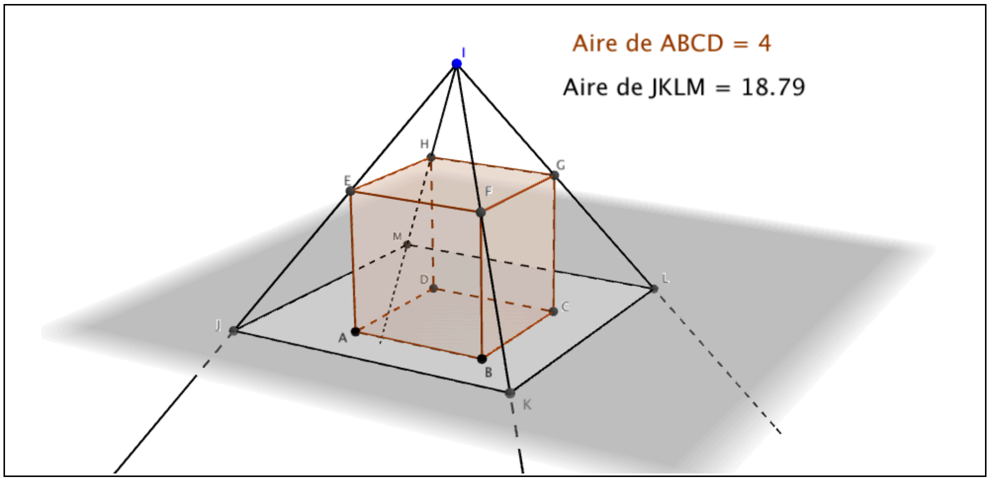


Figure 10. Oracles sur les aires.

Maintenant, la rotation de la figure n'est plus nécessaire dans le cas de la projection stéréoscopique : seul le déplacement du point I est en jeu. En projection perspective, le sujet devra s'appuyer sur l'indice donné par la ligne de rappel (segment perpendiculaire au plan de base joignant le point I). Cet indice relève de GII car il fait appel aux connaissances mathématiques et aux conventions de figure.

Il s'agira d'observer, chez le sujet, la capacité de contrôle de la figure dans une démarche de découverte productive. La réussite, le temps d'exécution et la production de conjectures plus ou moins avancées sont les observables que nous relèverons.

Les conjectures attendues sont les propriétés suivantes (qui ne constituent pas une liste exhaustive) :

- Le déplacement horizontal du point I n'influe pas sur l'aire du carré JKLM ;
- Monter le point I diminue cette aire ; descendre le point I augmente cette aire ;
- Le point I doit se situer à une distance égale à la moitié de la longueur d'une arête du cube, au-dessus de la face EFGH.

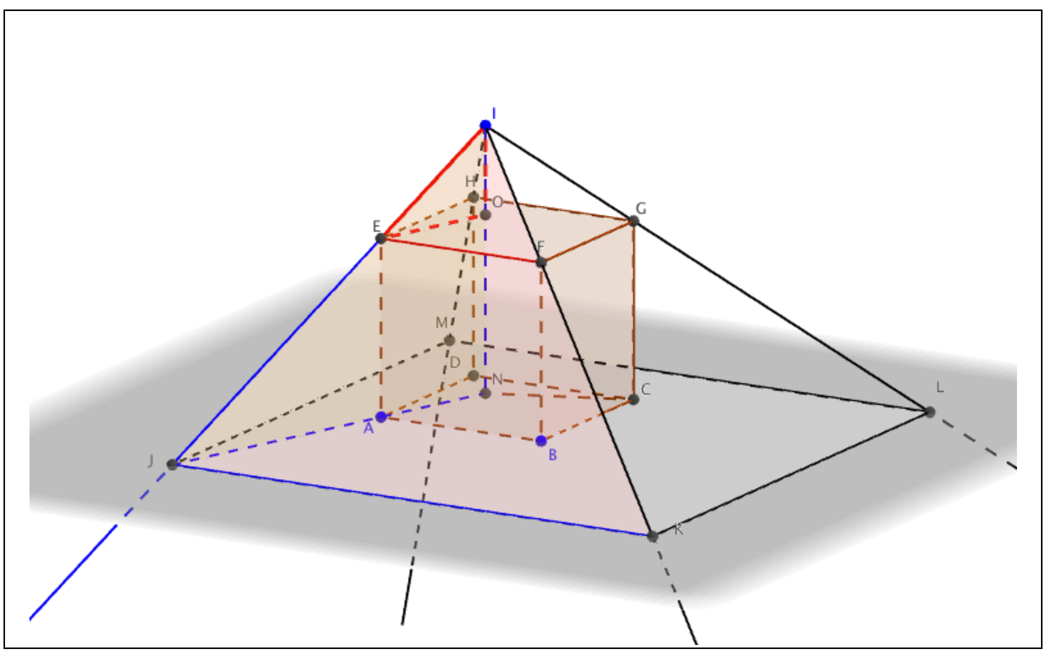


Figure 11. Figure complétée pour une démonstration (projection parallèle).

3.2.4 *Résolution du problème : démonstration*

Nous ne faisons ici qu'évoquer quelques réflexions, qui ne peuvent entrer immédiatement dans le cadre de notre activité d'apprentissage. Le problème de la preuve doit être abordé : sur quel système de représentation l'enseignant peut-il s'appuyer lors de l'institutionnalisation ? Il s'agira, dans une étude ultérieure, d'aborder les points suivants – pour lesquels nous ne produisons maintenant aucune analyse :

- en projection au tableau, pour l'ensemble de la classe, quelle projection fonctionne le mieux ? La perspective parallèle (Figure 11) est-elle préférable puisqu'elle évite le problème du point de vue et des déformations ?
- les sous-figures invoquées sont le plus souvent des figures du plan (Figure 12) : comment le logiciel peut-il afficher conjointement la figure générale en projection et des coupes (sous-figures) dans le plan ?

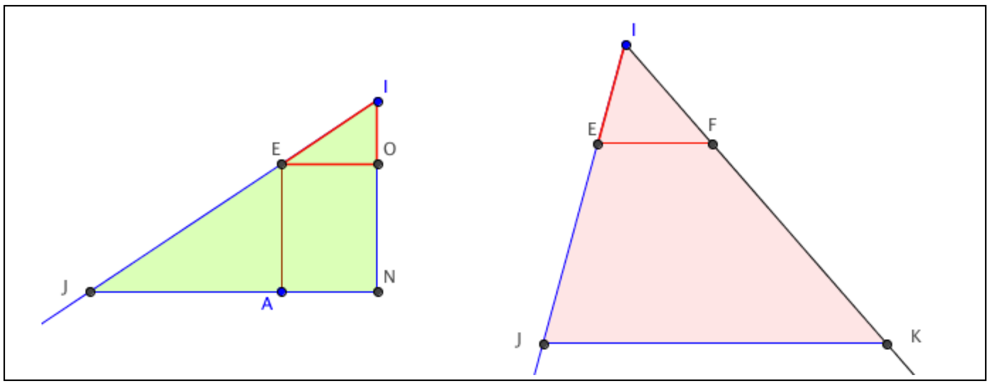


Figure 12. Sous-figures dynamiques en interaction.

4. CONCLUSION : UN LONG CHEMIN A PARCOURIR

Nous pouvons seulement entrevoir, à travers ces deux activités d'apprentissage, l'étendue des potentialités que révèle aujourd'hui la géométrie dynamique pour l'espace, en même temps que la profondeur des questions à investir pour optimiser la construction d'un ETG idoine. L'enrichissement et la validation des indices de profondeur dans le rendu de la figure spatiale sont des questions de première importance.

Nous avons vu que dans la genèse vidéo-figurale, la stéréoscopie produit un dessin au domaine de fonctionnement plus étendu que la projection perspective, puisqu'elle permet aux élèves de produire une réponse davantage en adéquation avec la figure sous-jacente. Cependant, le caractère idoine de l'ETG construit avec la projection stéréoscopique résiste-t-elle dans le cadre d'une tâche plus complexe ?

Par ailleurs, la réponse à cette question est également fortement liée aux contraintes techniques du matériel (écrans, lunettes, périphériques d'entrée, sensibilité à la position du sujet par rapport au support d'affichage, etc.) et physiologiques des élèves (sensibilité à la stéréoscopie). La mise en place progressive des deux activités d'apprentissage nous permet en partie d'isoler ces différents facteurs et de valider notre étude sur le plan didactique.

Au retour d'observation, nous pourrons :

- engager une étude systématique des différences entre les projections perspective et stéréoscopique ;
- y adjoindre les projections cavalière et parallèle ;
- dessiner les contours d'une ergonomie minimale de l'outil GeoGebra 3D pour l'élève et pour l'enseignant.

RÉFÉRENCES

Balacheff, N. et Margolinas, C. (2005). Ck¢, modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier, & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Blossier, M. et Richard, P.R. (2011). Modélisation instrumentée et conceptions a priori dans un espace de travail géométrique en évolution: un tour en géométrie dynamique tridimensionnelle. *Actes des journées mathématiques 2011 de l'École Normale Supérieure de Lyon (IFÉ 2011), Institut Français de l'Éducation* (pp. 93-101), Lyon.

Blondé, L. et al. (2010). 3D Stereo Rendering Challenges and Techniques. *44th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS 2010),* (pp. 1-6), Princeton.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chaachoua, A. (1997). *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace. Etude de cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.

Coutat, S. et Richard, P.R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 97-126.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175–193.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 6.2*, 167–187.

Lipton, L. (1982). *Foundations of the stereoscopic cinema, a study in depth.* New York : Van Nostrand Reinhold.

Richard, P. R., Swoboda, E., Maschietto, M., and Mithalal, J. (2013). *Introduction to the Geometrical Thinking Working Group*. Actes du Congress of European Research in Mathematics Education (CERME8), pp. 1-7.

Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.

Auteurs

Mathieu Blossier. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Rouen, France. mathieu.blossier@ac-rouen.fr

Philippe R. Richard. Université de Montréal, Canada. philippe.r.richard@umontreal.ca

Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional

Vicente Carrión Miranda y François Pluvinage

Cinvestav-IPN, México

Resumen. En este artículo nos interesamos en el tema de funciones reales de variable real, desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). En la primera parte señalamos observaciones hechas con varios públicos que dan crédito a la hipótesis de que el saber del álgebra no es suficiente para los tratamientos que ponen en juego las funciones. Se necesita un pensamiento que calificamos como *funcional* que precisamos en una segunda parte. En la última parte presentamos los resultados de un taller exploratorio dirigido a profesores del nivel medio superior, organizado con el propósito de profundizar nuestra hipótesis. La especificidad del estudio propuesto fue que los participantes trabajaron en grupos, considerando todos la misma situación matemática y usando cada grupo una herramienta diferente. Los grupos, caracterizados por las herramientas que utilizaron, fueron los siguientes: “A pie” (papel-lápiz), Hoja de Cálculo, Calculadora, *Software* de Cálculo formal y *Software* de Geometría Dinámica. Los participantes se dieron cuenta de cómo el uso de herramientas tecnológicas ejerce influencia en el proceso de resolución y en el manejo de conceptos.

Palabras clave: Actividad matemática, pensamiento funcional, TIC, ETM.

Abstract. REGISTERS AND STRATA IN MATHEMATICAL WORKSPACES SERVING FUNCTIONAL THINKING

In this article we are interested on real functions of a real variable, from the perspective of Mathematical Workspaces (MWS). In a first part of the study, we present observations made at various levels of teaching, which may give credit to the hypothesis that knowing algebra is not sufficient for treatments which bring the functions into play. It needs a so called functional thought, that we precise in a second part. In a third part, we present an exploratory workshop organized for high school mathematics teachers, with the purpose of deepening our hypothesis. The specificity of the proposed study was that participants worked in groups, all of them considering the same mathematical situation, but each group using its own tool. Groups, characterized by the tools they used, were. "Walking" (paper-pencil), Spreadsheet, Calculator, Symbolic Calculus software, Geometry software. Participants realized how the use of technological tools influences the resolution processes and the management of concepts.

Keywords: Mathematics activity, Functional Thought, Computation, Mathematical Workspaces

Résumé. REGISTRES ET STRATES DANS DES ETM AU SERVICE DE LA PENSEE FONCTIONNELLE

Dans cet article, nous nous intéressons à la question des fonctions réelles d'une variable réelle, du point de vue des espaces de travail mathématiques (ETM). Dans une première partie de l'étude, nous présentons les observations faites à différents niveaux d'enseignement, pouvant donner crédit à l'hypothèse que la connaissance de l'algèbre n'est pas suffisante pour les traitements qui mettent en jeu des fonctions, mais qu’il y a besoin d'une pensée que nous qualifions de fonctionnelle et que nous précisons dans une deuxième partie. Dans une troisième partie, nous présentons un atelier exploratoire organisé pour des enseignants de mathématiques du secondaire, avec l’objectif d'approfondir notre hypothèse. La spécificité de l'étude proposée était que les participants travaillaient en groupes, tous étudiant la même situation mathématique, mais chaque groupe à l'aide de son propre outil. Les groupes, caractérisés par les outils qu'ils ont utilisés, étaient les suivants. "A pied" (papier-crayon), tableur, calculatrice, logiciel de calcul symbolique, logiciel de géométrie. Les participants ont réalisé comment l'utilisation d'outils technologiques influe sur les processus de résolution et la gestion des concepts.

Resumo. REGISTROS E ESTRATOS EM ETM A SERVIÇO DO PENSAMENTO FUNCIONAL

Neste artigo estamos interessados no tópico de funções reais de um variável real, a partir da perspectiva de espaços de trabalho Matemáticas (ETM). Na primeira parte do artigo, presentamos observações com diversos públicos, o que pode dar crédito à hipótese de que o conhecimento de álgebra não é suficiente para tratamentos que envolvem funções mas há necessidade de um pensamento que chamamos funcional e que especificamos em uma segunda parte. Em uma terceira parte, apresentamos um workshop exploratório destinado a professores do ensino médio, organizado com o objetivo de aprofundar a nossa hipótese. A especificidade do estudo proposto foi que os participantes trabalharam em grupos, considerando-se todos na mesma situação matemática, mas cada grupo usando uma ferramenta própria. Grupos, caracterizados pelas ferramentas que usavam, foram: "de caminhada" (papel e lápis), planilha, calculadora, software de Cálculo formal, software de Geometria. Os participantes perceberam como o uso de ferramentas tecnológicas influencia no processo de resolução e conceitos de gestão.

Palavras chave: Atividade matemática, pensamento funcional, TIC, ETM

1. Deficiencias observadas en el trabajo con funciones

Houdement & Kuzniak (2006, p. 184) introducen el concepto de Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) considerándolo como un entorno en el que se articulan tres componentes, un conjunto de objetos, un conjunto de artefactos y un marco referencial. En un artículo más reciente Kuzniak (2011, pp. 19 y 20) se interesa en la trasposición del mismo concepto a otros campos de la matemática. En particular, subraya la necesidad de introducir un componente semiótico. En este documento nos interesa el tema de funciones reales de variable real. En la modelación son frecuentes las situaciones geométricas que dan lugar a funciones. En el ejemplo de cajas que sigue se presentan dos ejercicios de este tipo. Se aplicaron a estudiantes de varios niveles, desde el último año de preparatoria hasta la maestría, a profesores en formación inicial y en talleres de actualización. Un primer análisis de resultados de ambos ejercicios se encuentra en Moreno & Cuevas, 2004.

Ejercicio 1

En las esquinas de una hoja cuadrada de longitud 13 centímetros se recortan cuadrados de lado x para construir una cajita. Determinar la función *volumen*, $V(x)$, su dominio y su imagen.

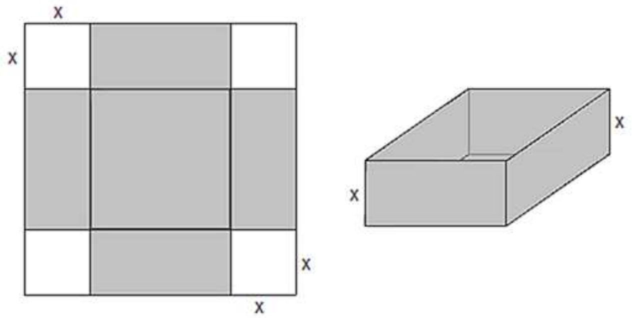


Figura 1. La cajita

La pregunta sobre el dominio de la función es elemental; sin embargo, no da lugar a un éxito general. El problema no se sitúa en la fórmula, todos obtienen $V(x) = x(13 - 2x)^2$. Aproximadamente uno de cada cinco encuestados declara que el dominio es el intervalo [0, 13], en lugar de [0, 13/2]. Esto significa que en el análisis de la situación no incursionan en el modo de pensamiento que llamamos *funcional.* Por otra parte, la obtención de la imagen de la función es un tema propio de Cálculo; para obtenerlo, hace falta determinar el máximo local de la cúbica representada por $V(x)$.

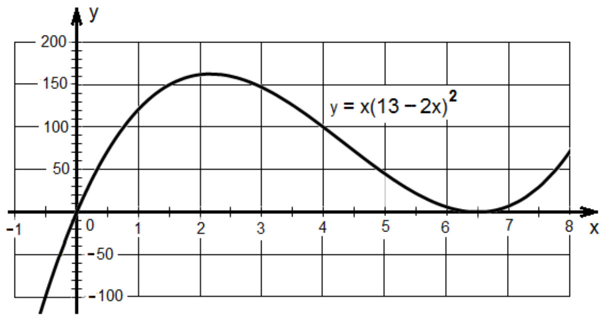
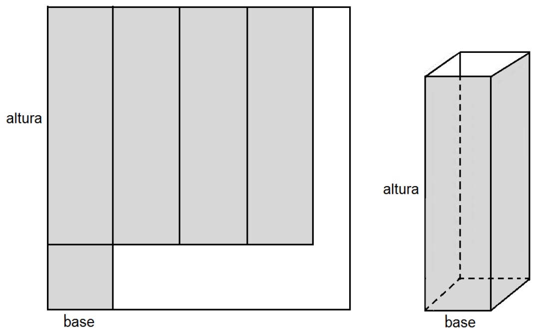


Figura 2. Cúbica de la *función volumen* de la cajita.

Ejercicio 2

Determinar el volumen máximo que puede tener una cajita sin tapa, de base cuadrada, construida con una lámina cuadrada de 13 centímetros de lado; la base se forma con una esquina de la lámina (*Figura3*).



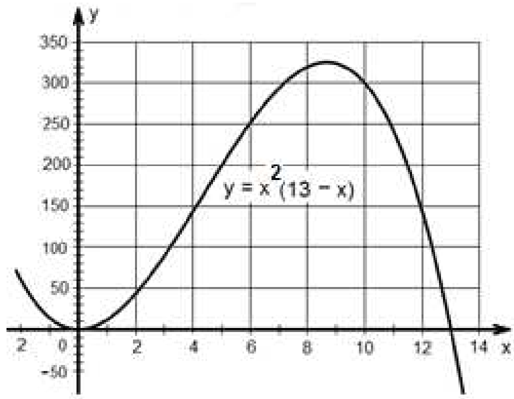


Figura 3. Plantilla de una caja de base cuadrada

Figura 4. Cúbica de la función volumen

Todos los encuestados, a partir del lado x de la base, determinaron el volumen $V(x) = x^2(13 - x)$, tal como lo hicieron en el *Ejercicio 1*. Los profesores y la mayor parte de estudiantes, los que sabían derivar, obtuvieron el máximo local en el punto de abscisa 26/3, como se ilustra en la cúbica de la *Figura 4*.

Observación. Para encontrar los máximos de una curva en México rige como un “rito” el llamado *Criterio de la Segunda Derivada*: Un máximo es un punto en el que la derivada es nula y la segunda derivada es negativa. En Francia el “rito” es la llamada *Tabla de Variaciones*: Los cambios de signo de la derivada permiten distinguir los mínimos y los máximos sin necesidad de derivar una segunda vez, a partir de una fila que contiene información sobre la función en estudio colocada debajo de otra fila que contiene su derivada.

x	$-\infty$		0		26/3	13	∞
$y' = 26x - 3x^2$		–	0	+	0	–	
$y = 13x^2 - x^3$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	8788/27	$\searrow$ 0	$-\infty$

Tabla 1. Variaciones de la función $f(x) = 13x^2 - x^3$

Dentro del marco de un simposio sobre Espacios de Trabajo Matemático nos parece importante señalar la diferencia de naturaleza semiótica entre modos de estudio en dos países; sin embargo, no hemos aplicado en Francia el mismo ejercicio ni analizado las respuestas de estudiantes franceses. En el caso de México las observaciones arrojan que la mayoría de los estudiantes no se dieron cuenta que el dominio de la función del *Ejercicio 2* es [0, 13/4], ni que el máximo del polinomio se sitúa fuera de ese intervalo. ¡Pensamiento funcional limitado! Algunos de los que se percataron que el máximo local de la cúbica se encuentra fuera del dominio de la función concluyeron que el problema no tiene solución. ¿Podría el uso de la tabla de variaciones hacer desaparecer esta conclusión errónea?

Los ejercicios anteriores no introducen parámetros con papel preponderante en la resolución. Nos parece que para profundizar estas observaciones es conveniente introducir una situación que depende de un parámetro. Con estudiantes de la Maestría en Ciencias, Especialidad de Matemática Educativa, en el Cinvestav-IPN, hemos experimentado la siguiente situación:

Problema
Sobre los lados sucesivos **AB**, **BC**, **CD** y **DA** del rectángulo **ABCD** se trazan los puntos **P**, **Q**, **R** y **S**, tales que **AP** = **BQ** = **CR** = **DS** (*Figura 5*).

- ¿Cuál es la naturaleza del cuadrilátero **PQRS**?
- ¿Qué valor de x produce el cuadrilátero **PQRS** de área mínima?

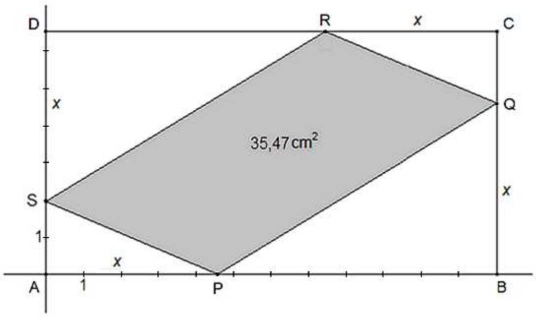


Figura 5. Un cuadrilátero en un rectángulo

El problema se planteó en el contexto de un diseño de escenario didáctico apoyándose en *software* de geometría dinámica. Por eso no registramos datos sobre su resolución matemática; sin embargo, podemos decir que son pocos los alumnos de maestría que señalaron que la solución depende de la razón **BC**/**AB**. Vemos que si el máximo no se encuentra en uno de los extremos del dominio entonces la solución corresponde a un cero de la derivada, siendo el caso si se cumple la relación 1/3 ≤ **BC**/**AB** ≤ 3. El ejemplo es semejante al de la caja anterior. La situación matemática general es la siguiente: Una función continua sobre un intervalo cerrado tiene, necesariamente, un máximo en un punto del intervalo. Puede ser que el máximo se presente en uno de los extremos del intervalo si la función es derivable y si todos los valores de la derivada son diferentes de cero en ese intervalo. Un resultado semejante es válido para mínimos.

Si denotamos con a la longitud del lado **AB** del rectángulo y con b la longitud del lado **BC** y si del área del rectángulo se resta la suma de las áreas de los triángulos de las esquinas obtenemos

$$\text{Área}(\mathbf{PQRS}) = A(x) = ab - x(a-x) - x(b-x) = 2x^2 - (a+b)x + ab.$$

La derivada $A'(x) = 4x - (a+b)$ es nula en $x = \dfrac{a+b}{4}$. Puesto que los lados a y b desempeñan un mismo rol se pueden simplificar las escrituras al suponer que $b \le a$. En tal situación, el dominio de la función es el intervalo $[0, b]$, porque x no puede ser mayor que la longitud del menor de los lados del rectángulo.
La condición $(a+b)/4 \le b$ es equivalente a la desigualdad $a + b \le 4b$; o sea, $a \le 3b$; o también $b/a \ge 1/3$. Si el rectángulo no cumple esta condición entonces el mínimo del área se obtiene en $x = b$ (*Figura 6*, con valores $a = 10$ y $b = 3$).

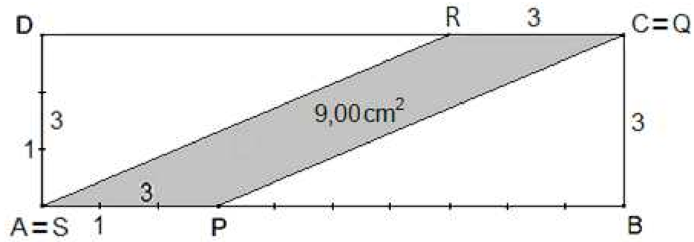


Figura 6. Cuadrilátero de área mínima en el rectángulo 10×3

A partir de los ejercicios propuestos en las encuestas, o de las evaluaciones, se concluye que los participantes manifestaron tendencias a conductas algorítmicas. Por ejemplo, al repetir la aplicación de los ejercicios 1 y 2 anteriores quedó asentado lo siguiente: "estos resultados comprobaron que los estudiantes de esta experiencia tenían una concepción de función limitada a una regla de correspondencia" (Cuevas, Moreno & Pluvinage, 2005, p. 188). Hoy, a la luz de investigaciones sobre los ETM, podemos afirmar que las conductas de los estudiantes se interpretan como la apropiación de un ETM personal, siendo el espacio de trabajo más algebraico que funcional. Tal orientación se puede relacionar con la separación del estudio de funciones de la siguiente manera:

1) Un primer tipo de estudios, bajo el título "Cálculo", a veces complementado con términos como Infinitesimal, Diferencial e Integral, correspondiente a una colección de reglas algorítmicas; por ejemplo, de derivación.
2) Otra parte que toma en cuenta aspectos topológicos bajo el nombre de "Análisis Funcional". Para precisar una hipótesis de esta naturaleza, que incluya ETM, es menester considerar aspectos semióticos tales que su papel es importante en las situaciones estudiadas.

Tales estudios se consideran en el siguiente apartado.

2. Estrato funcional y registros de expresión para representar las funciones

En la historia de su desarrollo, desde Leibniz que introdujo la palabra latina *functio*, el objeto función se presenta a través de diversos registros de expresión: lengua usual (utilizada, por ejemplo, en la descripción de movimientos o de evoluciones), representaciones gráficas, tablas de valores o fórmulas algebraicas. Es probable que, de los objetos matemáticos, el objeto función es el que tiene mayor número de representantes. Como lo supone Raymond Duval (1993, p. 51), la comprensión integrativa de un contenido conceptual se sustenta, al menos, en la coordinación de dos registros de representación. Sin embargo, parece que muchos estudiantes consideran que tal objeto es la escritura de una fórmula, aun cuando saben con exactitud, lo que es ostensivo en esa fórmula, como ocurre con la expresión algebraica $y = ln(x)$. Para ellos, la escritura $y = ln(x)$ significa *más* una función que la escritura $y = \int_1^x \frac{dt}{t}$. Además, esta escritura como integral definida para la función logaritmo neperiano no es práctica para calcular sus valores numéricos sino se cuenta con recursos tecnológicos. En tiempos pasados, la obtención de estos valores para realizar cálculos surgía de las famosas *tablas de logaritmos*.

Lo que acabamos de ver no representa una situación general puesto que muchas fórmulas tienen la característica de mostrar el objeto función al mismo tiempo que expresan un programa de cálculo, numérico o formal. De aquí surge la expresión *procept* que combina *proceso* y *objeto*, introducida por Gray & Tall (1994). Su centro de interés es la adquisición de los conocimientos conceptuales y procedimentales necesarios para la práctica del cálculo. No cabe duda que la noción de *procept* tiene un lugar imprescindible en estudios de Cálculo y Análisis Funcional; sin embargo, otros complementos son necesarios en estudios educativos. Un enfoque que requiere atención se relaciona con la resolución de problemas y, correlativamente, con los espacios de trabajo matemáticos idóneos. El manejo de representaciones semióticas es una parte importante en el tipo de actividades que se consideran en el presente trabajo.

En forma particular, las operaciones relacionadas con el cambio de variable o la composición de funciones, $g\circ f(x) = g(f(x))$, tienen un papel importante en la resolución de problemas relacionados con funciones. Su manejo adecuado y correcto corresponde al dominio de una competencia que abarca, a la vez, la adquisición del *procept* de función y habilidades en tratamientos algebraicos y uso de registros de expresión. Consideramos aquí la noción de *competencia* en matemáticas como se precisa en Adjiage & Pluvinage (2008), con base en fundamentos empíricos (observaciones de aula y resultados surgidos de encuestas locales así como de las encuestas internacionales PISA) y cognitivos (en particular, las necesidades de adquisiciones sintácticas). No tiene el carácter global de la "matematice alliteracy" como equivalente a la competencia lingüística general, presentada en Niss (2003, p.7); tampoco puede referirse al conocimiento de elementos separados, o tratamientos aislados. Para que sea completa, autónoma y estable, una competencia debe tener como característica el dominio de una técnica de expresión.

Proponemos un ejemplo sencillo de resolución podrá facilitar la comprensión de estas consideraciones.

Enunciado: Obtener una función f que para todo valor real de x satisfaga la relación

$$(1)\ 2f(x) + f(1-x) = 3x^2.$$

Solución: El cambio de variable $x \to 1- x$ transforma la relación (*1*) en

$$(2)\ 2f(1- x) + f(x) = 3(1- x)^2,$$

puesto que $1 - (1 - x) = x$.

De la combinación $2\times(1) - (2)$ resulta $3f(x) = 6x^2 - 3(1 - x)^2$. De aquí se obtiene la respuesta siguiente:

$$f(x) = x^2 + 2x - 1.$$

Este tipo de enunciado, donde se relacionan valores de una función desconocida f dependiente de x y de $c - x$, donde c es un número real dado, lo hemos propuesto a diversos públicos de estudiantes universitarios que han estudiado Cálculo. En su mayoría no lo resuelven y declaran que no saben qué tratamiento aplicar. No es fácil para ellos encontrar la idea clave que proviene de la consideración de la transformación $\mathcal{T}$ de la recta real definida por $\mathcal{T}: x \to 1-x$. La resolución pasa así por una coordinación del registro algebraico con imaginación figural. Se debe visualizar como una transformación de la recta numérica la relación entre los valores x y $1- x$, presentes en el enunciado. Se trata de una simetría respecto al punto de abscisa ½, el punto fijo de la transformación $x \to 1- x$. Esta transformación es involutiva, es decir, si se aplica a una imagen se obtiene la original; en otras palabras, si dada la transformación $\mathcal{T}: x \to 1- x$ entonces se tiene $\mathcal{T}: 1- x \to x$. La idea del cambio de variable que intercambia $f(x)$ y $f(1-x)$ permite formar un sistema en $f(x)$ y $f(1-x)$ únicamente a partir de la ecuación (1).

Este juego de marcos en el sentido de Régine Douady (1986) refiere a un proceso de visualización, presente en el esquema que está en la introducción de este volumen (*Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives, Figura 3*). El recurso de consideraciones geométricas no es aparente en el enunciado precedente (por eso es un problema poco exitoso); sin embargo, se introduce en forma explícita en situaciones típicas presentes en la enseñanza del Cálculo. El uso correcto de escrituras numéricas en estudios de geometría corresponde a la adquisición de una nueva técnica de expresión. Por ejemplo, al aplicar el *Ejercicio 2* de la caja al grupo (Apartado 1) nos tocó observar un éxito casi total en el cálculo algebraico y un fracaso general en la consideración del dominio de la función, lo que apoya la hipótesis de un cambio de estratos de competencia al pasar del álgebra a los tratamientos funcionales. Respecto a los individuos capaces de utilizar en forma correcta estos tratamientos podemos declarar que han logrado entrar al llamado *Estrato de Competencia Funcional* (Adjiage & Pluvinage, 2012). A la vez, corresponde a rupturas en el modo de pensamiento y en los medios de expresión relacionados con los tratamientos algebraicos. Estas rupturas son manifiestas en la situación que presentamos a continuación, una parte del estudio empírico expuesto en el apartado 4.

En una fórmula como $y = x + \sqrt{x^2 - 4ax}$, sin más precisiones, todos vemos una función real de variable *x*, donde *y* depende del parámetro *a*. El programa de cálculo que la describe, expresado en forma lingüística, es el siguiente: Se hace el cálculo de $x^2 - 4ax$. Si se llega un resultado positivo se obtiene su raíz cuadrada y se le suma *x*; por el contrario, si se llega a un resultado negativo se declara que *x* está situada fuera del dominio de la función. Los estudiantes acostumbrados al diseño de tablas de variaciones pueden tener tanto valores positivos como negativos para el parámetro *a*. Para obtener el signo de y' en la tabla 2 sólo hace falta observar la igualdad

$$\left(\frac{x-2a}{\sqrt{x(x-4a)}}\right)^2 = \frac{x^2-4ax+4a^2}{x^2-4ax} = 1 + \frac{4a^2}{x^2-4ax}.$$

La derivada y' no puede ser igual a la unidad si $a \neq 0$; esto significa que la derivada no se anula.

$a > 0$	x	$-\infty$		0		$4a$		∞
	$y' = \frac{x-2a}{\sqrt{x(x-4a)}} + 1$		$-$	$\Vert$	no definida	$\Vert$	$+$	
	$y = x + \sqrt{x^2 - 4ax}$		$\searrow$	0	no definida	$4a$	$\nearrow$	∞
$a < 0$	x	$-\infty$		$4a$		0		∞
	$y' = \frac{x-2a}{\sqrt{x(x-4a)}} + 1$		$-$	$\Vert$	no definida	$\Vert$	$+$	
	$y = x + \sqrt{x^2 - 4ax}$	$-a$	$\searrow$	$4a$	no definida	0	$\nearrow$	∞

Tabla 2. Variaciones de $y = x + \sqrt{x^2 - 4ax}$.

El caso $a = 0$ conduce a la igualdad $y = x + |x|$ que puede parecer evidente; sin embargo, sorprende que muchos estudiantes y profesores tienen dificultades para obtenerla porque desconocen la fórmula $\sqrt{x^2} = |x|$. Además, observamos algo que ocurre con un cambio de registro y extraña a casi todos los públicos. Podemos darnos cuenta que al pasar del registro gráfico al geométrico, si $a \neq 0$ la curva obtenida es un <u>trozo de hipérbola</u>. El fenómeno subyacente es que el cambio de registro está acompañado de un cambio de marco teórico. El cálculo algebraico formal que conduce a cambiar tanto de registro como de marco, en el sentido de Régine Douady (1986), consiste en aislar la raíz cuadrada y, después, elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad, como sigue:

$$(1)\ y = x + \sqrt{x^2 - 4ax}$$

$$(2)\ y - x = \sqrt{x^2 - 4ax}$$

$$(3)\ (y-x)^2 = x^2 - 4ax$$

$$(4)\ y^2 - 2xy + 4ax = 0.$$

La dificultad que introduce este cálculo formal es que al elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad no obtenemos otra que sea equivalente. La igualdad (2) implica la (3); sin embargo, la recíproca es falsa. Es por eso que la hipérbola de ecuación $y^2 - 2xy - 4x = 0$, *Figura 7*, contiene una parte, en trazo discontinuo, que no pertenece a la gráfica de la función estudiada.

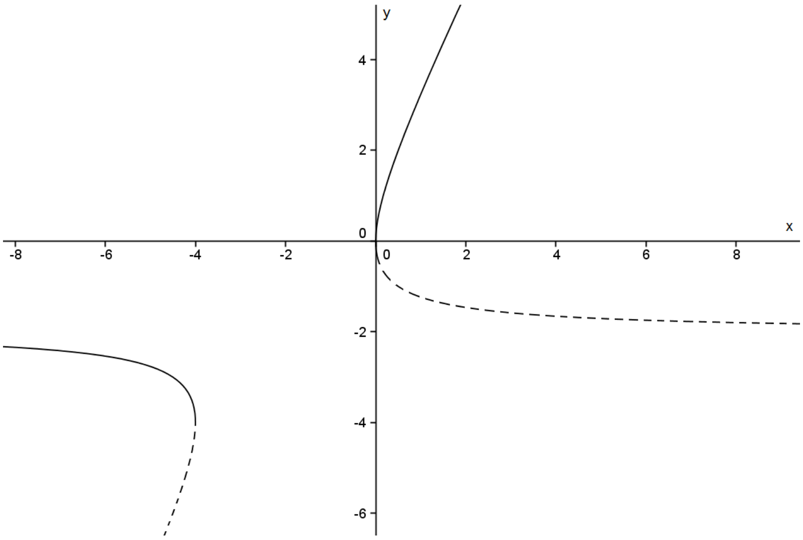


Figura 7. Gráfica de la función si $a = -1$ (trazo continuo) e hipérbola completa.

Figura 8. Imagen de hipérbolas en Wikipedia inglés, artículo *Hyperbola*.

Podemos analizar la *Figura 7* apoyándonos en dos marcos referenciales, el plano cartesiano para representar gráficas de funciones y el plano de la geometría euclidiana. El segundo marco se relaciona con la representación de fenómenos de nuestro medio ambiente (*Figura 8*). En la historia de la matemática la geometría euclidiana se estudió varios siglos antes del surgimiento del plano cartesiano.

Al finalizar este apartado, con relación a los espacios de trabajo matemático, planteamos las preguntas siguientes:

- ¿En el estudio de funciones reales de una variable real la diferencia entre Cálculo Infinitesimal y Análisis Funcional corresponde a un cambio de ETM?
- ¿Cuál puede ser el papel de los artefactos en el trabajo sobre funciones reales de una variable real, en particular, las herramientas proporcionadas por las tecnologías informáticas?

Respecto a la primera pregunta nuestra hipótesis es que en un proceso de enseñanza es conveniente y necesario presentar el paso del Cálculo Diferencial e Integral al Análisis Funcional como la génesis de un nuevo ETM. El segundo, el Análisis Funcional, se apoya en elementos de topología, poco presentes en el primero. Y en nuestra opinión, la presencia de consideraciones topológicas en el Cálculo resulta incómoda a los estudiantes, según lo muestran, por ejemplo, las conocidas dificultades generadas por tópicos como límites de sucesiones.

Respecto a la segunda pregunta, necesitamos más observaciones de campo. Precisamente, el presente artículo pretende contribuir a exhibir reflexiones de los estudiantes; son reflexiones que acompañan al recurso de determinado artefacto.

3. Escenarios didácticos para profesores

Con el fin de profundizar las preguntas planteadas y, en particular, proponer elementos posibles de respuesta nos interesó elaborar escenarios didácticos para la formación continua de docentes. Los escenarios que aplicamos en esta formación continua de profesores se apoyan en la selección de una colección de problemas que conducen al estudio de la magnitud de un fenómeno, la variación de la magnitud del fenómeno y la rapidez con que cambia la variación de la magnitud del fenómeno. Se eligen problemas que pueden traducirse en funciones incluidas en los programas escolares. Las principales fases de estudio de los problemas presentes en nuestros escenarios didácticos son las siguientes:

- Presentación geométrica de la situación donde se trabaja el problema en forma concreta. También se simula mediante una sucesión de diagramas que ilustran los cambios de los elementos geométricos que representan las variables independiente y dependiente. Además, en el plano se usa una representación gráfica de la covariación de los datos surgidos de las mediciones de aspectos de la realidad, o de su simulación.
- Introducción de tablas que representan al fenómeno, a la rapidez con que varía el fenómeno y a la rapidez con que cambia la variación del fenómeno. Se emplea una Hoja Electrónica de Cálculo para el procesamiento de la información.
- Resolución del problema en forma algebraica. Se analiza el comportamiento de la función en puntos o intervalos que reflejan características, o relaciones entre los elementos de la función y los del problema, en el dominio de definición de la función. Así puede considerarse el paso entre el estrato algebraico y el estrato funcional.
- Profundización y generalización de la situación; por ejemplo, al remplazar datos numéricos por parámetros que extienden el estudio de una función a familias de funciones.

La aplicación de este tipo de escenarios didácticos en la formación continua de docentes nos proporcionó una experiencia amplia; sin embargo, en este texto, nos limitamos a presentar un taller que planificamos, específicamente, a la luz de las consideraciones sobre los ETM presentados en los apartados anteriores. Por esta razón, la organización del taller no sigue el orden de las fases presentadas, a pesar de tener todos los elementos señalados; por ejemplo, un estudio geométrico sólo se tiene en la etapa 4. Después de la presentación del escenario del taller, donde los tiempos indicados son vinculantes, reportamos algunas observaciones procedentes a su aplicación a profesores de matemáticas del nivel medio superior.

Escenario de taller de actualización dirigido a profesores de nivel medio superior

Enunciado presentado a los participantes:

> En el campo de los números reales, $\mathbb{R}$, se considera la siguiente ecuación, dependiente del parámetro *a*:
>
> $$x+\sqrt{x^2-4ax}=3a\,.$$

En la Tabla que sigue, escribe cruces (✕) en las celdas, según convenga, de manera que se obtengan relaciones correctas entre filas y columnas.

	a < 0	a = 0	a > 0
La ecuación no tiene soluciones.			
La ecuación tiene exactamente una solución.			
La ecuación tiene exactamente dos soluciones.			
La ecuación tiene una infinidad de soluciones que no cubren $\mathbb{R}$.			
La ecuación tiene todo elemento de $\mathbb{R}$ como solución.			

Desarrollo del taller previsto (los tiempos dados como indicativos, no imperativos) y aplicado

Primera etapa (40 minutos). Se ha previsto que los asistentes se dividen en grupos de tres participantes y cada grupo estudia el enunciado sólo en uno de los siguientes entornos:

- Con papel y lápiz (“A pie”).
- Con calculadora graficadora (posible: Tipo *Voyage 200*).
- Con *software* de Cálculo formal (posibles: *Derive* o *Maple*).

- Con Hoja de Cálculo (*Excel*).
- Con *software* algebraico-geométrico (posibles: *GeoGebra, Sketchpad* o *Cabri*).

En el taller contamos con treinta participantes, dos grupos trabajaron con papel y lápiz, dos con calculadora, dos con *Derive*, dos con *Excel* y dos con *Sketchpad.* Es importante señalar que los profesores de cada grupo usaron la tecnología con base en sus experiencias en las técnicas utilizadas. Esto significa, por ejemplo, que los profesores que formaron el grupo *Excel* ya tenían experiencia en el uso de la *Hoja de Cálculo.* Sin embargo, su experiencia era personal y no procedía del uso del recurso en sus clases. Un parámetro de interés para precisar en un experimento posterior es considerar el uso de *Excel* en clases conducidas por profesores.

Segunda etapa (30 minutos). Cada grupo escribió un breve reporte de su estudio enfatizando los métodos usados. En conclusión, dicen si el enunciado les parece adecuado para estudiantes del nivel medio superior o si prefieren presentar la misma situación con otro enunciado, o si inician con un estudio introductorio (¿cuál?) antes de considerar la situación en estudio.

Tercera etapa (1 hora). Síntesis general en el grupo completo.

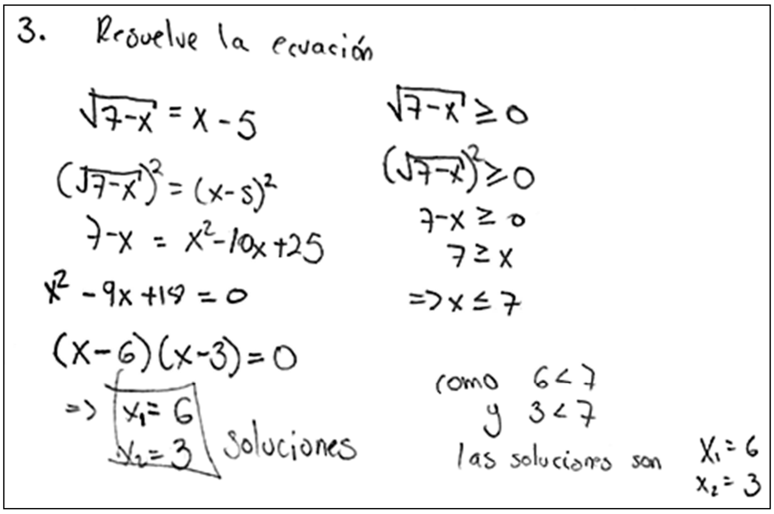
Cuarta etapa (individual 20 minutos). En el plano euclidiano, estudios de la función

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4a} - 3a$$

Y de la curva de ecuación

$$y^2 - 2xy - 6ax + 6ay + 9a^2 + 4a = 0.$$

Quinta etapa (Individual, 45 minutos). Comentar el siguiente procedimiento de resolución de una ecuación presentado por un alumno, citado en Marmolejo & Pluvinage (2012).


3. Resuelve la ecuación

$\sqrt{7-x} = x - 5$

$(\sqrt{7-x})^2 = (x-5)^2$

$7 - x = x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 9x + 18 = 0$

$(x-6)(x-3) = 0$

$\Rightarrow$ $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ Soluciones

$\sqrt{7-x} \geq 0$

$(\sqrt{7-x})^2 \geq 0$

$7 - x \geq 0$

$7 \geq x$

$\Rightarrow x \leq 7$

como $6 < 7$ y $3 < 7$

las soluciones son $x_1 = 6$, $x_2 = 3$

Luego, en el grupo completo, durante una hora, se propuso el diseño de una secuencia didáctica para el aprendizaje de la resolución de ecuaciones que presentan radicales y/o fracciones.

4. Apuntes sobre la aplicación del taller presentado y los tratamientos observados

El taller se aplicó los días 24 y 25 de mayo de 2012, en Tlanchinol, Hidalgo, a unos 270 kilómetros de la Ciudad de México, a un grupo de profesores del norte del Estado. No podemos pretender que, en términos de conocimientos de conceptos y métodos, lo observado tenga carácter representativo de la población docente, sino en cuanto a las formas de organizarse y de usar las herramientas de cálculo numérico, formal o de trazo. Primero reportamos las tendencias principales que se observaron. Luego nos interesamos en las producciones de ciertos grupos. Una tendencia fuerte en el estudio de la ecuación propuesta fue apoyarse en una representación gráfica, a pesar de la dificultad limitada de la resolución algebraica que presentamos a continuación:

$$(1)\ x+\sqrt{x^2-4ax}=3a$$

$$(2)\ \sqrt{x^2-4ax}=3a-x$$

$$(3)\ x^2-4ax=9a^2-6ax+x^2$$

$$(4)\ 2ax=9a^2\ .$$

Existe equivalencia entre las igualdades (1) y (2) y entre las igualdades (3) y (4); sin embargo, no la existe entre las ecuaciones (2) y (3), sólo hay implicación en el sentido de (2) a (3). No obstante, para la mayoría de los participantes esto parece ser el *nudo gordiano* del problema. Por otra parte, cuando se llega a (4) es necesario distinguir la situación $a = 0$, valor con que la igualdad siempre es válida. Los demás casos conducen al único valor posible $x = 9a/2$.

Queda por comprobar el signo de $3a - x$, porque una solución de (3) no es, necesariamente, solución de (2). Se debe cumplir la condición $3a - x \geq 0$. Sustituyendo $9a/2$ en $3a - x$ se obtiene $-3a/2$. Entonces, el valor $9a/2$ es solución simultánea de (3) y (2) sólo si a es negativo.

El análisis meramente algebraico que necesita el estudio constituyó un obstáculo que bloqueó a los participantes. En la *Figura 10* presentamos un intento inconcluso de resolución algebraica de uno de los grupos "A pie". El cálculo formal se encuentra tachado a pesar de ser correcto.

<u>*Observación*</u>: Al lado de la parte tachada se ve un cálculo numérico y un estudio algebraico en $a = 0$ que se suspende al llegar a la escritura $x+\sqrt{x^2}=0$. Más adelante comentamos las dificultades de la raíz cuadrada de un cuadrado y en la *Figura 11* se ve un tratamiento erróneo de este objeto.

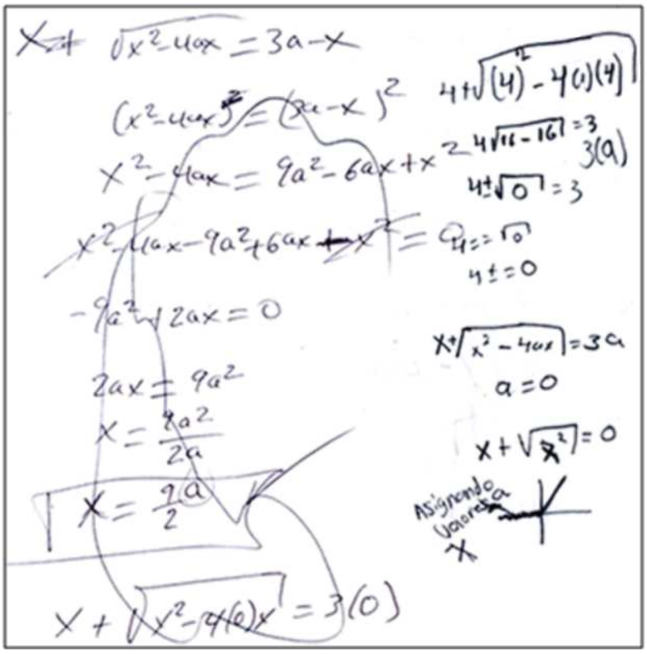


Figura 10. Un intento inconcluso de resolución algebraica.

Los únicos grupos participantes que iniciaron su estudio con un tratamiento meramente algebraico fueron los del *software* de cálculo formal *Derive*. Los demás trazaron una o varias curvas representativas de la función $y = x + \sqrt{x^2 - 4ax}$ o de $y = x + \sqrt{x^2 - 4ax} - 3a$, asignando uno o varios valores numéricos al parámetro a (por ejemplo, –1 y 1). Sin embargo, no existe orientación que proporcione algún enunciado que conduzca a un rumbo con una técnica particular.

Nuestra hipótesis sobre la eliminación del método meramente algebraico de sólo cuatro pasos, descrito anteriormente, es el estatuto incierto del paso de $y - x = \sqrt{x^2 - 4ax}$ a $(y - x)^2 = x^2 - 4ax$; o sea, de (2) a (3), relacionado con el reducido espacio que se dedica al símbolo de la raíz cuadrada en los programas curriculares. Una observación que apoya a esta sentencia en las actividades de los participantes del taller es la ausencia completa del símbolo del valor absoluto. Su escritura no está presente en los reportes de trabajo de los grupos de trabajo.

A partir de la perspectiva de los ETM proponemos la hipótesis más general siguiente: En la enseñanza tradicional se hace poco énfasis en técnicas que, directamente, no se apoyan en un sustento teórico. Un ejemplo es el número negativo. Realmente, es un objeto matemático generado a partir de la visión teórica de la recta numérica. En la enseñanza predomina la insistencia en escrituras de números negativos con el símbolo "–" como en el ejemplo "–1"; sin embargo, el valor absoluto de un número no ese mismo número sin signo, es el mayor entre el número dado y su opuesto. Por ejemplo, el valor absoluto de –1 es – (–1), esto es, el opuesto de –1. En espacios de trabajos personales de estudiantes, y en la perspectiva de sus desarrollos, podrían reforzarse actividades en las que esté presente la identidad $\sqrt{x^2} = |x|$. Además, es posible suponer que actividades de este tipo propician y contribuyen a la desaparición de la expresión incorrecta "$\sqrt{x^2} = x$", error clásico presente en varios reportes de actividades del taller. Nos sorprendió su presencia en actividades de profesores, como lo ilustra la *Figura 11*.

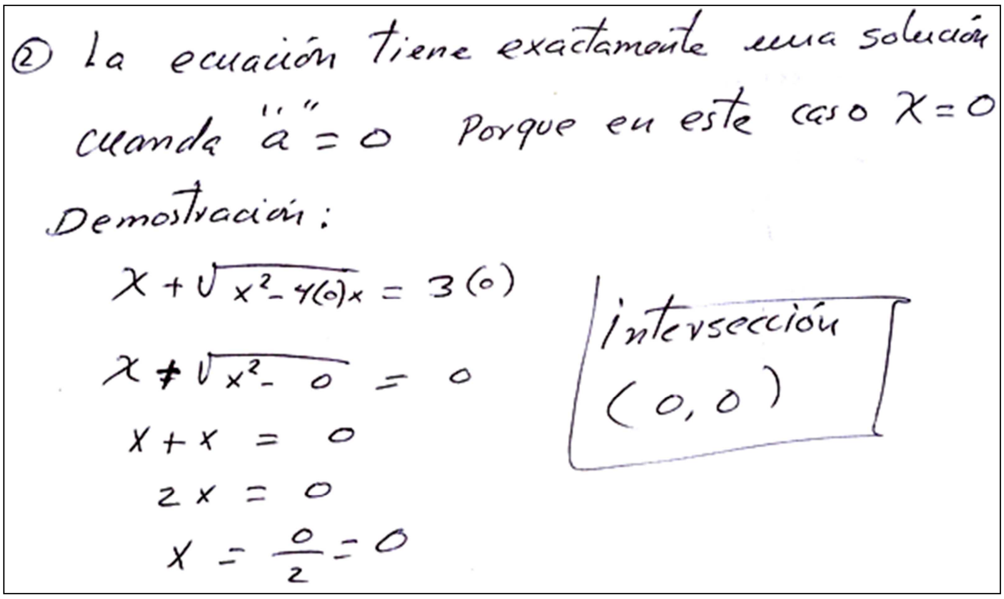

② La ecuación tiene exactamente una solución
cuando "a" = 0 Porque en este caso X = 0
Demostración:
$x + \sqrt{x^2 - 4(0)x} = 3(0)$
$x + \sqrt{x^2 - 0} = 0$
$x + x = 0$
$2x = 0$
$x = \frac{0}{2} = 0$
intersección
(0, 0)

Figura 11. Respuesta de un profesor.

Los grupos "A pie" fueron los de producción más diversificada en sus múltiples intentos: trazo de curvas, tablas de valores numéricos, estudio algebraico (*Figura 10*). Llegaron a la respuesta correcta sólo si $a < 0$.

Los grupos *Excel* se apoyaron en la introducción de nada más una fila de valores en correspondencia. Por ejemplo, en la *Tabla 3* se exhibe el valor que toma $x + \sqrt{x^2 - 4ax} - 3a$ con $a = -1$ y $x = 5$. Con esa información obtuvieron resultados correctos. En particular, encontraron que la curva tiene una asíntota paralela al eje $x'x$ y que no es posible la intersección entre la curva y el eje $x'x$, para ciertos valores del parámetro a. Este resultado asintótico no fue encontrado ni comentado por los otros equipos.

	A	B	C
1	*a*	*x*	$x+\sqrt{(x*x-4*a*x)}-3*a$
2	–1	5	14.70820393

Tabla 3. Estudio en *Excel* con introducción en C2 de “=B2+RAIZ(B2∗B2-4∗A2∗B2)-3∗A2”.

Los grupos *Calculadora Graficadora* comentaron la necesidad de un buen conocimiento de las funciones y de un buen manejo de esta herramienta. Un grupo tuvo dificultad para visualizar la representación gráfica cuando el parámetro es igual a cero porque una sección queda en la parte negativa del eje $x'x$ y no es posible verla. Sin embargo, llegaron a resultados correctos después de unos ensayos. En otro ejemplo mostraron que cuando se introduce el valor $x = -3$ la ecuación resultante es $y = 0$, si el valor de a es cero.

Los grupos *Derive* fueron los que mostraron más reservas con la herramienta puesta a su disposición. No pudieron resolver la ecuación con el *software*. Hubo que transformarla. Primero deben elevarse al cuadrado ambos miembros. Se dieron cuenta que se incorporaban soluciones extrañas. Concluyeron que el *Derive* no está hecho para resolver este tipo de ecuaciones. En el proceso cometieron algunos errores; por ejemplo, la falsa linealidad de la raíz cuadrada: “la raíz cuadrada de la suma de dos números es la suma de las raíces cuadradas de esos números”. Sin embargo, al final llegaron a soluciones correctas. Por eso, nuestra opinión es diferente a la de los participantes, el s*oftware Derive* es, posiblemente, más exigente que otras herramientas; sin embargo, es muy potente si se usa, no para obtener procesos con soluciones acabadas, más bien, para explorar perspectivas de carácter funcional, más amplias que la mera algebraica (con *Maple* sucedería algo semejante).

Los grupos de Geometría Analítica Dinámica, al contrario de los anteriores, expresaron la máxima satisfacción en cuanto a la forma utilizada para trabajar. Llegaron a resultados correctos y hasta propusieron la resolución algebraica (con la solución $x = \frac{9a}{2}$, si $a < 0$).
Finalizamos este apartado con las dos conclusiones siguientes, expresadas por participantes del taller y relacionadas con la labor del docente:

- La experiencia del taller generó en nosotros una toma de conciencia en la necesidad de utilizar como profesores en la tarea escolar el *software* y las calculadoras.
- Al variar en la fórmula un parámetro nos queda claro lo que significa la variación porque lo que cambia es todo el objeto función. Cuando la fórmula no contiene parámetros la variación se restringe al cambio de un punto sobre una curva fija. Estudiando sólo esto último la visión de variación funcional queda más restringida en el sujeto.

5. Perspectivas abiertas después del taller exploratorio

Después de nuestro estudio exploratorio percibimos, por un lado, pistas de posibles investigaciones y, por otro, pistas para la enseñanza.

Pistas de investigación. Según quedó asentado en el taller, propusimos un estudio de ecuación que necesita consideraciones funcionales. Su desarrollo mostró que la introducción al tema, vía un trabajo funcional, es más placentera y más accesible que la algebraica. De aquí surge la idea de comprobar si se generaliza el fenómeno correspondiente a la consideración de aspectos cualitativos y descriptivos antes de consideraciones algorítmicas, numéricas o algebraicas. Otro fenómeno posible de profundizar es el uso de *software* con diversas orientaciones; por ejemplo, el mismo sistema *GeoGebra* proporciona la posibilidad de trazar figuras geométricas, trabajar con una Hoja de Cálculo y graficar funciones. Si a un grupo se le da un impulso hacia una de estas técnicas para emprender un estudio, ¿cómo influye esto en su trabajo matemático?

Pistas para la enseñanza. Al expresarnos en términos de la teoría antropológica de lo didáctico (la conocida sucesión: tarea, técnica, tecnología, teoría) pudimos constatar un fenómeno de casi rechazo en la enseñanza, distinto al fenómeno de los *nichos ecológicos* de objetos matemáticos, señalado en varias investigaciones de matemática educativa. Tal fenómeno es que en la enseñanza tienen un sitio muy reducido las técnicas que no se apoyan en sustentos teóricos, presentadas en un mismo tiempo a los estudiantes. Casos que corresponden a tratamientos útiles son un verdadero defecto de enseñanza; en particular, pensemos en el valor absoluto comentado antes o, más generalmente, en las funciones definidas a trozos, objetos presentes en la computación, sin papel alguno en la teoría antes de un nivel avanzado; por ejemplo, en las teorías de integración de Riemann o Lebesgue. Tenemos la idea de que la pista del desarrollo de *espacios de trabajo matemático personales* a *espacios de trabajo matemático idóneos* podría reforzar la presencia de objetos matemáticos en la enseñanza, útiles en la práctica aun cuando no sea muy importante su función en la teoría presente, en el aprendizaje en curso.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADJIAGE, R. & PLUVINAGE, F. (2008). A Numerical Landscape (p. 5-57). In Calvin L. Petroselli (Eds), R. *Science Education Issues and Developments*. New-York: Nova Publishers.

ADJIAGE R. &PLUVINAGE, F. (2012), Strates de compétences en mathématiques. *Repères IREM, vol. 88*, 43–72.

CUEVAS VALLEJO, C. A., MORENO GUZMÁN, S. & PLUVINAGE, F. (2005). Una experiencia del objeto función. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 177–208.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 5–31.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.

GRAY, E. & TALL, D. (1994) "Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic", *Journal for Research in Mathematics Education.* 25(2), 115–140. Available online at http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1991h-gray-procept-pme.pdf

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175–193.

KUZNIAK A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.

MORENO GUZMÁN, S. & CUEVAS VALLEJO, C. A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Educación Matemática*. Núm. 002 Vol.16, 93-104. Disponible en http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=40516205

NISS, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. Disponible en http://www7.nationalacademies.org/mseb/Mathematical_Competencies_and_the_Learning_of_Mathematics.pdf

PLUVINAGE, F. & MARMOLEJO RIVAS, E. (2012). Une recherche didactique recourant à la modélisation et au travail collaboratif: un cas d'étude de paramètres(p. 11-24), en *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (Hitt, F. & Cortés, C., Eds.), Montréal, Canada, Loze-Dion éditeur Inc.

DAVID ZALDÍVAR ROJAS, CLAUDIA CEN CHE, EDUARDO BRICEÑO SOLÍS, MAGALI MÉNDEZ GUEVARA, FRANCISCO CORDERO OSORIO

EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO Y LA SITUACIÓN ESPECÍFICA DE LA MATEMÁTICA FUNCIONAL: UN EJERCICIO DE DIÁLOGO

THE MATHEMATICAL WORKSPACE AND THE SPECIFIC SITUATION OF THE FUNCTIONAL MATHEMATIC: A DIALOGUE EXERCISE

RESUMEN.

Investigaciones en Matemática Educativa resaltan aspectos de la naturaleza del conocimiento matemático y su aprendizaje, según la particularidad de su objeto de estudio. El interés es exponer una investigación socioepistemológica que considera que a través de la Situación Especifica es posible generar aprendizajes. Por ello se consideró realizar un ejercicio de diálogo entre el Espacio de Trabajo Matemático y de Situación Específica. La finalidad es reflexionar sus desarrollos en términos de sus funcionalidades a través de tres ejes de análisis: la concepción de sujeto que cada una manifiesta, el contenido matemático que se aprende y la consideración del proceso de aprendizaje. Ello nos permite establecer el diálogo entre las nociones mencionadas que, aunque tienen naturalezas diferentes, intentan caracterizar y analizar sistemáticamente la producción de los estudiantes e intervenir en el sistema didáctico.

PALABRAS CLAVE: *Matemática funcional, resignificación, situación específica, espacio de trabajo matemático.*

ABSTRACT.

In the field of Mathematics Education there are several frameworks that emphasize some aspects about the mathematical knowledge's nature and learning, according to their object of study. Our aim is to exhibit a Socioepistemological study, which considers a Specific Situation as a mean to generate learning. In order to do so, we consider a dialogue exercise between the both notions of Mathematical Workspace and the Specific Situation in Socioepistemology, and to ponder about these constructs, their developments and functionalities. We consider three analysis axes: the conceptions about the subject, the nature of the mathematical concepts to be learned, and how the process of learning occurs. This enables us to establish a dialogue between the notions mentioned before, which have different natures, nevertheless they make efforts to analyze and to characterize, in a systematically way, the production of the students and to step in on the didactical system.

KEY WORDS: *Use of the graph, redefinition, Specific Situation, Mathematical Workspace.*

RÉSUMÉ.

Les recherches en Didactique des Mathématiques mettent en évidence les aspects de la nature des connaissances mathématiques et de leur apprentissage, selon la particularité de l'objet d'étude. Notre objectif est de montrer grâce à une étude socio-épistémomologique qu'une qu'il est possible de générer un apprentissage à partir d'une situation particulière. Nous développons ce point de vue dans un dialogue théorique entre l'Espace de Travail Mathématique et l'idée de Situation Particulière en socio-épistémologie. L'objectif est de réfléchir sur leur relations en

Particulière. L'objective est de réfléchir sur leur développement en terme de leurs fonctionnalités à travers des trois axes d'analyse: la conception du sujet du deux expriment, sur le contenu du apprentissage et sur le consideration de l'apprentissage se passé. Cela nous permet d'établir un dialogue entre les notions mentionné que même si elles ont des natures différentes, elles essayer de caractériser et d'analyser systématiquement la production des élèves et d'intervenir dans le système éducatif.

MOTS CLÉS: *Utilisation du grafique, redéfinition, situation particulière, espace de travail mathématique.*

RESUMO.

Vários pesquisas em Educação Matemática ressaltou aspectos da natureza do conhecimento matemático e do sua aprendizagem, de acordo com a particularidade do seu objeto estudo. Nosso interesse é apresentar um exemplo de uma pesquisa socioepistemológica que mostra como uma situação específica pode gerar aprendizagem. Este é um exercício de diálogo entre as noções de espaço de trabalho de matemática e situação específica, enfatizando o desenvolvimento destas noções e suas funcionalidade. Consideramos três áreas de análise: a concepção do sujeito que se manifesta cada abordagem, o conteúdo matemático aprendido e como é acontece e processo de aprendizagem. Isso nos permite estabelecer um diálogo entre as noções mencionadas que, embora eles têm naturezas diferentes, para tentar caracterizar e analisar sistematicamente a produção dos alunos e intervir no sistema educacional.

PALABRAS CHAVE: Matemática funcional, Ressignificação, espaço de trabalho de matemática, situação específica.

1. INTRODUCCIÓN

La Socioepiepistemología confiere a la actividad humana la función de la producción de los objetos matemáticos (Cantoral & Farfán, 2003; Cordero, 2008), por lo que atiende a aquellas prácticas que producen o favorecen tales objetos. El énfasis está en modelar el papel de la *práctica social* como generadora de conocimiento matemático con la intención de diseñar y proponer *situaciones específicas* que intervengan en el sistema didáctico (Cantoral, Farfán, Lezama & Martínez-Sierra, 2006). En este sentido, se *problematiza* el saber matemático, confrontando las matemáticas escolares -que dictan lo que se debe aprender- con las prácticas sociales que norman la construcción de conocimiento. Tales prácticas son identificadas y reconocidas a través de los *usos del conocimiento* en diferentes escenarios, ya sean históricos, profesionales o escolares con propuestas didácticas no convencionales (Buendía & Montiel, 2011), por lo que se reconoce la naturaleza de los escenarios como parte de las explicaciones teóricas. En este sentido, se considera que la práctica social es la que regula y norma la actividad de los individuos y genera conocimiento matemático en instituciones, pues es ahí en donde las acciones tendrán significados propios e intención lo que propicia un rediseño del discurso matemático escolar.

En las investigaciones socioepistemológicas se conforma la evidencia empírica al entender la función de la práctica social en la producción de conocimiento matemático en un proceso institucional específico. Un ejemplo es el escolar; en donde por medio de acercamientos didácticos y diseños de situación no tradicionales se propone dotar de significados al saber matemático a través de su uso. Para tal efecto, se construyen marcos de referencia compuestos de diversas categorías del conocimiento matemático que exhiben la funcionalidad a través de actividades que promueven su uso y desarrollo en una *situación específica* . Es en ésta en donde se "materializa" y se hace palpable la función de las prácticas sociales en la construcción de conocimiento matemático.

Entonces, en la investigación socioepistemológica se propone la situación específica para dotar de significación al saber matemático. Por otro lado, el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), que propone Kuzniak (2011), propone un ambiente organizado que permite el trabajo del alumno para la resolución de problemas matemáticos con la articulación de dos niveles: uno *Epistemológico* y otro *Cognitivo, articulados por medio de un proceso de génesis*. El primero se centra en lo que conforma el contenido matemático, es decir, en el concepto matemático que será aprendido; mientras que el segundo nivel dá cuenta de cómo los alumnos se apropian de conocimientos matemáticos cuando resuelven el problema planteado. De esta manera, postula procesos asociados a la actividad matemática tales como: visualización, construcción y prueba. El nivel epistemológico pone su énfasis en los signos, los instrumentos que median y el carácter discursivo del razonamiento (Kuzniak, 2011).

Las propuestas anteriores ponen énfasis sobre los procesos de actividad matemática que ejercen los estudiantes frente a un "diseño", lo cual dio pie a una reflexión sobre las relaciones y diferencias entre la *situación específica*, de la Teoría Socioepistemológica (TSE) y el ETM. Ambas propuestas surgieron de investigaciones que convergen en la necesidad de considerar al estudiante o participante con un papel protagónico en su desarrollo matemático, por lo que este documento expone un ejercicio de diálogo. El fin de esto es presentar un ejemplo de una *situación específica* desde la investigación socioepistemológica, la cual podría aportar un punto de vista al ETM. Por lo que fue necesario comprender la lógica de cada uno de los marcos (Artigue, 2009), además de considerar los principios de las teorías, sus metodologías y sus preguntas de investigación (Radford, 2008).

De inicio se expondrá cómo se realiza la conformación de la situación específica en la matemática *funcional* y el tipo de actividades que se generan. Enseguida reflexionamos e interpretamos los elementos que conforman un ETM y su naturaleza. Por último, se presentará un ejemplo que expone evidencia de la manera en la cual una *situación específica* es puesta en ejecución y cuáles son las relaciones y diferencias con el ETM.

2. LA SOCIOESPISTEMOLOGÍA Y EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO

2.1. *La Socioepistemología y su naturaleza de estudio*

La TSE no pretende generalizar sus resultados sobre el rediseño del discurso matemático escolar, sino más bien evidenciar aspectos del entramado social de la construcción del conocimiento que permea en la existencia de un sujeto social, puesto que sus acciones responden y tienen su influencia por el grupo social al que pertenece debido a su presencia en escenarios específicos. Por lo cual una pregunta que está presente en sus investigaciones es sobre la naturaleza del objeto matemático y cómo emerge conocimiento matemático a partir de la actividad humana; además de cómo el conocimiento es resultado de factores epistemológicos y sociales en su origen y función social. En sí, esta visión se ocupa de *desmatematizar el saber matemático al aceptar que antes de hablar de los objetos, habrá que hacerlo sobre un complejo de prácticas, de naturaleza social, que den sentido y significado al saber matemático escolar* (Cabañas, 2010). Lo social consiste en reconocer que la matemática escolar no nace de una simplificación de la matemática, sino de una serie de adaptaciones y transposiciones. El estatus del conocimiento matemático no estriba sólo en la representación de objetos abstractos que anteceden a alguna actividad humana, sino también es una producción social que cambia y se transforma.

Así, la TSE considera que al hablar de conocimiento matemático, no es posible omitir a las prácticas sociales que acompañaron a tal construcción de conocimiento. No niega la importancia de los objetos matemáticos, sino que los ubica en un nivel diferente que aquellas aproximaciones basadas únicamente en la cognición o en las representaciones, por ejemplo. Con esto se plantea el desarrollo de una matemática funcional para las personas, un conocimiento integrado a su vida, que transforma al sujeto y transforma su realidad (Cordero, 2008).

2.2. *El ETM y la Situación Específica: un ejercicio de diálogo*

En este apartado se expondrán los puntos que a nuestro parecer son claves en los análisis que se desarrollan en el seno de ambas aproximaciones teóricas. El objetivo no es brindar algún tipo de complementariedad entre ellas o alguna relación, sino determinar qué elementos permean en la concepción de lo que llaman diseño y abre las posibilidades de aprendizajes matemáticos en los estudiantes o participantes.

En términos metodológicos, la aproximación en ETM propone un "diseño" que permita observar al participante en acción, es decir, resolviendo problemas de matemáticas. Deviene necesario la formulación de un problema que sea el activador del espacio y "atractivo" para los estudiantes, en donde se pueda observar el trabajo matemático asociado a la obra del matemático. El plano cognitivo es fundamental, ahí se ubica al estudiante. El énfasis en este plano entonces gira alrededor de procesos de visualización, construcción y prueba (Kuzniak, 2010), por lo que se infiere pareciera que el ETM se interesa en identificar los significados que se generan en la visualización de los objetos matemáticos y cómo se emplean en la resolución de un problema.

En el plano epistemológico se recalcan los objetos matemáticos, aunado a ellos están los artefactos que serán las herramientas que pondrán en acción a los objetos matemáticos; así como también es necesario establecer el marco referencial en donde están constituidas las propiedades del objeto matemático. Estos dos planos, concebidos paralelos, están articulados a través de procesos llamados de génesis. Con ello, el trabajo matemático, debe conducir al estado óptimo de un proceso de aprendizaje, es decir, a la comprensión del objeto matemático en juego. Además, las interacciones entre los alumnos permiten no solamente la emergencia del discurso sino también una evolución verbalisable y audible gracias a la cual se puede acceder a la identificación de una posible comprensión de los objetos matemáticos (Barrera, 2012), es decir a los argumentos que generan los estudiantes.

Por su parte, en la TSE uno de los principios consiste en la observación de los estudiantes mientras usan el conocimiento en la construcción de argumentos funcionales dada una *situación específica*[1] en donde se problematiza cierto contenido matemático. Es en el uso que se analiza la actividad humana que permitirá la producción de los objetos, los cuales se consideran como no preexistentes a dicha actividad (Cantoral, Farfán, Lezama & Martínez-Sierra, 2006).

La *situación específica* está referida a un marco funcional del conocimiento matemático compuesto por significados, procedimientos, procesos-objetos y argumentos que integran una epistemología basada en prácticas sociales que fundamentan diversas categorías de conocimiento matemático. Por ejemplo, la categoría Comportamiento Tendencial de las Funciones (CTF), no es un concepto matemático, sino *una argumentación que establece relaciones entre funciones y está compuesto de una colección coordinada de conceptos en situaciones donde se discuten aspectos globales de variación* (Cordero, 1998). En esta categoría se congrega una postura epistemológica sobre el rol de las funciones y sus gráficas que deviene en una problematización de dichas nociones en actividades matemáticas que posteriormente tendrán cabida en un sistema didáctico. La categoría conforma un marco de referencia que establece relaciones entre gráficas de funciones y elementos como la variación, el cambio, la tendencia o la anticipación, entre otros. Estos elementos conforman el diseño de situación que con base a esta categoría, tienen su acento en *el uso de la gráfica*. Dichas relaciones se ven materializadas en una situación la cual no expresa en sí un problema matemático, sino que permiten estructurar actividades que provocan una argumentación del objeto matemático en cuestión. Así pues, el foco no se encuentra en el desarrollo de los conceptos, sino que el interés radica en la *argumentación* que la categoría provoca. El diseño de la situación específica debe conducir a desarrollar ideas relacionadas con el pensamiento variacional a través del uso de argumentos gráficos.

Ambas aproximaciones consideran el aspecto social, sin embargo, mientras que en el ETM se consideran las puestas en escena en el salón de clases y están en juego las interacciones y socialización de los estudiantes en el plano cognitivo; en la TSE la cognición dependerá del escenario, el énfasis estará en comprender por qué los estudiantes hacen lo que hacen, de ahí la práctica social, y por qué argumentan de esa manera, es decir, cómo usan las herramientas matemáticas. Por lo anterior, más que centrarce en la comprensión del objeto matemático, se pretende desentrañar aquellas características específicas del saber que está en uso.

3. UN DISEÑO DE SITUACIÓN EN LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

La situación que a continuación se presenta consiste en el uso de las gráficas a partir de la puesta en escena de un diseño que se basa en una *situación específica* de Transformación. En la Transformación se discuten dos aspectos: el primero es que a partir de cualquier función en la cual se privilegian variaciones de sus parámetros[2] y los efectos que éstos provocan en las gráficas de dichas funciones, se crea una conceptualización de la función como una instrucción que organiza comportamientos, la cual está arraigada a la modelación-graficación. El segundo

[1] La situación específica se expresa en un diseño compuesto de actividades o tareas donde la matemática es puesta en uso y se desarrolla. La Se está fundamentada en las categorías de conocimiento matemático.
[2] Por ejemplo, en la función $Y=Ax+B$, los parámetros que se varían son A y B.

aspecto es que el operar[3] con las gráficas de funciones se privilegia el tratar con comportamientos, específicamente comportamientos tendenciales.

Las actividades que se generan, en la situación, *problematizan* a la gráfica de una manera no convencional: como argumentación de comportamientos, como herramienta en la resolución de problemas, como comportamientos geométricos o transformaciones (Cordero, Cen & Suárez, 2010). Esto conduce a entender *el funcionamiento* de la gráfica que tiene implícita la intención de su uso que desempeña en actividades matemáticas y a su vez identificar y entender *la forma* de la gráfica, es decir, la manera en cómo es abordada. El *funcionamiento* y la *forma* de la gráfica son un binomio inherentes al uso; donde el primero se expresa en las ejecuciones, acciones u operaciones que se desarrollan con el uso de la gráfica, mientras que la *forma* son las maneras en que se presenta tal funcionamiento y su representación (Cordero & Flores, 2007; Cordero *et al*., 2010).

El estatus otorgado al uso de la gráfica en la socioepistemología compone un discurso escolar completamente diferente al que rige actualmente en el estudio de las gráficas. Implica también ubicar en diferentes niveles a elementos que componen los diseños de situación. Principalmente, los referidos a la modelación, a la graficación y al rol de la tecnología escolar, puesto que en estos elementos se hayan piezas fundamentales sobre los cuales se integra una matemática funcional. Es en la naturaleza de estas nociones que posteriormente encontraremos diferencias respecto al ETM, las cuales plantearemos a partir de un ejemplo particular.

3.1. *La Graficación, la Modelación y la Tecnología escolar en una matemática funcional*

Generalmente, las investigaciones en Matemática Educativa que versan sobre la gráfica de una función explican y delimitan los siguientes aspectos: las dificultades que tienen los estudiantes en su interpretación, lectura o elaboración (Leinhardt, Zaslazvsky & Stein, 1990; Sherin, 2000; DiSessa, Hammer & Sherin, 1991); la representación del concepto de función desde una perspectiva cognitiva (Dubinsky & Harel, 1992); las dificultades en la conversión de la representación algebraica a la gráfica (Duval, 1999); la potencialidad de la gráfica en la resolución de problemas (Maschieto, 2001) o bien en el privilegio de enseñar el concepto de función por medios gráficos para trabajar estas funciones como objetos matemáticos (Bloch, 2002).

En la Socioepistemología, la graficación se considera como el estudio del uso de la gráfica en situaciones específicas que responden a la funcionalidad del conocimiento matemático. En este sentido, la gráfica se torna una herramienta y una argumentación que se desarrolla y norma la construcción de conocimiento (Cordero, *et al.*, 2010). Lo anterior significa que es el uso de la gráfica en esa situación la que pone de manifiesto el conocimiento matemático a ser aprendido a través de su funcionamiento y forma, de manera que el uso de la gráfica es la argumentación que emerge de la situación. Por ejemplo, el uso de la derivada puede *resignificarse* a través de analizar los comportamientos tendenciales de la gráfica de un polinomio al compararlo con el comportamiento de una recta en el corte con el eje de las ordenadas[4] (Cordero, 2008). Con ello se admite así que la gráfica es un modelo que se sostiene a sí misma. De esta manera, la ecuación pasa a un segundo término y se resignifica como una instrucción que organiza

[3] Suma, resta, multiplicación de gráficas.
[4] A esta propiedad se le ha denominado “La Linealidad del Polinomio”.

comportamientos a partir de la variación de sus parámetros y sus efectos en el comportamiento de su gráfica.

En los últimos años el avance en la investigación de los procesos de modelación escolar ha sido vertiginoso. Se considera a la modelación como un eje fundamental en la conformación de programas de estudio e inclusive de los discursos sobre la formación de ciudadanos críticos (Kaiser y Sriraman, 2006). Sin duda existen diversas investigaciones que aportan elementos para ello, pero han basado su estudio en la modelación escolar como proceso pre-establecido, donde el objetivo principal es *transformar una realidad en términos matemáticos*. Por otro lado, nuestro interés está en expresar la modelación como una construcción de conocimiento matemático en sí misma (Cordero, 2011), que está caracterizada por la producción de argumentaciones y herramientas de corte matemático que los participantes ponen en juego durante el desarrollo de las actividades. El énfasis está en generar argumentos que provoquen el desarrollo y articulación de usos (Méndez y Cordero, 2012). En particular afirmamos que las gráficas de las funciones se integrarían a la modelación en un binomio indisoluble y dialéctico: la modelación-graficación (Suárez & Cordero, 2010).

Pero también debemos de incorporar a la discusión a la tecnología escolar. Por ejemplo el software educativo o las calculadoras graficadoras, han mostrado cierto impacto positivo en el manejo y visualización de objetos matemáticos en ambientes numéricos, algebraicos y gráficos en las aulas de matemáticas (NCTM, 2008). Sin embargo, esto no es suficiente para enteder el rol de la tecnología en el parendizaje de la matemática; puesto que generalmente el estatus otrogado a la tecnología es secundario.

Hay investigaciones que atienden esa carencia, estudian la tecnología y su influencia en el aprendizaje matemático. Por ejemplo, se encuentran investigaciones que postulan que la tecnología tiene el rol de mediador semiótico (Maschietto & Bartolini, 2009) o gesticular (Radford, 2012); también como una herramienta para representar el objeto matemático (Hitt, 1998) y por último, investigaciones desde una génesis instrumental (Artigue, 2002).

En socioepistemología se propone realizar estudios sobre el rol que juega la tecnología escolar en la construcción del conocimiento matemático, por ello es una componente que junto a la modelación y graficación se integra para nutrir los significados y procedimientos en situaciones específicas (Suárez & Cordero, 2010). Por lo que la tecnología escolar adquiere un nivel no solo de mediador semiótico, sino que con ella misma es posible que los estudiantes deduzcan propiedades, asignen significados a los objetos matemáticos y permita inclusive el desarrollo del uso de conocimiento (Briceño & Cordero, 2012).

3.2. Una situación específica y un ejemplo

El propósito de este apartado es brindar evidencias del funcionamiento de una *situación específica*, para el caso del uso de las gráficas. Los datos corresponden a puestas en escena de talleres temáticos entre los años de 2009 y 2011, cuyas edades de los participantes oscilaron entre los 13 y 16 años. Los talleres se llevaron a cabo en un escenario de divulgación de las ciencias, donde se desarrollaron actividades de un diseño llamado “La Situación del Resorte” (Zaldívar & Cordero, 2012). Dada la naturaleza del escenario, la participación de los asistentes fue voluntaria, los tiempos de trabajo fueron de aproximadamente media hora y en general se tuvieron poblaciones con diversas formaciones, edades y estratos sociales. Todas esas características, en lugar de convertirse en dificultades, diversificó las respuestas, los estilos de participación y aportó riqueza a las argumentaciones que se generaron e influyeron también en cómo se generaron.

Se rescataron algunas producciones de los participantes, mismos que se presentan en esta sección, surgen cuando se discuten elementos básicos de la noción matemática de estabilidad en las soluciones de una ecuación diferencial lineal. Cabe señalar que las ecuaciones diferenciales son abordadas en México en el nivel superior (estudiantes a partir de 18 años), por lo que este ejemplo es digno de interés ya que desde una postura socioepistemológica es posible discutir tal propiedad con participantes de diferentes edades y formaciones.

La Situación del Resorte, fundamentada con base en la categoría Comportamiento Tendencial de las Funciones (CTF) (Cordero, 2008), tiene por objetivo que los participantes a partir de la manipulación de un resorte y al colocarle una pesa en un extremo, *desarrollen ideas relacionadas con el pensamiento variacional y de estabilidad por medio del uso de argumentos gráficos con la implementación de calculadoras gráficadoras y sensores de movimiento* (figura 1).

Figura 1. Instrumento de modelación

Como se señaló en líneas anteriores, el escenario donde se implementó el diseño es de divulgación científica, por lo que en ningún momento de la puesta en escena se hacen explícitas funciones o ecuaciones, sino que el argumento de la categoría *Comportamiento Tendencial* (CT) es intrínseco a la curva o trayectoria normada por el movimiento (Zaldívar & Cordero, 2012). La construcción misma de las gráficas formula la tendencia y el patrón de comportamiento. Así, las nociones de asintoticidad y estabilidad se usan y resignifican en términos de comportamientos con tendencia al anticipar el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo.

3.3. *El diseño y las evidencias de usos*

De inicio, se les pide a los participantes que describan y expliquen las características del movimiento del resorte cuando se coloca una pesa y después que “dibujen” dicho movimiento. Como podría esperarse, las explicaciones y dibujos no tienen relación con gráficas cartesianas. Generalmente, se describe y argumenta por medio de *trayectorias* y *dibujos icónicos* (*figuras 2, 3 y 4*). Existe la necesidad de dibujar aquello que se mueve, complementando con íconos que describen aspectos como la *velocidad*, *fuerza* o *rapidez* (figura 4). O bien, disponen de íconos para indicar un orden temporal o para describir etapas (figura 5).

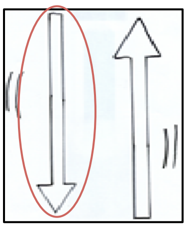


Figura 2. Flecha con dirección.

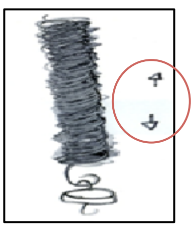


Figura 3. Flechas con dirección y sentido.

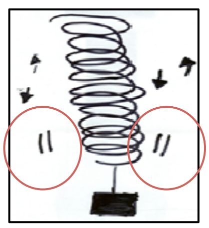


Figura 4. Dibujos icónicos para indicar intensidad.

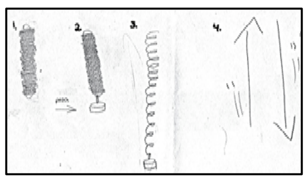


Figura 5. Íconos describiendo temporalidad

Pieza importante en las producciones son los gestos y el tipo *lenguaje* que se usa para argumentar sobre la pregunta inicial. El siguiente extracto evidencia los argumentos usados para referirse al tipo de movimiento que realiza el resorte.

Extracto 1[5]

Divulgador: y a ese resorte le vamos a poner una pesa (Se muestra la pesa y el resorte a los participantes). […] ¿Y qué creen que va a hacer?...

Participante A: estirarse…[realiza un gesto con las dos manos separándo una de la otra]

[…]

Participante B: brincar… [mueve la mano de arriba hacia abajo repetidamente]

Participante C: vibrar…[sacude la mano]

Al respecto de lo anterior, algunas investigaciones mencionan que este tipo de producciones son comunes, sin embargo, no son considerados como elementos a discutir en las clases de matemáticas y tampoco como elementos que en el discurso matemático escolar se usen para referirse a la asintoticidad y estabilidad en el comportamiento. Muchas veces, estas producciones son consideradas incorrectas y sin ningún uso para propósitos científicos dentro de lo escolar (Sherin, 2000; DiSessa et al., 1991). Inclusive estas interpretaciones icónicas en problemas de movimiento son tratados como *misconcepciones* (Leinhardt et al., 1990).

Por otro lado, nuestro análisis versa en entender y dar cuenta del uso de las gráficas y no mostrar que las producciones de los participantes se ubican en ciertos registros de representación o qué tan alejadas están las concepciones con respecto a las definiciones escolares formales. En este sentido marcamos una clara diferencia con los análisis del trabajo matemático de los estudiantes bajo los cuales el ETM versa.

En un primer momento, *el funcionamiento* de la gráfica fue para *indicar dirección y sentido del movimiento del resorte*; mientras que *la forma* fue a partir de *construir un patrón de comportamiento del fenómeno*. Así, la gráfica fue usada para *orientar el movimiento*. En este caso, el uso aparece cuando los participantes se enfrentan a una situación física de movimiento, sus producciones están más cercanas a "dibujos" y aún no existen referencias a una gráfica cartesiana, sino más bien a una trayectoria.

En un segundo momento, el divulgador realizó un cuestionamiento a los participantes sobre si el resorte se detiene. Esto genera un nuevo uso de la gráfica, para *analizar comportamientos*. Las respuestas ante esta pregunta generaron en los participantes confusión y confrontaron sus dibujos previamente realizados con explicaciones que tuvieron que ver con la tendencia y anticipación. Este uso describió un nuevo *funcionamiento*, que consiste en *anticipar el comportamiento del resorte y expresar su comportamiento tendencial de forma global. La forma* de construcción bajo este nuevo funcionamiento consistió en *variar parámetros del modelo gráfico*.

Es necesario subrayar que esas nuevas argumentaciones fueron expresadas por los participantes utilizando una noción de gráfica aún de manera global que expresa comportamientos. A este tipo de gráfica, hemos convenido llamarle *curva*, y expresa los elementos descritos, comportamientos tendenciales (figura 8). Posteriormente, el diseño integra a la componente tecnológica para discutir sobre la naturaleza del fenómeno y cómo éste afecta la construcción de las gráficas y sus comportamientos.

---

[5] Extracto tomado de Zaldívar (2009). Taller de Divulgación realizado en la "Semana de Ciencias del Colegio de Guadalupe", Distrito Federal, México.

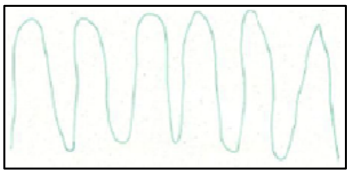


Figura 8. Ejemplo de "Curva"

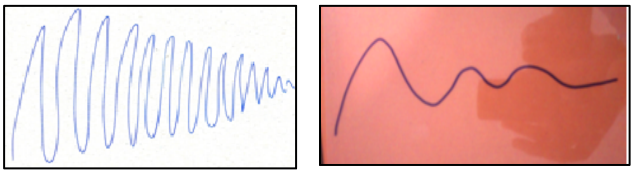


Figura 9. La curva con tendencia

La estabilidad de la que damos cuenta con este desarrollo del uso de la gráfica se confronta con las nociones de las estructuras matemáticas formales. Evidenciamos que la primera responde a una estructura funcional del conocimiento y no así a una estructura axiomática formal. Lo anterior significa que este marco de usos de la gráfica que describimos, deja ver qué elementos son relegados de una discusión en la estructura de la matemática escolar, pudiendo ser una base de significados distinta a la que se encuentra y permea en el discurso matemático escolar, que posteriormente podrían incluirse en un rediseño del mismo.

4. DISCUSIÓN

De acuerdo a las producciones descritas anteriormente, los cuales fueron analizadas usando una categoría de los usos de las gráficas, realizamos algunas reflexiones en torno a tres ejes que consideramos relevantes. Radford (2008) menciona que las teorías de enseñanza y aprendizaje difieren principalmente en la concepción que tienen sobre: el contenido a ser aprendido; el sujeto; y cómo sucede el aprendizaje. Estos tres elementos conformarán un eje de nuestra discusión.

4.1. Sobre el problema del aprendizaje

En algunas teorías la noción de aprendizaje está relacionada a procesos adaptativos o al desarrollo cognitivo como formas "superiores" de pensamiento. En la TSE no se niegan los procesos cognitivos, sino que la relación con el saber depende del contexto y del grupo humano, dando una importancia crucial a los aspectos normativos del razonamiento. Por lo que plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado (Cantoral et al., 2006).

El aprendizaje bajo esta perspectiva ya no se referirá sólo a procesos adaptativos, donde el sujeto construye desde adentro hacia fuera su conocimiento, sino más bien a un proceso continuo de resignificación: no se asumen de entrada formas de conocimiento absolutos, sino que se acepta una construcción de significados de los objetos matemáticos a partir del uso que se hagan de ellos por parte del usuario o de una comunidad. El ejemplo expuesto en la situación del Resorte expresó que es en el uso y en el ejercicio de las prácticas donde se dotan de significados funcionales a los objetos matemáticos, pero también dependerá de las condiciones sociales y culturales de la comunidad (Cordero, 2008; Cantoral & Farfán, 2003; Tuyub & Cantoral, 2012).

Aunque una postura sobre el aprendizaje no se hace explícita en la teoría de los ETM, podemos interpretarla en función de los propios principios de dicha noción. A nuestro parecer, el problema del aprendizaje se ve incrustado en la misma definición de las relaciones entre el plano epistemológico y el cognitivo por medio de procesos de *génesis* y su desarrollo progresivo. Pareciera que la noción de aprendizaje se encuentra enraizada en procesos evolutivos y de desarrollo cognitivos personales, en términos de “episodios”. Precisamente es en este punto en donde podemos resaltar una diferencia clara desde nuestra perspectiva. El ETM hace un intento de rescatar aspectos del espacio donde se desarrolla el trabajo matemático por medio del planteamiento de problemas matemáticos. El estudiante entonces es puesto en un espacio “social” de interacción, tematizado como un “milieu” lo cual nos hace recordar a la Teoría de las Situaciones Didácticas, es decir, en un “juego” dónde el individuo participa de manera organizada (Radford, 2008a).

En el caso del ejemplo planteado, el análisis de los datos en términos cognitivos quedaría reducido únicamente a las representaciones al compararlo con un conocimiento escolar institucionalizado. Considerar a la resignificación permite una reflexión sobre aspectos funcionales del saber situados al escenario de la actividad, donde el sujeto transforma al conocimiento, pero también el sujeto se transforma.

4.2. Sobre el Sujeto

Nos parece que bajo la propuesta del ETM, el sujeto es considerado en su dimensión cognitiva únicamente. Como un individuo racional auto-sostenido, el cual construye su propio conocimiento. Así, la noción de sujeto está relacionada con la idea científica del matemático; puesto que se resaltan las características del trabajo matemático tal y como los matemáticos lo realizan. Parecería convenir y no problematizar la importancia de la noción de sujeto, ya que este se considera como alguien que de manera natural actuará como un científico o matemático, de una manera racional esperada. El polo de la subjetividad parece ser resuelto de esta forma.

Por su parte, la socioepistemología plantea un rol del individuo dentro de la construcción de conocimiento diferente. Debemos entender a la dimensión del individuo desde una dimensión social. Tal dimensión, posiciona al individuo y lo ubica en una comunidad específica. Atiende al polo cognitivo pero en lo social, al reconocer a la práctica social como normativa y a los usos del conocimiento. Se enfoca así en un “sujeto social” (Buendía & Montiel, 2011), que actúa y piensa en relación a su escenario particular donde sucede conocimiento matemático

Considera a un individuo histórica y culturalmente situado y en una realidad social diversificada, es decir, a un sujeto en tanto comunidad, donde el salón de clases es uno más de los escenarios de conocimiento donde puede trascender. En el caso del ejemplo del taller temático, el desarrollo de las actividades dentro del escenario permite el involucramiento de los participantes en la conformación de argumentos sobre las actividades, siempre con un compromiso generado en términos de responsabilidad, y no de una búsqueda de una calificación aprobatoria. La comunidad de conocimiento conformada de esta manera involucra a los ciudadanos en la búsqueda de un bien común bajo responsabilidad de cada uno de sus miembros.

4.3. Sobre el contenido a enseñar

El acento de la TSE no se encuentra en el desarrollo de conceptos matemáticos, es decir, no se preocupa por entender qué saben y qué no saben los estudiantes de cierto contenido, sino más bien, cómo llegan a conocer y cómo usan ese conocimiento. De esta manera, importa el tipo de argumentaciones que las personas generan cuando se enfrentan a una situación matemática. En sí y con referencia a nuestro ejemplo de la situación del resorte, no nos preguntamos sobre si “sabe” cuál es la definición de estabilidad matemática o lo que es una gráfica, sino cómo se argumenta sobre esa propiedad en una situación de movimiento y qué usos se encuentran en la base de esas argumentaciones. Lo anterior desata una tercera diferencia con respecto al ETM.

En este último, se reformula la organización didáctica en términos de problemas matemáticos en un ambiente de aprendizaje organizado, tomando como referencia la noción de paradigma, es decir, la teoría del ETM trata con el problema de la adquisición de un conocimiento institucional por parte de los estudiantes. Parece claro que el ETM propone un espacio de trabajo para instucionalizar cierto conocimiento matematico. En contraparte, la Socioepistemología propone la búsqueda de situaciones específicas y su posterior objetivación en diseños de actividades que permitan resignificar el conocimiento, basados en la hipótesis que con ello se genera una matemática funcional.

Lo anterior no significa que en la Socioepistemología se "ignora" aquel conocimiento matemático que el dME provee, más bien critica ese conocimiento y su forma de comunicarlo, en tanto su imposición a ser enseñado y aprendido, dando evidencia de otros razonamientos y justificaciones funcionales que se encuentran en la base de significados de dichos conceptos y que son desconocidos o subordinados por el dME.

5. SÍNTESIS Y CONSIDERACIONES FINALES

Nuestro objetivo fue realizar un ejercicio de discusión y reflexión, en términos de un diálogo que se centró en la *identidad* de las teorías (Radford, 2008a).

La Teoría Socioepistemología tiene su interés en observar al participante (estudiante o ciudadano en general) en la construcción de argumentos funcionales a través de una *situación específica* en donde se modela la función de la práctica social. En tanto que el ETM pone su atención en proporcionar un ambiente de trabajo idóneo en algún dominio matemático en que el alumno resuelve ciertos problemas matemáticos en un escenario escolar. La atención de ambos está puesta en lo que el estudiante o participante inmerso en alguna "actividad matemática" realiza; sin embargo, el papel del actor es distinto, así como la base de las actividades a realizar. Parecería que el sujeto al que hace referencia el ETM es un "sujeto epistémico", mientras el sujeto en socioepistemología es histórico y culturalmente situado.

Un punto de desencuentro entre la Socioepistemología y el ETM es el papel conferido a los conceptos y las representaciones. A nuestro parecer, el papel de los objetos y las representaciones dentro del ETM es crucial, es intencionalmente visible, de hecho es una de las componentes: el representante del objeto. Es a través de la génesis semiótica que el estudiante podrá dar cuenta de los objetos, hablar y trabajar con ellos. En el ejemplo expuesto en el apartado 3, el objeto matemático o signo que está en juego es la gráfica como la representación de una función; sin embargo, el estatus que se le confiere es de herramienta y argumentación que norma la construcción de conocimiento. Ésta es una distinción que la Socioepistemología tiene con respecto a los objetos matemáticos y plantea que es la actividad humana la que permitirá la producción del objeto, el cual se considera no como preexistente a dicha actividad. Su atención no está en los signos, los artefactos y los gestos, que sin duda son importantes y necesarios en el momento del análisis de la actividad de los individuos en comunidad, sino que se ubica al *"ras"* de las prácticas sociales que acompañan a esos conceptos (Cantoral *et. al*., 2006). Damos cuenta de las argumentaciones situadas cuando el conocimiento esté en uso en una situación particular, mientras que el ETM atiende las representaciones que se hacen de un objeto y los cambios de registro que se pueden generar en un ETM-*Personal,* por ejemplo.

El ETM también analiza un nivel del conocimiento, el nivel epistemológico, pero se hace desde las representaciones y los objetos, aun cuando se considera un *paradigma* que regula de cierta manera lo institucional, reflejado en un ETM-*de-Referencia*. Sin embargo, el ETM reconoce el papel de individuo dentro del trabajo matemático al poner especial interés en lo que éstos producen a nivel *Personal*, similar a como se plantea el análisis de usos de las gráficas en la socioepistemología. Es clara la diferencia de las visiones en términos de lo que analizan, los procesos a los que rinden cuenta, así como de los procesos de significación y adaptación de estructuras mentales en el ETM, y de las argumentaciones situacionales y de la resignificación del uso en el caso de la Socioepistemología.

En términos de lo social también se encuentran diferencias entre las perspectivas. El ETM se refiere a la noción de *paradigma* como aquella ideología de un grupo o comunidad que determina lo que se considera como trabajo matemático. También considera el trabajo matemático en el salón de clases, por ejemplo en términos de interacciones y socialización situado en un nivel cognitivo. La cognición en lo socioepistemológico no es entendida como una adaptación al medio, sino que dependerá del escenario y de la cultura, estará en comprender por qué hacen lo que hacen. Es por ello, que al ubicarse bajo la noción de práctica social la Socioepistemología no dará cuenta de cómo enseñar algún tema, en alguna situación a cualquier persona, sino intentará desentrañar las características específicas del saber que lo hacen distinto de otros y ahí proponer estrategias didácticas innovadoras.

Por otro lado, el ETM y la Sociepistemología mediante la Situación Específica comparten la necesidad de crear un espacio óptimo para el desarrollo de ideas matemáticas y de usos de conocimientos matemáticos en la matemática escolar. respectivamente. Es decir, dependerá del contexto la forma en la cual aparecerán los usos. Sostenemos que uno de los problemas más importantes dentro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no se encuentra únicamente en la organización y jerarquización temática de los contenidos, sino en la poca o nula claridad de la textura social del conocimiento matemático (Tuyub & Cantoral, 2012). La Socioepistemología da cuenta de que la *resignificación* es una construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano normado por lo institucional y expresado en el *uso de las gráficas* a través de sus *funcionamientos* y *formas*. Por lo cual el análisis se centró en el desarrollo del *uso de la gráfica* y en evidenciar un *desarrollo de dicho uso* que realiza el participante.

La noción de ETM está estructurado en los niveles epistemológicos y cognitivos para comprender lo que sucede en tal espacio, en donde la *génesis epistemológica* permite la estructura del espacio y la *génesis cognitiva* tiene su atención en los procesos cognitivos de los individuos (Kuzniak, 2011). En nuestra perspectiva consideramos que la base *epistemológica* la provee la categoría de conocimiento, es decir, es la vértebra para el diseño de una situación particular. Mientras que lo *cognitivo*, se analiza en los argumentos que producen los participantes a través de la *modelación*, la *tecnología* y la *graficación*. Más allá de explicar cómo están articulados lo epistemológico y cognitivo en la Situación Específica, señalamos que tenemos elementos en común con el ETM, pero con planteamientos diferentes.

Los elementos presentes en la Situación Específica son los artefactos como la calculadora graficadora, el sensor de movimiento, el resorte y la pesa que son piezas importantes en la operatividad. También la visualización de las representaciones gráficas se hace presente, en donde centramos la mirada en el uso de la gráfica para la construcción de tales representaciones. Por último, el discurso de los participantes, es decir, las argumentaciones que genera la categoría CTF nos brindan elementos para mirar los *usos de la gráfica* como herramientas que evolucionan a la par de las formas de hacer de los participantes.

Para concluir, consideramos que nuestro ejercicio de diálogo deja ver la importancia que reviste la identificación de diferencias entre las diversas aproximaciones teóricas en la Matemática Educativa. Este análisis nos hace reflexionar la necesidad de regresar a las bases fundamentacionales de cada una de las posturas teóricas y replantearnos acerca de nuestros constructos teóricos y las preguntas que intentan responder. El ejercicio que realizamos, sin duda no pretendió demeritar alguno de los marcos sino reflexionar sobre nuestros puntos de encuentro y desencuentro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (2002).Learning mathematics in a CAS environment: The Genesis of a Reflection about instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.

Artigue, M. (2009). Rapports et articulations entre cadres theoriques: le cas de la theorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29 (3), 305-334.

Barrera, I. (2012). Étude des significations de la multiplication pour différents ensamble de nombres dans un contexte de géométrisation.(Thèse de doctorat). Université Paris Diderot (Paris 7), Paris, Francia.

Buendía, G. & Montiel, G. (2011). From history to research in mathematics education: Socio-epistemological elements for Trigonometric Functions. En V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education, (Pp. 67-82). The Mathematical Association of America.

Bloch, I. (2002). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycee. *Petit x. 58*, 25-46.

Briceño E. y Cordero F. (2012). Un estudio del uso de la tecnología escolar en situaciones de modelación del movimiento. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*, ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav. 229-245.

Cabañas, G. & Cantoral, R. (2010). Exploring de notions of comparison, conservation and measurement of the area in university students. A study through their arguments. En M.F. Pinto & T.F. Kawasaki (Eds*), Proceedings 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (Pp. 241-247). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. & Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(4), 83-102.

Cantoral, R., & Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53(3),* 255-270.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2(1)*, 56-74.

Cordero, F. & Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 10(1) 7-38.*

Cordero, F. (2008). *El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica*. En Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, J. & Romo, A. (Eds.), Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano (Pp. 265–286). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.–Díaz de Santos.

Cordero, F. Cen, C. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 187-214.

Cordero, F. (2011) La modelación y la graficación en la matemática escolar. En Luis Mauricio Rodríguez-Salazar, Ricardo Quintero-Zazueta, Abel Rubén Hernández Ulloa (Coords.). *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación*. (Re)pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa. (pp. 377 – 399). ISBN: 978-607-8231-00-3 Editorial Gedisa, Barcelona y Cinvestav, México.

DiSessa, A., Hammer, D., & Sherin, B. (1991). Inventing graphing: meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior, 10,* 117-160.

Dubinsky, E. & Harel, D. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). Washington, DC: Matematical Association of America.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Colombia: Peter Lang S. A.

Hitt F. (1998) Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), pp. 123-134.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 16 (1), 9-24.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1-64.

Maschietto, M. (2001). Fonctionnalités des representations graphiques dans la resolution de problems d'analyse à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 21*(1.2), 123-156.

Maschietto M. & Bartolini, B. (2009). Working with artefacts: gestures, drawing and speech in the construction of the matematical meaning of the visual pyramid. *Educacional Studies in Mathematics*, 70, pp. 143-157.

Méndez, M & Cordero, F. (2012). La function de la modelación en la resignificación del conocimiento matemático. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*, (pp. 257 – 267). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav.

NCTM (2008). The Role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics. Recuperado el 16, septiembre, 2010, en National Council of Teachers of mathematics: http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture,* 215-234.

Radford, L. (2008a). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education, 40,* 317-327.

Radford, L. (2012). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin, & L. Trouche, (Eds.), From text to 'lived' resources (pp. 238-288). New York: Springer.

Sherin, B. (2000). How students invent representation of motion. A genetic account. *Journal of Mathematical Behavior, 19*, 399-441.

Suárez, L. & Cordero, F. (2010). Modelación-graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio sociepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(4-II),* 319-333.

Tuyub, I. & Cantoral, R. (2012). Construcción Social del Conocimiento Matemático durante la obtención de genes en una práctica Toxicológica. *Boletim de Educaçao Matemática, 26,* 311-328.

Zaldívar, D. & Cordero, F. (2012). Un estudio socioepistemológico de lo estable: consideraciones en un marco de la divulgación del conocimiento matemático. En O. Covian, Y. Chávez, J. López, M. Méndez, A. Oktaç. *Memorias del Primero Coloquio de Doctorado*, (Pp. 203 – 212). ISBN: 978-607-9023-08-9, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Cinvestav.

Autores:

David Zaldívar Rojas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México. jzaldivar@cinvestav.mx

Claudia Cen Che. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México. ccen@cinvestav.mx

Eduardo Briceño Solís. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México. ebriceno@cinvestav.mx

Magali Méndez Guevara. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México. emendez@cinvestav.mx

Francisco Cordero Osorio. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México. fcordero@cinvestav.mx

SYLVIA COUTAT

QUEL ESPACE DE TRAVAIL GEOMETRIQUE POUR L'APPRENTISSAGE DES PROPRIETES AU PRIMAIRE ?

WHAT GEOMETRICAL WORK SPACE FOR THE LEARNING OF THE PROPERTIES IN PRIMARY SCHOOL?

RESUMEN

Esta contribución analiza la utilización de un software de geometría dinámica en clases de fin de primaria (9-12 años) para el aprendizaje de las propiedades modelizando las actividades de los alumnos con espacio de trabajo geométrico. Esta modelización valoriza las relaciones entre los diferentes génesis y más particularmente el génesis instrumental vinculado al instrumento desplazamiento correlacionada al génesis vídeo - figurale vinculada a la visualización de las figuras.

PALABRAS CLAVE:

- *Geometría dynámica*
- *Geometría en primaria escola*
- *Aprendizaje de las propiedades de geometría*
- *Espacio de trabajo geométrico*

ABSTRACT

This contribution analyzes the use of a dynamic geometry software in classes of the end of primary school, (9-12 year old) for the learning of the properties by modelling the activities of the students in geometrical work space. This modelling emphasizes the relations between the various geneses and more particularly the instrumental genesis connected to the instrument dragging correlated in the video genesis - figurale connected to the visualization of figures.

KEY WORDS:

- *Dynamic geometry*
- *Primary school geometry*
- *Learning of geometrical properties*
- *Geometrical work space*

RESUMO

Esta contribuição analisa o uso de um software de geometria dinâmica em classes do fim de escola primária, (9-12 anos) para a aprendizado das propriedades através de modelling as atividades dos alunos em área de trabalho geométrica. Este modelling enfatiza as relações entre as várias gêneses e mais particularmente a gênese instrumental conectado à viagem de instrumento (movimento) correlatada no figurale de gênese vídeo conectado à visualização de figuras

PALABRAS CHAVE:

- *Geometrica dinàmica*
- *Geometria de escolar primária*
- *Aprenentatge de les propietats de geometria*
- *Espai de treball geomètric*

RÉSUMÉ

Cette contribution analyse l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans des classes de fin de primaire (9-12 ans) pour l'apprentissage des propriétés en modélisant les activités des élèves en espace de travail géométrique. Cette modélisation met en valeur les relations entre les différentes genèses et plus particulièrement la genèse instrumentale liée à l'instrument déplacement corrélée à la genèse vidéo-figurale liée à la visualisation des figures.

MOTS CLÉS :

- *Géométrie dynamique*
- *Géométrie au primaire*
- *Apprentissage des propriétés géométriques*
- *Espaces de travail géométrique*

1. INTRODUCTION (QUESTIONNEMENT INITIAL ET ELEMENTS THEORIQUES)

Le rapport des élèves aux figures[1] géométriques évolue tout au long de leur scolarité. La première appréhension de la géométrie utilise des dessins, identifiés par leurs formes géométriques et une vision iconique (Duval 2005). Progressivement les formes géométriques sont travaillées à travers les éléments qui les composent, les angles, les côtés, les droites, les sommets et les points. Finalement le concept de figure s'enrichit par le concept de propriété et les dessins deviennent progressivement des représentations graphiques de figures. Le passage d'une vision de la forme à une vision par les sous éléments droites et points est appelée par Duval (2005) la décomposition dimensionnelle des formes. Les élèves appréhendent dans un premier temps des formes par leur surface, des éléments de dimension 2 (2D). Puis ces surfaces sont décomposées et perçues par les éléments de dimensions inférieures, les côtés et les droites de dimension 1 (1D), pour finir par les sommets et les points, éléments de dimension 0 (0D). Cette prise en compte de l'évolution de la vision par un changement de regard des figures géométriques est l'objet d'étude des travaux de Duval et Godin (2005) et Offre Perrin-Glorian et Verbaere (2006). Leurs recherches étudient en quoi l'utilisation d'instruments classiques (règles, équerre) influence la perception des figures géométriques en accompagnant la décomposition dimensionnelle des formes. Un de leur résultat est que le choix des instruments mis à disposition lors d'une activité de reproduction de figure influence l'appréhension de la figure et la perception des propriétés topologiques des éléments 1D dans la figure à reproduire. Cependant l'utilisation des instruments ne va pas de soi et doit être prise en charge dans la séquence d'apprentissage. La prise en compte des connaissances instrumentales en lien avec les connaissances conceptuelles apparait à travers la genèse instrumentale, processus de construction d'un instrument par un sujet. Rabardel (1995) définit cette genèse comme une composée de deux processus. Le *processus d'instrumentalisation*, relatif à l'émergence et à l'évolution des composantes de l'artefact, et le *processus d'instrumentation*, portant sur l'émergence et l'évolution des schèmes sociaux d'utilisation. Ainsi les artefacts ou outils de construction, sont les entités matérielles qui deviennent des instruments lorsqu'ils sont associés à une finalité dans la résolution d'une tâche. Dans le contexte de la géométrie, les outils de construction sont porteurs de propriétés géométriques, comme la règle est porteuse de la propriété d'alignement. S'approprier un instrument de construction comme la règle peut amener l'utilisateur à s'approprier le concept d'alignement, et de passer d'une vision de la forme d'une figure géométrique, vision 2D, à une vision par les droites qui la composent, éléments 1D.

Laborde et Capponi (1994) ont analysé l'utilisation d'un Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD pour la suite) dans la validation de constructions géométriques. L'instrument central est le déplacement utilisé comme un instrument qui permet d'identifier des invariants. Les invariants correspondent aux propriétés géométriques associées aux constructions, propriétés embarquées explicitement dans les Cabri-dessins[2] et assurées valides par le logiciel lui-même. Coutat et Richard (2011) ont utilisé un LGD pour un apprentissage instrumenté des propriétés dans le but de construire une première axiomatique et amorcer un processus de validation s'appuyant sur un raisonnement hypothético-déductif au début du secondaire (élèves de 12-14 ans). Les figures dynamiques sont utilisées pour travailler la relation de subordination de la conclusion aux contraintes d'une propriété. Ces deux recherches présentent des effets positifs quant à l'utilisation d'un LGD pour l'apprentissage des propriétés géométriques dans la construction d'une axiomatique.

À partir de ces résultats nous questionnons l'utilisation des instruments spécifiques d'un LGD pour l'apprentissage des propriétés en fin de primaire (9-12ans). Dans une première partie nous présentons en quoi les paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak 2006) et les Espaces de Travail Géométriques (Kuzniak 2011) sont des outils pertinents pour notre étude. Puis nous présentons la séquence didactique et quelques analyses résultant de sa mise en œuvre en classe. Enfin nous conclurons sur la nature des connaissances géométriques construites chez les élèves.

---

[1] Nous utilisons la définition de Laborde et Capponi 1994 : *une figure géométrique est l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant l'un des dessins qui le représente.*

[2] Nous reprenons la définition de Laborde-Capponi 1994 : *une représentation graphique sur l'écran de Cabri-géomètre*.

2. Cadre theorique

2.1 Modélisation des raisonnements géométriques au primaire à l'aide des paradigmes géométriques

Afin d'identifier les différents types de raisonnements en géométrie, nous utilisons les travaux de Houdement et Kuzniak (2006) sur la notion de paradigmes géométriques qui permettent d'identifier trois référentiels théoriques, suivant les relations entre les objets et la théorie associée à ces objets. Au niveau GI, niveau de la géométrie naturelle, les objets de la réalité, les outils de construction et la validation sensible sont prédominants. Au niveau GII, une première axiomatique apparaît, ce qui permet une validation s'appuyant sur des lois hypothético-déductives, cependant la référence à la réalité subsiste. Enfin au niveau GIII, l'axiomatique est construite sur un raisonnement formaliste, et la validation s'appuie sur le raisonnement logique. Au cours de la résolution d'une activité, ces différents paradigmes peuvent être mobilisés conjointement. Braconne-Michoux (2008) s'est intéressée à l'articulation entre les paradigmes GI et GII. Ces travaux s'appuient sur le découpage de van Hiele (1958), proche de celui de Houdement et Kuzniak (2006), des raisonnement en géométrie. Van Hiele (1958) définit 5 niveaux de pensée géométriques dans l'évolution des connaissances d'un élève. Au niveau 0 (N0), appelé niveau de *visualisation*, l'élève identifie les objets géométriques par leur forme globale. Au niveau 1 (N1), niveau *d'analyse*, les élèves associent des propriétés aux objets géométriques. Cependant, ces propriétés ne sont pas reliées entre elles. Ces liaisons apparaissent au niveau 2 (N2), appelé *déduction informelle*, mais elles ne permettent pas encore de relier les objets entre eux. Dans le niveau 3 (N3), *déduction formelle,* les liaisons se forment et les élèves peuvent organiser certaines déductions formelles. Le dernier niveau (N4), *niveau de rigueur*, correspondrait à l'état des connaissances du mathématicien expert. En utilisant les travaux de van Hiele (1958) conjointement aux paradigmes géométriques de Houdement et Kuzniak (2006), Braconne Michoux (2008) apporte une certaine finesse à l'articulation GI/GII. Ainsi elle montre que le niveau d'analyse (N1) peut être envisagé comme une « zone de tuilage » entre les paradigmes GI et GII. Ainsi le niveau d'analyse est partagé en deux niveaux : GI-N1 et GII-N1. Ces résultats s'appuient sur l'analyse du statut du dessin et la réflexion de l'élève. Dans le paradigme GI, le dessin est l'objet d'étude et de validation et la validation est perceptive voire instrumentée. Dans le paradigme GII, la figure devient objet d'étude et la validation s'organise autour des propriétés. Or dans le niveau d'analyse, le dessin se rapproche du concept de figure (GII) mais les propriétés restent indépendantes les unes des autres (GI). Ainsi l'articulation (GI/GII) peut être travaillée en s'appuyant sur le niveau N1 d'analyse de van Hiele, ce qui pourrait revenir à travailler sur les propriétés en vue d'enrichir le concept de figure.

2.2 Les instruments dans un LGD

Un travail spécifique sur les instruments de construction (Duval Godin 2005) peut permettre un travail sur les propriétés géométriques. Dans un LGD les instruments disponibles diffèrent des instruments classiques utilisés en papier-crayon, par exemple le déplacement n'existe pas en dehors du logiciel. Restrepo (2008) identifie plusieurs instruments déplacements qu'elle classe en fonction de différentes finalités. Nous pointons ici deux déplacements spécifiques. Le premier instrument est le *déplacement pour identifier les invariants de la figure*, *Di* pour la suite. Cet instrument déplacement est classé dans les déplacements exploratoires, elle le définit ainsi :

> Étant donnée une construction, on déplace les points de base afin de trouver ses invariants. Ainsi, on peut identifier les propriétés géométriques de la figure. (Restrepo A. 2008, p.43)

Le deuxième instrument que nous retenons est l'instrument *déplacement pour valider une construction Dc* pour la suite, classé dans les déplacements pour valider ou invalider une construction :

> Déplacer tous les points déplaçables d'une construction pour voir si celle-ci conserve les propriétés apparentes à l'état initial. Si c'est le cas, alors la construction est validée ; dans le cas contraire, elle est invalidée, la construction n'avait pas été construite selon les propriétés géométriques demandées. (Restrepo A. 2008, p.44)

Ces deux instruments (*Di* et *Dc*) sont différents car les schèmes sociaux d'utilisations sont différents tout comme les connaissances et signifiés mathématiques en jeu. Le *Di* est un déplacement ouvert, souvent « erratique » et peu systématique, car il ne s'appuie sur aucun a priori : il est exploratoire. Lors de la mise en œuvre du *Dc*, l'exploration est beaucoup plus fermée, elle suit des directions et des trajectoires particulières. Le sujet a une attente précise lorsqu'il le mobilise, il lui associe une observation attendue. Ce deuxième instrument diffère aussi du premier car il a un statut de validation des constructions réalisées, ce qui n'est pas le cas pour le *Di*.

2.3 Espace de travail géométrique avec un LGD

Les Espace de Travail Géométrique (ETG pour la suite) développés par Kuzniak (2011) permettent de travailler conjointement le processus de genèse instrumentale, le processus d'évolution du regard des figures géométriques et le processus d'appropriation des propriétés. Ils modélisent l'activité mathématique lors de la résolution de problème en utilisant deux plans. Un premier plan contenant les objets matériels, l'ensemble des artefacts et le système théorique de référence, est appelé le plan épistémologique. Le second plan est le plan cognitif, il est associé aux connaissances géométriques dans leur mise en œuvre. Ces deux plans s'enrichissent mutuellement grâce à trois processus de genèse : instrumentale, vidéo-figurale et discursivo-graphique. Ces trois genèses sont les supports de trois types de démarches, une démarche de découverte, une démarche de validation et une démarche de modélisation. Nous renvoyons le lecteur à la figure 4 de l'article « Introduction : Espaces de travail mathématique. Point de vue et perspectives ». Nos attentes concernant l'évolution de la vision des figures géométriques implique une genèse vidéo-figurale dans laquelle les dessins sont considérés comme des représentations particulières de figures géométriques, et les figures géométriques comme une construction mentale s'appuyant sur des dessins, des propriétés, des textes. L'évolution de cette vision peut s'appuyer sur la genèse instrumentale du déplacement pour identifier les invariants. L'articulation de ces deux genèses définit la démarche de découverte. L'appropriation du concept de figure s'appuie aussi sur l'appropriation des propriétés, ce qui renvoie à la genèse discursivo-graphique. Ces deux genèses constituent la démarche de modélisation. Enfin, l'appropriation du déplacement s'articule avec l'identification des propriétés, la genèse instrumentale se réalise avec la genèse discursivo-graphique, ensemble elles définissent la démarche de validation.

3. ANALYSE A PRIORI

3.1 Description de la séquence didactique

Afin d'étudier les différentes genèses et les différentes démarche relativement au concept de propriété géométrique avec un LGD, nous mettons en place une ingénierie didactique qui reprend les travaux de Duval et Godin (2005) et les travaux de Assude et Gélis (2002). Ces derniers étudient l'intégration d'un LGD à l'aide de la dialectique ancien-nouveau sur des types de tâches et de techniques. Par exemple ils réintroduisent des tâches anciennes, à résoudre à l'aide de techniques nouvelles. Un de leurs résultats forts que nous retenons est que l'entrelacement entre des tâches papier-crayon et des tâches avec le LGD une réelle intégration d'un LGD dans l'enseignement de la géométrie. Les connaissances instrumentales issues du travail avec le LGD doivent être liées explicitement aux connaissances conceptuelles acquises dans l'environnement papier-crayon.

L'ingénierie didactique se déroule dans une classe de Suisse Romande à double degrés avec 11 élèves de 10-11 ans et 9 élèves de 11-12 ans (deux dernières années de primaire). Elle s'appuie sur Cabri Elem un logiciel de géométrie dynamique adapté au primaire, issu du logiciel Cabri-géomètre, où les activités se présentent sous forme de cahiers virtuels. Chaque page du chier est une page du LGD, avec une sélection des outils de construction spécifiques au LGD, une consigne et une zone de construction. La Figure 1 présente un exemple de page d'un cahier Cabri Elem.

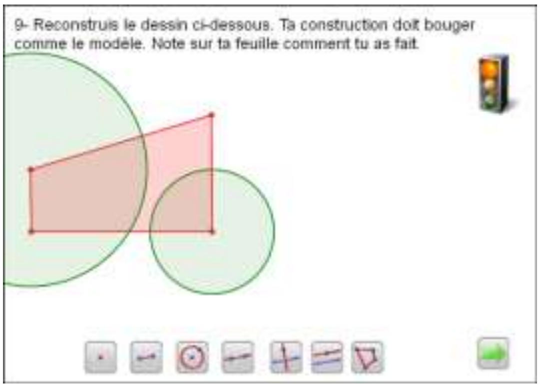


Figure 1

Nous avons conçu, avec l'enseignante, cinq cahiers Cabri Elem, chaque cahier contenant 10 à 15 pages. Le traitement d'un cahier prend entre 45 mn et 90 mn. Chaque cahier Cabri Elem est systématiquement suivi d'une séance qui a lieu quelques jours plus tard. Pendant cette séance, un seul ordinateur est présent et est mis à disposition de l'enseignant. Les élèves utilisent leurs notes prises pendant la séance précédente pour relater leurs interactions avec le logiciel. L'enseignante réalise les différentes actions sur l'ordinateur dont l'écran est projeté, partagé avec la classe. Ces activités ont pour but de discuter collectivement des objets travaillés dans le cahier dynamique correspondant. Ces séances papier-crayon durent entre 45 mn et 90 mn. Chaque cahier Cabri Elem, suivi de sa (ses) séance(s) en papier-crayon est appelé un *regroupement* de séances. Chaque regroupement[3] de séances est associé à un objectif d'apprentissage mathématique travaillé dans l'environnement dynamique (Cabri Elem) et dans l'environnement papier-crayon. Ainsi, au sein de chaque regroupement, trois types d'activités sont mises en place : les activités de résolution avec le cahier Cabri Elem, les activités collectives avec Cabri Elem projeté, les activités avec papier-crayon.

3.2 Le paradigme attendue de la séquence d'enseignement

Les activités dans l'environnement dynamique du LGD visent un travail sur les propriétés géométriques d'un Cabri-dessin. Les propriétés que nous visons peuvent être des propriétés de perpendicularité ou parallélisme, ou la reconnaissance de figures usuelles comme le rectangle, le carré ou le losange Ces propriétés peuvent être abordées à travers la genèse instrumentale de *Di* et *Dc*. Le fil conducteur instrumental des activités dans l'environnement dynamique est la construction de ces deux instruments. Pour cela nous avons choisi d'utiliser une tâche ancienne : des activités de reproduction avec des techniques nouvelles associées au LGD. Dans ces nouvelles activités, les élèves doivent réaliser une construction à partir d'un Cabri-dessin donné, la consigne étant que leur construction doit se comporter au cours du déplacement comme le modèle. Cette consigne représente un changement de contrat didactique fort, car la validation ne s'appuie plus sur une superposition de la reproduction au modèle, c'est-à-dire que les élèves ne peuvent pas reproduire uniquement une forme (élément 2D) mais une figure avec ses propriétés. La résolution de cette activité passe par l'identification des invariants du Cabri-dessin-modèle, c'est-à-dire utiliser le *Di* pour identifier les propriétés de la figure. Les observations issues de ce déplacement doivent permettre d'identifier les relations entre les objets qui perdurent au cours du déplacement. Ensuite, l'objectif est de reproduire ces invariants à l'aide des instruments disponibles. Comme l'objectif final est de reproduire le Cabri-dessin modèle, le *Di* peut aussi être associé à la déconstruction instrumentale telle qu'elle est définie par Mithalal (2010), c'est-à-dire identifier l'enchainement ordonné des actions permettant de reproduire une représentation graphique d'un objet géométrique. La validation d'une reproduction repose sur le *Dc* qui contrôle si les deux constructions ont des comportements similaires au cours du déplacement. Le travail sur ces déplacements, devrait permettre de se focaliser sur les relations entre éléments 1D voire 0D et non plus sur les formes (éléments 2D) à reproduire, comme observé dans Coutat 2011.

[3] Une description des regroupements de séances est détaillée en annexe 1

Le paradigme idoine de notre séquence est le niveau GII-N1. La perception et le sensible restent présents, et le raisonnement attendu s'appuie sur l'identification de propriétés et leur reproduction.

3.3 *Analyse a priori d'une activité avec un LGD : Quel ETG idoine ?*

Nous nous centrons sur l'analyse des procédures des élèves au cours de la résolution d'une activité (Figure 1**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**) issue du cahier Cabri Elem du regroupement 4 « Compas et Cercle[4] » dans le but de modéliser le traitement du travail des élèves à l'aide des ETG (Kuzniak 2011). Le Cabri-dessin donné comme modèle se compose d'un quadrilatère quelconque et de deux cercles. Les relations entre le quadrilatère et les cercles sont rendues visible pour la clarté du texte sur la Figure 2. Chaque cercle a pour centre un sommet du quadrilatère, les deux sommets étant opposés. Le rayon de chaque cercle est donné par un des côtés du quadrilatère, opposé au centre du cercle. Pour identifier ces relations entre les cercles et les côtés du quadrilatère il est indispensable de déformer le quadrilatère en déplaçant les sommets. La reproduction commence par la construction du quadrilatère. Pour construire les cercles il faut utiliser l'outil cercle en désignant tout d'abord une longueur (ici sous la forme d'un segment) qui définit le rayon du cercle puis en désignant un point qui sera le centre du cercle. Dans notre cas, le rayon est un côté du quadrilatère, le centre un sommet opposé au côté choisit. Nous notons cette utilisation de l'outil cercle : Cercle(Rayon,Centre). Une autre utilisation de cet outil, plus conventionnelle, est de désigner tout d'abord un premier point comme centre puis un deuxième point, la distance entre le centre et ce deuxième point correspondant au rayon du cercle. Nous notons cette deuxième utilisation du cercle : Cercle(Centre,Point). Ces deux utilisations de l'outil cercle sont accessibles à partir de la même icône, elles définissent deux instruments pour un même outil. Au moment où les élèves commencent l'activité de la Figure 1 les deux utilisations de l'outil cercle sont connues des élèves.

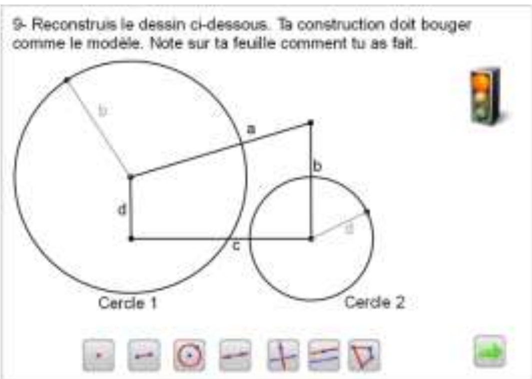


Figure 2

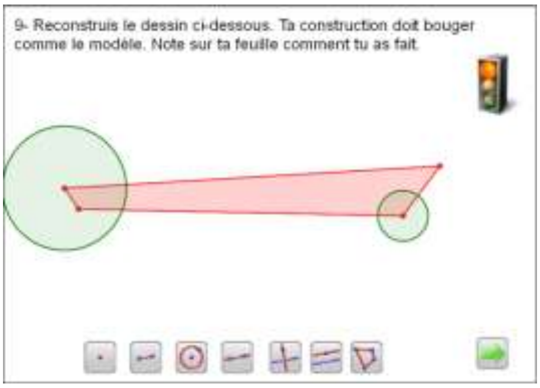


Figure 3

La réalisation de cette activité demande tout d'abord l'utilisation de l'instrument *Di* pour identifier les propriétés de la figure c'est-à-dire les relations entre les rayons des cercles et les côtés du quadrilatère. Le déplacement de certains sommets du quadrilatère, modifie le rayon du cercle comme illustré sur la Figure 3. Une fois que les relations entre les cercles et les côtés du quadrilatère sont identifiées, il faut associer le bon schème d'usage à l'outil cercle pour mettre en œuvre l'instrument Cercle(Rayon,Centre). Enfin la validation de la reproduction utilise le *Dc* sur les deux constructions afin de s'assurer que Cabri-dessin modèle et le Cabri-dessin construit ont des comportements similaires au cours des déplacements. Cette reproduction ne peut pas s'appuyer sur une vision 2D du Cabri-dessin mais elle doit prendre en compte les relations entre les droites (1D) et les points (0D). Nous plaçons cette réflexion au niveau GII-N1. La décomposition instrumentale permet d'identifier que le quadrilatère doit être construit en premier, puis les cercles dont les rayons dépendent des côtés du quadrilatère. De plus, cette reproduction utilise un seul des deux instruments associé à l'outil cercle, l'instrument Cercle(Rayon,Centre). Pour résoudre cette activité les élèves doivent maitriser les

[4] Le cahier est décrit dans l'annexe 2.

instruments *Di*, Cercle(Rayon,Centre) et *Dc*. La Figure 4 est l'adaptation de la figure 1 présentée dans l'article « Introduction : Espaces de travail mathématique. Point de vue et perspectives » notre activité.

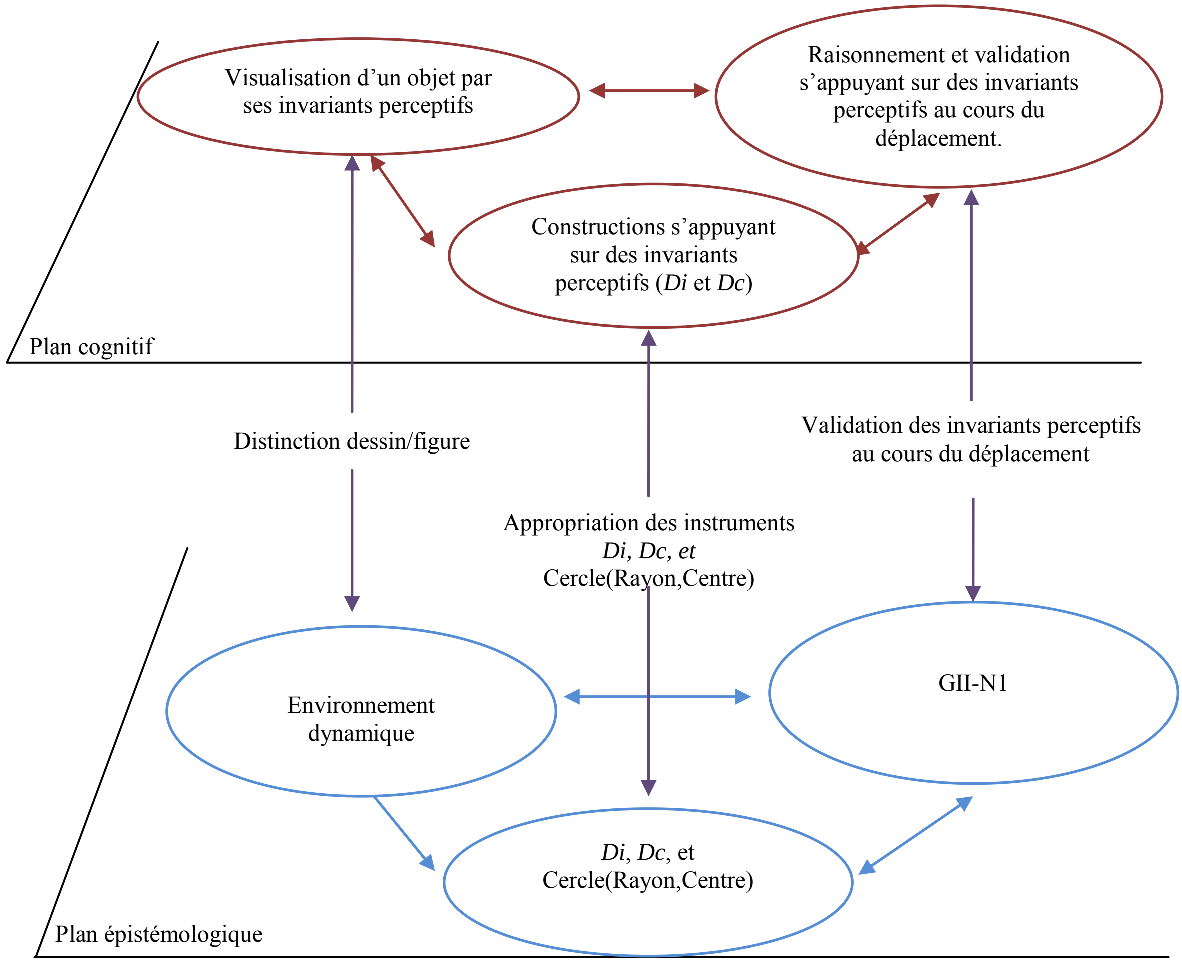


Figure 4

4. LES ETG PERSONNELS CONSTRUITS PAR LES ÉLÈVES

Nous avons expérimenté cette activité avec neuf binômes. L'analyse du travail de ces neuf binômes nous amène à identifier cinq ETG personnels. Les principales actions des binômes considérés sont en annexe. Pour identifier ces cinq ETG, nous caractérisons les trois genèses à travers les processus de résolution des élèves. Le regard sur le Cabri-dessin modèle nous renseigne sur la genèse vidéo-figurale des élèves. La caractérisation de la genèse instrumentale s'appuie sur l'analyse des instruments *Di*, *Dc*, Cercle(Rayon,Centre) et Cercle(Centre,Point) mobilisés par les élèves. La perception des relations entre les cercles et le quadrilatère et leur validation pour conclure la reproduction nous renseigne sur la genèse discursivo-discursive. Chaque profil est nommé en spécifiant l'état supposé de chacune des genèses pour cette activité. Nous concluons sur le paradigme des ETG personnel en essayant de définir les trois démarches associées aux trois genèses.

4.1 ETG profil iconique/non instrumentée/sans propriétés

Ce profil concerne un binôme observé. Les élèves n'utilisent pas le *Di* dans l'exploration du modèle. Cela implique qu'ils ne peuvent pas identifier les propriétés géométriques de la figure et les réinvestir dans leur construction. Lorsque ces élèves essaient de reproduire la figure, ils utilisent l'instrument Cercle(Centre,Point) en prenant un sommet du quadrilatère comme centre et un point quelconque du plan pour définir le rayon de chaque cercle. Les cercles obtenus n'ont pas les mêmes relations de dépendance au quadrilatère que la figure modèle, pourtant la reproduction est superposable au modèle : même taille, même orientation. Les élèves invalident systématiquement leurs tentatives en déplaçant un sommet du modèle puis le sommet correspondant de leur construction (*Dc*). Ils prennent conscience que leur construction ne se déforme pas comme le modèle sans parvenir à identifier les relations du modèle. La genèse vidéo-figurale qui devrait permettre de distinguer dans le Cabri-dessin les relations entre les cercles et le quadrilatère n'est pas fonctionnelle, les élèves ont une vision 2D de la figure. Le processus de genèse instrumentale semble particulièrement avancé pour la validation par la mise en œuvre du *Dc* mais pas pour l'exploration avec aucune utilisation du *Di*. La démarche de découverte reste perceptive et non instrumentée. La démarche de modélisation utilise une perception du dessin et une vision iconique et la démarche de validation utilise le *Dc* pour comparer une succession de dessins-modèle et dessin-construits. Leur ETG personnel se situe dans le paradigme GI-N0 car ils considèrent des objets géométriques par leur aspect général en mobilisant une vision 2D, dépourvu de propriétés.

4.2 ETG profil non iconique/non instrumentée/sans propriétés

Deux binômes observés correspondent à ce profil. Les élèves associés à ce profil mobilisent peu le *Di* au début de leur résolution. Il semble que le *Dc* utilisé pour valider le soit aussi pour explorer le modèle, car en identifiant les différences entre leur Cabri-dessin et le Cabri-dessin modèle ils identifient aussi certains invariants de la figure modèle. Ils finissent par identifier que les rayons des cercles sont liés à des côtés du quadrilatère, sans pouvoir préciser quels côtés. Cependant, comme pour les élèves du profil précédent, ces élèves utilisent l'instrument Cercle(Centre,Point). Ils prennent conscience de relations dans la figure modèle, sans parvenir à identifier quels objets sont liés. Ainsi ils ne peuvent pas s'organiser pour reproduire ces relations dans leur reproduction. Le fait que le processus de genèse instrumentale concernant l'instrument Cercle(Rayon,Centre) ne soit pas opérationnel est certainement une difficulté supplémentaire pour ces élèves. La genèse vidéo-figurale est probablement plus avancée que le profil précédent, sans pour autant être aboutie. La démarche de découverte est perceptive mais instrumentée ce qui leur permet d'enrichir leur analyse de la figure en considérant les éléments qui le compose. La démarche de modélisation leur permet d'identifier des relations sans pouvoir exprimer des propriétés. Enfin leur démarche de validation s'appuie sur l'identification d'invariants entre les deux Cabri-dessin. Étant donné que leur genèse instrumentale et vidéo-figurale sont plus avancées que le précédent profil, nous considérons que l'ETG de ce profil se situe dans le paradigme GI-N1.

4.3 ETG profil non iconique-non instrumentée-avec liaisons perceptives

Trois binômes sont associés à ce profil. Ils mettent en œuvre tôt l'instrument *Di* dans leur exploration. Ils parviennent à identifier les relations entre les cercles et les côtés du quadrilatère. Cependant, ils rencontrent des difficultés dans l'utilisation de l'instrument Cercle(Rayon,Centre). Ils l'utilisent en désignant un côté du quadrilatère modèle et non un côté de leur propre quadrilatère comme rayon, puis ils désignent un sommet du quadrilatère construit comme centre du cercle. Ils obtiennent une construction qui ne possède pas de relations internes à elle-même, mais des relations avec le modèle. Les centres des cercles construits, sont liés aux sommets des quadrilatères construits mais les rayons sont définis par les côtés du quadrilatère modèle. La genèse vidéo-figurale est avancée dans le sens où les élèves identifient les relations internes à la figure et ne contentent pas d'une analyse par la forme et la taille. La genèse instrumentale est elle aussi avancée. Les élèves analysent la figure modèle en utilisant le *Di*, mobilisent l'instrument Cercle(Rayon,Centre) pour reproduire les cercles et évaluent leur production à l'aide du *Dc*. Pourtant ils ne parviennent pas à une reproduction correcte. L'utilisation de l'instrument Cercle(Rayon,Centre) démontre que les élèves ne parviennent pas à se détacher des liaisons perceptives du modèle pour les transformer en relations entre objets géométriques d'une même figure. L'utilisation pertinente des *Di* et *Dc* associée à la décomposition dimensionnelle de la figure permet à ces élèves d'avoir une démarche de découverte qui s'appuie sur la figure. La démarche de modélisation considère ainsi les propriétés du Cabri-dessin modèle, mais ces propriétés restent spécifiques au modèle et ne peuvent en être détachées. L'utilisation qu'ils font de l'instrument Cercle(Rayon,Centre) démontre que les élèves ne parviennent pas à considérer les propriétés indépendamment du modèle, c'est pour cette raison que nous considérons que cet ETG fonctionne dans le paradigme GI-N1

4.4 ETG profil 4 non iconique-instrumenté-avec propriétés instrumentées

Un binôme est défini par ce profil. Les élèves mettent en place une procédure très surprenante. Ils utilisent le *Di* dans l'exploration, sans chercher à identifier précisément les relations entre les cercles et les côtés du quadrilatère, c'est-à-dire qu'ils ne cherchent pas à identifier quel côté est associé à quel rayon de cercle par de *Di*. La deuxième étape dans leur exploration s'appuie sur l'utilisation détournée de l'instrument Cercle(Rayon,Centre). Les élèves utilisent cet instrument pour identifier à quel côté chaque cercle est lié. Ils sélectionnent l'outil cercle, puis ils désignent un côté du quadrilatère, ce qui leur donne un cercle avec un rayon constant dont il ne reste plus qu'à relié à un point comme centre. Les élèves déplacent le cercle dans le plan afin d'identifier à quel cercle du modèle il peut se superposer. Lorsqu'aucune superposition n'est possible, ils construisent un nouveau cercle lié à un autre côté jusqu'à ce qu'ils obtiennent un cercle superposable à un cercle du modèle. Une fois ce cercle obtenu, ils reproduisent la construction avec leur quadrilatère. La genèse instrumentale de l'outil Cercle(Rayon,Centre) est très avancée, tout comme le *Dc*, le *Di* est utilisé dans une première exploration puis remplacé par l'utilisation détournée de Cercle(Rayon,Centre). La genèse vidéo-figurale semble s'appuyer d'avantage sur les éléments de l'espace réel que sur les relations qu'ils peuvent avoir entre eux. La démarche de découverte démontre une réflexion instrumentée sur la figure. La démarche de modélisation utilise une vision du Cabri-dessin par ses propriétés. La démarche de validation s'appuie sur la comparaison des invariants de la figure modèle et la figure construite. Pour ces élèves le paradigme associé à leur ETG est le paradigme GII-N1.

4.5 ETG profil non iconique-instrumenté-avec propriétés

Les procédures utilisées par les derniers élèves de cette analyse démontrent un certain aboutissement dans les différentes genèses. L'exploration du modèle s'appuie sur le *Di*, puis la construction utilise de façon adéquat l'instrument Cercle(Rayon,Centre). La validation repose sur l'instrument *Dc* utilisé en parallèle sur le modèle et la construction. Ces élèves ont une utilisation pertinente des différents instruments disponibles et une vision du Cabri-dessin modèle par ses propriétés. La démarche de découverte s'appuie sur l'identification des propriétés de la figure par le déplacement. La démarche de modélisation reprend les différentes propriétés et enfin la démarche de validation démontre une réflexion sur la figure et ses propriétés. Leur ETG personnel semble proche de l'ETG idoine ainsi le paradigme identifier est le paradigme GII-N1.

5. CONCLUSION

5.1 ETG personnels et ETG idoine

Nous avons identifié cinq ETG personnels, pour trois paradigmes. Le paradigme GI-N0 est associé à un ETG et un binôme pour lequel les différentes genèses sont encore en construction. Le paradigme GI-N1 est associé à deux ETG et à cinq binômes. Pour ce paradigme, les genèses sont aussi en construction mais commencent à être mise en pratique. Les élèves rencontrent des difficultés, soit dans la genèse vidéo-figurale et la distinction du dessin et de la figure, soit dans la genèse instrumentale avec une difficulté dans l'utilisation de l'instrument Cercle(Rayon,Centre). Ces différentes difficultés impliquent une réflexion plutôt perceptive et instrumentée où les propriétés sont perceptives voire non identifiées. Enfin le dernier paradigme est le paradigme visé par l'ETG idoine, GII-N1. Il concerne deux ETG et trois binômes. Ces élèves ont su mettre en œuvre les différentes genèses pour identifier les propriétés de la figure, les réinvestir dans leur reproduction et valider leur production. L'analyse des procédures des élèves en utilisant les ETG permet d'identifier que les différentes genèses sont les éléments moteur de l'évolution de leurs ETG personnels vers un niveau GII-N1 et que ces genèses s'enrichissent les unes des autres.

5.2 Bilan et perspectives

L'ingénierie que nous avons mise en place avait pour but de nous éclairer sur les apports éventuels d'un LGD dans un travail sur les propriétés géométriques en fin de primaire (9-12 ans). L'ETG idoine correspondant à l'activité présentée s'appuie sur trois genèses. La genèse vidéo-figurale vise une vision des Cabri-dessins par leurs propriétés et non par leur forme, elle s'appuie sur la décomposition dimensionnelle et l'évolution de la vision vers une vision non iconique de la figure. La genèse instrumentale vise une appropriation des instruments *Déplacer pour identifier des invariants* et *Déplacer pour valider une construction* qui sont utilisées tout au long de la séquence. La genèse discursivo-graphique vise une validation qui s'appuie sur les propriétés géométriques des figures proposées. Le paradigme de l'ETG idoine se situe au niveau GII-N1. Les différentes analyses des élèves observés montrent que l'utilisation d'un LGD et ses instruments spécifiques pour un premier apprentissage des propriétés a effectivement un impact sur les connaissances des élèves. C'est par l'aboutissement des trois genèses que le paradigme GII-N1 est effectivement le paradigme dans lequel les élèves résolvent l'activité. Il serait intéressant de questionner les effets à long terme de l'utilisation d'un LGD pour l'apprentissage des propriétés et particulièrement l'introduction du paradigme GII avec le travail sur la démonstration. On pourrait aussi questionner une utilisation plus précoce d'un LGD. Cette introduction ne viserait en aucun cas une approche du paradigme GII mais elle permettrait de facilité la genèse instrumentale spécifique à l'environnement dynamique, et l'exploitation du paradigme GI-N1. Cela aurait probablement un impact sur la facilité ultérieure de la mise en place des deux autres genèses dans la visée d'un travail sur le paradigme GII-N1.

REFERENCES BIBLOGRAPHIQUES

Assude T., Gélis J-M (2002) La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri à l'école primaire, *Educational Studies of Mathematics* 50 259-287

Braconne-Michoux, A. (2008) *Evolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de van Hiele à l'articulation CM2*-6ème, Thèse de Doctorat de Paris Diderot – Paris 7

Coutat S. (2012) Vers une évolution de la vision en géométrie au primaire avec un logiciel de géométrie dynamique, *Math-Ecole, 218*, 50-55.

Coutat S., Richard P.R. (2011) Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques, *Annales de didactique et de sciences cognitives 16*, 97–126.

Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique des sciences cognitives, 10*, 5-53.

Duval R., Godin M. (2005) Changement de regard nécessaire sur les figures, *Grand N 76,* 7-27

Houdement C., Kuzniak A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11*, 175-193.

Kuzniak A. (2011) L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Laborde C., Capponi B. (1994) Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques* 14 (1.2) 165-210.

Mithalal J. (2010) *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*, Thèse de doctorat de l'université J. Fourier, Grenoble.

Offre B., Perrin-Glorian M.-J. Verbaere O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2, *Grand N* 77, 7-34.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin édition.

Restrepo A. (2008) *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6[ième]*. Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier Grenoble.

van Hiele .P.-M., van Hiele-Geldof, D. (1958) A Method of Initiation into Geometry; *in Report on methods of Initiation into Geometry, in H. Freudenthal, Learning and Understanding in Mathematics, a Tribute to Richard Skemp* 27-47

ANNEXE 1

Regroupement 1 - Les petites bêtes

Séance 1 - Cahier 1 : élèves en binôme avec Cabri Elem, introduction à l'environnement dynamique, première approche des instruments de construction (*point*, *droite*, *segment*, *triangle*, *cercle* et *carré*) et premières utilisations de *Di* et *Dc.*

Séance 2 : en classe entière, Cabri Elem projeté, introduction de la feuille de constat

Regroupement 2 - Parallèles et Perpendiculaires

Séance 1 - Cahier 2 : élèves en binôme avec Cabri Elem, introduction des instruments de construction *Perpendiculaire* et *Parallèle*, applications pour reproduire un rectangle et un parallélogramme.

Séance 2 : en binôme, à partir de films extraits de la séance précédente, les élèves évaluent l'utilisation des instruments *Perpendiculaire* et *Parallèle*.

Séance 3 : en classe entière, extraits de la séance cahier 2- séance 2 projetés, mise à jour de la feuille de constat avec les nouveaux instruments *Perpendiculaire* et *Parallèle*.

Regroupement 3 – Carré, Rectangle, Losange …

Séance 1 : avec Cabri Elem, reconnaître et identifier des quadrilatères donnés (évaluation notée)

Séance 2 : avec papier-crayon, correction de l'évaluation en papier-crayon

Regroupement 4 - Compas et Cercle

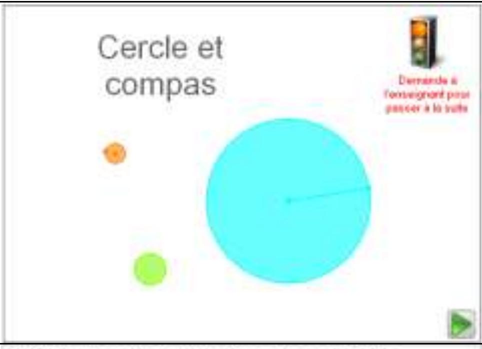
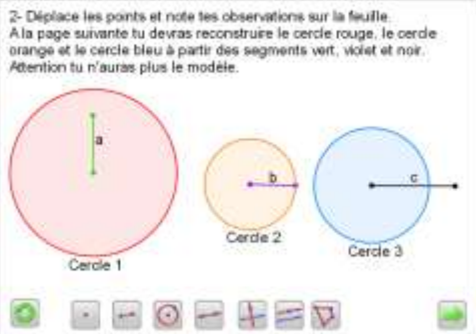
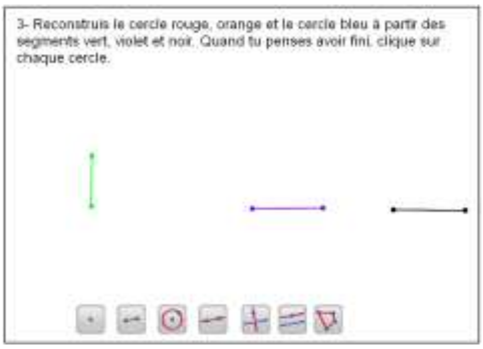
Séance 1 : avec Cabri Elem, introduction de l'instrument Cercle(Rayon,Centre)

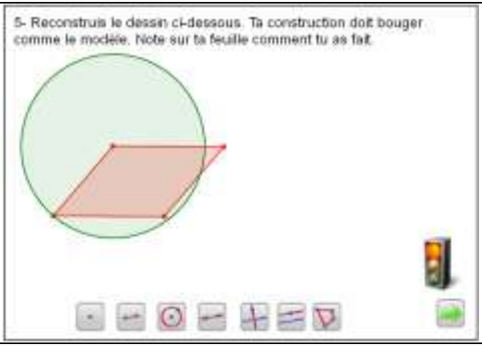
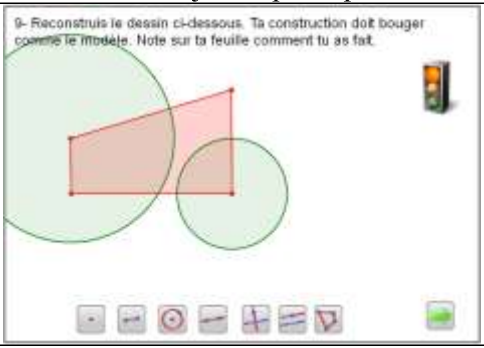
Regroupement 5 - Symétries

Séance 1 : avec Cabri Elem, introduction de l'instrument *Symétrie Axiale* avec le déplacement

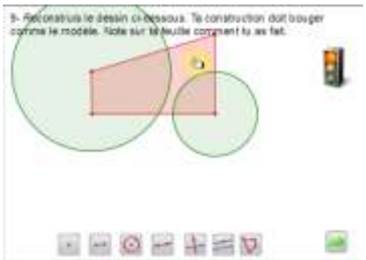
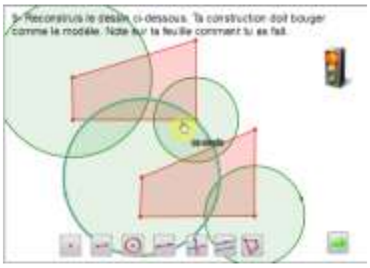
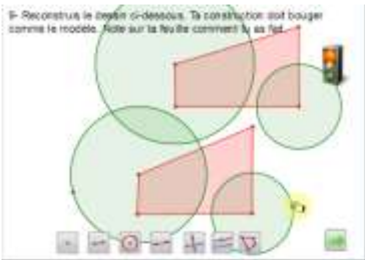
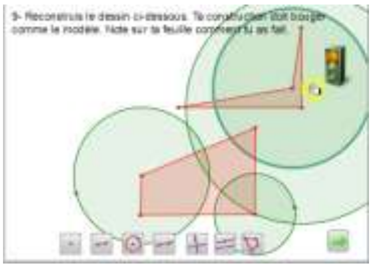
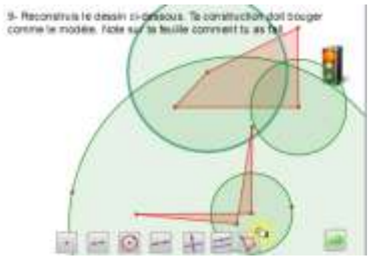
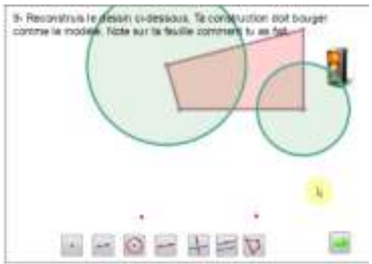
Séance 2 : avec Cabri Elem, introduction de l'instrument *Translation* avec le déplacement.

ANNEXE 2 – cahier Compas-Cercle

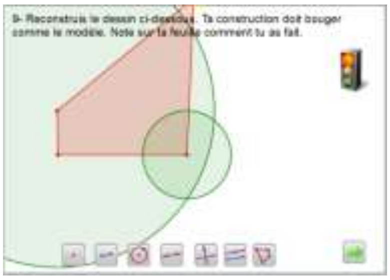
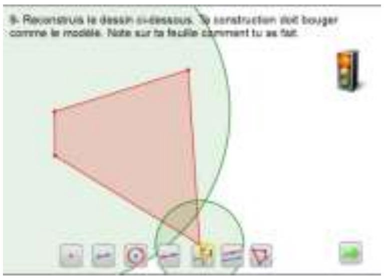
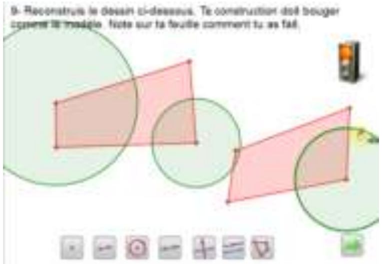
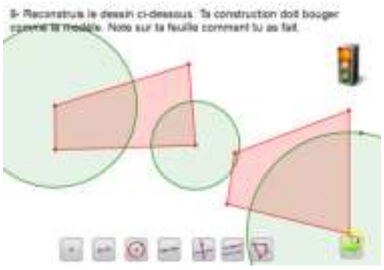
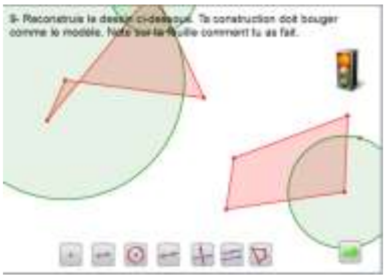
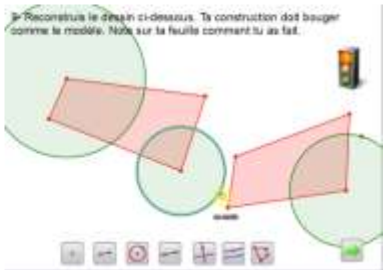
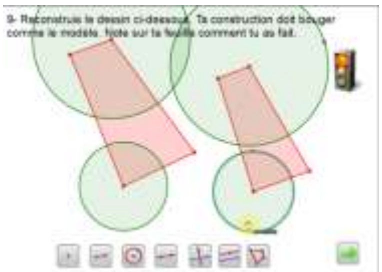
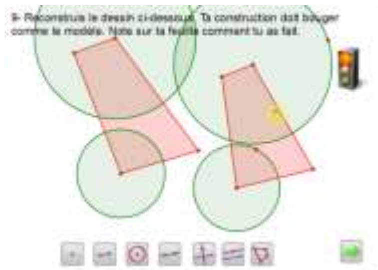
<table>
<tr><td>
</td><td><u>Objectif activité</u> : identifier et mettre en œuvre deux utilisations de l'outil cercle, avec un segment donné comme rayon Cercle(Rayon,Centre), ou un point sur le cercle Cercle(Centre,Point). Réinvestissement dans diverses activités
<u>Déroulement</u> : moments de travail en binôme entrecoupés de moments collectifs sur l'utilisation des outils cercle.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Les noms des cercles et des segments ont été ajouté pour l'article, pour faciliter la compréhension.
Le cercle 1 a pour rayon le segment c.
Le cercle 2 a pour rayon le segment b.
Le cercle 3 a pour rayon le segment a.
Le changement de longueur des segments change les rayons des cercles.</td></tr>
<tr><td colspan="2">L'enseignante présente la consigne de la page la page 2, les élèves manipulent, observent et prennent des notes, puis l'enseignante demande que tout le monde passe à la page suivante</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Mise en œuvre des deux utilisations possibles de l'outil cercle.
Pour les cercles 1 et 3 Cercle(Rayon,Centre) en utilisant le segment c comme rayon pour le cercle 1 et une extrémité du segment a comme centre ; et le segment a comme rayon pour le cercle 3 et une extrémité du segment c comme centre.
Pour le cercle 2 Cercle(Centre,Point) avec une extrémité du segment b qui définit le centre et l'autre extrémité qui définit la longueur du rayon
On peut aussi utiliser Cercle(Rayon,Point) pour le cercle 2 avec le segment b comme rayon et une extrémité du segment 2 comme centre.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Page 3 : L'enseignante institutionnalise l'utilisation de l'instrument Cercle(Rayon,Centre) à partir d'un rayon puis d'un centre et note l'utilisation au tableau noir, exemple avec le premier cercle (1), puis les élèves terminent seuls les deux autres cercles.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Application de l'utilisation de l'instrument Cercle(Rayon,Centre).
Les segments deviennent déformables lorsqu'on valide.
Validation l'élève : lorsqu'il modifie la longueur des segments vert et rouge, le rectangle doit aussi se modifier.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Page 4 non abordée en collectif
Relances : comment fait-on en papier crayon ? Par quoi commence-t-on en papier crayon ? Faire référence à la définition de l'instrument Cercle(Rayon,Centre) au tableau.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Le quadrilatère est un quadrilatère quelconque. Le cercle a pour rayon un des côtés du quadrilatère, opposé au centre du cercle.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Pages 6 à 8 : sur le cercle comme ensemble de points à égale distance du centre, travaillé à travers une simulation d'un jeu de pétanque. Utilisation de l'outil cercle pour l'instruement Cercle(Centre,Point)</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Le quadrilatère est quelconque.
Chaque cercle a pour rayon un des côtés du quadrilatère, opposé à son centre.</td>
</tr>
</table>

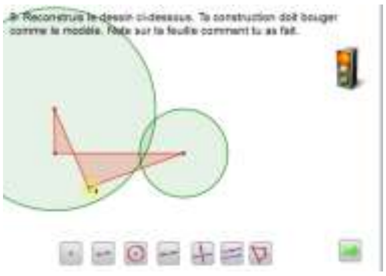
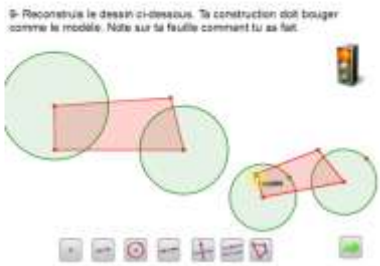
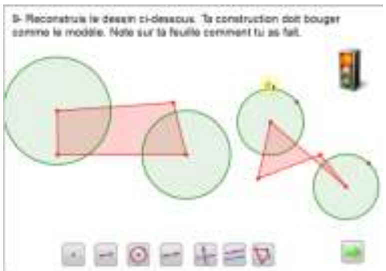
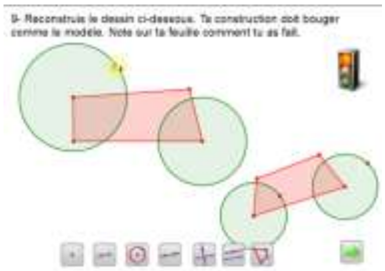
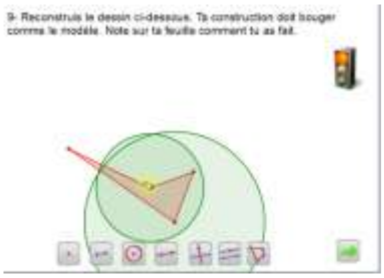
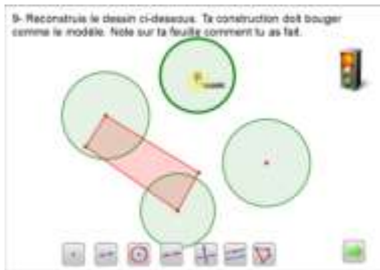
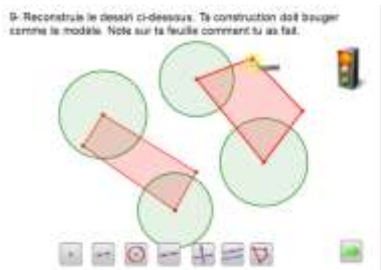
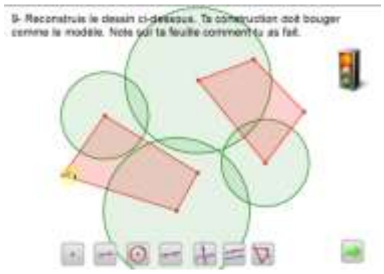
ANNEXE 3 – Production profil Iconique

 1-Translation du modèle par déplacement du quadrilatère dans sa globalité (pas de déformation).	 2-Construction en conservant la taille, l’orientation et la forme du modèle (Quadrilatère puis Cercle(Centre,Point))
 3-Ajustement perceptif du rayon des cercles construits	 4-Déplacement d’un sommet du modèle et déformation du modèle
 5-Déplacement d’un sommet de la construction et déformation de la reproduction	 6-La construction est effacée par les élèves.

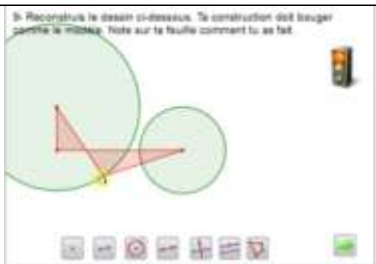
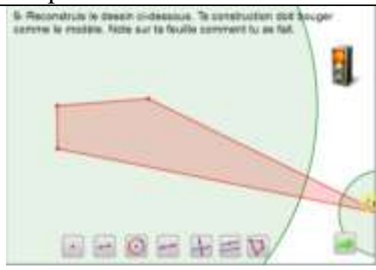
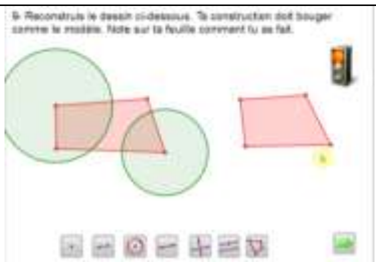
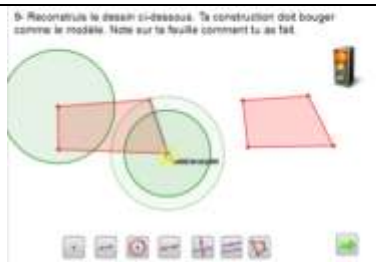
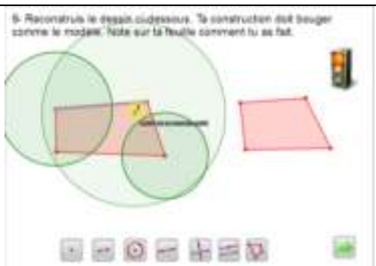
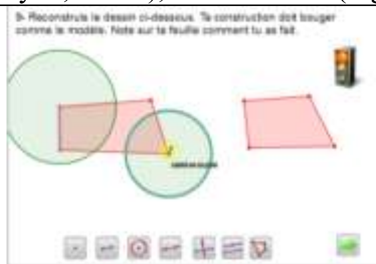
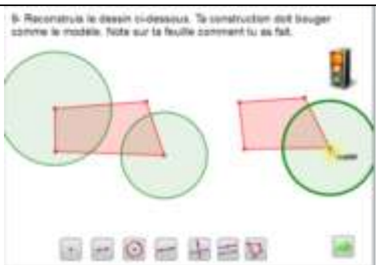
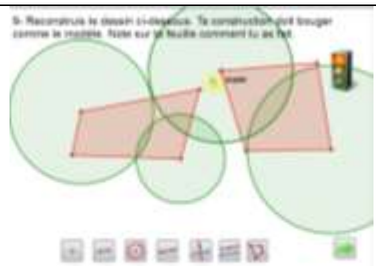
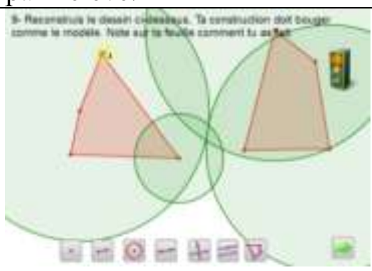
ANNEXE 4 – Production profil 2

 1-Déplacement d’un sommet du modèle	 2- Déplacement d’un autre sommet du modèle
 3-Reproduction à l’aide de l’instrument Quadrilatère puis Cercle(Centre,Point) en utilisant un des sommet du quadrilatère construit et un point libre.	 4-Déplacement d’un sommet du quadrilatère construit
 5-Déplacement du même sommet du quadrilatère modèle	 6- Remarque d’un élève« il est où le point ? » en montrant le cercle 2 du modèle, puis bougeant le point libre du cercle 2 reproduit.
 7-Reproduction complète en reprennant la même utilisation de l’instrument Cercle(Centre,Point) pour le cercle 2 puis Quadrilatère puis Cercle (Centre,Point) pour le cercle 1.	 8-Déplacement d’un sommet du quadrilatère construit puis du quadrilatère modèle rmarque : « il y a un truc de bizar, c’est que le cercle en haut il bouge pas »

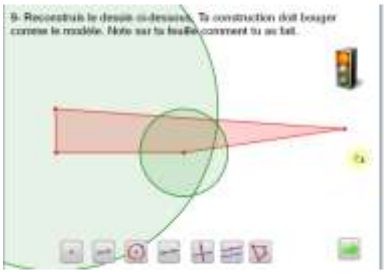
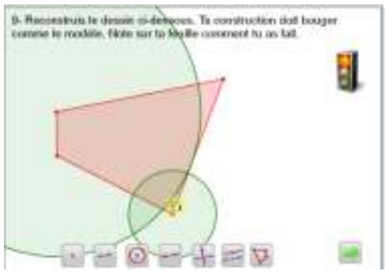
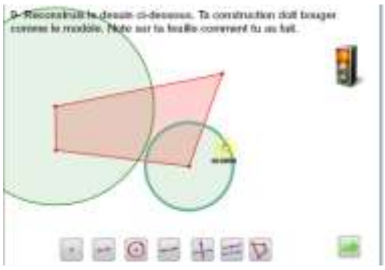
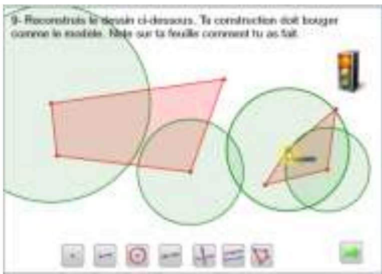
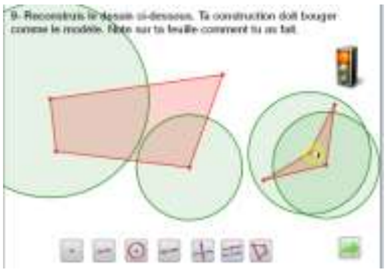
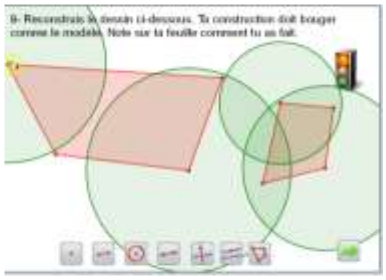
ANNEXE 5 – Production profil 3

 1-Déplacement d'un sommet du modèle	 2-Reproduction avec les instruments Quadrilatère et Cercle(Centre,Point)
 3-Déplacement d'un cercle de la reproduction	 4-Déplacement d'un cercle du modèle (équivaut à une translation du modèle) réaction de l'élève : « alors ça c'est complètement raté »
 5-Déplacement un sommet, puis un autre du modèle ?	 6-Reproduction utilisant l'instrument Cercle(Rayon,Centre) avec les côtés du modèle
 7-Construction du quadrilatère avec l'instrument Quadrilatère en utilisant les centres des cercles reproduits.	 8-Déplacement d'un sommet du modèle qui change le rayon d'un cercle de la reproduction

ANNEXE 6 – Production profil 4

 1-Déplacement d'un sommet du modèle	 2-Déplacement d'un autre sommet du modèle
 3-Reproduction du quadrilatère	 4-Recherche du rayon du cercle 2 avec Cercle(Rayon,Centre), essai 1 côté b (Figure 2)
 5-Essai 2 avec le côté a	 6-Essai 3 avec le côté d concluant, cercle effacé …
 7- … pour être reproduit avec Cercle(Rayon,Centre) utilisé sur le quadrilatère construit par l'élève.	 8-Reproduction du cercle 1 avec Cercle(Rayon-,Centre) utilisé avec le côté du quadrilatère modèle et le sommet du quadrilatère construit
 9-Déplacement puis non validation de la construction	Plusieurs essais sont nécessaires pour appliquer la procédure utilisée pour le cercle 2 sur le cercle 1.

ANNEXE 7 – Production profil 5

 1-Déplacement d'un sommet du modèle	 2-Déplacement d'un autre sommet du modèle
 3-Association d'un côté au rayon d'un cercle : « Là c'est le rayon de celui-là »	 4-Reconstruction du quadrilatère et des deux cercles.
 5-Déplacement d'un sommet de leur construction	 6-Déplacement un sommet du modèle

Autores :

Sylvia Coutat. Université de Genève, Suisse. Sylvia.Coutat@unige.ch

INÉS Mª GÓMEZ-CHACÓN, JESÚS ESCRIBANO

GEOMETRIC LOCUS ACTIVITIES IN A DYNAMIC GEOMETRY SYSTEM. NON-ICONIC VISUALIZATION AND INSTRUMENTAL GENESIS

Abstract

This paper presents a study on the use of geometric locus using a dynamic geometry system (GeoGebra) in order to pass from Geometry II (a natural proto-axiomatic Geometry) to Geometry III (a complete axiomatic Geometry). The research was conducted with 30 Spanish college prospective mathematics teachers. The Geometric Work Space theory (GWS) was used as a theoretical framework to describe the figurative and instrumental genesis processes involved in learning processes in computer environments. To study these two genesis, iconic visualization versus non-iconic visualization, along with instrumental and dimensional deconstruction concepts, were used. The authors identify typologies of images and visualization uses.

Keywords: Problem-solving strategies, Visualization, Interactive learning, Drawing, Diagrams, Loci, Teacher training, Visual representations, Reasoning, Geometry, GeoGebra.

Actividades sobre Lugares Geométricos desarrolladas en un sistema de geometría dinámica. Visualización no icónica y génesis instrumental

Resumen:

En este artículo se presenta un estudio sobre la utilización del concepto de Lugar Geométrico en un sistema de geometría dinámica (GeoGebra) en la transición de la Geometría II (geometría proto-axiomática natural) a la Geometría III (geometría completamente axiomática). La investigación se lleva a cabo con 30 estudiantes de matemáticas, futuros profesores, en la universidad española. Se utiliza la teoría de Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) como marco teórico de referencia para describir las génesis figurativas e instrumentales involucradas en los procesos de aprendizaje en entornos informáticos. Para el estudio de estas dos génesis se utiliza los conceptos de visualización icónica versus visualización no-icónica, junto a los conceptos de deconstrucción instrumental y dimensional. Los autores identifican tipologías de imágenes y usos de visualización.

Palabras clave: estrategias de resolución de problemas, visualización, aprendizaje interactivo, diagramas, Lugares geométricos, formación del profesorado, representaciones visuales, razonamiento, Geometría, GeoGebra.

Activités de lieu géométrique dans un système de géométrie dynamique. Visualisation non-iconique et genèse instrumentale

Résumé

Cet article est centré sur l'étude sur l'utilisation Lieu Géométrique en utilisant un système géométrique dynamique (GeoGebra) afin de passer de la Géométrie II (géométrie proto-axiomatique naturelle) à la Géométrie III (géométrie axiomatique). Notre recherche concerne un groupe de trente étudiants de licence de mathématiques, futurs enseignants, à l'Université espagnole. Nous appuierons notamment notre analyse sur notions d'Espace de Travail Géométrique (ETG) et comment les genèses figuratives et instrumentales sont impliqués dans le processus d'apprentissage dans un environnement informatique. Pour étudier ces deux genèses on utilise la visualisation iconique contre visualisation non-iconique joint à la déconstruction instrumentale et dimensionnelle. Les auteurs identifient typologies d'images et usages de la visualisation.

Mots-clés: stratégies de résolution de problèmes, visualisation, l'activité d'apprentissage interactif, diagrammes, lieu Géométrique, formation des enseignants, des représentations visuelles, raisonnement, Géométrie, GeoGebra.

Atividades sobre Lugares Geométricos (Locus) desenvolvidas num sistema de geometria dinâmica. Visualização não icónica e génese instrumental

Resumo

Neste artigo apresenta-se um estudo sobre o uso de Lugar Geométrico (Locus) usando um sistema de geometria dinâmica (GeoGebra) na passagem de uma Geometria II (proto-axiomática natural) para uma Geometria III (completamente axiómatica). A investigação foi realizada com 30 estudantes universitários espanhóis, futuros professores de Matemática. Foi usada a teoria do Espaço de Trabalho Geométrico (ETG) (Space for a Geometric Work, SGW) como marco teórico de referência para descrever as géneses figurativas e instrumentais envolvidas nos processos de aprendizagem em ambientes computacionais. Para estudar estas duas géneses foi usada a visualização icónica vs. a visualização não-icónica juntamente com os conceitos de desconstrução instrumental e dimensional. Os autores identificam tipologias de imagens e usos de visualização.

Palavras-chave: Estratégias de resolução de problemas; visualização, aprendizagem interativa; diagramas; lugares geométricos (Locus), formação de professores; representações visuais; raciocínio; Geometria; GeoGebra.

1. Introduction

Using dynamic geometry systems (DGS), researchers try to identify how students explore concepts in various representations, and how they form and link images to visualize mathematical concepts. In this paper we study the concept of locus using DGS, for example, GeoGebra[1]. Concerning the teaching of this concept, there are important aspects to identify, such as meanings, definitions, visualizations and representations. In previous studies we found out that geometric locus problems create many difficulties when students try to solve them (Gómez-Chacón and Escribano, 2011).

DGS can only find loci of points that have been effectively constructed in their systems, that is, points who parametrically depend on another one ("parametric locus"). In this context some works show the possibilities of the interconnection between dynamic geometry and computer algebra systems, in order to study more general locus (Botana, 2002; Botana, Abánades, Escribano, 2011).

In general, given a geometric configuration, a locus determined by the point T is the set of points given by the different positions of T when considering all possible instances of the configuration satisfying some property. In particular, given the point T, dependent on the point M, which is a point on the one-dimensional object l (line, circle, ...), the *locus* defined by T and M is the set of points traced by T as M moves along l. The points T and M are referred as the *tracer* point and the *mover* point of the locus, respectively. We must remark the functional nature of "locus" in a DGS. Locus is defined as the image of an object under an application or transformation: the function that transforms the "mover" into the "tracer". The points on the locus depend parametrically from the points of object where the "mover" lives. Under this condition, the DGS is able to build the image points.

Hence, the choice of this subject of study is motivated by these two reasons: the interest of the algebraic-geometric configurations involved in the the concept of locus in the DGS, and the difficulties encountered in the resolution of problems by prospective teachers.

---

[1] www.geogebra.org

We try to make understandable the teaching context of this kind of problems using the framework of Spaces for a Geometric Work (SGW) (see the introduction of this monograph). The resolution of geometric task, for example the locus, implies the setting of an appropriate space for the geometric work. The *appropriate* SGW needs to meet two conditions: it enables the user to solve the problem within the right geometrical paradigm, and it must be well built, in the sense that its various components are organized in a valid way, to take into account the personal SGW of the students.

In particular, using a training situation of homology about geometric locus with prospective teachers we focus on how figural and instrumental geneses are articulated in the SGW using a DGS. Different geneses do not operate separately, they must interact in order to give the geometric work a meaning that the present study aims to highlight, making more explicit the articulation existing between this geneses in the personal SGW of the students and studying the role that GeoGebra plays in the construction of this geometric space, in order to pass from the Geometry II to Geometry III (Paradigmes géométriques, Houdement and Kuzniak, 2006). In this passage we need to pay attention to structure three essential components in Geometry: real and local space with tangible objects, the devices and a theoretical reference from the properties. Geometry II, which can be considered to be a natural proto-axiomatic Geometry, is constructed on a model which is near to reality but is also constructed on axioms, the demonstrations must be developed within this environment. As regards Geometry III, complete axiomatic Geometry, it is possible to disconnect from reality and only count on the system of axioms. This last Geometry is is hardly worked in compulsory schooling, but it remains in the implicit reference frame of teachers who have studied mathematics at the university level, where this formal and logical approach is common. So, when specialists are trying to solve geometric problems, they switch repeatedly between paradigms. When we work on GII, a naturally axiomatic geometry and an axiomatic model of reality based on hypothetical-deductive rules (Houdement and Kuzniak, 2006) is not enough to display iconic problems. These problems are not only related to the eyes of students as drawings, but involve a more axiomatic viewpoint to make a dimensional deconstruction. The use of graphical representations is much more complex: the geometry loci teaching requires both conceptual (geometric axiomatic, functional transformations, functional dependencies), non-iconic visualization as well as instrumental genesis, where instrumental deconstruction is crucial. This is the main hypotheses of this work.

Finally, we note that the construction and use of imagery of any kind in mathematical problem-solving constitute a research challenge because of the difficulty of identifying these processes in each individual. The visual imagery used in mathematics is often personal in nature, related not only to conceptual knowledge and belief systems, but also to personal affects (Gómez-Chacón,2012). This observation has been considered in the analysis of the personal SGW of the students.

2. Theoretical considerations

In geometry, figures are the visual, discursive and heuristic support. Within the SGW framework, cognitive and epistemological levels need to be articulated to ensure a coherent and complete geometric work (Houdement and Kuzniak, 2006). This process supposes some transformations that can possibly be pinpointed through three fundamental geneses:

– A *figural and semiotic* genesis which provides the tangible objects their status of operating mathematical objects.

– An *instrumental genesis* which transforms artifacts into tools within the construction process.

– A *discursive genesis of proof* which gives a meaning to properties used within mathematical reasoning.

In this paper we will examine some key aspects on how both figural and instrumental geneses are involved in the learning process in a computer environment. As it is noticed in the introduction of this volume, the development of the appropriate space of geometric work in a technological context requires an "extended" visualization (Kuzniak & Richard). The exploration of mathematical objects is supported on figural-semiotic and instrumental genesis. (See Plane 3 (Fig-Ins) associated to figural and instrumental genesis described in the introduction of this monograph). The subject in the process of instrumental genesis constructs schemes of use. These schemes are not only restricted to physical world: they are related to a whole symbolic system that can be used. A better understanding of the visualization processes must identify which ones are associated with patterns of use, or with structuring information by sign operations, or to a heuristic function that allows the user to anticipate and plan actions and modes of validation. To consider the epistemological point of view and for the study of the subject's activity, we will consider theoretical aspects of visualization and instrumental deconstruction which are described in the following paragraphs.

2.1. Figural and semiotic genesis

In this section we discuss the working definitions that have guided our analysis of the students' work in this genesis.

2.1.1. Defining Visualization

In our study, the analysis of the cognitive processes involved in working with (internal and external) representations when reasoning and solving problems requires a holistic definition of the term "visualization". Arcavi's proposal (Arcavi, 2003: 217) has consequently been adopted: *"the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings*".
This definition suggests that visual thinking is a way of reasoning consisting of mental transformations of objects that are either constructed in the mind or in some perceived external "reality." Although in this work we will focus on the meaning of visualization as the use of pictures, images and diagrams, which are produced in the graphic register, we agree with Duval (1999)[2] when he notes that visualization can be produced in any register of representation, as it is referred to processes linked to visual perception and then to vision, which is not limited to only one register. For this study, this notion will be considered for categorizing iconic and non-iconic visualization.

2.1.2. Iconic visualization vs. no-iconic visualization

It is important to distinguish two opposite ways of cognitive functioning, in which the processes of recognition of the represented objects are radically different in the geometric work: iconic visualization and non-iconic visualization (Duval, 2005). If we consider the complexity of the process of "seeing", "to see" always involves two levels of operations that are different and independent one from other, although often they are merged into the synergy of the act of seeing. These two levels of operations are discriminative recognition of forms and identification of objects corresponding to the recognized forms. The main cognitive problem is to understand how we step from a discriminative recognition of forms to the identification of the objects we see.

In the iconic visualization, recognition of what forms represent is made by the resemblance to the representing (real) object, or by comparison with a prototypical model of forms (a particular figure works as a model, and the other figures are recognized by their degree of resemblance to this model). The figure is independent of the operations that are performed on it.

---

2 Duval characterizes visualization as "a bi-dimensional organization of relations between some kinds of units. Through visualization, any organization can be synoptically grasped as a configuration" (Duval, 1999:15)

The non-iconic visualization is a sequence of operations that allows the recognition of geometric properties, due to the impossibility of obtaining certain configurations, or the invariance of the obtained configurations. The figure is a configuration contextually separated from a net or a more complex organization (Duval, 2005: 14).

We have found out that, in geometric learning with DGS, there exists a gap between these two different inputs. And this gap is very important, because only non-iconic visualization is relevant for the geometric processes that we want to produce.

2.1.3. Typologies of images and uses of visualization

Studying this iconic/non-iconic visualization gap , we have characterized, in the graphic record, different types of images and uses of visualization, that allows to analyze, in an operative way, productions from the students.

The analysis of these complementary elements, image typology and use of visualization, was conducted by Presmeg (2006) and Guzmán (2002). In Presmeg's approach, images are described both as functional distinctions between types of imagery and as products (concrete imagery ("picture in the mind"), kinesthetic imagery, dynamic imagery, memory images of formula, pattern imagery). In Guzmán they are categorized from the standpoint of conceptualization, the use of visualization as a reference and its role in mathematization, and the heuristic function of images in problem-solving (isomorphic visualization, homeomorphic visualization, analogical visualization and diagrammatic visualization[3]). This final category was the basis adopted in this paper for addressing the handling of tools in problem-solving and research and the precise distinction between the *iconic* and *heuristic function of images* (Duval, 1999) to analyze students' performance (see Annex 1 y 2). The *heuristic function* was found to be related to *visual methods* and cognitive aspects as part of visualization: the effect of basic knowledge, the processes involved in reasoning mediated by geometrical and spatial concepts and the role of imagery based on analogical visualization that connects two domains of experience and helps in the modeling process.

2.2. On instrumental genesis

The instrumental approach developed by Rabardel (1995) enables to explore the dual aspect - between design and use - of any technical object (see also Artigue (2002)). A technical object has been designed in order to contribute to the achievement of specific tasks. From this point of view, it embeds knowledge and has characteristics implemented by its designer. But its potentialities of use have to be enacted by a particular user for the purpose of the own task. The artifact and the modalities of its use are elaborated by a particular user. In this perspective, the instrument is the result of a construction and an appropriation by its user for his personal tasks and activities. The process of appropriation and elaboration of an instrument by a user is named instrumental genesis. It requires the elaboration of schemes of use. In the case of the "Locus" tool , we have seen that it is not immediate or simple.

Our study highlights the didactic needs that determine the distinction between the trajectory (trace) and the locus, at an epistemological level of the concept "Locus", which are present in the creation of the tools "Trace" and "Locus" in a DGS (GeoGebra) and determine the resolution of these problems. To use the "Locus" tool requires an operative apprehension for fruitful intuition of the figure. The non-iconic visualization require awareness of the properties that are linked to operations taking place,

[3] *Isomorphic visualization:* the objects may correspond "exactly" to the representations. *Homeomorphic visualization:* inter-relationships among some of the elements afford an acceptable simulation of the relationships between abstract objects They serve as a guide for the imagination. *Analogical visualization:* the objects at hand are replaced by that are analogously inter-related. Modeling process. *Diagrammatic visualization:* mental objects and their inter-relationships in connection with aspects of interest are merely represented by diagrams that constitute a useful aid to thinking processes. (Guzmán, 2002).

either to construct a figure or to transform it, where two types of deconstruction are crucial: *instrumental deconstruction* (procedural dimension, defined by Mithalal as the identification of a set of independent figural units, the primitives, and a succession of actions performed through the use of instruments, that are used to reconstruct the object itself, or a graphical representation of the object) and *dimensional deconstruction* (discursive activity on the geometrical properties of the figural units) (Mithalal, 2010).

3. Training and research methodology

The study was conducted with 30 mathematics prospective teachers at the Spanish University. The qualitative research methodology used consisted of observation during participation in student training and output analysis sessions as well as semi-structured interviews (video-recording). The procedure used in data collection was student problem solving, along with a questionnaire about visual reasoning and technology difficulties. All screen and audio activity on the students' computers was recorded with CamStudio software, with which video-based information on problem solving with GeoGebra could be generated. Consequently, at least four data sources were available for each student.

Six non-routine geometric locus problems were posed, to be solved using GeoGebra during the training session. The problems are posed in an analytic register. Each problem admits several kinds of resolution, including a visual one. Thus the problems allow the study of the students' behavior with the coordination of registers and they enable us to compare results between those who make a conversion to the graphic register and those who do not. Finding the solutions to the problems required to follow a sequence of visualization, technical, deductive and analytical steps.

PROBLEM
Problem 1: find the equation for the locus formed by the barycenter of a triangle ABC, where A = (0, 4), B = (4, 0) and C is a point on circle $x^2 + y^2 + 4x = 0$.
Problem 2: assume a variable line r that cuts through the origin O. Take point P to be the point where line r intersects with line Y=3. Draw line AP from point A = (3,0), and the line perpendicular to AP, s. Find the locus of the intersection points Q between lines r and s, when r is shifted.
Problem 3: assume a triangle ABC and a point P. Project P on the sides of the triangle: Q1, Q2, Q3. Are Q1, Q2 and Q3 on the same line? Define the locus for points P when Q1, Q2 and Q3 are aligned.
Problem 4: the top of a 5-meter ladder rests against a vertical wall, and the bottom on the ground. Define the locus generated by midpoint M of the ladder when it slips and falls to the ground. Define the locus for any other point on the ladder.
Problem 5: find the locus of points such that the ratio of their distances to points A = (2, -3) and B = (3, -2) is 5/3. Identify the geometric object formed.
Problem 6: find the equation for the locus of point P such that the sum of the distances to the axes equals the square of the distance to the origin. Identify the geometric object formed.

Table 1: Geometric locus problems

Geometric locus training was conducted in 3 two-hour sessions. Prior to the exercise, the students attended several sessions on how to use GeoGebra software, and were asked to solve problems involving geometric constructions.

In the first two sessions, the students were required to solve the problems individually in accordance with a proposed problem-solving procedure that included the steps involved, an explanation of the difficulties that might arise, and a comparison of paper and pencil and computer approaches to solving the problems. Students were also asked to describe and record their beliefs, feelings and mental blocks when solving problems.

The third session was devoted to common approaches and the difficulties arising when trying to solve the problems. A preliminary analysis of the results from the preceding sessions was available during this session.

The problem-solving results required a more thorough study of the subjects' cognitive and instrumental understanding of geometric loci. This was achieved with semi-structured interviews conducted with nine group volunteers. The interviews were divided in two parts: task-based questions about the problems, asking the students to explain their methodologies and a series of questions designed to obtain information about visual and analytical reasoning, and visualization and instrumental difficulties.

4. *A priori* analysis of experimentation/typology of geometric loci

We must consider the functional approach used in the DGS (for the analysis we have used 3.7 y 4.0 versions). Hence, we can distinguish three cases or typologies of problem-solving:

Type 1: Problems in which the locus is directly defined, so that the functional approach is straightforward. For instance, the problem 1 (Table 1). This problem describes the function that takes the point C in the circumference to its image by expressed construction: the function maps each point C to the centroid of the triangle ABC.

Type 2: Problems that, in order to be treated with GeoGebra, must be translated into a functional model, although they are not originally expressed in these terms. This functional approach is necessary to use a DGS to solve the problem. In this case, if you want a student to solve the problem, you must give clues for instrumental deconstruction and non-iconic visualization. Problems of this type are problems 2, 4, 5 and 6. In this type of problems, we usually need to use auxiliary objects, sometimes for mathematical reasons, and sometimes for technical reasons (due to the characteristics of GeoGebra).

Next we detail aspects of instrumental deconstruction and iconic/non-iconic visualization related to problem 4 and 5.

Problem 4 (Table 1): Instrumental deconstruction: If we want a dynamical approach in this problem, we must represent properly the ladder. To draw a ladder that really slips along the wall, it is not enough to draw a simple segment. We must use an auxiliary circle, determining the fixed length of the ladder. With this proper representation of the ladder, we can use the "locus" tool in GeoGebra.

Iconic/non-iconic visualization: The representation of this problem is iconic, it is easy to imagine and draw a ladder slipping along the wall. But the point is that to construct a good representation of the ladder, we need to use auxiliary (non-iconic) objects, as a circle, because the direct approach (considering the ladder as a general segment) do not allow us to produce a dynamic representation. (See comments below, on students' results). In this case, the auxiliary objects are needed for technical reasons. In GeoGebra, a segment is given by two points and if we move one of the points (say, along the wall) the segment just extends or shrinks. To obtain a segment that behaves as a ladder, we need a "technical" auxiliary construction. On the other hand, we must be precise in the definition of the midpoint, or any point of the ladder, this time for mathematical reasons. Hence, students must take care in the modelization of the problem, for technical and mathematical reasons.

Problem 5 (Table 1). Instrumental deconstruction: In a locus problem, we need always a “mover”. In this case, the “mover” is the distance, that is, we must consider an auxiliary point on a segment, that defines the distance between A and B. This is the key point in the construction. In GeoGebra 4.x we can also use a slider.

Iconic/non-iconic visualization: It is easy to solve the problem in an analytic way, but it is difficult to represent it visually, even with pencil and paper. To obtain a good representation using a DGS, we need to use a non-iconic representation, considering the distance as a “mover” of the locus. Before attacking the problem, students must perform a discursive reasoning, that is, before we represent anything, we must set clearly the modelization. Once the model is clear, the construction is quite straightforward.

Type 3: There are classic problems in which we can use GeoGebra to illustrate, but we can not use the Locus tool to solve them. We are not allowed to use the Locus command because it needs a “tracer” point and “mover” point, and in this type of problems there is no “mover” point because the tracer is determined by certain algebraic conditions. For example, problem 3 (Table 1). The construction is simple and the question is quite natural. However, the answer is not simple or obvious at all. This is an example of "nonparametric" locus and not solvable by GeoGebra (for the moment). Conceptually, it is a different example of locus, which establishes a clear difference with the “parametric” examples. Nevertheless, the students can guess the solution moving the point P, and considering an auxiliary line (passing by Q1 and Q2) to check if the three points are aligned.

5. Results: episodes of visualization

Due to space constraints, we only present results for problem 4. This is a medium–advanced level problem for the student. The statement does not give explicit instructions for the construction. The situation is realistic and easy to understand, but the GeoGebra construction is not evident. We need to use an auxiliary object, and a mathematization process is demanded. Although the mediation of GeoGebra can help to make conjectures, it does not reveal the rationality below the calculations.

The visual-analytic reasoning demands to overcome the initial difficulty building the ladder. Using an auxiliary object, Geogebra produces a precise representation of the locus. Locus tool does not produce an algebraic answer, to obtain it we must take 5 points on the locus and then the conic passing by the 5 points: we now obtain an algebraic equation. For instrumental reasoning: There are two key moments in the problem: (1) The construction of the ladder with an auxiliary circle (Fig. 1), and (2) if we want to study the locus of the positions that a point in the ladder describes, the point must be defined in a precise way (middle point, “1/4 point”). In order to use the locus tool, we must to take care when we choose the point on the ladder. We can not use just a “point in segment”, we must use the “middle point” tool, or a more sophisticated construction.

As mentioned above, both moments are different: while the precision in moment (2) is due to mathematical reasons, moment (1) is necessary for technical reasons. The definition of the element “segment” in GeoGebra is not suitable for modelizing a ladder.

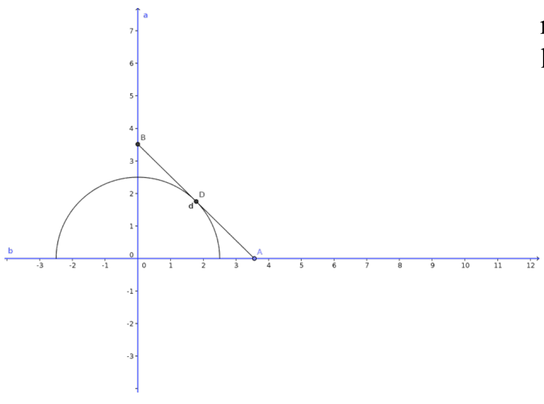


Figure 1: Solution Problem 4

5.1. Typology of difficulties in the group

A first type of difficulty is determined by static constructions (discrete treatment, Fig. 2). In this typology, students use GeoGebra as an advanced blackboard, but they do not use dynamic properties. They repeat the constructions for a number of points. To draw the geometric locus, they use the tool "conic by 5 points".

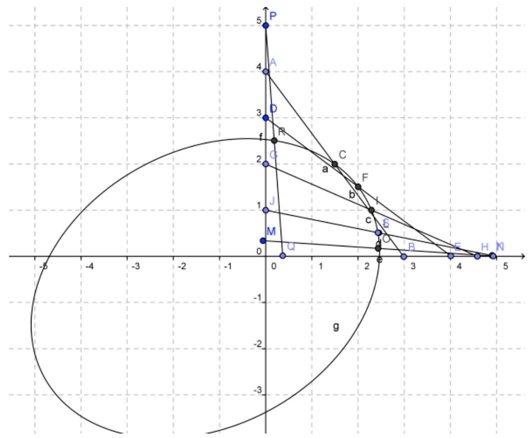


Figure 2: Student 13, solution problem 4

In these cases of iconic visualization, semiotic form leads to a misinterpretation of the dynamic figure by the discrete figural expansion. A non-iconic visualization and an appropriate instrumental deconstruction require some competences from the students: they are able to handle physical and mental representation, but the logic of the construction of a dynamic figure with a DGS is different.

A second type of difficulty is the incorrect definition of construction (use of free points). The students solve the problem (in an imprecise way), but this kind of solution implies that the tools in GeoGebra cannot be used. To use the "locus" tool, it is necessary that the defining points are correctly determined (they can not be free points). With this approach, in the best case, the students can obtain a partially valid construction, but, as we can't use the GeoGebra tools, we can't obtain an algebraic answer. In problem 4, the difficulty lies in defining the point of the ladder that is not the midpoint. We obtain an approximate visual solution (using the "trace" tool) which is not usable with GeoGebra to produce a real locus (Fig 3). The students in this typology are absolutely convinced that their solution is right. They are not at all aware that there exists a problem with the solution.

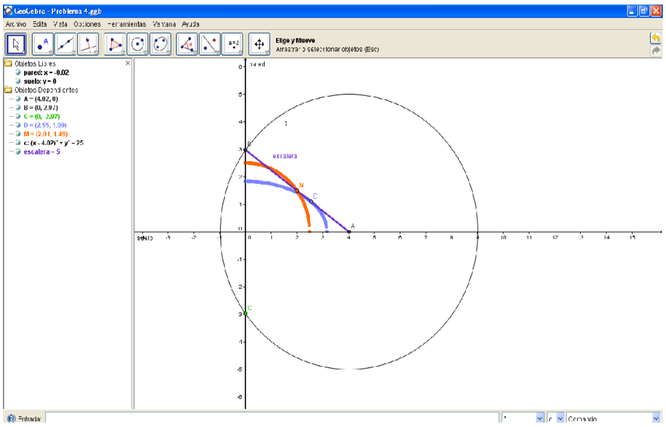


Figure 3: Student 23, solution problem 4

Finally another type of problems is the use of invalid instrumental elements. For example, some students use the "slider" tool to displace the "mover point". The student realizes that the "mover point" must be controlled, and the control is done by the slider. The problem is that, for GeoGebra (before 4.x version), the slider is a scalar so it can't be used with the locus tool. Again, students use the "trace" tool.[4]

5.2. Case study

To deepen the relationships that occur between instrumental genesis and figural genesis, we conducted a case study. Here we illustrate the situation with two students who do not use the "locus command" for solving problem 4. This phenomenon occurs due to a difficulty in the articulation between the instrumental and figural genesis. The criteria to choose these students are based on their mathematical performance level, their visual cognitive style or preference for visual thinking, beliefs and feelings toward computer learning, and beliefs and feelings about visual thinking (Table 2). In the presented cases, we observe two different strategies of instrumental deconstruction, based on the different starting points of the subject.

It is necessary to obtain an equilibrium between the dimensional deconstruction (expressed in the algebraic-analytic part, that allows to perform the representation) and the instrumental deconstruction (expressed in the non-iconic visualization that allows the visual control in a DGS).

In Alberto's case, there exists a reproduction of a physical form, from a visual/perceptive control and an implicit theoretical control. There exists a control of the specific auxiliary objects, in both mathematical and technical-instrumental senses. In the second prospective teacher, Ana, the representation of the geometric object is based on an a priori theoretical control, and in GIII, although with a smaller iconic visual control. The control is a priori theoretical, and there is an axiomatic control, but there is no visual control. There is no real control of the dynamic phenomenon.

Case	**Gender**	**Mathematical achievement**	**Visual style**	**Beliefs about computer learning**	**Feelings about computers**	**Beliefs about visual thinking**	**Feelings about visualization**

[4] http://www.geogebra.org/help/docues/topics/746.html From version 4.0, you can use the slider for a locus construction.

Alberto	Male	High	Visualizing student	Positive	Likes	Positive	Likes
Ana	Female	High	Non-visualizing student	Positive	Dislikes	Positive	Dislikes

Table 2: Criteria for case study

5.2.1. Alberto's Case

Alberto is a visualizing student. His pleasure or likes for mathematical visualization is closely intertwined with the evolutionary conception of mathematics: "The fun and intuitive character of mathematics is developed by a visual reasoning rather than through an algebraic reasoning, even though it is ideal that they are complemented in the problem solving process." (Alberto's questionnaire).

He considers that visual reasoning is essential in problem solving. The feeling of pleasure that is being experienced using visualization corresponds to the experience of control and generation of in-depth learning that is being experienced. He considers that it helps in its intuitive dimension of knowledge and in the formation of mental images.

Next, we illustrate the analysis of Problem 4 that we conduct about the subject's processes of visualization, representation and use (Annex 1).

The student, first, looks for the mathematical object, but he becomes blocked (Annex 1, 1). He even attempts a physical construction. This allows him an iconic visualization that turns to a visual and semiotic exploitation within the environment of dynamic geometry. For instance, in Annex (1) when the student «search for mental image», we see a process of "implemented discovering" in which the student seeks empirically, as if his figures were objects of experimentation, anticipating satisfactory loci. In this case we can recognize moments of completing the inductive reasoning by analytical reasoning indications. Other times, this analytical reasoning is explicit like in Annex 1 (10).

The student uses the visual power of the technology to have a better understanding of the situation mathematically and to have a context change to facilitate notion and property applications. GeoGebra works as a real tool in mathematical modeling. He is a student with a proficient knowledge of image use: concrete, kinesthetic and analogical illustrations.

5.2.2. Ana's case

The behavior of this student shows us some limits about visual apprehension. Although this student indicates that visual register was used for problem solving, she highlights that she does not like to solve the problem with a computer: "I'm not very excited about it, because I do not use it frequently. I think it would be sufficient to know the language (and I already know the analytical resolution) and to do as much an exercise per week to remember the language and to use it with students, in case you have time and/or you need it". She gives more value to analytical thinking than visual thinking and she attribute less value to solve problems with computer.

There exists an *a priori* theoretical and axiomatic-analytical control, but there is no visual control. There is no control of the dynamic phenomenon. In this case, the dominant part is the non-iconic visualization, supported by analytical elements. However, this theoretical control does not add visual control on the DGS space (as it does on paper, see Annex 2, 7). She uses the GIII system, but she does not make that interpretation within the dynamic environment.

In summary, the activity of these students on visualization and instrumental deconstruction emphasizes individual differences coming from different cognitive styles and beliefs about computer use. Both students do not use the "Locus" command, but the data from their personal geometric workspace highlight essential differences in the interaction between figural and instrumental genesis.

The discursive-analytic activity, for students whose geometric work relies on it, becomes an obstacle (Ana's case). However, the lack of it is also a problem, as discussed in a previous section. The control of images is a key property in visualization and for its use in the resolution of the problem. Among the features of DGS, visual apprehension must consider the theoretical objects as building tools, for which the instrumental genesis has a central role, as evidenced in Alberto's case.

6. Conclusion

From our study, some characteristic points of the Space for a Geometric Work (SGW) at teacher training, implemented with DGS, can be drawn. This paper focuses on geometric locus activities, identifying how figural and instrumental geneses are articulated in the personal SGW. Then, the emphasis is posed on the necessity of developing, for visualization in DGS, a balance between both non-iconic visualization and instrumental genesis, where instrumental deconstruction is crucial. The "appropriate" SGW appears particularly unstable and dependent on the students' visual cognitive style and beliefs about mathematic learning in computerized environments. In the observed examples, we show the necessary equilibrium between the dimensional deconstruction (expressed in analytical-algebraic analysis that allows the representation) and the instrumental deconstruction (expressed in non-iconic visualization that allows visual monitoring in a DGS).

In a large proportion of students, there exists a heuristic deficiency in the geometric interpretation of visualizations that lead to the understanding of locus from the functional point of view. The data show that the heuristic function of visualization (or non-iconic visualization) requires visual deconstruction of the basic perceptive forms imposed in the first sight. However, there is a percentage of students (25%) whose tendency is the visual evidence, being this an obstacle (section 5.1). In the instrumental genesis, there is a procedimental dimension, is which we can see the necessary differentiation between technical and mathematical auxiliary objects (section 4). This aspect becomes a great difficulty to a great part of students, when they try to use the "Locus" tool, considering the functional approach. The blocking experiences and visualization difficulties in students appear in the production of interactive images and the use of analogical visualization.

Finally, the reorganization of the SGW seems more and more managed by a teacher accompanying the perceptual apprehension of students in order to get an operative apprehension (Duval 2005). We noticed that when we work on perceptual apprehension, using DGS, that is used to see figures and iconic visualization, we do not always reach to operative apprehension. That is, there are students with mathematical control, but that has great problems to produce dynamic figures. That is why we affirm the need for *progressive modeling in visualization*, and the need to introduce a progression in developing and manipulation of different types of representation, as a result of thinking through doing a modeling progress involves rational transitions along several dimensions (modes of signification from iconic to indexical to symbolic, ways to examine and to use representation, largely reflected in the case of Alberto). In Problem 4, we have detected limitations in visual apprehension of the resolutions of the students, that through a progressive modeling of visualization by the teacher could be overcome. One proposal is to guide the construction performed by the students. One work in progress on this subject is shown in http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/igm/igm/materiales/pimcd239. This is a new teaching module, connecting GeoGebra applets and web pages using javascript. This module could be proposed to be used for in-service mathematics training teachers.

Acknowledgements: This study has been possible thanks to the funding by the research project ACEIA (Computer Algebra and Artificial Intelligence) of UCM. Ref. 910563. and PIMCD-239-2011.

7. References

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–24.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245–274.

Botana, F (2002). Interactive versus Symbolic Approaches to Plane Loci Generation in Dynamic Geometry Environments, *Computational Science*, Volume 2330, 211- 218.

Botana, F.; Abánades, M. A.; Escribano, J. (2011): Exact Internet accessible computation of paths of points in planar linkages and diagrams. *Computer Applications in Engineering Education 19, 835-841.*

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l´apprentissage de la géométrie: Développement de la visualization, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fontionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10*, 5-53.

Duval, R. (1999), Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking, Basic issues for learning, In F. Hitt and M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (Vol. **1**, pp. 3–26). Mexico

Gómez-Chacón, I. Mª & Escribano, J. (2011). Teaching geometric locus using GeoGebra. An experience with pre-service teachers. *GeoGebra International Journal of Romania (GGIJRO), GeoGebra The New Language For The Third Millennium*,2 (1), 209-224.

Gómez-Chacón, I. Mª (2012). Affective pathways and interactive visualization in the context of technological and professional mathematical knowledge. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 17 (3-4), 57–74.

Guzmán, M. de (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical Analysis. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. University of Crete. Greece.

Houdement, C. y Kuzniak, A., (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

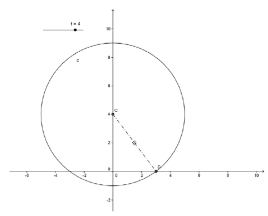
Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*, Thèse de l'université J. Fourier, Grenoble.

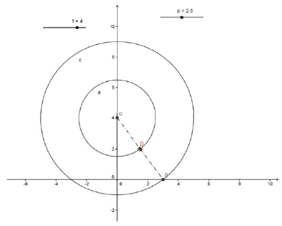
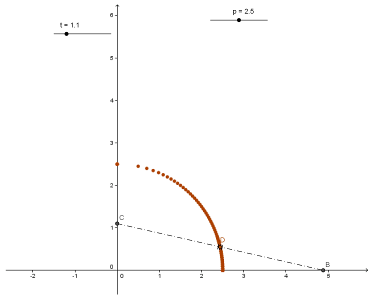
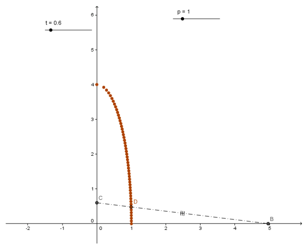
Presmeg, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics*, Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. PME 1976-2006*. (pp. 205–235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Université Paris 8.

Annexes

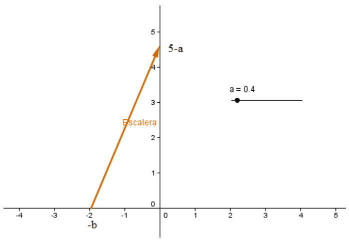
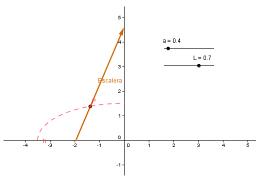
Annex 1: Analysis of the Alberto solution process, use of images in situation reported by the student in his protocol

Method description, register visualization	**Typology of the use of representation/image/**
(1) In the first place, I make a representation of the problem on the paper. I try to look for a way to solve it analytically but I do not find any. I reflect on the possible relationships between the triangles that the ladder gradually generates as it slides downward against the wall and the floor without clearly reaching anywhere.	Drawing (of patterns and lines/figure) Analytical (Search for mental image (specific figure/illustration and dynamic image)
(2) I think about the answer: Will it be a straight line, an ellipse or a circle?	
(3) I left the problem for another day. I was thinking about it while I was doing other activities. I trusted my subconscious to continue to job.	Search for mental image
(4) I retake the problem with excitement and hope. I experiment with a pen and an elastic rubber rolled on its middle part. It seems to form an arc of a circle. At least, I already have an idea.	Physical manipulation - kinetics (Kinesthetic manipulation) Mental image – identification mathematical object
(5) I start to work with GeoGebra. After trying some construction with straight lines, I notice that the ladder being a segment of length 5 allows me to make a construction based on a circle of radius 5 that runs the y-axis.	Technological manipulation with the computer Representing radius of the circle (Specific illustrations)
(6) I generate a slider t and I define the center of the circle C = (0,t). The slider will shrink from 5 to 0. It is zero when the ladder lies on the ground. Point B represents the intersection of the circle and the x-axis.	 Interactive image generation, slider (Analogical)
(7) Once the ladder has been represented, I constructed another circle with variable radius (according to a new slider p). This circle indicates the point whose path will	

be our object of study. In our first case, it is the midpoint of the segment representing the ladder.	 Interactive image generation, slider (Analogical)
(8) I observe the path taken by the midpoint of the ladder upon activating the trace.	 Specific illustration with interactivity (Analogical)
(9) I am dealing with an arc of a circle with the center C = (0,0) and radius r = 2.5.Now, I try it with a point located 4 m from the starting endpoint of the ladder (positioned vertically over the y-axis at the start).I have obtained an arc of the ellipse with major vertical semi-axis of 4 and minor semi-axis of 1.	 Specific illustration with interactivity (Analogical)
(10) The geometric locus described by point D is an ellipse with major semi-axis: max(h, 5-h), Vertical if h > (5 – h), Horizontal if h < (5 –h)), and Minor semi-axis; Min (h, 5-h); horizontal if h> (5 – h), Vertical if h< (5 – h)), where h is the distance of the point from the base of the ladder that is in vertical position. In the case of h=2.5, both semi-axes are equal that confirms that it is a circle.	Analytical-visual Formulaic typology from the memory

Annex 2: Analysis of the Ana solution process, use of images in situation reported by the student in her protocol

Method description	**Typology of the use of representation/image**

(1) As the problem asks for the solution for the midpoint and for any point P of the ladder, I will first solve it for P and then to particularize to the midpoint.	
(2) I will assume that the ladder was in the beginning, just totally vertical and that it will finish completely horizontal (to see the largest possible path P).	mental image
(3) To write how the ladder go down I define the variable a ϵ [0,5] ; by the Pythagoras Theorem $b^2 + (5-a)^2 = \text{Ladder}^2 = 5^2$, then b= $\sqrt{(10a- a^2)}$; in this way, the ends of ladder will be the points (-(b), 0) y (0, 5 - a)	She does not leave graphic register. mental image / non-iconic visualization
 (4) Now put a point P=(Px, Py) on the ladder: If Py= ((5-a)/b)Px + 5 – a , P will be on the line containing the ladder	Specific illustration with interactivity (analogical) Analytical-visual
(5) P is limited to the segment ladder, I consider L in [0,1] y Px = -Lb Thus, a point P on the ladder is written as: P=[-Lb, (5-a)(1-L)] = [$-L\sqrt{(10a- a^2)}$, (5 –a)(1-L)]	Analytical reasoning
(6) Now I wonder: what is the way of P when I move a? The answer is given by I: x=$-L\sqrt{(10a- a^2)}$; II: y = (5 –a)(1-L)	Analytical reasoning
(7) I try to write y depending on x. From (I) I obtain a = (1/L)*[5L ± $\sqrt{(25L^2-x^2)}$]; Substituting this value of a in (II), I obtain III: y = (5 - (5 L ± $\sqrt{(25 L^2 - x^2)}$) / L) (1 - L); which describes an ellipse.	Analytical reasoning
(8) In this ellipse, I only consider the part corresponding to $x \leq 0$, $y \geq 0$, which is the part where I draw the ladder:  If I choose the midpoint, I take L=0.5, and we obtain the equation of a circumference.	Analytical Specific illustration with interactivity (analogical)

Autores

Inés Mª Gómez-Chacón. Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid, Spain

Jesús Escribano. Facultad de Informática, Universidad Complutense de Madrid, Spain

CONCEPTION ET ANALYSE DE GEOGEBRATUTOR, UN SYSTÈME TUTORIEL INTELLIGENT : GENÈSE D'UN ESPACE DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE IDOINE

Michèle Tessier-Baillargeon; Philippe R. Richard; Nicolas Leduc; Michel Gagnon

Résumé. Cette contribution montre l'éclairage apporté par le modèle des espaces de travail géométrique (ETG) dans la conception et la validation du système tutoriel intelligent geogebraTUTOR (GGBT). Conçu pour être employé par des élèves de l'école secondaire, ce système se destine au développement de la pensée géométrique dans un contexte de résolution de problèmes de preuve en géométrie euclidienne. Le texte présente d'abord les fondements théoriques qui sous-tendent le développement de GGBT, au sein duquel les ETG agissent en tant que carrefour conceptuel. Au cœur de notre propos, la validation d'une version perfectionnée de GGBT s'effectue en vérifiant l'idonéité de l'espace de travail engendré par l'usage du système tutoriel. Cette phase de vérification, qui s'inscrit dans une suite de phases de recherche et de développement, a pour objectif l'observation et l'analyse du travail de l'élève en tant que géomètre en formation. Les résultats expérimentaux proviennent d'élèves québécois au 2e cycle de l'école secondaire (étape 14-17 ans).

Mots clés : espaces de travail géométrique, système tutoriel intelligent, didactique des mathématiques, problèmes de preuve, géométrie dynamique, interactions cognitives sujet-milieu.

Abstract. This article shows the contribution of the geometrical workspace model to the design and validation of geogebraTUTOR (GGBT), an intelligent tutoring system (ITS). Designed for and used by high school students, the system aims to develop their geometric thinking while solving Euclidian geometry proof problems. First, this article presents the theoretical bases that direct the development of GGBT, in which the geometrical workspace model acts as a conceptual cornerstone. At the heart of our discussion, the validation of an improved version of our ITS in which we verify the appropriateness of the geometrical workspace obtained by the use of the tutorial system by the students. The aim of this test phase, which lies within the successive research and development phases of GGBT, is to observe and analyse the novice's geometry work. The experimental results are based on observations of high school students (14 to17 years of age) from Quebec.

Keywords: geometrical workspaces, intelligent tutoring system, mathematics education (didactics of mathematics), geometric proof problems, dynamic geometry, student–milieu cognitive interactions.

Resumo : Essa contribuição mostra como o modelo dos espaços de trabalho geométrico (ETG) ajuda na concepção e na validação do sistema tutorial inteligente geogebraTUTOR (GGBT). Concebido para ser usado pelos alunos na escola secundária, esse sistema está destinado para o desenvolvimento do pensamento geométrico num contexto de resolução de problema de prova em geometria euclidiana. Primeiramente, este artigo apresenta os fundamentos teóricos que sustentam o desenvolvimento de GGBT, no qual os ETG agem como encruzilhada conceitual. O núcleo de nossa proposta é a validação de uma versão melhorada de GGBT, realizada pela verificação da idoneidade do espaço de trabalho gerado pelo uso do sistema tutorial. Essa fase de verificação, que faz parte de uma série de fases de pesquisa e desenvolvimento, tem por objetivo a observação e a análise do trabalho do aluno como geômetra em formação. Os resultados experimentais são obtidos de alunos quebequenses do segundo ciclo da escola secundária (etapa 14-17 anos).

Palavras chave: espaços de trabalho geométrico, sistema tutorial inteligente, didática das matemáticas, problemas de prova, geometria dinâmica, interações cognitivas sujeito-meio.

Resumen. Esta contribución muestra el alumbramiento proporcionado por el modelo de los Espacios de Trabajo Geométrico (ETG) en el diseño y la validación del sistema tutorial inteligente geogebraTUTOR (GGBT). Concebido para ser utilizado por estudiantes en la escuela secundaria, este sistema está pensado para el desarrollo del pensamiento geométrico en un contexto de resolución de problemas de prueba en geometría euclidiana. El artículo empieza por los fundamentos teóricos que sustentan el desarrollo de GGBT, para el cual el ETG actúa como cruce de caminos conceptuales. En el centro de nuestra discusión, la validación de una versión mejorada de GGBT se realiza comprobando la idoneidad del espacio de trabajo que se genera por el uso del sistema tutorial. Esta fase de verificación, la cual es parte de una serie de fases de investigación y desarrollo, tiene como objetivo la observación y el análisis del trabajo del alumno como geómetra en la formación. Los resultados experimentales provienen de alumnos quebequeses del segundo ciclo en la escuela secundaria (etapa 14-17 años).

Palabras clave: espacio de trabajo geométrico, sistema tutorial inteligente, didáctica de las matemáticas, problemas de prueba, geometría dinámica, interacciones cognitivas sujeto-medio.

1. INTRODUCTION

GGBT, un STI conçu pour assister l'élève dans l'exercice de la pensée géométrique en contexte de problème de démonstration, vise la gestion de messages discursifs et, éventuellement, la gestion d'itinéraires de problèmes personnalisés.

L'aspect singulièrement novateur de GGBT réside dans l'élaboration d'un modèle d'intervention tutorielle à l'image de comportements instrumentés observés, qui ne dépend pas de la cohérence logique et de la complétude du système d'axiome, indispensables en géométrie axiomatique formaliste[1].

Cet article expose pourquoi il est réducteur de parler de GGBT comme d'un simple espace de dialogue entre l'élève utilisateur et l'agent tuteur. Les choix didactiques dont les éléments de l'interface et les outils disponibles ainsi que la programmation novatrice, aboutissements d'une analyse a priori exhaustive, confèrent à GGBT le statut d'ETG. De plus, une analyse a posteriori reposant sur des observations nées de réalisations effectives vient réaffirmer la pertinence de cette catégorisation.

Ainsi, les prochaines pages viennent démontrer que d'un point de vue méthodologique, le cadre théorique mis de l'avant par Kuzniak est tout désigné non seulement pour la conception d'un ETG idoine, en l'occurrence GGBT, mais pour l'appréciation du potentiel que revêt cet environnement pour le développement et l'exercice des compétences en géométrie déductive des élèves utilisateurs.

2. GGBT : PLUS QU'UN MILIEU D'AIDE, UN ESPACE DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE IDOINE

Selon Kuzniak, l'ETG intervient naturellement où est envisagée une analyse ou une réflexion sur l'interaction entre un sujet et des problèmes géométriques. Parallèlement à la *Théorie des Situations Didactiques* (TSD) de Brousseau (1996), qui modélise ces interactions, le concept d'ETG définit l'univers organisé au sein duquel prend place le travail du géomètre, en l'occurrence l'élève. Le travail du géomètre au sein d'un ETG s'illustre par un ensemble d'interactions entre deux plans, un sujet et un milieu. Cette notion d'interaction entre *sujet* et *milieu* fait volontairement référence à la nomenclature adoptée par Brousseau dans son modèle situationnel.

Dans le cas de GGBT, le sujet désigne l'élève, doté de connaissances, d'aptitudes et de schèmes d'adaptation propres, qui complète une démonstration à l'interface de GGBT. Quant à lui, le second plan axé sur les contenus géométriques en jeu dépeint un milieu épistémologique conçu en fonction des apprentissages visés. Comme dans la TSD de Brousseau, le milieu, grâce à sa conception méticuleuse, doit, par ses interactions avec l'élève, véhiculer des connaissances et engendrer la construction de savoirs.

2.1 Les genèses et les démarches de résolution

Le modèle des ETG se distingue de la TSD de Bousseau par la particularisation des interactions entre le sujet et le milieu. Là où Brousseau évoque une adaptation bilatérale entre ces deux pôles, Kuzniak évoque trois différentes genèses caractéristiques du travail du géomètre (Kuzniak, 2013). En revanche,

[1] Conformément à un modèle de géométrie cognitive (voir section 2.2.1)

pour préciser l'ETG idoine, nous avons plutôt choisi de nous intéresser aux plans verticaux qui sous-entendent et lient les genèses entre elles. Ces plans ajoutés au schéma d'ETG initialement introduit par Kuzniak (figure 1 de l'introduction de ce numéro spécial) situent, au sein de ce modèle, les différentes démarches associées au travail du géomètre, c'est-à-dire les démarches de découverte, de validation et de modélisation (Coutat et Richard, 2011).

Ces trois démarches seront abordées à nouveau à la section 4. Plus précisément, ce volet des ETG servira de cadre afin de préciser, à posteriori, l'idonéité de l'ETG proposé aux élèves dans la seconde phase expérimentale du développement de GGBT.

2.2 Les conditions pour un ETG idoine : une analyse à priori

Comme le précisent Kuzniak et Richard en introduction, pour mériter l'appellation d'ETG idoine, un environnement, en l'occurrence GGBT, doit remplir deux conditions ergonomiques : les composantes de l'ETG doivent être pensées, élaborées et organisées de manière à permettre à l'élève de s'engager dans la résolution du – ou de chaque – problème et de clore celle-ci; l'espace de travail doit amener l'élève à travailler conformément au paradigme correspondant aux attentes dictées par l'institution scolaire.

Concernant la première de ces conditions, dans son modèle, Brousseau suggère que l'enseignant, motivé par une intention didactique, mette en place un milieu qui, lorsqu'en interaction avec le sujet, forme un système où les constituants sont indissociables. Seulement, dans le cas de GGBT, un environnement construit autour de la géométrie dynamique et d'un STI, non seulement l'enseignant n'est plus le concepteur direct du milieu, puisque ce dernier est conçu par des experts en didactique et en informatique, mais la relation entre ce dernier et le système sujet-milieu se trouve modifiée. Même si un système tutoriel est un milieu a-didactique sur lequel l'enseignant peut exercer un certain contrôle, l'introduction d'un agent tuteur au sein du système sujet-milieu engendre une relation didactique simulée dans laquelle l'agent tuteur joue momentanément le rôle d'un enseignant, lequel est complémentaire à celui de l'enseignant ordinaire. Ce phénomène est illustré à la figure 1 par la reprise des relations 1 et 2 qui deviennent les relations 6 et 7 au sein du système sujet-milieu. La notion de milieu demande alors une nouvelle distinction, soit le *milieu didactique* comme système antagoniste du système enseigné au sein duquel l'*agent tuteur* apparaît en sous-système avec le *milieu virtuel* et l'élève interagit avec ce dernier sous-système, échange au sein duquel l'agent tuteur intervient (relation 6 sur 7) (Richard et al., 2011).

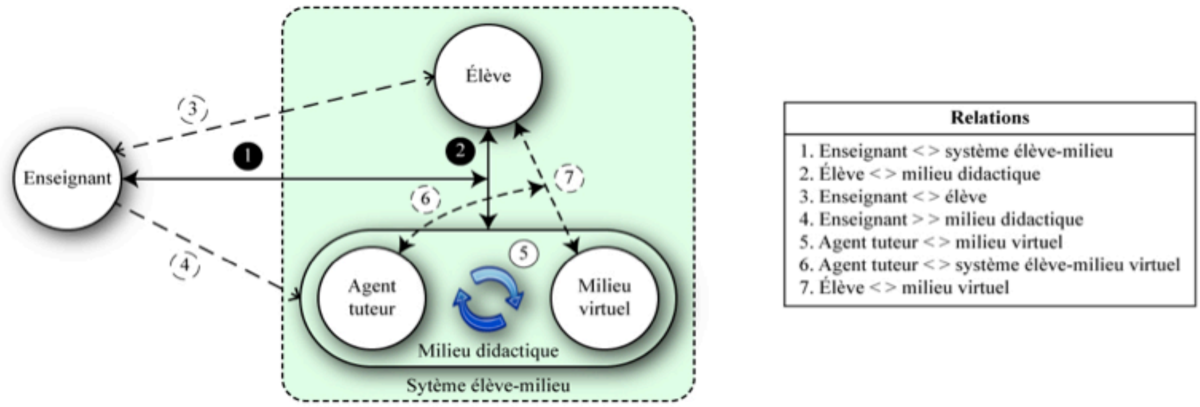


Figure 1. Carte des interactions didactiques (Richard et al., 2011)

Cette distinction influence la définition du milieu, et nous devons en tenir compte dans l'analyse a priori qui conduira à l'élaboration de l'ETG qu'est GGBT.

Concrètement, la démarche de recherche et de développement de GGBT repose sur une convergence entre analyses à priori et à posteriori qui vise l'adaptation et l'évolution du système vers l'obtention d'un ETG idoine. L'élaboration de ce milieu didactique, qui fut soumis aux élèves dans la mise à l'essai abordée à la section 3, s'articule en deux temps. Le milieu virtuel fut d'abord élaboré conformément à une analyse théorique décrite dans Richard et al., 2011 pour ensuite être adapté en fonction des résultats de la première phase de validation. En ce qui a trait à l'agent tuteur, il fut modélisé selon les interactions entre élèves et enseignants en situation de résolution de problème à l'interface de GGBT lors de cette même phase de mise à l'essai[2]. Ainsi, cette conception d'un environnement aux fortes influences anthropocentriques[3], au sens de Rabardel (1995), permet l'adaptation du système à l'image des modalités d'utilisation mises de l'avant par les sujets en interaction avec GGBT, assurant un milieu où l'élève peut s'investir dans la résolution complète d'un problème de démonstration.

Pour ce qui est de la seconde condition pour l'obtention d'un ETG idoine, avant de décrire le paradigme géométrique de référence adopté pour GGBT, précisons ce que nous entendons par ETG idoine. L'ETG idoine désigne un espace de travail effectif propice à l'exercice réussi de la géométrie. Il est décrit comme étant obtenu grâce à l'aménagement et à l'organisation d'un ETG de référence (Kuzniak, 2009). Ainsi, l'enseignant ou, dans le cas de GGBT, les concepteurs visent l'élaboration d'un ETG idoine en mettant en place, selon un référentiel théorique ciblé, un milieu en concordance avec le paradigme géométrique véhiculé par le programme de formation ayant préséance au Québec,

[2] Pour le détail de cette modélisation, se référer à Tessier-Baillargeon et al. (2013) des actes en ligne du 3e symposium ETM.

[3] Selon Rabardel (1995), l'appellation objet technique pour désigner un outil sous-entend une approche *technocentrique* et ne comporte donc aucune dimension humaine et s'éloigne du coup d'une approche dite anthropocentrique. Selon l'auteur, toute tentative de conception d'un système destiné à assister l'humain doit être d'abord et avant tout centrée sur l'utilisateur et sur ses schèmes d'utilisation.

soit le *Programme de formation de l'école québécoise* (PFÉQ) du ministère de l'Éducation, du Loisir et des Sports (MÉLS). Ensuite, un ETG idoine fait sien par l'élève devient ETG personnel. C'est précisément ce dernier ETG qui fera l'objet d'analyses dans la seconde phase de validation de GGBT présentée plus bas.

La perspective de Kuzniak exposée ci-haut sous-entend une progression qui implique que l'ETG de référence, qui dépend directement de l'identification d'un référentiel théorique, soit identifiable, mais il s'avère qu'au Québec, la reconnaissance d'un référentiel théorique s'avère être ardu comme nous le verrons dans les prochaines lignes.

2.2.1. La géométrie cognitive

Comme le mentionnent Coutat et Richard (2011), malgré un programme de formation qui souligne l'importance du raisonnement déductif et de la démonstration en géométrie euclidienne (MÉLS, 2008), une analyse élémentaire des principaux manuels scolaires québécois met en lumière une réalité fort différente.

Les énoncés de géométrie euclidienne n'y apparaissent pas. Bien que l'élève est censé pouvoir reconnaître ou décrire une figure à partir de ses attributs, les activités proposées sont essentiellement calculatoires, depuis les manipulations arithmétiques sur les grandeurs jusqu'à l'établissement de mesures inconnues. Il n'y a donc rien sur les constructions à la règle et au compas et il n'y a rien non plus sur la mécanique des propriétés géométriques, encore moins sur la notion de preuve. (Coutat & Richard, 2011, p. 100)

Cette apparente discontinuité entre le programme de formation et les manuels scolaires, supposément élaborés en fonction des attentes formulées par ce dernier, rend nécessaire un questionnement initial sur l'adoption effective d'un paradigme géométrique de référence au Québec. Le concept de géométrie cognitive, avancé notamment par Richard et Fortuny (2007), n'est pas en adéquation avec un paradigme géométrique comme ceux suggérés par Houdement et Kuzniak (2006), mais constitue plutôt un modèle géométrique, une interprétation du référentiel théorique pour l'exercice de la géométrie en classe de mathématiques au Québec. Cette géométrie offre une étape intermédiaire entre une géométrie ancrée dans la réalité tangible et une géométrie formelle axiomatisée portant sur des objets géométriques idéalisés. De ce fait, la géométrie cognitive évolue quelque part entre la géométrie naturelle (GI) et la géométrie axiomatique naturelle (GII). La première de celles-ci base sa validation sur le monde réel et sensible et la seconde «se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique le plus précis possible» (Kuzniak, 2006a, p. 172).

Cette orientation constitue donc la fondation de l'ETG de référence, qui sera aménagé pour produire l'ETG idoine que sera GGBT. Cet ETG idoine est donc conçu selon un modèle de géométrie cognitive qui implique que même si l'élève est amené à explorer l'approche structurelle en géométrie, le raisonnement déductif, souvent idiosyncratique, est privilégié et l'activité de rédaction est perçue comme secondaire.

Les derniers paragraphes ont démontré en quoi GGBT remplit a priori les deux conditions pour être qualifié d'ETG idoine. Cet environnement est conçu selon une analyse qui a pour objectif l'élaboration d'un milieu qui favorise l'exercice de la pensée géométrique avec pour toile de fond un référentiel mathématique ciblé correspondant aux attentes de l'institution scolaire. Néanmoins, l'un pourrait se demander comment on peut prétendre à un ETG d'idoine avant même de l'avoir mis à l'essai avec de réels élèves. Ce questionnement peut découler d'une confusion entre les mots *idoine* et *idéal*. En fait, l'ETG idoine et idéal n'est pas défini et, bien que nos objectifs pour la création de GGBT démontrent une volonté de créer un environnement des plus propices pour l'apprentissage de la géométrie, chaque version de GGBT mise à l'essai n'est pas idéale. Toutefois, à la lumière de l'analyse à priori ci-haut, chacune de ces versions constitue bel et bien un ETG idoine. Comme le rappellent Kuzniak et Richard dans l'introduction du présent numéro, l'ETG idoine «n'est pas figé et doit sans cesse s'adapter aux contraintes locales».

3. SECONDE PHASE DE VALIDATION DE GGBT

La phase expérimentale dont il est ici question a pour objectif la mise à l'épreuve de la seconde version de GGBT qui gère maintenant de manière autonome les messages d'aide du STI. Cette version découle directement des résultats de la première phase expérimentale qui sont présentés dans Tessier-Baillargeon et al. (2013).

3.1. La seconde version de GGBT, son interface et son fonctionnement

L'interface de GGBT est constituée de plusieurs strates complémentaires et dépendantes qui confèrent à cet espace de travail son idonéité. En fait, si on se réfère à la figure 2, la portion de l'interface dédiée à l'énoncé, celle vouée aux échanges discursifs entre l'élève et le tuteur, et la ligne de saisie évoluent indépendamment de l'onglet choisi parmi les quatre disponibles dans la fenêtre de travail.

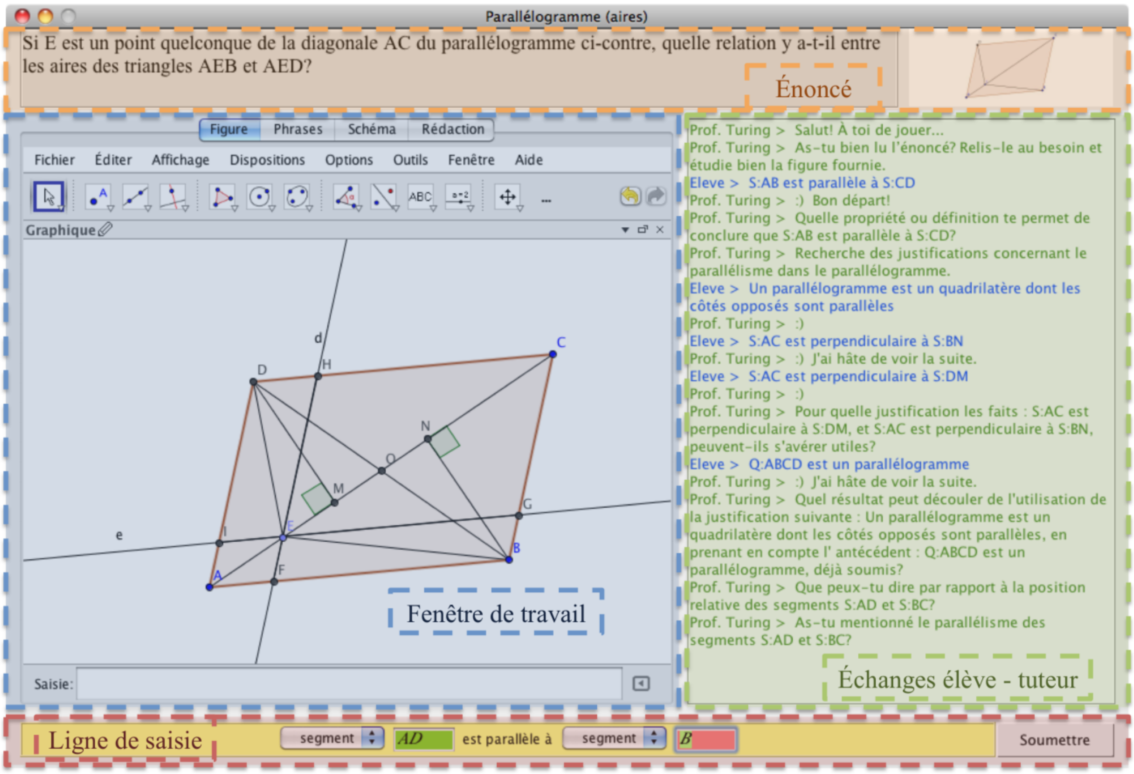


Figure 2 L'interface de GGBT (2ième version) et l'onglet *figure*

Lorsque l'élève sélectionne un problème qu'il souhaite résoudre, l'interface suggère d'emblée l'onglet figure au sein de la fenêtre de travail, tel que présenté à la figure 2. Tout en haut de l'écran, l'élève peut prendre connaissance de l'énoncé du problème et d'une figure statique associée. Cette dernière, tout comme le libellé de l'énoncé, ne peut être modifiée.

L'onglet *figure* (figure 2), le premier des quatre onglets constitutifs de la fenêtre de travail, met à la disposition de l'élève une figure dynamique au sein de l'environnement de géométrie dynamique geogebra (Hohenwarter & Fuchs, 2004). Cette figure est associée à l'énoncé du problème mais, contrairement à la figure statique fournie aux côtés de cet énoncé, celle-ci comporte des éléments géométriques qui ne figurent pas parmi les hypothèses du problème. Ces constructions correspondent aux éléments graphiques évoqués dans certaines des solutions à la démonstration admises par le système tutoriel. Éventuellement, nous voulons doter GGBT d'un système de reconnaissance des constructions ajoutées par l'élève. Le bienfondé de l'intégration de la géométrie dynamique en classe de mathématiques étant abondamment étudié, démontré et admis (Laborde, 2000; Balacheff & Margolinas, 2005; Gómez-Chacón, 2013), nous formulerons l'hypothèse selon laquelle, dans le cadre de résolution de problème de démonstration propre à GGBT, une figure dynamique opératoire (Coutat, Laborde et Richard, 2011), telle que celle fournie dans l'onglet figure, permettrait à l'élève, un peu à la manière d'une exploration généralement réservée aux sciences expérimentales, de dégager les propriétés et conjectures potentiellement utiles à la démonstration.

Le second onglet, l'onglet *phrases* (figure 3), fournit un module de recherche pour les énoncés de géométrie euclidienne que l'élève doit soumettre au STI pour faire progresser sa démonstration. L'élève sélectionne d'abord le type d'énoncé qu'il souhaite soumettre. Le système propose seulement les phrases qui sont pertinentes pour le problème en cours. Par la suite, l'élève précise sa recherche en sélectionnant jusqu'à quatre champs conceptuels en lien avec l'énoncé ou la stratégie qu'il envisage. Une fois que l'élève a sélectionné une phrase, celle-ci s'affiche dans la ligne de saisie qui se trouve tout en bas de l'interface GGBT. Si l'élève a sélectionné une justification, celle-ci s'affiche telle quelle et l'élève peut la soumettre aussitôt au tuteur. En revanche, si l'élève a choisi une hypothèse ou un résultat, il devra compléter la phrase en y inscrivant les paramètres appropriés avant de la proposer au STI. Par ailleurs, la ligne de saisie est dotée d'un volet tutoriel qui offre une rétroaction sémaphorique[4] à l'élève. Ce dernier inscrit des paramètres dans les cases prévues à cet effet, et ces boîtes passent du rouge au vert lorsque l'entrée est mathématiquement valide. Autrement dit, l'élève étant dans l'obligation d'inscrire des paramètres correspondant aux éléments géométriques évoqués par la phrase, faute de quoi il ne pourra la soumettre, il peut cibler les entrées problématiques, le cas échéant.

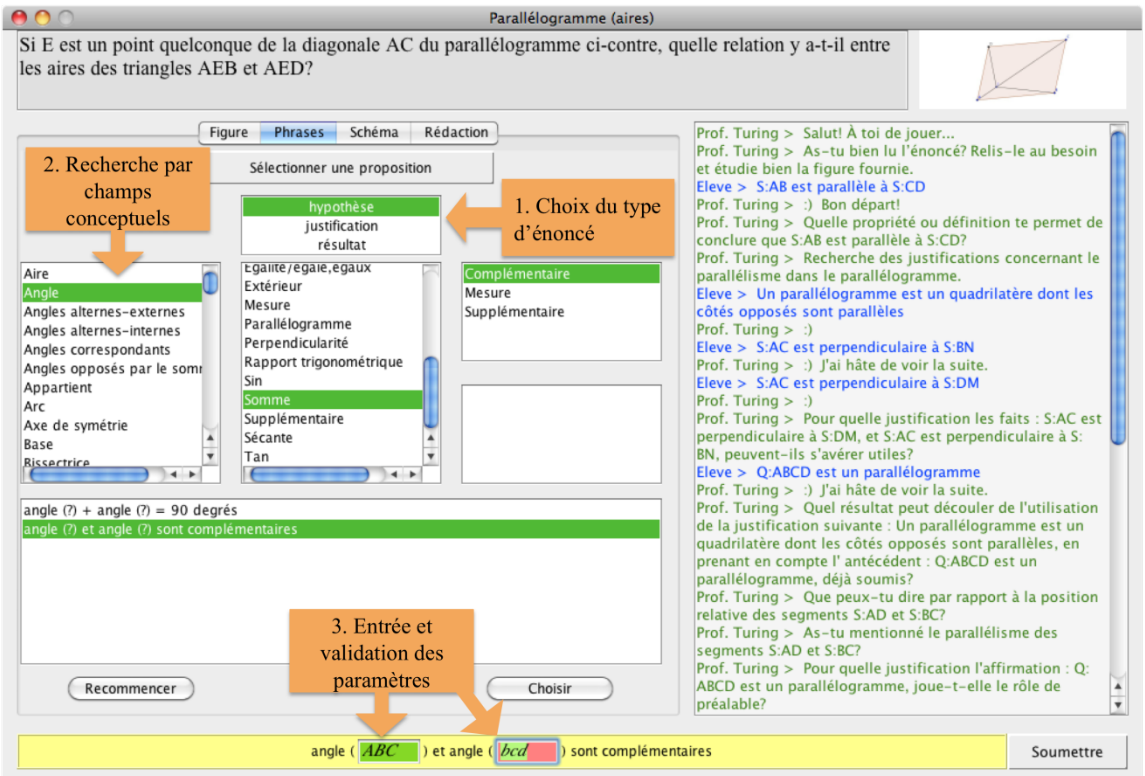


Figure 3 L'onglet *phrases*

L'intégration de l'onglet *schéma*, troisième de la série, à l'interface de GGBT découle de la volonté d'offrir à l'élève en processus de raisonnement démonstratif un babillard interactif où consolider ses

[4] L'appelation est inspirée de la sémaphore utilisée en langage ferrovière et maritime à titre de signalisation (rouge = stop, vert = marche). C'est notre traduction du terme *flag feedback* introduit par Anderson et al. (1995).

idées. Ce besoin s'est manifesté lors de la première phase expérimentale, quand les élèves, n'ayant pas accès à ce type d'outil à l'interface de GGBT, étaient contraints à l'emploi d'une feuille de papier pour dresser des ébauches ou pour obtenir une vue d'ensemble de leur raisonnement. C'est ainsi que nous avons imaginé l'onglet schéma, où l'élève peut, à la manière d'un graphe de démonstration, organiser les énoncés discursifs de sa démonstration au fur et à mesure qu'il les soumet pour voir concrètement les liens de causalité entre ceux-ci et déduire les éléments déductifs manquants. Luengo souligne les avantages de ce type d'outil en ce qui a trait au raisonnement déductif chez l'élève : « The graph is a tool for deductive reasoning because it creates a visual map of two aspects of the deductive proof: linking and inference. » (Luengo, 2005, p.19). Cette fenêtre pourrait aussi éventuellement être dotée d'un volet tutoriel qui accompagnerait l'élève dans l'organisation générale de sa démonstration. Cet onglet particulièrement complexe à concevoir et à implémenter n'est pas encore opérationnel et sera donc mis à l'essai lors de la validation de la prochaine version de GGBT.

Enfin, l'onglet *rédaction* (figure 4) constitue le dernier onglet offert dans la fenêtre de travail. La motivation derrière cet ajout à l'interface de GGBT est née du fait que les élèves observés lors de la première mise à l'essai étaient tellement accoutumés à raisonner en fonction d'une structure de démonstration prédéterminée qu'ils se trouvaient, pour certains, dépourvus devant l'absence de contraintes imposées par GGBT relativement à la forme de la démonstration. À la lumière de ce constat, nous avons créé un module de rédaction auquel l'élève pourrait se référer pour apprécier la progression de son raisonnement. Cet onglet ne consiste pas en un outil d'entrée de texte puisque le STI génère automatique une démonstration dès qu'il reconnaît un plan à la suite des actions de l'élève. De plus, cette démonstration rédigée s'adapte simultanément en fonction des pas déductifs soumis et selon les changements de stratégie exprimés par la démarche de l'élève. Un code chromatique (hypothèses : turquoise, justification : vert, résultat : jaune, conclusion : violet) indiquant la nature épistémique des énoncés soumis et manquants contribue aux facettes tutorielles du STI. Cette fonctionnalité permet à l'élève de percevoir la structure récurrente de la démonstration et de constater l'emploi des connecteurs logiques. Bien que cette fenêtre ne vise pas explicitement l'exercice de la rédaction chez l'élève, nous croyons qu'il est pertinent d'explorer la possibilité qu'une démonstration rédigée ne soit pas seulement considérée comme une fin mais aussi comme un moyen auquel peut recourir l'élève pour parvenir à mener à terme un raisonnement déductif. Dans la phase deux de mise à l'essai, nous observerons l'utilisation que font les élèves de cet onglet.

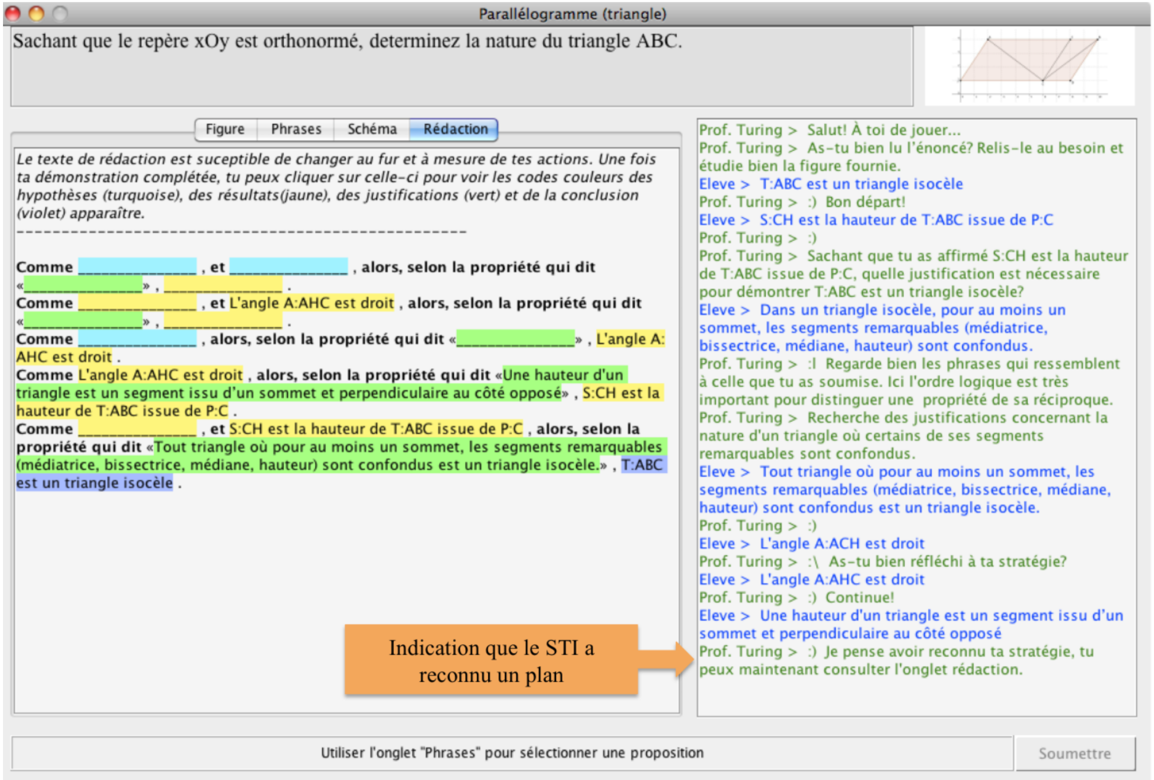


Figure 4 L'onglet *rédaction*

Comme nous l'avons précisé plus haut, GGBT repose sur un modèle de géométrie cognitive qui évolue entre la géométrie naturelle (GI), s'apparentant à une géométrie pratique, et la géométrie naturelle axiomatique (GII) de nature plus théorique. De plus, la résolution d'un problème de démonstration en géométrie sous-entend la succession de phases de raisonnement heuristique et de phases d'organisation ou de rédaction. A priori, chacun des onglets présentés ci-haut dessert le processus de résolution de l'élève, et le rôle respectif de ceux-ci s'illustre par l'ancrage de chacun dans une géométrie de référence qui lui est propre ainsi que par l'appartenance de chaque onglet à une phase du raisonnement géométrique. Ce classement est présenté au *tableau 1*.

TABLEAU 1

	Géométrie naturelle (pratique) (GI)	Géométrie naturelle axiomatique (théorique) (GII)
Phase heuristique (raisonnement)	Figure	Schéma
Phase de rédaction	Phrases	Rédaction

Rôle relatif de chaque onglet de la fenêtre de travail de GGBT

L'analyse à priori de laquelle découlent les fondements idéologiques de GGBT suggère que le développement d'une pensée géométrique et du raisonnement déductif serait favorisé par l'exploration des différents processus derrière l'élaboration d'une démonstration d'une manière qui permette les allers-retours entre phases heuristiques, souvent spontanées et décousues, et phases de rédaction plus déterministes. Nous jugeons donc qu'il est primordial que l'élève puisse naviguer sans retenue entre ces processus et réorganiser ses idées tout en étant accompagné d'une manière adaptée selon le paradigme ou l'étape de la résolution où il évolue, et ce, à l'intérieur d'un même problème. C'est pourquoi l'élève, à l'interface de GGBT, peut passer librement d'un onglet à l'autre en fonction de son style de raisonnement en ayant toujours accès à l'accompagnement de l'agent tuteur. Pour terminer la présentation de l'interface de GGBT, quelques précisions s'imposent sur le fonctionnement de l'agent tuteur que les élèves connaissent sous le nom de *Prof. Turing*.

Ce dernier bloc de l'interface de GGBT constitue l'enjeu principal du projet de recherche et de développement GGBT. L'accompagnement tutoriel présenté dans cette seconde version découle directement de l'analyse et du traitement des données expérimentales recueillies en décembre 2010. Cette analyse a conduit à l'élaboration de plusieurs facettes tutorielles, certaines plus élaborées, comme celle responsable des messages discursifs (aide à la prochaine étape) de *Prof. Turing*, d'autres plus automatisées, dont les rétroactions sémaphoriques de la ligne de saisie et les messages non verbaux et systématiques de la fenêtre du tuteur (Tessier-Baillargeon et al., 2013). La figure 5 présente un échantillon représentatif des messages que l'élève est susceptible de rencontrer lors de ses échanges avec le tuteur.

Figure 5 Fenêtre du tuteur, exemples de rétroactions

Pour terminer, l'accompagnement tutoriel, composante cruciale d'une interface déjà complexe, fait de GGBT un réel STI omniprésent qui s'adapte dynamiquement au raisonnement individuel de chaque élève.

3.2. Méthodologie et collecte de données

Ici nous cherchons à observer et à décrire les démarches qui articulent la résolution de problèmes par des élèves réels évoluant dans l'environnement GGBT. Cette série d'observations s'inscrivant dans une démarche ethnographique revêt aussi un volet évaluatif. Toutefois, contrairement à une approche de recherche constituée de pré-tests et de post-tests, on ne cherche pas à faire un bilan de l'impact ou des effets de GGBT sur l'apprentissage des élèves comme s'il s'agissait d'un outil achevé, mais plutôt à procéder à une évaluation formative de l'ETG idoine dans le but d'améliorer ce dernier.

Pour ce faire, nous avons ciblé trois groupes de quatrième année du secondaire (15-16 ans) et leurs deux enseignantes. Nous avons opté pour ces niveaux puisque la démonstration en géométrie y est évaluée conformément au curriculum dicté par le ministère de l'Éducation. La démarche de recherche s'est déroulée sur deux périodes de classe d'une durée de 60 minutes au cours desquelles les élèves devaient résoudre à l'interface de GGBT quatre problèmes disponibles à l'interface de GGBT (Annexe 1).

En ce qui a trait à la collecte de données, conformément à l'approche ethnographique d'Eisenhart (1988), les données relatives aux solutions des élèves, à leurs stratégies et à leurs interactions avec leurs enseignants et la chercheure sont recueillies à partir de plusieurs sources primitives, notamment les traces écrites et l'observation participante. De plus, une captation vidéo obtenue avec l'aide d'un logiciel de capture d'écran vidéo[5] permet d'apprécier le contexte de chaque action et commentaire des élèves et de toute intervention de l'enseignant ou du chercheur. Aussi, les actions à l'interface de GGBT sont enregistrées sous forme de fichiers journaux générés automatiquement par le système. Enfin, les enseignants et le chercheur portent des dictaphones pour enregistrer toute remarque, question et intervention, ou toute autre information pertinente à l'analyse ultérieure et à l'évolution du logiciel.

3.3. Analyse des données

Nous avons mené une analyse hybride en deux temps. D'abord, puisqu'un des volets de cette seconde phase expérimentale vise l'analyse des différentes démarches (découverte, modélisation, validation) du géomètre en action à l'interface de GGBT, lors de l'analyse préliminaire des données, nous

---

[5] *Screenflow* realise des vidéos comportant une présentation en parallèle et synchronisée des actions à l'écran, des dialogues et des visages des élèves. http://www.telestream.net/screen-flow/overview.htm

sommes à la recherche de marqueurs cognitifs et comportementaux relatifs à des concepts connus et préalablement définis. Cette analyse, qui intervient à partir d'un corpus théorique existant, (Paillé et Mucchielli (2013) la qualifie d'analyse en reconnaissance.

Toutefois, comme nous ne cherchons pas simplement à préciser où et quand ces démarches sont repérables, mais surtout à interpréter comment celles-ci s'articulent à l'interface de GGBT et dans quels contextes, nous avons aussi recours à l'analyse par questionnement analytique (Paillé & Mucchielli, 2013, p.211). Cette méthode implique la formulation de questions initiales en fonction des objectifs du chercheur, qui seront appelés à être précisés tout au long de l'analyse du matériau. La prochaine section présente les réponses à ces questionnements sous forme de constats, d'exemples évocateurs ou encore de questionnements nouveaux ouvrant la voie à des objectifs de recherche futurs.

4. RÉSULTATS

4.1. Démarche de découverte

Nous avons noté qu'à l'interface de GGBT, la démarche de découverte englobe les actions par lesquelles l'élève apprivoise le problème et cherche une stratégie. Souvent, cette idée de solution est encore embryonnaire lorsque l'élève amorce les démarches grâce auxquelles il[6] parviendra à une résolution effective du problème. Conséquemment, cette démarche de découverte s'inscrit dans la phase heuristique de la résolution du problème de démonstration.

Nos observations nous portent à croire que cette démarche prend surtout racine au sein de l'onglet *figure* de GGBT, onglet où l'élève peut simultanément étudier l'énoncé et sa figure statique, analyser la figure dynamique, notamment à l'aide de l'outil déplacement[7] au sein de geogebra, et s'appuyer sur les messages du tuteur pour donner une direction à sa solution. Concrètement, cette démarche de découverte s'est principalement manifestée dans les résolutions des problèmes du rectangle et du parallélogramme (aires). Les deux autres problèmes, implémentés de manière à permettre une illusion d'optique et pour vérifier la volonté de recourir au dynamisme chez les élèves, présentent des figures fixes dans le plan de geogebra. Ainsi, les mécanismes d'exploration de la figure sont limités à l'usage d'instruments de mesure ou au questionnement des oracles, outils auxquels, selon nos données, les élèves n'ont pas eu recours, possiblement par faute de temps pour les apprivoiser suffisamment. En ce qui concerne notre intention de vérifier si les élèves remarquent le fait qu'ils ne peuvent pas utiliser le

[6] La forme masculine utilisée dans ce livret désigne aussi bien les femmes que les hommes. Le genre masculin est utilisé sans aucune discrimination et dans le seul but d'alléger le texte.

[7] Se référer à la thèse d'Angela María Restrepo (2008) pour une analyse de l'utilisation de l'outil déplacement par des élèves en contexte de géométrie dynamique.

déplacement dans les problèmes où la figure était fixe, on peut noter des allusions au déplacement en début de problème lorsque les élèves cherchent à élaborer une stratégie première de résolution ou encore, comme dans l'exemple qui suit (figure 6), après un temps de stagnation (ici 5 minutes), afin de nourrir un flux d'astuces pour résoudre le problème ou pour lancer un nouveau processus de résolution.

14:20:23 : [SYSTEM] 14:20:23 & RCNEGMSSG01N(S:AC,S:BC;)
14:20:23 : [STUDENT] La mesure du segment S:AC = la mesure du segment S:BC
14:20:23 : [SYSTEM] 14:20:23
14:20:23 : [TUTOR] :l Tu as raison, mais attention, la répétition de phrases identiques ne fait pas progresser ta démonstration.
14:21:20 : [SYSTEM] 14:21:20
14:21:20 : [TUTOR] Tu as affirmé La mesure du segment S:AH = la mesure du segment S:BH, S:AH^2 + S:CH^2 = S:AC^2, et S:BH^2 + S:CH^2 = S:BC^2, quelle propriété ou définition est utile pour démontrer La mesure du segment S:AC = la mesure du segment S:BC?

Élève 1 : « Je le sais pas quoi faire, c'est pas clair! »

14:22:20 : [SYSTEM] 14:22:20
14:22:20 : [TUTOR] Recherche une justification qui concerne le milieu d'un segment.

Élève 2 : « On peut tu bouger la figure? »
Élève 1 : « Oui c'est dynamique »
Élève 1 : « Ah non, elle bouge pas elle »

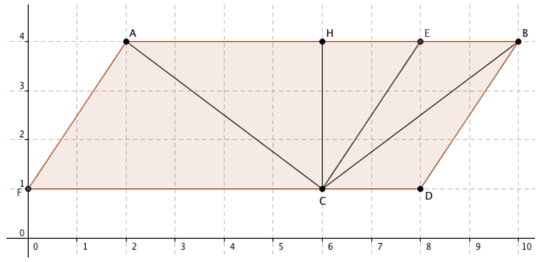


Figure 6 Démarche de découverte (allusion au déplacement) dans le problème du parallélogramme (triangle)

En revanche, dans le problème du parallélogramme (aires), la démarche de découverte est aisément observable puisque le point E est mobile sur la diagonale du parallélogramme, fait sous-entendu par l'énoncé du problème qui dit que « E est un point quelconque de la diagonale AC du parallélogramme ». En effet, grâce au contexte de géométrie dynamique, et étant encouragés par le tuteur à chercher une relation entre les aires des triangles AEB et AED, les élèves génèrent une série de configurations particulières qui leur permettront ensuite, par induction, d'en arriver à une conjecture qui s'applique à tous les cas observés. Dans l'exemple qui suit (figure 7), les élèves particularisent le problème en plaçant E vers l'extrémité C de la diagonale du parallélogramme. Grâce à ce positionnement soigneusement choisi du point E, ils sont plus en mesure de voir les triangles en jeu et de percevoir les éléments communs entre ceux-ci. De plus, avec cette configuration, ils sont en mesure de mieux percevoir les hauteurs des deux triangles.

09:36:15 : [TUTOR] On te demande d'identifier une relation entre les aires des triangles AEB et AED. As-tu une idée de quelle pourrait-être cette relation?

Les élèves bougent la figure

Élève 1 : « AEB et AED…»
Élève 1 : « «Eille» c'est compliqué»
Élève 2 : « On voit mieux quand on le met là [le point E est placé vers l'extrémité C de la diagonale du parallélogramme] »
Élève 1 : « C'est un point commun des deux triangles»

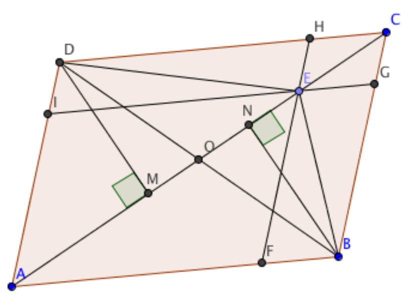


Figure 7 Démarche de découverte par déplacement dans le problème du parallélogramme (aires)

Ce recours aux cas particuliers de figures, qui rappelle la démarche de découverte normalement réservée aux sciences expérimentales, est rendu possible dans GGBT grâce à l'onglet figure, qui place l'élève en constante interaction avec un milieu riche où peuvent s'opérer, de manière simultanée et cohérente, les interactions entre cet élève, un énoncé de problème, une figure dynamique associée et des messages d'aide d'un STI.

4.2. Démarche de validation

La démarche de validation en contexte de démonstration en géométrie concerne le passage de l'intuition à l'axiomatisation de celle-ci en recourant aux énoncés de géométrie formalisés connus ou disponibles. Au sein de GGBT, cette démarche s'opère grâce à de nombreux allers-retours entre les onglets *figure* et *phrases,* c'est-à-dire entre phase heuristique et phase de rédaction de la démonstration (tableau 1). Nous avons observé que les élèves explorent la figure (démarche de découverte) et analysent l'énoncé et, lorsqu'ils croient avoir ciblé une piste prometteuse, ils veulent soumettre cette idée au tuteur. Pour ce faire, les élèves doivent recourir au répertoire d'énoncés disponibles dans l'onglet phrases. La recherche par thèmes (ou champs conceptuels) leur permet d'isoler la phrase recherchée et parfois, comme dans l'exemple qui suit (figure 8), à identifier un énoncé préalablement inconnu qui concorde avec leur intuition.

Élève 1 : « Même si on bouge n'importe quoi ça se suit [les bases et hauteurs demeurent égales] »
Élève 2 : « Faut juste trouver comment le dire »
Élève 1 : « Cherche dans justifications »
Élève 1 : « Vas dans aire [le thème *aire*] »
Élève 2 : « Base ? [le thème *base*] »
Élève 1 : « Oui »

09:54:07 : [SYSTEM] 09:54:07 & PAIBAHATR01N(;)
09:54:07 : [STUDENT] Deux triangles ayant des bases et des hauteurs associées congrues ont la même aire
09:54:07 : [SYSTEM] 09:54:07
09:54:07 : [TUTOR] :)

Élève 1 : « Ah tu vois! »

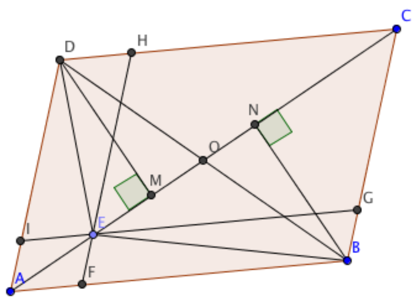


Figure 8 Recherche par thèmes d'une justification (inconnue) dans le problème du parallélogramme (aires)

De surcroît, dans GGBT, le tuteur joue un rôle primordial dans la démarche de validation en devenant un instrument au service de l'élève par une genèse instrumentale s'opérant dans l'interaction entre l'élève et le milieu. Dans l'exemple qui suit (figure 9), on peut voir que les élèves utilisent le système tutoriel pour soumettre différents énoncés ciblés par la recherche par champs conceptuels dans l'onglet *phrases*, en l'occurrence, *triangle, égalité* et *côtés*.

Élève 1 : « Dans le fond, on veut savoir si ça pis ça [AC et BC] c'est la même longueur »
Élève 2 : « Ben oui c'est la même longueur »
Élève 2 : « Vas dans hypothèses »
Élève 2 : « Essaie équilatéral »
Élève 1 : « Je ne pense pas qu'il soit équilatéral »
Élève 2 : « Ben on va essayer pareil »

14:06:01 : [SYSTEM] 14:06:01 & R00EQPLTR01N(T:ABC;)
14:06:01 : [STUDENT] T:ABC est un triangle équilatéral
14:06:01 : [SYSTEM] 14:06:01
14:06:02 : [TUTOR] :\ Peut-être peux-tu revoir ta stratégie avec un de tes pairs.
14:06:36 : [SYSTEM] 14:06:36 & R00ISPLTR01N(T:ABC;)
14:06:36 : [STUDENT] T:ABC est un triangle isocèle
14:06:36 : [SYSTEM] 14:06:36
14:06:36 : [TUTOR] :) Bon départ!

Élève 1 : « Bon, il était temps! »
Élève 1 : « HBC est un [triangle] rectangle ça c'est sur »
Élève 2 : « Pis AHC aussi »
Élève 1 : « Alors, ça [triangle ABC] fait isocèle »

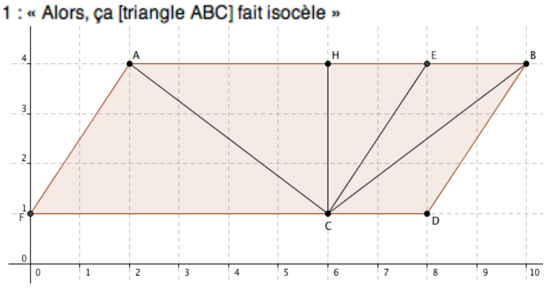


Figure 9 Recherche et validation d’une affirmation dans le problème du parallélogramme (triangle)

Ici, les élèves soumettent d’abord une conjecture suggérant que le triangle est équilatéral, entrée non reconnue par le tuteur comme faisant partie des solutions admissibles. Aussitôt que les élèves prennent connaissance du message du tuteur, ils retournent dans l’onglet phrases pour lire les phrases qui partagent les mêmes thèmes que celle soumise précédemment et s’entendent pour dire qu’ABC est un triangle isocèle. Comme le tuteur renvoie une rétroaction positive pour cette entrée, ils poursuivent dans cette lancée et cherchent à justifier cette conjecture en consultant à nouveau la construction dans l’onglet figure.

Ainsi, à l’interface de GGBT, les élèves sont en mesure de concrétiser des astuces encore imprécises à l’aide d’un système de recherche d’énoncés institutionnalisés et à partir de champs conceptuels qu’ils maîtrisent. De plus, cette conception du système permet d’entrevoir un environnement d’apprentissage où les élèves pourraient découvrir des propriétés et des définitions au fil de leurs besoins et de manière autonome, conférant à GGBT un caractère constructiviste fort prometteur.

4.3. Démarche de modélisation

La démarche de modélisation, ou l’articulation entre la compréhension de la figure et du problème et la communication d’une solution à celui-ci, implique une certaine organisation de la solution de l’élève. Bien que la rédaction d’une démonstration à l’interface de GGBT ne soit pas forcément linéaire, ce volet de la résolution du problème exige une capacité à gérer la séquentialité qu’impose cette forme de preuve. Nous avons noté que malgré la liberté laissée aux élèves quant à l’ordre de soumission de leurs étapes de démonstration, la démarche de modélisation implique généralement un recours à la structure par inférences (hypothèse, justification et conclusion). Même si les élèves ne soumettent pas nécessairement les éléments de l'inférence dans un ordre particulier, on peut percevoir qu'ils utilisent cette structure ternaire pour s'assurer de bien communiquer leur raisonnement au tuteur. Dans l'exemple qui suit (figure 10), les élèves commencent par mentionner un antécédent pour enchaîner avec le conséquent et finir avec la justification. On perçoit aisément que les élèves ont en tête un canevas de rédaction qui les aide à organiser leurs idées qui ont pris naissance dans l'étude de la figure et de l'énoncé du problème.

Élève 1 : « S'il est isocèle, il faut qu'il ait deux côtés égaux »
Élève 2 : « S'ils sont pareils [les triangle AHC et BHC], ça veut dire que les deux côtés sont pareils »

14:15:08 : [SYSTEM] 14:15:08 & RCNEGMSSG01N(S:AC,S:BC;)
14:15:08 : [STUDENT] La mesure du segment S:AC = la mesure du segment S:BC
14:15:08 : [SYSTEM] 14:15:08
14:15:09 : [TUTOR] :) J'ai hâte de voir la suite.

Élève 2 : « Puis là c'est isocèle parce qu'il y a deux côtés égaux »

Élève 1 : « Triangle isocèle dans résultats » (recherche thématique)
Élève 2 : « Après ça on fera une justification »

14:15:32 : [SYSTEM] 14:15:32 & R00ISPLTR01N(T:ABC;)
14:15:32 : [STUDENT] T:ABC est un triangle isocèle
14:15:32 : [SYSTEM] 14:15:32
14:15:32 : [TUTOR] :) J'ai hâte de voir la suite.

Élève 2 : « Justification maintenant! »

14:15:59 : [SYSTEM] 14:15:59 & DCOEGISTR01N(;)
14:15:59 : [STUDENT] Un triangle isocèle est un triangle ayant deux côtés congrus
14:15:59 : [SYSTEM] 14:15:59
14:15:59 : [TUTOR] :)

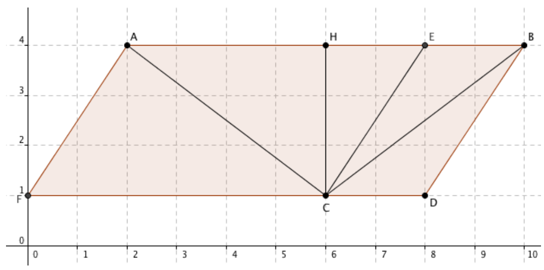


Figure10 Démarche de modélisation dans le problème du parallélogramme (triangle)

Dans GGBT, l'élève peut aller et venir entre les onglets au gré de ses envies. Nous avons tout de même observé que la démarche de modélisation s'effectue souvent dans un sens plutôt traditionnel, c'est-à-dire que l'élève analyse la figure et, à partir du signifié qui en résulte, cherche à communiquer ses observations en rédigeant de manière dépersonnalisée la réalité qui s'en dégage. Néanmoins, il arrive aussi que les élèves utilisent la démonstration trouée fournie par l'onglet *rédaction* comme moyen de positionner leur regard sur les éléments importants de la figure. Dans ce second scénario, la codification par couleur des énoncés de la rédaction en fonction de leur statut contribue à aiguiller les élèves. Dans l'exemple ci-dessous (figure 11), les élèves remarquent que l'énoncé manquant est codé en turquoise et qu'il s'agit donc d'une hypothèse. Ils retournent immédiatement à l'onglet figure pour tenter de cibler l'hypothèse de départ qu'ils ont omise. Entre-temps, le tuteur émet un message qui offre un indice supplémentaire quant à l'endroit où porter leur regard. Quelques secondes plus tard, les élèves soumettent l'hypothèse manquante complétant par le fait même la démonstration sur laquelle ils travaillent.

Les élèves essaient de soumettre des justifications.
Les élèves consultent la rédaction et remarquent que le seul énoncé manquant est codé en turquoise (hypothèse).
Ils retournent immédiatement dans l'onglet figure où un commentaire du tuteur apparaît.

11:06:22 : [SYSTEM] 11:06:22
11:06:22 : [TUTOR] Quelles affirmations sont nécessaires pour déduire la conclusion : L'angle A:ABC est droit, à l'aide de la justification : La somme S des mesures des angles intérieurs d'un polygone à n côtés est donnée par la formule : S = (n – 2)?180°?

Les élèves relisent l'énoncé et étudient la figure

11:06:52 : [SYSTEM] 11:06:52 & R00CTPLQU01N(Q:ABCD;)
11:06:52 : [STUDENT] Q:ABCD est un quadrilatère
11:06:52 : [SYSTEM] 11:06:52
11:06:52 : [TUTOR] ;) Bravo, tu as complété une démonstration!

Élève 1 : « Oui! on a réussi! »

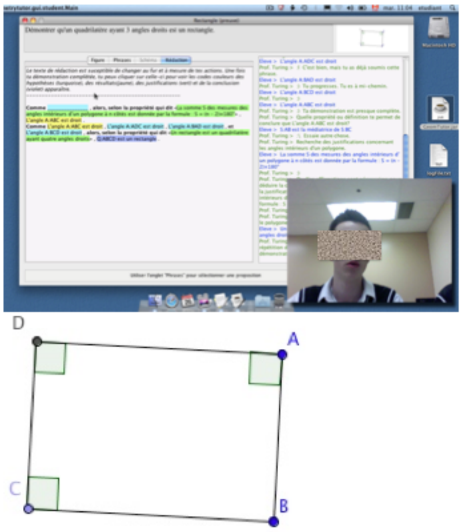


Figure 11 Démarche de modélisation à partir de la rédaction dans le problème du rectangle

Enfin, comme l'onglet schéma offre un intermédiaire entre l'exercice heuristique d'analyse du problème et de sa figure et l'activité séquentielle de rédaction de la démonstration, il sera intéressant de voir comment les démarches de modélisation seront influencées par l'ajout de l'onglet *schéma* dans la prochaine version de GGBT.

5. Conclusion

La conception singulière de GGBT confère à cet environnement, pour l'exercice de la pensée géométrique, un statut d'ETG idoine a priori. Le milieu didactique étant constitué du milieu virtuel et de l'agent tuteur, conçus conformément à un paradigme de géométrie cognitive à l'image des pratiques observées en classe de géométrie au Québec, il est adapté au fil des phases expérimentales pour garantir l'émergence d'un ETG idoine où l'élève peut s'investir avec succès dans la résolution d'un problème en géométrie déductive.

A posteriori, une analyse qualitative des données de réalisations effectives d'élèves de 4^{e} secondaire nous a permis de préciser le travail du géomètre par l'analyse des démarches de résolution à l'interface de cet ETG idoine qu'est GGBT.

Par sa structure, GGBT permet à l'élève et à l'enseignant d'échapper à la linéarité normalement imposée par la rédaction de démonstration et, comme les démarches de résolution sont observables à tout moment de la résolution et transcendent les frontières d'un seul problème, nous pouvons conclure que GGBT ne se limite pas à un ETG idoine qui dépend du milieu créé par un seul problème, mais constitue plutôt un ETG idoine où l'élève peut naviguer entre différents problèmes afin de parfaire sa pensée géométrique.

6. REMERCIEMENTS

Nous remercions les élèves de quatrième secondaire de l'Académie Ste-Thérèse et leurs enseignantes, Jenny et Sylvie, pour le dévouement et la perspicacité dont ils ont fait preuve.

RÉFÉRENCES

Anderson, J.R., Corbett, A.T., Koedinger, K.R., Pelletier, R. (1995). Cognitive tutors : Lessons learned. *The Journal of the Learning Sciences*, 4(2), 167-207.

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. Dans A. Mercier & C. Margolinas (Éds.), *Balises pour la didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1996). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Dans J. Brun & R. Floris (Éds.), *Didactique des mathématiques* (pp. 45-143). Lausanne: Delachaux et Niestlé.

Brousseau, G., & Balacheff, N. (1998). *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques* 1970-1990. Grenoble: La Pensée sauvage.

Coutat, S., & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 16, 97-126.

Coutat, S., Laborde, C., & Richard, P. R. (2011). L'apprentissage instrumenté de propriétés en géométrie : propédeutique à l'acquisition d'une compétence de démonstration. À paraître.

Eisenhart, M. A. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), 99-114.

Gómez-Chacón, I., (2013). Prospective Teachers' Interactive Visualization and Affect in Mathematics Problem-Solving. *The Mathematics Enthusiast.* 10 (1-2), 61-86.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Hohenwarter, M., Fuchs, K., (2005). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system geogebra. *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference 2004*, Pecs, Hongrie.

Kuzniak, A. (2006a). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 6(2), 167-187.

Kuzniak, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France. Dans A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyianni & L. Vivier (Éds.), *Chypre et France recherche en didactique des mathématiques* (pp. 71-89). Lefkosia: University of Cyprus.

Kuzniak, A. (2013). Travail mathématique et domaines mathématiques. Actes en ligne du 3e symposium Espaces de travail mathématique, groupe de travail Le travail mathématique et les ETM, Montréal.

Laborde, C. (2001) Dynamic Geometry Environments as a Source of Rich Learning Contexts for the Complex Activity of Proving. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 151-161.

Luengo, V. (2005). Some Didactical and Epistemological Considerations in the Design of Educational Software : the Cabri-Euclide Example. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 10, 1-29.

MÉLS. (2008). Programme de formation de l'école québécoise, deuxième cycle, chapitre 6. Montréal: Gouvernement du Québec.

Paillé, P., & Mucchielli, A. (2013). *L'analyse qualitative en sciences humaines et sociales 3e édition*. Paris: Armand Colin.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.

Restrepo, A. M., (2008). Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ième. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.

Richard, P. R., Fortuny, J. M., Gagnon, M., Leduc, N., Puertas, E., & Tessier-Baillargeon, M. (2011). Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometry. ZDM *The International Journal of Mathematics Education*, 43, 1-15.

Richard, P. R., & M. Fortuny, J. (2007). Amélioration des compétences argumentative à l'aide d'un système tutoriel en classe de mathématique au secondaire. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 12, 83-116.

Tessier-Baillargeon, M., Gagnon. M., Leduc, N. et Richard, P.R. (2013). Conception d'un espace de travail mathématique idoine, la genèse d'un système tutoriel intelligent pour l'exercice de la pensée géométrique. Actes en ligne du 3e symposium Espaces de travail mathématique, groupe de travail Environnements technologiques et travail mathématique, Montréal.

M. Tessier-Baillargeon (&) P. R. Richard

Département de didactique, Université de Montréal,

Montréal, Canada

Courriels : philippe.r.richard@umontreal.ca ; michele.tessier-baillargeon@umontreal.ca

N. Leduc (&) M. Gagnon

Département de génie informatique et génie logiciel, École Polytechnique de Montréal,

Montréal, Canada

Courriels : nicolas.leduc@polymtl.ca; michel.gagnon@polymtl.ca

ANNEXE 1

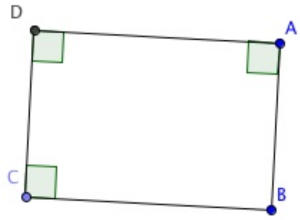
Quatre problèmes soumis aux élèves

Problème 1: problème du rectangle

Énoncé

Démontrer qu'un quadrilatère ayant 3 angles droits est un rectangle.

Figure dynamique fournie

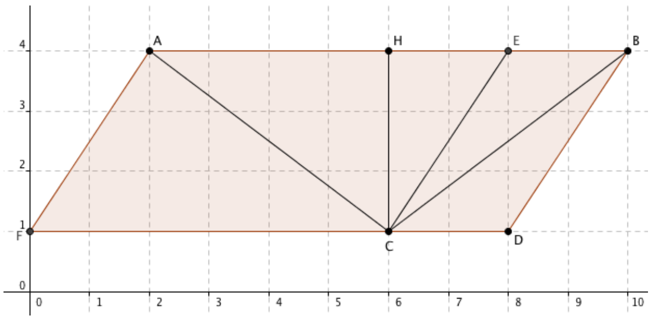


Problème 2: problème du parallélogramme (triangle)

Énoncé

Sachant que le repère xOy est orthonormé, déterminer la nature du triangle ABC.

Figure dynamique fournie

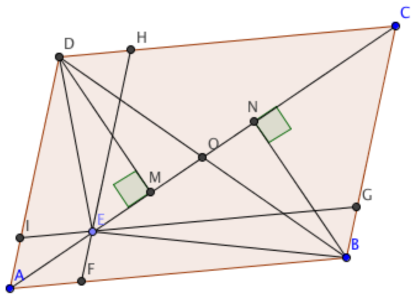


Problème 3: problème du parallélogramme (aires)

Énoncé

Si E est un point quelconque de la diagonale AC du parallélogramme ci-contre, quelle relation y a-t-il entre les aires des triangles AEB et AED?

Figure dynamique fournie

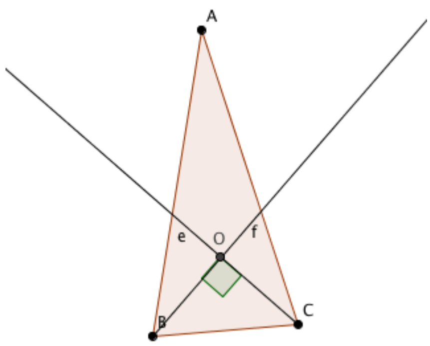


Problème 4: problème du parallélogramme (aires)

Énoncé

Dans un triangle ABC isocèle en A, on considère les bissectrices des angles à la base qui se coupent à angle droit en O. Quelle est la nature du triangle BOC?

Figure dynamique fournie



INITIER UN PROCESSUS DE PREUVE MATHEMATIQUE DANS UN ENVIRONNEMENT DE GEOMETRIE DYNAMIQUE 3D

Mithalal J. Université Paris 4, IUFM de Paris, LDAR

Résumé

Cette contribution s'inscrit dans le thème : « Le travail mathématique et les aspects sociaux et institutionnels ». Nous avons ici souhaité interroger comment, dans le contexte d'une activité de construction géométrique, l'emploi de preuve intellectuelle peut se trouver justifié et de quelle manière il contribue à inscrire de manière stable l'activité des élèves dans une géométrie axiomatique naturelle. Dans notre travail de thèse nous avions montré que des situations construites dans un environnement de géométrie dynamique 3D pouvaient conduire les élèves à s'appuyer sur ce type de géométrie. En revanche, cette évolution s'avérait généralement instable, et nous proposons ici d'interroger en quoi les interactions sociales, et notamment via la genèse discursive, jouent un rôle fondamental quant à cette stabilité. La question de la preuve se trouve au cœur de cette problématique, puisqu'elle semble en réalité consubstantielle du passage d'une géométrie GI assumée à une géométrie GII morcelée.

Nous proposons ici d'analyser le travail de trois groupes d'élèves, tiré d'une expérimentation de thèse (Mithalal, 2010)*, afin de mettre en lumière les interactions entre l'activité matérielle et la genèse discursive dans les espaces de travail géométrique.*

Abstract

This paper concerns the third topic: "The mathematical work and the social and institutional aspects". We try to analyse how a construction task can make pupils use mathematical proofs and use mainly natural axiomatic geometry. It has been shown that it is possible to provoke this by using dynamic 3D geometry software. Nevertheless, this evolution is frequently unstable, and we analyse here the fundamental role of social interaction in making this evolution stable. The problem of teaching proof is very relater to this, as it involves moving from GI/gII to GII/GI.

By analysing the work of three groups of pupils, we try in this paper to show the fundamental role of social interaction in this process, which shows that instrumental and discursive genesis are intertwined and cannot be considered separately.

Resumen

Esa contribución fue presentada en el tema "El trabajo matemático y los aspectos sociales e institucionales". Intentamos analizar las razones por cuales

los alumnos producen pruebas matemáticas y geometría axiomática natural cuando intentan resolver unos ejercicios de construcción. Mostraremos en este artículo que el papel de las interacciones sociales es fundamental en este problema de estabilidad. Eso es muy importante para enseñar pruebas matemáticas, que necesitan pasar de GI/gII hasta GII/GI

En efecto, ya mostremos que la geometría espacial provoca estos fenómenos, pero que la evolución no es estable. En este texto, presentamos el trabajo de tres grupos de alumnos para analizar el papel de las interacciones sociales, lo que nos permite mostrar que las génesis instrumental y discursiva son entrelazadas, y que no se debe analizarlas separadamente.

Introduction

L'apprentissage de la preuve constitue un des points délicats de l'enseignement secondaire en géométrie. Il est largement étudié, tant pour la preuve elle-même, pour les différentes formes qu'elle peut prendre, que pour les différentes fonctions qu'elle revêt et les contextes qui motivent son utilisation. Une question corollaire consiste à interroger les différents obstacles à l'emploi de preuves mathématiques dans l'activité géométrique des élèves. C'est le point de vue que nous avions adopté dans notre travail de thèse (Mithalal, 2010), où cette question initiale de la preuve s'était incarnée dans une interrogation relative à l'emploi d'une géométrie axiomatique naturelle (Houdement & Kuzniak, 2006) et la mobilisation de la visualisation non iconique (Duval, 2005) chez les élèves. Nous souhaitons ici interroger les rapports entre les résultats mis en évidence et l'apparition éventuelle de preuve mathématique.

Stabilité de l'usage d'une géométrie GII

Motiver une géométrie axiomatique naturelle

Nous faisons essentiellement référence aux travaux de Houdement et Kuzniak (2006) et à leur caractérisation de la géométrie naturelle (GI) et de la géométrie axiomatique naturelle (GII), aux travaux de Kuzniak (2010), ainsi qu'aux travaux de Duval (2005).

Kuzniak (2010) propose de situer l'activité géométrique dans deux plans, le plan épistémologique décrivant essentiellement le contexte épistémologique dans lequel va s'inscrire le travail géométrique du sujet, tandis que le plan cognitif s'attache plus spécifiquement à l'activité du sujet, aux moyens qu'il met en œuvre pour résoudre les problèmes de géométrie. Comme l'indique l'introduction du présent ouvrage, les plans sont en relation, et trois genèses – sémiotique, instrumentale, discursive – rendent compte des interactions. Pour autant, ces genèses sont en étroite relation et ne doivent en aucun cas être envisagées séparément ; aussi nous cherchons à montrer que dans certains cas l'évolution des ETG d'élèves est en réalité tributaire d'interactions permanentes, très fortes, entre genèse instrumentale et genèse discursive.

Les travaux de Duval (2005) sont à ce titre éclairants, car ils s'attachent fortement à l'activité du sujet, et notamment aux différentes manières d'appréhender les représentations et d'opérer sur celles-ci. En particulier, Duval distingue trois manières d'opérer sur les dessins[1], dont deux nous intéressent ici : la déconstruction instrumentale et la déconstruction dimensionnelle.

La première consiste en l'assimilation d'un objet géométrique à un processus de construction par lequel il est obtenu : elle procède d'une étude analytique, mais est temporalisée et fortement dépendante des instruments utilisés. La seconde caractérise un objet par l'assemblage d'unités de dimensions inférieures (les unités figurales), la cohérence étant garantie par des propriétés géométriques explicitées. En sus de l'étude analytique, la description est cette fois détemporalisée et plus générique, et on voit ainsi que ces deux déconstructions font largement signe vers les genèses instrumentale et discursive.

Si la déconstruction instrumentale fait déjà largement signe vers l'objet géométrique par la décomposition qu'elle impose, Duval qualifie le second processus d'"essentiellement discursif", l'envisage comme une condition nécessaire à la démonstration, et nous montrons qu'il est consubstantiel du paradigme GII. Nous avons montré (Mithalal, 2010) qu'il est possible de concevoir des situations de construction, dans un environnement de géométrie dynamique 3D, qui favorisent la mobilisation d'une géométrie de type GII par les élèves, en vue de l'interprétation et de la résolution des problèmes qui leur étaient posés, sans injonction explicite de la part de l'enseignant.

L'approche instrumentale (Rabardel, 1995) nous permet d'envisager *a priori* différents usages des artefacts mis à la disposition de l'élève, certains de ces usages étant exclusivement dirigés vers une action sur les objets matériels, d'autres s'appuyant en revanche sur des connaissances géométriques plus élaborées – et correspondant à l'instanciation dans un cadre graphique d'opérations réalisées sur la figure. Il est de fait possible de distinguer deux déconstructions instrumentales proches, la première permettant de répondre à des problèmes posés dans GI, la seconde s'inscrivant plus fortement dans GII tant pour l'interprétation des problèmes que pour les outils de résolution employés. Nous avons montré qu'un basculement de la première à la seconde forme de déconstruction s'opère lors d'un travail sur des situations adaptées. Dans ce cas, les connaissances géométriques de type GII trouvent une légitimité *via* les usages qu'elles permettent, ce qui contribue au fil du temps à inscrire l'activité géométrique de l'élève dans une géométrie axiomatique naturelle. C'est en fin de compte l'interprétation même des problèmes qui peut se trouver modifiée.

Ce passage entre les deux déconstructions témoigne d'une interaction forte entre les deux genèses, discursive et instrumentale, mais il importe de montrer qu'elle

[1] Nous distinguons ici *dessin* et *figure* au sens de Laborde et Capponi (1994)

n'est ni simple, ni univoque, et qu'en particulier elle ne peut se résumer à considérer que la genèse instrumentale est simplement traduite dans la genèse discursive. Ceci est illustré de manière particulièrement frappante lorsqu'on interroge le caractère durable des évolutions suscitées.

Le problème de la stabilité

Dans les expérimentations mentionnées, les objets mathématiques semblent fréquemment cantonnés au rôle d'outils pour la résolution des problèmes, et n'interviennent pas naturellement pour leur interprétation – ceci pouvant être lié à la nature des activités mathématiques. Les élèves observés, en classe de seconde, considèrent souvent que le problème porte sur les objets matériels et ont essentiellement recours à des outils mathématiques élaborés de manière ponctuelle, pour pallier les déficiences d'un examen purement perceptif.

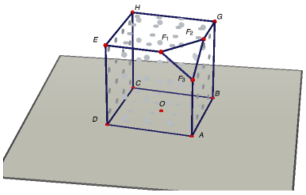
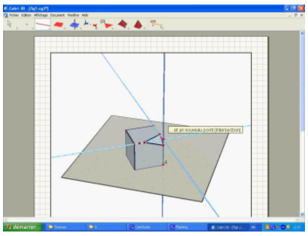
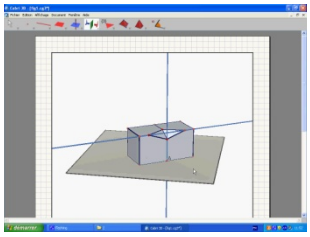
L'exemple suivant illustre en outre un phénomène fréquent de déplacement progressif de l'enjeu de l'activité vers l'objet géométrique. Ces élèves de seconde travaillent en trinôme à un problème de reconstruction d'une partie manquante d'un cube (voir figure ci-dessous), dans le logiciel de géométrie dynamique Cabri 3D. Initialement, l'attention est essentiellement portée sur la reconstruction d'un objet matériel, et l'activité est en fait ancrée dans GI. Ainsi l'échange suivant, renvoyant vers un problème de GI :

> *03'33, E1 : Aaaaaah, t'es trop fort ! Mais sauf qu'il faut que tu remplisses maintenant!*
>
> *03'39, E2 : Monsieur ? Il faut le remplir le cube, ou juste le reconstruire ?*

Peu à peu, les élèves sont confrontés à des indéterminations visuelles (*13'24, E2 : Ben tu fais au hasard à ce moment là !*) et sont conduits à s'appuyer ponctuellement sur des connaissances géométriques plus élaborées (20'58, E1 : *Tu prends la symétrique de ce point, à cet axe, comme ça tu le trouves là. Avoue !*) Finalement, au moment de juger de la différence entre deux procédures de construction, les élèves s'appuient sur la déconstruction dimensionnelle employée, et non plus sur la forme ou les opérations de constructions employées. (31'50, E2 : *Attends attends, parce que je viens d'y penser : le cube ne sert absolument à rien. [...] C'est juste que t'as rajouté un cube des deux côtés*[2].) C'est finalement la construction géométrique de l'objet – dans une géométrie de type GII – qui devient source de validation et les conduit à rejeter une solution reposant sur une construction géométrique déjà employée. Pourtant, après avoir aussi radicalement changé leur manière d'interpréter le problème, les dernières constructions se sont de nouveau appuyées sur une interprétation

[2] Dans le cas présent, les élèves cherchaient une nouvelle méthode de construction, et si le processus de construction différait effectivement des précédents, la construction géométrique à laquelle il aboutissait était en revanche identique.

purement matérielle de la question qui était posée (placer perceptivement un point « au bon endroit »), et GII semble n'apparaître que de manière épisodique.

Modèle à compléter, et deux reconstructions jugées identiques

Ainsi, dans de nombreux cas, l'interprétation du problème varie effectivement, mais il semble que cela soit plus lié à un souci de cohérence entre les outils employés qu'à une réelle modification de la manière d'interpréter les problèmes de géométrie. Il en résulte une certaine instabilité quant au statut des problèmes de géométrie, les élèves s'appuyant indifféremment sur des interprétations que le chercheur qualifiera « de type GI » ou « de type GII ».

La question de la preuve en géométrie

Différent types de preuves

Au-delà des modalités de résolution des problèmes de géométrie ou de leur interprétation se pose la question de l'apprentissage de la démonstration, ou d'une manière plus générale des types de preuves employées par les élèves à des fins de validation. Balacheff (1999) distingue à ce propos explication, preuve, et démonstration (qu'il qualifie de « *forme achevée de la preuve en mathématiques* »). Nous nous appuyons ici sur les distinctions qu'il opère entre différents types de preuves :

- les preuves pragmatiques, qui sont « *fondées sur l'action effective mise en œuvre sur des représentations d'objets mathématiques* » (Ibid., p. 202) ;
- les preuves intellectuelles « *détachées de l'action, inscrites dans des conduites langagières exprimant les objets et leurs propriétés, calculant leurs relations* ».

Le calcul sur les énoncés dont fait mention Balacheff nous intéresse particulièrement dans la mesure où il se détache de l'action effective et se centre sur la construction logique d'énoncés, compatibles avec une géométrie de type GII. Nous cherchons ici à étudier comment le discours des élèves peut s'appuyer petit à petit sur ce type de calcul, et accorder une importance moindre aux preuves pragmatiques ou même à l'expérience mentale.

Cependant, dans un contexte d'activité de construction où la démonstration n'a pas de place réellement identifiée, nous choisissons de prêter une signification à certains objets du discours qui constituent des prémices à ce calcul : énoncé de règles valides permettant de fonder une argumentation, discussion quant à la validité de ces énoncés, schémas de preuve par contraposée, exhaustion, absurde…

Preuves intellectuelles dans une activité de construction

Le problème de la stabilité pose une question cruciale quant aux conditions qui peuvent motiver l'utilisation de preuves intellectuelles en vue de valider des constructions géométriques. Une hypothèse consistait à dire qu'en l'absence d'une possible validation perceptive ce type de preuve se trouverait *nécessairement* au centre de l'activité – et notamment des procédés argumentatifs – des élèves. Mais faute d'une modification stable de la manière dont ceux-ci abordent les problèmes de géométrie, le recours à des preuves pragmatiques (plus ou moins élaborées) peut demeurer parfaitement légitime aux yeux de certains élèves.

Pourtant, nous avons régulièrement pu observer des discours dont la teneur dépassait la seule expérimentation sur le dessin, tels qu'une interrogation portant sur des « théorèmes » jugés valides ou des raisonnements relativement élaborés. Nous cherchons ici à montrer que l'émergence de ces discours est consubstantielle de modifications significatives de l'ETM des élèves.

En particulier, il nous semble pertinent d'interroger le rôle de la genèse discursive : au-delà de la formulation qui a lieu – et donc des phénomènes qu'elle donne à voir au chercheur – elle motive la preuve à des fins d'argumentation. L'expérimentation menée alliait à la fois activité – éventuellement de construction – sur des objets matériels et interaction entre élèves, via le travail en binôme. Nous avons pu remarquer que le discours entre les élèves avait une incidence forte sur le statut des connaissances mathématiques employées, voire sur l'interprétation des problèmes de géométrie, comme nous le décrivons ci-dessous.

Etude de la coplanarité de deux droites

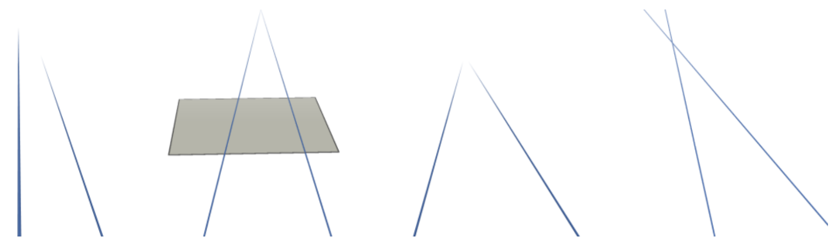
La situation

La situation proposée ici s'adresse à des élèves de seconde, et est la troisième séance de géométrie dans l'espace proposée dans notre ingénierie didactique. Elle fait suite à deux séances d'une heure, la première de découverte de l'environnement informatique, et la seconde de construction simple dont nous avons tiré l'exemple précédent.

Elle vise à faire construire la notion de non-coplanarité par des élèves qui n'ont pour référence, concernant les relations entre droites, que leurs connaissances de géométrie plane. Les indéterminations visuelles étant importantes, il est nécessaire d'établir des règles permettant une expérimentation sur les configurations de droites proposées pour décider de leurs relations. Une rapide justification sans contrainte formelle est demandée aux élèves. Notons qu'il s'agit d'élèves de seconde, qui ont donc des connaissances mathématiques élaborées et sont plus ou moins capables – sur demande – de mobiliser des connaissances théoriques et un schéma de démonstration. L'intérêt de cette situation réside plutôt dans l'observation de leur activité hors d'une injonction précise.

On donne aux élèves une série de 22 configurations (regroupées en trois groupes indiquées par leur numérotage) de deux droites construites dans Cabri 3D, et il leur est demandé de décider pour chacune d'entre elles si les droites se coupent. Nous reproduisons ci-dessous l'énoncé ainsi que quelques configurations.

Enoncé : *Vous trouverez [dans le dossier] des figures Cabri3D préconstruite, numérotées de 1_1 à 3_7, qu'il va vous falloir étudier. Chaque fichier vous présente une configuration, avec deux droites construites. Vous devez déterminer, pour les deux premiers groupes de figures seulement, les cas où les droites proposées sont sécantes. Vous donnerez une brève justification de vos réponses sur cet énoncé.*



La situation propose des objets simples et une consigne peu directive afin d'en permettre plusieurs lectures. En effet, la notion de droite peut renvoyer à différents objets (objets physiques matérialisés par le logiciel, objets physiques représentés dans le logiciel, objets géométriques représentés dans le logiciel), de même que le mot « sécantes » peut signifier qu'un point d'intersection est visible à l'écran, que les droites ne sont pas parallèles (comme en géométrie plane), qu'un point d'intersection existe mais n'est éventuellement pas représentés par le logiciel, que le logiciel accepte de construire un point d'intersection, etc.

Il en résulte six interprétations possibles de l'activité[3], plus ou moins ancrées dans une géométrie axiomatique naturelle, les trois premières ne considérant pas le problème de la coplanarité :

[3] Pour une analyse *a priori* plus détaillée de cette situation, nous renvoyons à Mithalal (2010, pp. 156 - 171)

1. Les objets présentés à l'écran ont-ils une intersection visible ?
2. Les objets matériels représentés à l'écran ont-ils une intersection, éventuellement non-visible sur la représentation ?
3. Les objets matériels représentés à l'écran sont-ils parallèles ?
4. La construction d'un point d'intersection des deux représentations de droites est-elle possible dans le logiciel ?
5. Les droites sont-elles parallèles ?
6. Les droites représentées sont-elles coplanaires et non-parallèles ?

Les stratégies de résolution possibles sont relativement nombreuses, et nous pouvons en dégager quelques grandes catégories :

- L'étude purement perceptive ou instrumentée des seuls objets matériels dans le logiciel Cabri 3D.
- L'étude en référence à des connaissances de géométrie plane : les droites sont parallèles ou sécantes.
- Le recours à l'outil informatique pour lever les cas d'indétermination (par exemple la construction d'un point d'intersection).
- L'élaboration théorique de différents cas, comprenant la non-coplanarité, et conditionnant l'expérimentation sur les dessins.

Les configurations sont présentées de telle manière que chacune des lectures permette en apparence de résoudre un certain nombre de cas mais, si elle n'est pas assez élaborée, conduise à des indéterminations.

Enfin, la demande de justification vise essentiellement à provoquer une formulation par les élèves, tant pour offrir des observables qu'en faisant l'hypothèse d'un intérêt purement didactique à cette formulation, et sa qualité n'a pas vocation à être évaluée par l'enseignant.

Nous avons montré que cette situation conduisait de nombreux élèves à construire cette notion de non-coplanarité à partir de leur connaissance de géométrie plane. Selon les groupes et le type d'activité menée, cette notion prend différentes formes, depuis le très élaboré « voir si elles sont sur le même plan » à « l'une au-dessous de l'autre », ou à la formulation de procédures instrumentées.

On voit aussi une gradation dans le degré de formulation, qui renvoie plus ou moins vers GII, et qui s'accompagne de discours argumentatif plus ou moins élaboré. La question est donc ici d'étudier les facteurs pouvant expliquer ce plus ou moins grand degré de formalisation, à travers trois cas prototypiques. Les deux premiers cas montrent que les modifications de l'ETM des élèves sont faibles lorsqu'une seule genèse est provoquée, celle-ci n'étant pas suffisante pour susciter les deux autres. Le dernier exemple, que nous développons davantage, illustre au contraire l'effet d'une synergie entre deux genèses, qui provoque une modification substantielle des différentes composantes de l'ETM.

Etude de cas : interactions entre les différentes genèses

Nous proposons ici d'illustrer par l'exemple de trois groupes que lorsque la situation ne suscite qu'une seule genèse, il s'ensuit une modification mineure de l'ETM. En revanche l'existence de deux genèses simultanées « provoque » la troisième, et l'importance des modifications est liée aux interactions permanentes de ces genèses. Les trois groupes présentés sont des élèves de seconde qui n'avaient suivi aucun cours de géométrie dans l'espace au cours de cette année, et pour qui la notion de coplanarité était totalement nouvelle. Les interprétations proposées sont discutées dans Mithalal (2010), nous souhaitons avant tout ici mettre en avant une analyse en termes de genèses.

Premier groupe : recherche d'une interprétation théorique

Dans certains groupes, les connaissances de géométrie plane sont mises à mal, sans pour autant déboucher sur un discours argumentatif. En effet, la tâche est initialement interprétée à l'aide des connaissances de géométrie plane :

3'38, E2: Ben je vois pas ce que tu veux dire, à part que "elles se coupent parce qu'elles sont pas parallèles"...

3'46, E1: Ouais ben... Tu le mets? Elles sont pas perpendiculaires à un même truc, du coup.

Mais rapidement, les cas de non coplanarité remettent en cause cette interprétation, sans disposer d'une interprétation théorique fiable :

9'26, E2: Genre si elles sont pas sur le même plan, elles ont beau ne pas être parallèles, elles ne se couperont pas

E1: Quoi?

E2: Si elles sont pas sur le même plan, même si elles sont pas parallèles, je crois qu'elles ne se coupent pas.

E1: Ben pourquoi pas?

E2: Ben je sais pas

E1: Ben elles se couperont bien à un moment, quand elles sont parallèles elles...

Le discours des élèves va ici à contre courant de l'impression visuelle, puisque les droits se coupent sur l'écran. Aussi, une genèse figurale n'a pas lieu d'être, dans la mesure où leur interprétation initiale concerne la figure. L'analogie avec des situations matérielles est de fait rapidement invoquée pour étudier les cas possibles, ce qui permet d'établir une règle qui sert ensuite de référence.

11'37, E2: Non, mais regarde, par exemple t'es à la bastille, t'es au sommet de la bastille. Tu regardes le cours Jean Jaurès, eh ben tu le vois comme *ça le cours Jean Jaurès alors que le cours Jean Jaurès il est... parallèle...*

21'13, E1: Ah oui d'accord elle va descendre et... Et comment on fait pour voir par rapport à la figure?

E2: Oui donc c'est une histoire de plans en fait... […]

E2: [l'enseignant est parti] Ah donc j'avais raison! Le truc des stylos, là...

E1: Si il y en a une comme ça, une comme ça, ils sont pas sur le même plan!

E2: Ca c'est un plan vertical, ça c'est un plan horizontal, et... oui ben j'avais raison! Bah maintenant on va le montrer.

Dans ce cas, les étudiants font montre d'une aisance avec un travail dans GII qui éclaire leur travail dans GI, en conséquence le consensus est rapidement trouvé et il ne leur est pas nécessaire de s'accorder. Des preuves empiriques ont été employées, non pas pour se convaincre mutuellement mais uniquement pour établir avec un degré de certitude raisonnable les outils nécessaires. En revanche, l'enjeu restant l'étude des configurations et non la convergence d'opinions, les preuves intellectuelles ne dépassent pas l'expérience mentale.

La genèse instrumentale qui conduit à trouver des méthodes pour identifier les cas de non-coplanarité est efficace et ne conduit pas à des incongruités manifestes qu'elle ne serait pas en mesure de résoudre. La genèse discursive n'est pas nécessaire, elle est de fait très faible, et l'embryon de réflexion théorique engagé ne fait pas appel à des preuves élaborées tout comme elle ne modifie pas radicalement le référentiel. Paradoxalement, la faible déstabilisation de leur ETM par la tâche rend le problème essentiellement instrumental, et cette seule genèse est insuffisante pour avoir un effet sur une éventuelle genèse discursive et susciter explicitement une démarche de preuve.

Deuxième groupe : l'examen perceptif semble suffisant

L'activité proposée peut n'être envisagée que comme une étude d'objets matériels. Dans ce cas, les rétroactions du milieu peuvent ne pas être en conflit avec l'expérience sensible des élèves. C'est par exemple le cas du groupe suivant, comme en témoigne leur première conversation.

4'08, E2: Ben oui elles sont sécantes.

E3: Mais comment tu vois?

E4: Parce qu'on voit qu'elles sont pas parallèles, et si elles sont pas parallèles c'est qu'elles sont sécantes.

E3: Mais non, mais il faut justifier... Donc, alors, elles sont sécantes, oui... Pourquoi? Parce qu'on le voit. [rires]

E4: Ben c'est simple, on....

L'interprétation des élèves est ancrée dans GI et, la validité se trouvant dans l'expérience sur le dessin, les preuves ne dépassent pas l'ostension (7'35, E3: *Tu fais une distance de cette droite à cette droite... 0 centimètres! Ca veut dire qu'elles se coupent! Tu vois?*)[4] tandis que les tentatives de convaincre ne reposent pas sur la rationalité du discours :

> ***20'06**, E3: Mais t'as fait quoi, là?*
>
> *E4: Mais j'ai fait... Attends...*
>
> *E3: Mais remets sur le truc, là, parce que... Supprime tout!*
>
> *E4: Non, attends, je vais te remettre les droites d'une autre couleur, comme ça tu vas bien les voir...*
>
> ***22'01**, E3: Tu peux faire aussi avec un... Un triangle, je crois...*
>
> *E4: Je vais essayer de le faire avec des plans. Ouh là! Ben c'est la même que tout à l'heure, à peu près, là!?*
>
> *E3: Mais pourquoi tu veux faire un plan?*
>
> *E4: Bah pourquoi pas?*

C'est donc aux qualités du milieu que nous pouvons en premier lieu attribuer l'absence de discours argumentatif : faute de rétroaction perceptible disqualifiant les preuves pragmatiques – ou encore la pertinence d'outils tirés de GI – les élèves n'ont pas de raison valable de faire appel à des preuves plus élaborées et leur activité reste limitée à l'action. Dans le cas présent, l'intégralité de la séance sera consacrée à ce type d'études.

Ici encore, la genèse instrumentale joue un rôle central et est la principale source de modification des ETM : *pour savoir si deux droites se coupent, il vaut mieux mesurer la distance les séparant que regarder si elles sont parallèles.* En revanche le référentiel figural n'est pas mis en défaut, et la genèse figurale n'a pas lieu d'être. De fait, aucun élément conflictuel ne se matérialise dans le discours, et la genèse discursive n'est pas engagée. Contrairement au groupe précédent, l'ETM n'est cette fois pas adapté au traitement de la tâche, ce qui se manifeste par des difficultés instrumentales, mais l'absence d'autre déstabilisation – et donc d'autre genèse – cantonne le problème à cette seule dimension instrumentale, ce qui ne donne pas lieu à une modification majeure de l'ETM.

Troisième groupe : conflit interprétatif

Les hypothèses relatives à l'intérêt de Cabri 3D (Mithalal, 2010) reposent en grande partie sur la non-univocité des informations visuelles perçues, les outils

[4] Rappelons qu'une distance « nulle » est tributaire de la précision de la mesure, aussi cette preuve n'est elle pas valide. D'autre part, dans un environnement de géométrie dynamique une telle propriété ne résiste pas nécessairement au déplacement, et rien dans la mesure ne garantit l'existence de la propriété géométrique d'intersection.

de GII permettant de concevoir des procédures rétablissant cette univocité. Dans le cas présent, il résulte de ce phénomène des divergences interprétatives entre les élèves du binôme qui ont deux conséquences. Premièrement, cela déplace l'enjeu de l'activité vers un examen rationnel, dans le discours, des interprétations possibles. En second lieu, cela conduit des élèves à établir des preuves – non formalisées – d'existence de différents cas pour assurer la validité des casuistiques que chacune propose.

Signalons que ce binôme est en réalité, en raison de contraintes matérielles, un trinôme. La troisième élève joue exclusivement le rôle de scribe, chargée de rédiger les conclusions et les brèves justifications. Cette position d'arbitre la conduit à mettre en scène la confrontation des deux autres élèves du binôme et à l'inscrire dans une activité discursive, détachée de l'examen direct d'une configuration particulière.

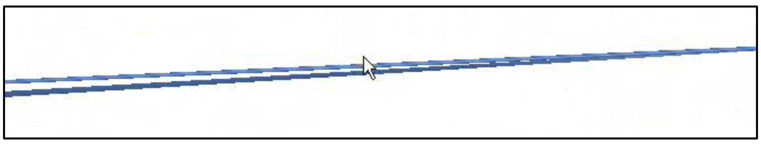
Interprétation initiale du problème et recherche de méthodes de résolution

Au cours des premières minutes, la référence porte essentiellement sur les caractéristiques spatiales des objets observés, qui sont situés dans l'espace sensible. Le mot « regarde » est omniprésent, et à défaut l'instrument sert d'arbitre. On voit assez rapidement apparaître une procédure perceptive instrumentée qui consiste à mettre les deux droites en surbrillance en même temps (ce qui permet d'affirmer qu'elles ont un point commun reconnu par le logiciel). Il faut aussi noter le mot « intersection » proposé par le logiciel, et qui intervient comme juge de paix.

La justification est ici inutile (3'30, E6 : *Et puis il n'y a pas de justification, tu sais c'est... c'est la même!*), dans la mesure où le logiciel rend l'examen sensible suffisant. Ici, seule une genèse instrumentale est à l'œuvre, qui ne débouche que sur une modification mineure de l'ETM – les procédés instrumentaux jugés valides.

Traitement des indéterminations

Cependant, des cas d'ambiguïté apparaissent progressivement, et leur traitement évolue peu à peu. Ainsi à 10'44, à propos de la configuration reproduite ci-dessous :



E5: Ah non regarde regarde regarde! Elles sont pas... elles sont pas... Elles se croisent pas, là, tu vois? Genre comme elles sont dans l'espace elles se touchent pas, en fait...

E6: Ah ouais... Mais c'est un autre, ça?

E5 : Attends je vais voir un truc... Justement tu vois, on peut pas le... Tu vois? On peut même pas faire un point d'intersection, tu vois!

E6 : Comment je peux dire ça? Euh, droites dans l'espace...

À défaut d'une interprétation disponible, les explications sont très contextualisées et la référence à l'action perdure (12'08, E5 : *De plus.... Tu mets: de plus, pas possible de faire un point d'intersection*). C'est d'ailleurs cette procédure qui produit une règle pour l'étude des configurations suivantes :

12'13, E6 : Là je pense que c'est pareil...

E5 : Oui regarde regarde regarde regarde... Ah ça se voit trop bien là, regarde!

E6 : Ouais...

E5 : T'as vu? Faisons un point d'intersection, si possible... Pas possible... Donc...

E6 : Pareil. 3e... Pareil, exactement pareil qu'en 2.

Cette règle donne progressivement lieu à une nouvelle catégorie établie par analogie :

13'10, E5: Ouais mais en fait non, elles sont... Elles se superposent, tu vois! Ouais... Tu mets "elles se superposent".

On voit ici que la conjonction de rétroaction négative du milieu perçue par les élèves – l'ambiguïté que nous avons mentionnée – et de tentative d'interprétation les conduit vers un questionnement plus décontextualisé et détaché de l'action. Pour autant, il ne s'agit pas encore d'une construction théorique achevée, celle-ci n'intervenant qu'ultérieurement.

Il faut tout de même noter que deux genèses sont identifiables immédiatement : une genèse instrumentale qui est le prolongement de la précédente, et une genèse figurale liée aux indéterminations visuelles. La conjonction de ces deux genèses conduit les élèves à ne pas traiter le problème que sous un seul de ses aspect, et donne de fait lieu à un début de genèse discursive marquée par un discours qui n'est plus attaché à un unique cas. On ne trouve cependant dans ce discours ni preuve, ni modification du référentiel théorique visible.

Élaboration théorique consécutive à des divergences d'interprétation

En effet, les interprétations des élèves divergent, notamment en raison de la polysémie des termes employés (19'47, E5 : *Elles sont pas sur le même plan, elles sont dans l'espace!*), ce qui conduit à des conclusions contradictoires dans certains cas, tel que le suivant :

18'19, E6: Ben non puisque là c'est 89 degrés! Donc elles se coupent forcément quelque part!

E5 : Non! Non! Trop pas, parce que le prof il l'a dit tout à l'heure, il a dit que c'est pas forcément si elles sont perpendiculaire à une même droite qu'elles sont parallèles.

E6 : Mais elles sont pas parallèles, là.

E5 : Elles sont... Elles sont peut être pas parallèles, mais elles se touchent pas! Donc: elles se touchent pas!

C'est notamment ici que les référentiels théoriques de la géométrie plane sont explicitement invoqués et mis en doute, ce qui débouche sur la construction de nouvelles connaissances, et ainsi l'équivalence entre « parallélisme » et « perpendicularité à une même droite » est par exemple remise en cause :

18'52, E6 : Si, regarde, elles sont pas... elle est là, et l'autre elle est là! Je t'ai dit, c'est 89, les deux là elles sont parallèles, mais pas...

E5 : Oui ok, mais c'est pas pour ça qu'elles doivent se toucher, tu vois !

E6 : Oui parce qu'il en aura peut être une au dessus de l'autre.

E5 : Il n'y aura jamais un point d'intersection!

E6 : Parce qu'il y en a une au dessus de l'autre, mais c'est ça en fait ce que je voulais faire […]

19'30, E6 : Mais parce que, en fait il y a deux trucs c'est: soit, de toute façon à la base elles sont pas parallèles, donc si elles sont pas parallèles et qu'elles sont sur le même plan, eh bien elles se croisent.

C'est donc ici l'opposition d'interprétations qui conduit les élèves de ce groupe à produire un discours plus générique, s'inscrivant dans une géométrie de type GII. Dans cette dernière phase, on voit simultanément les trois genèses à l'œuvre, des considérations instrumentales et figurales intervenant dans la genèse discursive, et réciproquement. Des modifications fortes de l'ETM ont lieu, concernant à la fois le plan épistémologique (et l'évolution du référentiel) et le plan cognitif avec des visualisations et preuves différentes. Il apparaît que ce sont les synergies et les interactions entre ces trois genèses qui permettent ces modifications.

Conclusion

Dans cette étude de cas, il apparaît que les formes de preuves employées et leur rôle tiennent à la fois à l'enjeu identifié par les élèves – ce qu'il y a à prouver – et à l'interaction sociale qui motive cette preuve.

Bien entendu, la nature de l'activité géométrique exigée par la situation et la capacité du milieu à renvoyer des rétroactions perçues par les élèves est primordiale, et faute de cette première condition on ne peut pas même raisonnablement espérer une modification de l'activité mathématique.

Pour autant, la qualité des rétroactions est visiblement insuffisante. En premier lieu car, à supposer que les élèves soient en mesure de dépasser leurs difficultés – ce qui n’est pas assuré –, les outils ne sont mobilisés que de manière ponctuelle, selon les besoins de l’exercice, et sont aussi rapidement abandonnés. Nous avons pu noter que lorsque l’enjeu est cantonné à l’action matérielle et que seule la genèse instrumentale a lieu, la stabilité de la modification de l’activité semble ne pouvoir être assurée. Les interactions sociales jouent donc un rôle prépondérant tant vis-à-vis de ce problème de stabilité que pour l’emploi de preuves intellectuelles. C’est par un conflit issu de l’action matérielle mais actualisé dans le cadre de divergences inter-élèves qu’émerge un discours argumentatif encré dans GII, et que l’activité géométrique est véritablement modifiée.

Soulignons encore, dans le dernier groupe observé, le rôle de la troisième élève, scribe, catalyseur de l’opposition entre les deux autres élèves, et garante de la qualité argumentative. Ce rôle ne doit pas être négligé et n’est pas sans faire penser – sans que les mêmes conditions soient à l’œuvre – au rôle organisateur de l’enseignant dans le débat scientifique (Legrand, 1993) (Bartolini Bussi, 1991), qui joue le rôle de catalyseur pour faire exister dans le discours des objets qui n’en sont pas initialement, et réciproquement, c’est-à-dire dans notre cas pour « propager » une genèse aux autres.

Plus généralement, ceci nous conduit à insister sur la double organisation, matérielle et sociale, nécessaire à l’émergence de preuve intellectuelle et à l’ancrage dans GII de manière stable – qui semblent en réalité consubstantiels.

Du point de vue des espaces de travail mathématique, cela illustre fortement la nécessité de ne pas penser les différentes genèses de manière disjointe, mais au contraire de les voir comme une synergie entre les trois types de genèses – chacune s’appuyant sur les autres. En définitive, et c’est dans ce sens que nous travaillons (Bulf, Mathé, & Mithalal, 2011), (Bulf C. , Mathé, Mithalal, & Wozniak, 2012), cela nous conduirait à faire apparaître sur le schéma des genèses dans l’espace de travail géométrique (Kuzniak, 2010) la nécessité des interactions entre les différentes genèses deux à deux.

Bibliographie

Balacheff, N. (1999). Apprendre la preuve. *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle* , 197-236. (J. Sallantin, & J. J. Szczeciniarz, Éds.) Paris: PUF.

Bartolini Bussi, M. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. *Proceedings of the 15th PME International*, (pp. 1-16). Assisi, Italia.

Bulf, C., Mathé, A.-C., & Mithalal, J. (2011). Language in geometrical classroom. *Proceeding of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7)*, (pp. 649-659). Rzeszow, Pologne.

Bulf, C., Mathé, A.-C., Mithalal, J., & Wozniak, F. (2012). Le langage en classe de Mathématiques : quels outils d'analyse en didactique des mathématiques? *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant.* Grenoble: La pensée sauvage.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitves , 10*, 5 - 53.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives , 11*, 175 - 193.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. *Proceedings of the First French-Cypriot Conference of Mathematics Education*, (pp. 71 - 89).

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM* , 123-158.

Mithalal, J. (2010). Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle. Grenoble: Thèse de l'Université de Grenoble.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Collin.

ACTIONS MATÉRIELLES, ACTIVITÉS LANGAGIÈRES ET APPRENTISSAGES EN GÉOMÉTRIE

Bulf C. Université Bordeaux, IUFM d'aquitaine, LACES E3D

Mathé A.-C. Université d'Artois, LML

Mithalal J. Université Paris 4, IUFM de Paris, LDAR

Cette contribution s'inscrit dans le Thème 3, « le travail mathématique et les aspects sociaux et institutionnels » dont les problématiques portent sur l'analyse du « travail mathématique en observant le rôle des institutions particulières dans lequel il est intégré et tout particulièrement le jeu des interactions sociales et langagières ». Dans le prolongement de travaux présentés lors du dernier symposium ETM à Paris en 2010, notre travail de recherche sur le langage en classe de géométrie vise à interroger la manière dont actions matérielles et activités langagières s'articulent dans le processus d'apprentissage en classe de géométrie. Dans cet article, en appui sur des éléments d'analyse d'une activité de classe « ordinaire », nous présentons la façon dont le modèle de structuration du milieu offre une analyse fine des interactions entre sujet et milieu et livre des pistes pour inscrire une analyse portant sur le langage venant soutenir l'analyse – plus classique – des actions matérielles.

INTRODUCTION

Depuis les années soixante-dix, en France, la didactique des mathématiques s'efforce de saisir et de modéliser les conditions de construction et d'évolution des connaissances mathématiques des élèves. Depuis son origine, ce champ de recherche est fortement ancré dans une approche anthropologique de l'apprentissage. Sous l'impulsion des travaux de Guy Brousseau (1998), il s'est en particulier développé autour d'une modélisation des connaissances mathématiques comme dérivant d'une action, dans un jeu orchestré autour de situations-problèmes.

Nous avons ici un principe théorique fondé sur un modèle général des mathématiques selon lequel les connaissances mathématiques peuvent se décrire à l'aide de situations *fondamentales (définissables, à leur tour, comme des jeux formels). (Chevallard & Bosch, 1999, p. 81)*

Le processus de partage d'un savoir en classe de mathématiques y est vu comme une construction sociale, depuis la recherche d'états d'équilibre au sein d'interactions entre un sujet et un milieu – dans des situations spécifiques – jusqu'à l'institutionnalisation des connaissances identifiées comme utiles pour l'action en savoirs stabilisés et conformes à l'institution. C'est dans ce cadre que nous nous employons depuis deux ans (Bulf, Mathé et Mithalal, 2010, 2011) à cerner plus spécifiquement la part du travail mathématique qui se joue dans les activités[1] langagières, en particulier en classe de géométrie à la fin de l'école (enfants de 10 à 12 ans). L'objet de notre travail vise à interroger le rôle des activités langagières orales dans la construction de connaissances géométriques. Cette recherche en cours repose sur l'hypothèse fondamentale qu'en contribuant notamment à la négociation vers une action matérielle partagée sur les objets, les activités langagières constituent – au même titre que les actions matérielles – un lieu de construction de connaissances sur les objets géométriques sous-jacents et participent de l'acculturation vers le monde spécifique de la géométrie (Mathé 2012). Nous partageons le point de vue de Rebière et Jaubert selon lequel « le langage est action et donc nécessairement ancré en contexte. Il témoigne d'une intention, il vise des buts, il agit sur. Il est outil de construction, de négociation et de transformation des significations » (Rebière 2012, version en cours de publication). Comment actions matérielles et activités langagières s'articulent-elles dans le processus de constructions de connaissances partagées en classe de géométrie ?

Dans ce texte, en appui sur l'analyse d'une situation de classe « ordinaire », nous présentons la manière dont cette question de recherche amène à explorer de manière plus précise le rôle joué par le langage dans les modalités d'interactions des élèves au milieu. Pour ce faire, il nous est nécessaire de saisir plus finement non seulement l'activité de l'élève, mais aussi le rapport qu'il entretient aux objets et aux problèmes

---

[1] Nous parlerons d'activités langagières au sens de Jaubert (2007), Rebière (2012) : « une autre conception du langage se dessine et on peut la définir comme suit : le langage, est une activité. Parler, écrire, c'est agir, et pas seulement physiquement. C'est façonner des contenus que l'on tente de faire partager à son interlocuteur. Au cours de l'activité langagière se construisent des mondes discursifs (juridique, médical, fantastique, merveilleux, scientifique…) et des objets discursifs, différents des objets réels, dont l'énonciateur sélectionne certains éléments pour en parler (…). » (Rebière 2012, version en cours de publication).

qui lui sont posés. Nous présentons la façon dont le modèle de *structuration du milieu* (Margolinas 1995, 2003) nous permet de mener à bien une analyse fine des interactions sujet-milieu et d'inscrire dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998) une analyse portant sur le langage, venant soutenir l'analyse – plus classique – des actions matérielles.

LA SITUATION D'ENSEIGNEMENT OBSERVÉE

La situation d'enseignement analysée est issue de la thèse de Bulf (2008). Il s'agit d'une observation de type « naturaliste » où aucune indication n'est communiquée ni aucune contrainte imposée. L'enseignante a conçu seule la séance, c'est en ce sens que nous parlons de séance de classe « ordinaire ». Les ressources utilisées pour la conception de la séance n'ont pas été communiquées mais les types de tâches proposés sont similaires à ceux que l'on pouvait trouver dans les manuels de l'époque. La séance de classe observée s'est déroulée en janvier 2007, dans une classe de 5ème de 26 élèves (entre 12 ans et 13 ans). Il s'agit d'une situation de découverte de la symétrie centrale.

L'activité proposée articule deux types de tâches : la construction de l'image d'une figure par symétrie axiale et la détermination de la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure donnée par demi-tour. La fiche distribuée aux élèves est reproduite en annexe 1, la transcription de la séance en annexe 2. Pour l'enseignante, l'objectif de la première question est la réactivation des connaissances des élèves sur la symétrie axiale. L'enjeu de la seconde question est d'amener les élèves à dégager le fait que la composée de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires est un demi-tour dans le plan autour du point d'intersection de ces axes.

Nous avons volontairement choisi de nous intéresser à une séance « ordinaire » car il nous semblait intéressant d'interroger la manière dont certains outils de didactique des mathématiques, en particulier issus du cadre de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998) pouvaient nous aider à avancer dans la compréhension du rôle des pratiques langagières dans le processus d'apprentissage, dans une situation donnée, même lorsque celle-ci n'est pas le fruit d'une ingénierie didactique. L'analyse d'une telle situation pourrait nous conduire mesurer les écarts entre la situation élaborée par l'enseignant et ce que pourrait être une situation-problème, conçue par des didacticiens. L'objet de notre travail ne réside pas là mais dans la compréhension des liens qu'entretiennent activités langagières et processus d'apprentissage, même dans un contexte de classe ordinaire.

Dans ce contexte, une partie des interactions langagières qui se développent en classe, nous pouvons le prévoir, contribuent de façon nécessaire au fonctionnement de la situation, palliant, par effets de contrat, quelques déficiences du milieu avec lequel peuvent interagir les élèves. Toutefois, notre hypothèse de travail est que le rôle des pratiques langagières en classe ne se limite à porter des effets de contrat, nécessaire à une situation mal pensée. Il s'agit surtout pour nous d'interroger d'un point de vue plus général comment ces activités langagières permettent une négociation sur le sens, sur la fonction des objets, sur des interprétations, etc., même hors de situations savamment orchestrées.

Saisir la part des activités langagières dans l'activité mathématique des élèves : quels outils d'analyse ?

La Théorie des situations didactiques (Brousseau 1998) prend en compte le langage comme un des modes de fonctionnement de connaissances mathématiques, notamment au travers de la *dialectique de l'action, de la formulation et de la validation*. Les processus d'apprentissage et d'institutionnalisation passent en effet, selon Brousseau, par l'articulation de *situations d'action, de formulation et de validation*, sur le modèle de structures imbriquées. Cependant, l'attention que prête la Théorie des Situations aux activités langagières se limite à des phases de l'organisation didactique dans lesquelles le langage apparaît comme un élément essentiel de l'activité des élèves et leur étude n'est pas poursuivie lorsque le langage n'est plus fondamental dans la situation. Nous souhaitons interroger les activités langagières hors de ces situations spécifiques. Notre objectif consiste à mener une analyse conjointe et dialectique de l'activité langagière et de l'activité matérielle des élèves, permettant de les prendre en charge simultanément, sans lien de subordination. Pour ce faire, il s'avère nécessaire de disposer d'outils permettant une analyse fine non seulement de l'activité de l'élève, mais aussi du rapport qu'il entretient aux objets et aux problèmes qui lui sont posés, ce que propose le modèle de *structuration du milieu* (Brousseau 1986, Margolinas 1995).

Le but de cette classification en niveaux de milieu et de situations est de permettre la prévision des relations sociales – des jeux – qui correspondent aux différents régimes du fonctionnement de la connaissance dans les différents modes d'apprentissages utilisables en situation scolaire. (Brousseau 1986, p.63)

Cette citation témoigne de l'ambition de ce modèle : il s'agit ici d'étudier la situation non plus de manière indépendante du sujet, mais en considérant qu'il s'en saisit et que c'est de cela que naît le milieu avec lequel il interagit effectivement. Ainsi, l'interaction d'un milieu matériel avec le sujet, ses connaissances et la manière dont il comprend et aborde la consigne, conduit à un nouveau problème auquel il est effectivement confronté et pour lequel il va produire des stratégies et des anticipations. En conséquence, le sujet peut se placer alternativement dans des positions différentes (selon qu'il doit par exemple agir ou justifier de ses actions) qui définissent autant de *niveaux de milieu*. Brousseau (1986, p. 60) décrit alors le milieu comme une structure emboîtée « en oignon » dont nous proposons la schématisation suivante.

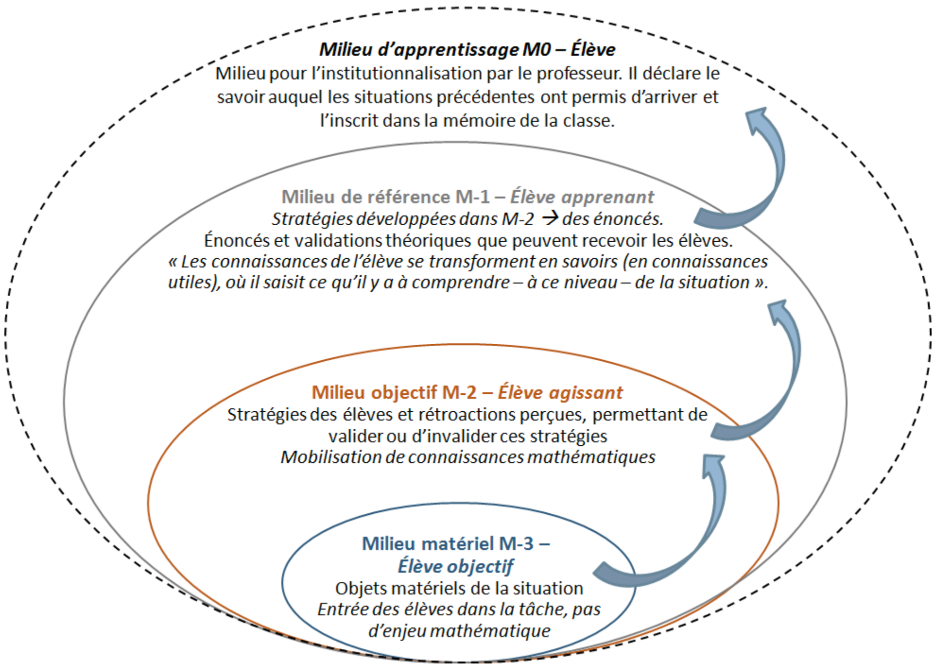


Figure 1 : Schématisation de l'articulation entre les différents niveaux de milieu, d'après le modèle de la structuration du milieu

Nous choisissons ici de faire porter l'accent sur la notion de milieu plutôt que sur la notion de situation. Dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques, la situation adidactique revêt une importance fondamentale, mais l'analyse que nous proposons par la suite n'est pas spécifique de ce contexte et s'appuie sur une observation de *classe ordinaire*, ce qui rend caduque cette idée d'*adidacticité.* En revanche nous pouvons toujours interpréter les actions de l'enseignant comme des aménagements du milieu, raison pour laquelle notre analyse s'appuie sur la modélisation de ce milieu.

Une modélisation à l'aide de la structuration du milieu : deux évolutions

La première évolution mise en évidence par le modèle est celle de la position de l'élève. En tant qu'élève agissant, il emploie ses connaissances pour interpréter le milieu matériel, pour élaborer des stratégies : s'il les met à l'épreuve, il n'est pas ici immédiatement question de construire une connaissance. Pour ce faire, l'élève doit *a minima* se placer en position d'élève apprenant, et adopter un regard réflexif sur ses propres actions. Nous pouvons donc considérer que cette modification de sa position est constitutive de l'apprentissage et qu'il est essentiel de pouvoir la détecter et la susciter.

La seconde évolution porte sur chacun des niveaux considérés isolément, constitutifs de l'état de connaissance du sujet. Par exemple, confronté au milieu objectif, l'élève met à l'épreuve ses stratégies, et la boucle [action – rétroaction] qui se met en place peut conduire à une modification des connaissances mobilisées – et donc du milieu objectif lui-même –, ou encore des stratégies jugées valides – et donc du milieu de référence, etc. Le modèle de structuration du milieu nous permet ainsi de distinguer, dans l'évolution du milieu, deux mécanismes – modification de la position de l'élève et modification de chacun des niveaux de milieu – pour préciser l'analyse des interactions entre sujet et milieu. La question est alors la suivante : *comment penser et caractériser le rôle du langage dans chacun de ces mécanismes* ?

L'analyse *a priori*, menée dans les termes de la structuration du milieu nous conduire à émettre de premières hypothèses sur les liens possibles entre les pratiques langagières et les deux évolutions décrites. C'est l'analyse *a posteriori* qui nous permettra véritablement d'identifier des phénomènes liés au langage et portera les germes d'une réflexion sur la possibilité et l'intérêt de mener conjointement une analyse des actions matérielles et des interactions discursives.

ANALYSE A PRIORI DE LA PLACE ET DU RÔLE DES ACTIVITÉS LANGAGIÈRES DANS LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES

Au plus proche de la description de l'analyse *a priori* en termes de structuration du milieu proposée par Margolinas (2004, p.54), notre objectif consiste ici à anticiper les jeux possibles d'un élève générique dans la situation et de comprendre la façon dont l'évolution du rapport de l'élève au milieu peut permettre la construction de connaissances. Soulignons que cette analyse n'a pas pour finalité d'évaluer la qualité de la situation proposée, et sert essentiellement à l'interprétation du rôle des phénomènes langagiers – notamment dans une perspective d'aménagement du milieu. Dans la suite de ce texte, nous présentons quelques éléments de l'analyse *a priori* des deux tâches qui constituent le problème élaboré par l'enseignante tel qu'il est initialement proposé aux élèves. Pour chacune de ces tâches, nous déterminerons les niveaux de milieux imbriqués, du milieu matériel M-3 au(x) milieu(x) objectif(s) envisageables, jusqu'au milieu(x) d'apprentissage M0 au(x)quel(s) la situation pourrait donner lieu. Un regard croisé sur cette analyse *a priori* et la présentation du projet de l'enseignant nous permettra d'émettre ensuite des hypothèses sur des écarts entre les jeux prévisibles des élèves dans la situation et les attentes de l'enseignant. Au regard de cette analyse, nous proposerons ensuite d'interroger, *a priori*, le rôle et la place du langage dans la dynamique d'un fonctionnement possible de la situation en classe.

Analyse a priori de l'activité

Tâche 1: construction de l'image de figures par symétrie axiale

Le *milieu matériel* de la tâche 1 comprend l'énoncé de l'activité de découverte, le dessin composé du « bateau » (Voir Annexe 1) et des deux axes ainsi que les instruments de géométrie mis à disposition (règle graduée, compas, équerre). En position d'*agissant*, l'interaction entre l'élève et le milieu objectif est conditionnée par des connaissances portant sur la symétrie axiale et à des méthodes de construction de figures par cette transformation. À ce stade de la progression, il s'agit de la seule transformation connue par les élèves.

Toutefois, les élèves de 5^e peuvent mettre en œuvre différents modes d'appréhension de la symétrie axiale, construits à l'école primaire puis en classe de 6^e. Ils peuvent s'appuyer sur une appréhension globale de la symétrie, selon laquelle deux figures sont symétriques par symétrie axiale si elles se superposent exactement lorsque l'on plie la feuille le long de l'axe de symétrie. Ils plieront alors la feuille ou utiliseront du papier calque. La symétrie axiale est alors appréhendée d'un point de vue dynamique comme une transformation consistant à la restriction à un plan d'une rotation autour d'un axe dans l'espace. Dans ce cas, elle peut porter sur des surfaces, ou sur des sous-éléments de cette surface.

Les élèves peuvent également développer des procédures « analytiques » ou « semi-analytiques » (Grenier, 1989). La symétrie axiale est appréhendée d'un point de vue statique comme une relation entre deux « objets » du plan. Il s'agit d'une transformation ponctuelle (ne nécessitant pas le passage par l'espace) : deux points sont symétriques par rapport à un axe si cet axe est la médiatrice du segment joignant ces deux points. Les méthodes de construction associées impliquent une déconstruction dimensionnelle (décomposer la figure « bateau » en un réseau de points) puis la construction de l'image de chacun de ces points avec l'équerre, la règle et le compas ou avec l'équerre et la règle graduée (en référence à la définition de la médiatrice) ou encore en recourant uniquement au compas (en convoquant la propriété de conservation des longueurs).

On peut d'ores et déjà s'interroger sur le degré de précision accepté par l'enseignante pour les constructions intermédiaires de F2 et F3 par symétrie axiale, puisque le milieu objectif n'offre que peu de possibilité de rétroaction. Ce degré de précision dépendra du choix des instruments de géométrie mis à disposition. Les constructions de l'image de points par symétrie axiale pourraient cependant faire l'objet d'une validation pragmatique par pliage le long des axes de symétrie, celle-ci sera alors soit issue de l'initiative propre de l'élève soit impulsée par l'enseignant.

Le *milieu de référence* est constitué des tentatives de résolution par les élèves, des méthodes de construction partagées et validées (ou non) ainsi que de l'explication des définitions et propriétés de la symétrie axiale mises en œuvre. Si l'on considère que l'enseignante n'a pas ici envisagé l'utilisation de papier calque par les élèves, on peut penser qu'elle privilégiera les procédures analytiques ou semi-analytiques et la définition associée de deux points symétriques par rapport à un axe.

Cette activité n'a pas de réel objectif d'apprentissage. Son enjeu réside plutôt dans la réactivation des connaissances des élèves sur la symétrie axiale et la construction du symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe. Ce problème constitue en fait une première étape permettant de construire un milieu matériel pour la seconde tâche. Il ne nous semble donc pas qu'il y ait, a priori de *milieu d'apprentissage* susceptible d'émerger de cette première tâche.

Tâche 2 : Déterminer la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure complexe donnée

Le *milieu matériel* de la seconde tâche est constitué de la figure de l'énoncé complétée des constructions de la première tâche (les bateaux F1, F2, F3), de la question : « Comment peut-on passer directement de la figure F1 à la figure F3, sans faire intervenir F2 ? » et des instruments de géométrie mis à disposition. En l'état, une multitude de stratégies est envisageable aussi bien d'un point de vue global que d'un point de vue ponctuel. En effet, aucune contrainte sur l'action n'oriente les élèves vers une vision globale de la figure et l'utilisation de papier calque ; par exemple rien n'impose de ne pas décoller le papier calque de la feuille (lorsque celui-ci sera introduit) ou de n'effectuer « qu'un seul mouvement » pour aller de F1 à F3. Tout « mouvement » conduisant à des superpositions aléatoires est donc envisageable. Par ailleurs rien ne laisse présupposer que les élèves puissent à ce stade de l'activité recourir à une vision ponctuelle de la figure et percevoir des propriétés d'alignement qui permettrait d'assigner au point O un rôle particulier. Par conséquent, il semblerait que seules les actions de l'enseignant durant le déroulement puissent « réduire » le milieu, au sens de Assude, Mercier et Sensevy (2007) :

(...) dans le cas des situations ordinaires, au contraire, les rétroactions du milieu sont bien moins prégnantes et adéquates [...]. Dans ces situations, le professeur doit « réduire » le milieu de manière que les élèves jouent le bon jeu : l'action de jeu ne peut être déterminée que par le contrat, tandis qu'un milieu bien défini permettrait que le contrat puisse être suspendu et ne fasse pas de référence. (Opus cité p.248).

Le *milieu de référence* est constitué de la formulation des différentes stratégies élaborées par les élèves pour passer de la figure F1 à F3 « sans passer par F2 ». Comment alors justifier la validation du demi-tour dans le plan et le rejet de tout glissement du calque ? Compte tenu de ce qui a été dit précédemment, la validation devra donc être prise en charge par l'enseignant, par précision du contrat pour justifier cette stratégie. Dans tous les cas, la situation proposée ne permet pas à l'élève de faire émerger la procédure attendue (demi-tour autour de O) par adaptation au milieu objectif[2].

[2] On voit donc ici l'impossibilité de proposer une *situation adidactique* correspondant à l'activité proposée par l'enseignant, étant donné la faible qualité des rétroactions et l'impossibilité d'un fonctionnement autonome de l'activité.

Le *milieu d'apprentissage* est celui de l'identification de la *nouvelle* transformation qui consiste à faire un demi-tour dans le plan autour d'un point et qui est nommée symétrie centrale ; le point autour duquel on tourne pour effectuer le demi-tour est le centre de symétrie.

Langage et processus de construction de connaissances, bilan a priori

L'analyse *a priori* des deux tâches composant le problème nous a permis d'envisager des positions d'élève possibles dans l'activité (objectif, agissant, apprenant), des contenus possibles de milieux avec lesquels peuvent interagir les élèves. Cette analyse souligne la possibilité d'écarts importants entre le jeu effectif des élèves et les attentes de l'enseignante. En premier lieu, les milieux objectifs identifiés, pour chacune des tâches, n'offrent que très peu de possibilités de rétroaction et les milieux de référence ne peuvent ainsi émerger des seules interactions des élèves au milieu. Par ailleurs, l'analyse précédente met en évidence que la situation, prise dans sa globalité, repose sur l'articulation de deux tâches mettant en œuvre des rapports à la figure « bateau » très différents. En effet, en classe de 5^{e}, la symétrie axiale est souvent appréhendée du point de vue ponctuel (transformation ponctuelle) car tel est le contrat en fin de 6ème, bien que la première rencontre avec cette transformation se fasse à travers son aspect global (école primaire puis début 6ème). Le bateau devrait donc être vu pour beaucoup comme un réseau de points dont il faudra construire les images, point par point. Le choix des instruments mis à disposition lors de la première tâche confirmera le rapport à la figure privilégié visé par l'enseignant qui n'envisage pas de permettre aux élèves de construire l'image de F1 puis de F2 par pliage ou par usage du papier calque. Or la seconde tâche cherchera soit à mettre en œuvre l'utilisation de papier calque dans le but de faire émerger le demi-tour (et reposera alors sur une appréhension globale de la figure « bateau ») soit à mettre en évidence des propriétés d'alignement avec le point O (dans ce cas, elle s'appuiera sur une perception ponctuelle). L'articulation entre les deux tâches cache donc une éventuelle rupture cognitive importante dont on peut supposer qu'elle induira des difficultés chez les élèves.

Au regard de ces analyses, que peut-on prévoir, *a priori*, concernant la place et le rôle du langage dans le processus de résolution du problème ?

D'une part, comme dans toute activité collective, le langage est omniprésent dans la classe de mathématiques et prend en charge une partie importante des interactions entre enseignant et élèves, des interactions entre élèves et milieu(x). Anticiper, *a priori*, le rôle du langage dans la dynamique des changements de milieux nous amène également à identifier le langage comme un outil didactique, média des interactions enseignant-élève dans le cadre de cette activité où les élèves travaillent seuls. C'est en grande partie dans le langage que l'enseignant régulera et articulera les différentes phases de l'organisation didactique de la classe.

D'autre part, du fait des lacunes et dysfonctionnements prévisibles[3] de l'activité identifiés, les interactions langagières entre enseignant et élèves seront indubitablement le lieu de *réduction du milieu*, au sens évoqué précédemment, comme souvent dans le cas de situations de classe ordinaire. Au cours de chacune de ces tâches, l'enseignant devra intervenir (par effets de contrat) pour, au mieux, poser de nouvelles contraintes sur l'action des élèves permettant de faire émerger et rendre légitimes les procédures de construction de l'image des figures par symétrie axiale puis la stratégie permettant de « passer de F1 à F3, sans passer par F2 » attendue.

Mais, le rôle du langage en classe de mathématiques se limite-t-il à l'organisation de phases de l'organisation didactique ? Son analyse nous donne-t-elle uniquement des indices sur les modalités de son organisation ? Le langage ne joue-t-il un rôle dans le jeu didactique autour du problème posé que lorsque la situation est défaillante ou lacunaire ? Le modèle de la structuration du milieu nous livre un outil d'analyse a priori permettant d'identifier différents moments clés du processus de résolution de la situation. Pour l'enseignant comme pour le chercheur comment identifier, à un moment donné, la position de l'élève dans la situation, le niveau et la nature du milieu avec lequel il interagit ? De quels observables disposons-nous ? De quels observables dispose l'enseignant ou le chercheur pour identifier les positions des élèves, à un moment donné ? Comment se constituent les milieux successifs avec lesquels les élèves interagissent de façon effective ? Quels sont les moteurs des changements de milieux permettant la résolution du problème et l'apprentissage des élèves ?

---

[3] On peut ici comprendre le choix de la séance observée qui, si elle donne peu d'information sur le déroulement d'une situation telle qu'elle serait pensée dans le cadre d'une ingénierie didactique, accentue l'importance de certains phénomènes langagiers qui visent à compenser ces dysfonctionnements.

Ce questionnement nous conduit à émettre l'hypothèse que l'analyse des activités langagières pourrait nous livrer des indices sur la position des élèves dans le processus de résolution du problème et sur les modalités de son évolution.

LE RÔLE DU LANGAGE A POSTERIORI : PHÉNOMÈNES MIS EN ÉVIDENCE

Objectifs et méthodologie de l'analyse a posteriori

Afin d'apporter des éléments de réponse aux questions soulevées par l'analyse a priori, nous avons procédé à une analyse de la transcription intégrale du déroulement de la séance en classe (annexe 2). Pour cela, nous avons, pour chacune des résolutions des tâches, procédé à un découpage du déroulement effectif selon les différentes positions des élèves (objectif, agissant, apprenant). Puis, nous avons mené une analyse conjointe des actions des élèves dans la situation, de leurs discours autour de ces actions (notamment les significations assignées aux mots), du discours de l'enseignant et de ses répercussions sur les actions matérielles et langagières des élèves. Nous présentons et illustrons quelques résultats d'analyse dans le paragraphe suivant.

Différents aspects du rôle de l'activité langagière dans le processus d'apprentissage

L'analyse a posteriori du déroulement effectif de la séance, mise en regard avec l'analyse a priori du problème présentée précédemment, nous permet d'identifier deux aspects fondamentaux du rôle des activités langagières dans le processus résolution du problème et de construction de connaissances mathématiques.

D'une part, l'analyse du discours qui se développe lors du déroulement effectif de la séance permet d'identifier des indices cruciaux quant à la position des élèves dans la situation et les modalités d'évolution de ces positions tout au long du processus de résolution des tâches. Nous référant aux travaux de Sensevy (2011), nous interprétons ce résultat en termes d'analyse du rôle des interactions langagières dans le *jeu d'apprentissage*, c'est-à-dire « le jeu du professeur sur le jeu de l'élève, pour faire apprendre l'élève », (op.cité p.124). Cette analyse nous conduit à mettre en évidence différentes fonctions didactiques du langage, que nous expliciterons dans la suite de ce texte.

D'autre part, cette analyse nous permet de mettre en évidence l'importance des interactions entre actions matérielles et activités langagières observées. Plus précisément, le langage s'avère lieu de négociation vers une interprétation partagée du problème et des modalités d'actions sur les objets du problème. Nous mettons ainsi en évidence que les activités langagières observées participent au processus de constitution du contenu des niveaux de milieux avec lesquels les élèves interagissent de façon effective. Dans ce sens, nous dirons que le langage est consubstantiel de l'activité géométrique des élèves. Il est à la fois partie prenante et moteur du *jeu* *épistémique* sous-jacent à l'action didactique considérée, au sens de « pratique de savoir » (Sensevy 2011, p.124).

Nous proposons de développer et d'illustrer chacune de ces dimensions du rôle du langage dans la dynamique de la situation dans la suite de ce texte.

Le langage comme partie prenante et moteur du jeu d'apprentissage, fonctions didactiques du langage

L'analyse du déroulement effectif de la séance en termes de structuration du milieu révèle que le langage prend en charge une partie importante des interactions entre enseignant et élèves, permettant à l'enseignant de jouer sur la position des élèves, d'élève objectif à élève agissant puis apprenant. Ainsi, tout au long de la transcription, nous relevons des indicateurs langagiers divers (soulignés dans les extraits de corpus qui suivent) indiquant que l'enseignant aménage le passage des élèves d'une position à une autre.

Voici, par exemple, l'extrait du corpus relatif à la lecture et l'explication de la consigne de la première tâche par l'enseignant (l.1 à 14).

> *9 P : Voilà la question : Construire en rouge la figure symétrique … de F1… par rapport à la droite D1. La figure obtenue s'appelle F2. Inaudible. Puis 2ème consigne. Construire en vert la figure symétrique de F2 par rapport à la droite D2. D'accord ? La figure obtenue s'appelle F3. Conseil : Vous commencez au crayon, puis vous repassez en couleur. Allez-y. La photocopie étant ce qu'elle est, si vous voyez 1.1 cm, c'est 1cm. Vous avez besoin d'une équerre, d'une règle, éventuellement d'un crayon, d'un stylo pour repasser, d'un compas. A vous de jouer. Vous laissez les traits de construction.*

À travers la formulation de verbes d'action, à l'infinitif ou au présent, ou d'expressions telles que « Vous avez besoin de … », « À vous de jouer », l'enseignante incite les élèves à « passer à l'action », aménageant ainsi le passage des élèves d'une position d'élève objectif à une position d'élève agissant.

Lors de la tâche 2, l'enseignante instaure immédiatement une discussion collective autour de modalités d'action possible pour répondre à la question. Par l'intermédiaire de questions sur les actions possibles, l'enseignant positionne d'emblée les élèves en position agissant.

> *63 P : Comment peut-on passer directement de la figure F1 à la figure F3 ? Qui a une idée ?*

Après une phase d'actions évoquées puis effectives, l'enseignante provoque une phase de mise en commun des procédures. Ceci s'effectue une nouvelle fois par le biais d'un changement du type de discours et, en particulier, à travers des questions incitant les élèves à la formulation. Le temps de l'action est terminé :

> *109 P : Alors, qu'est-ce que tu as fait ?*

110 P : As-tu trouvé ? Explique-moi correctement ?

Mais l'enseignante prend rapidement une place importante dans cette mise en commun et elle reformule uniquement celle qu'elle attend. En adoptant alors un type de discours proche d'un discours de validation, elle fait ainsi basculer les élèves en position d'élève apprenant :

152 P : C'est le centre de symétrie. Bon. Elle a tourné. Mais elle a tourné de combien ?

157 P : Un demi-tour, très bien. Un demi-tour. Un tour complet, ça ferait ?

À la fin de la résolution de cette seconde tâche, l'enseignante change une nouvelle fois de type de discours pour marquer la fin de cette phase de résolution du problème et le passage à la phase de conclusion :

159 P : 360°. Inaudible. Oui, un demi-tour. Alors voilà l'histoire, pour reproduire cette figure F1 pour qu'elle devienne la figure F3, il faut posséder un point très important, le point O, il faut tourner autour de ce point O, et tourner de 180°, c'est à dire faire un demi-tour. C'est ce que vous allez écrire en bas.

Ces premières considérations nous conduisent à revenir sur l'appréhension du langage comme « outil didactique, média des interactions *enseignant–élève* » que nous évoquions à l'issue de l'analyse *a priori*. Nous le voyons à travers ces éléments d'analyse *a posteriori*, le langage revêt tour à tour des fonctions didactiques différentes selon le contexte, ce qui entre en résonance forte avec la dialectique de l'action, de la formulation et de la validation (Brousseau 1998). Ces différentes fonctions nous semblent en effet relever d'intentionnalités différentes et peuvent être attachées à différents types de discours :

- un type de discours relatif à la dévolution, qui contient les objets du milieu matériel, les règles du jeu ;
- un type de discours relatif au jeu qui se développe autour des actions pendant le jeu et intervient donc dans et pendant les interactions des élèves avec un milieu objectif ;
- un type de discours pour la mise en commun permettant la formulation des stratégies développées, des rétroactions éprouvées et des expériences menées par les élèves, en interaction avec le milieu objectif, la confrontation et la validation des procédures. Il s'agit alors du langage correspondant aux interactions des élèves avec le milieu de référence;
- un type de discours relatif à la conclusion (Margolinas, 2003) et à l'institutionnalisation, résultant de l'interaction des élèves avec le milieu d'apprentissage. Le langage doit ici se conformer aux normes propres à la discipline. Il devient « langage mathématique » et fixe des savoirs scolairement et mathématiquement partagés.

Les analyses a posteriori du corpus mettent par ailleurs en évidence que l'enchaînement de ces types de discours n'est pas chronologique, des échanges participant de la dévolution pouvant par exemple alterner avec des échanges discursifs relevant du fonctionnement du jeu lui-même.

Ainsi, identifier les différents types d'activités langagières nous donne de premiers outils pour envisager de manière plus précise le rôle de l'alternance des types de discours dans le processus de résolution du problème et de construction de connaissances. Ce premier niveau d'analyse ne nous paraît cependant pas permettre de saisir de façon complète le rôle et la place du langage dans le processus de résolution du problème et de construction de connaissance, dans la séance observée. Allons un peu plus loin.

Le langage comme élément et moteur du jeu épistémique

L'analyse du déroulement effectif de la séance, et en particulier des activités langagières qui se développent autour de la résolution de chacune des tâches proposées aux élèves, nous conduit à mettre en évidence que l'étude des activités langagières permet non seulement de décrire la nature mais aussi le contenu des milieux avec lesquels les élèves interagissent. L'étude du discours des élèves et de l'enseignant nous permet par exemple de caractériser les milieux objectifs avec lesquels ils interagissent respectivement, à travers la manière d'expliciter ces actions, voire la formulation des connaissances mobilisées. Plus encore, nos analyses montrent que l'interaction des élèves avec chacun des niveaux de milieu envisagés s'effectue non seulement à travers l'action des élèves sur les objets matériels et géométriques de la situation mais aussi par le biais du langage autour de ces actions. Les pratiques langagières constituent ainsi également un lieu de négociation du contenu de ces milieux. Nous illustrons ce résultat par le biais de la citation d'extraits de corpus. Nous reprenons parfois ceux mentionnés dans la partie précédente, mettant ainsi en évidence qu'une même intervention langagière est susceptible de relever de différentes fonctions dans le jeu didactique qui se développe.

Dès le début de la résolution de la première tâche par exemple, l'enseignante complète la consigne par des instructions d'ordre technique :

9 P : Voilà la question : Construire en rouge la figure symétrique … de F1… par rapport à la droite D1. La figure obtenue s'appelle F2. [Inaudible]. Puis 2^e^ consigne, construire en vert la figure symétrique de F2 par rapport à la droite D2. D'accord ? La figure obtenue s'appelle F3. Conseil : Vous commencez au crayon, puis vous repassez en couleur. Allez-y. La photocopie étant ce qu'elle est, si vous voyez 1,1 cm, c'est 1 cm. <u>Vous avez besoin d'une équerre, d'une règle, éventuellement d'un crayon, d'un stylo pour repasser, d'un compas.</u> À vous de jouer. Vous laissez les traits de construction.

Elle agit ainsi explicitement, par le langage, sur le milieu matériel en insistant sur les modalités de réalisation des dessins, en explicitant le matériel nécessaire. Ce faisant, elle aménage le milieu objectif : elle oriente les élèves vers une appréhension ponctuelle de la symétrie axiale et vers « procédures analytiques ou semi-analytiques de construction » (par équerre/compas).

De même, lors de la mise en commun, comme nous le laissait supposer l'analyse *a priori*, l'enseignante réduit, dans le langage, le milieu de référence de la façon suivante :

> *21 P : alors peut-être ça serait bien de se rappeler comment on fait <u>pour tracer le symétrique d'un point</u>*

Elle élimine ainsi d'emblée les procédures globales. Les élèves, par effet de contrat, se restreignent à la formulation de procédures analytiques.

Lors de la résolution de la seconde tâche, les élèves doivent d'emblée imaginer des actions et leurs résultats, sans possibilité de rétroaction émanant du milieu objectif. Les procédures ponctuelles qui émergent alors spontanément sont cohérentes avec l'appréhension statique de la transformation de la figure F1 en F3, vues comme des réseaux de points, que l'enseignante a privilégié durant la résolution de la première tâche. Rappelons que l'enseignante attend ici l'émergence d'un demi-tour autour du point O, transformation portant sur une vision des figures en termes de surfaces. Les élèves proposent différentes procédures. L'enseignante valide, dans le langage, écartant ainsi les stratégies qui ne correspondent pas à son projet d'enseignement, quand bien même celles-ci seraient parfaitement valides :

1. Construire une autre figure F4 (l.67 et 68)

> *68 P : (...) C'est une réponse comme une autre mais ce n'est peut-être pas la bonne. Louis ?*

2. Tracer une droite passant par O (l. 69 à 78)

> *78 P : Ce n'est pas très clair. Alors qui aurait une idée ?*

3. O est le centre de symétrie, il faut tracer une demi-droite [AO) et reporter la distance OA sur cette demi-droite, de l'autre côté de O (l. 79 à 88)

> *88 P : (...) C'est une bonne idée. Qui voit une autre méthode ?*

4. Réinvestir une procédure par pliage (l. 89 à 99)

> *96 P : (...) Alors ça c'est un travail très compliqué.*

Par le biais de ces interactions langagières, l'enseignant oriente fortement les possibilités d'action des élèves, aménageant ainsi de façon très interventionniste le contenu du milieu objectif avec lequel il devront interagir.

L'enseignante introduit finalement le papier calque, modifiant de ce fait considérablement le milieu matériel et le milieu objectif, c'est-à-dire les possibilités d'action des élèves. Après une phase de recherche individuelle, elle met ensuite en place une phase de mise en commun. Elle ne reformule que les procédures attendues, et négocie ainsi, par le biais de ses interventions langagières, le contenu du milieu de référence :

147 P : Voilà, elle calque F1 et elle tourne naturellement. Elle a tourné autour de quoi ?

148 E : Autour de O.

149 P : Autour du point O qui lui est … complètement…

150 E : L'axe de symétrie.

151 E(s) : C'est le centre !

152 P : C'est le centre de symétrie. Bon. Elle a tourné. Mais elle a tourné de combien ?

153 E : 90 ?

154 E : 180 !

155 P : de 180°. Comment vous appelez ça ?

156 E : Un demi-tour.

157 P : Un demi-tour, très bien. Un demi-tour. Un tour complet, ça ferait ?

De ces phases de formulation et de validation l'enseignante construit artificiellement un milieu d'apprentissage, relatif à la phase de conclusion de la séance et l'identification finale du savoir :

159. P : 360°. Inaudible. Oui, un <u>demi-tour</u>. <u>alors voilà l'histoire</u>, pour reproduire cette figure F1 pour qu'elle devienne la figure F3, <u>il faut posséder un point très important, le point O</u>, il faut tourner <u>autour de ce point O,</u> et tourner de 180°, c'est à dire faire <u>un demi-tour</u>. <u>C'est ce que vous allez écrire en bas.</u>

Ainsi, l'analyse a posteriori de cette séance nous montre que d'une part que, du fait de la faiblesse de la situation proposée, le langage constitue bien sûr un lieu central de rétroaction, à la charge de l'enseignant, sous la forme d'effets de contrat, comme nous le laissait présager l'analyse a priori. Mais, cette analyse nous permet également de prendre conscience que les activités langagières autour des actions matérielles inhérentes à la résolution du problème n'ont pas que ce seul rôle : elles participent fortement de la constitution des milieux matériels, objectifs, de référence avec lesquels les élèves interagissent tout au long du processus de résolution de la situation. L'étude des aménagements imposés par la faible qualité du milieu montre que le langage de dévolution ne se borne pas, par exemple, à l'explicitation du milieu matériel de la situation mais il peut aussi le préciser, voire orienter son interprétation ; que le langage accompagnant les actions matérielles est également un lieu de négociation du rapport aux figures et des modalités d'action matérielle partagé ; que les activités langagières sont ainsi un lieu de constitution – en cohérence avec la situation, ou de manière artificielle – des milieux objectif, de référence puis d'apprentissage. L'analyse des mots utilisés par les élèves, par l'enseignante, de la signification qu'ils assignent à ces mots – en mettant en relation leur emploi et les objets ou actions matérielles qu'ils désignent, nous permet de caractériser le contenu des différents niveaux de milieu avec lesquels les élèves interagissent de façon effective. Cette analyse nous donne ainsi des outils pour repérer la coexistence de milieux objectifs différents ou encore des incohérences dans l'articulation d'un niveau de milieu à un autre. Elle nous livre également des pistes afin de mieux comprendre les ressorts de la dynamique de changement de milieu dans une situation donnée.

CONCLUSION

La mise en fonctionnement du modèle de structuration du milieu, parce qu'il permet une analyse fine des interactions entre l'élève et le milieu, nous livre des outils pour avancer dans la compréhension de ce qui se joue dans les activités langagières autour de la résolution de problème en classe de géométrie. Ainsi, la mise en regard de l'analyse *a priori* de la situation et de la transcription du déroulement effectif de la séance nous a amené à pointer différentes fonctions et analyses possibles du langage. Nous avons pu mettre en évidence deux aspects fondamentaux du rôle du langage dans la dynamique d'enseignement et d'apprentissage observée. Les interactions langagières se sont d'une part avérées constituer un lieu privilégié d'orchestration du jeu d'apprentissage sous-jacent à cette dynamique. D'autre part, l'analyse menée en termes de structuration du milieu nous a permis d'identifier l'activité langagière des élèves et de l'enseignant comme partie prenante et moteur du jeu sur les objets et savoirs géométriques mobilisés par la résolution du problème – ou jeu épistémique. Cette analyse nous semble donc livrer des pistes pour penser l'étude simultanée des actions matérielles et des activités langagières des élèves, comme structurant l'activité géométrique des élèves. Cependant, s'il est possible de dresser ces analyses *a posteriori*, ceci constitue la limite de cette analyse, dans la mesure où les synergies entre action et langage ne sont pas anticipées théoriquement. Avancer dans la compréhension de ce qui fait du langage autour des objets et actions matériels un moteur de ces jeux nous semble ouvrir des perspectives de travail qui, à terme, pourrait permettre d'inclure la gestion du langage dans l'analyse a priori, comme composante intégrante de la situation.

Références

Assude, T., Mercier, A. Sensevy, G. (2007). L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27/2, 221-252.

Brousseau, G. (1986). La relation didactique : le milieu, *Actes de la IVème École d'Été de didactique des mathématiques*, IREM Paris 7, 54-68.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : la Pensée Sauvage.

Bulf, C. (2008). Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège, thèse de Doctorat, Université Paris Diderot.

Bulf., C., Mathé, A.-C., Mithalal, J., Wozniak, F. (2012, à paraître). Le langage en classe de Mathématiques : quels outils d'analyse en didactique des mathématiques in : Bronner et Al. (2012, à paraître) Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. Grenoble : la pensée sauvage.

Bulf., C., Mathé, A.-C., Mithalal, J. (2011). Language in geometrical classroom**,** *Proceeding of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 7)*, Conference European of Research in Mathematics Education à Rzeszow (9th -13th Feb. 2011)Poland, 649-659.

Bulf., C., Mathé, A.-C., Mithalal, J. (2010). Le langage : quelle composante de l'Espace de travail Mathématique? *Symposium Franco-Chypriote*, *Université Paris 7, document de travail non publié.*

Grenier, D. (1989) Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième. Thèse de doctorat, Université Grenoble 1.

Jaubert, M. (2007). Langage et construction de connaissances à l'école – un exemple en sciences, Pessac : Presse Universitaire de Bordeaux.

Margolinas, C. (2004) Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques, note de synthèse (HDR) Université de Provence.

Margolinas, C. (2003). Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques, *Colloque pluridisciplinaire « construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement »,* Bordeaux.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations in : Margolinas, C. (1995) Les débats de didactique des mathématiques, Grenoble : La pensée sauvage.

Mathé, A.-C. (2012). Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en géométrie*, Recherches en didactique des mathématiques* (vol. 32/2, pp.195-228), Grenoble : La pensée sauvage.

Rebière, M. (2012 à paraître). S'intéresser au langage dans l'enseignement des mathématiques, pour quoi faire ? Présentation de quelques concepts développés par le groupe de didacticiens du français de Bordeaux, in : Bronner et Al. (2012 à paraître)

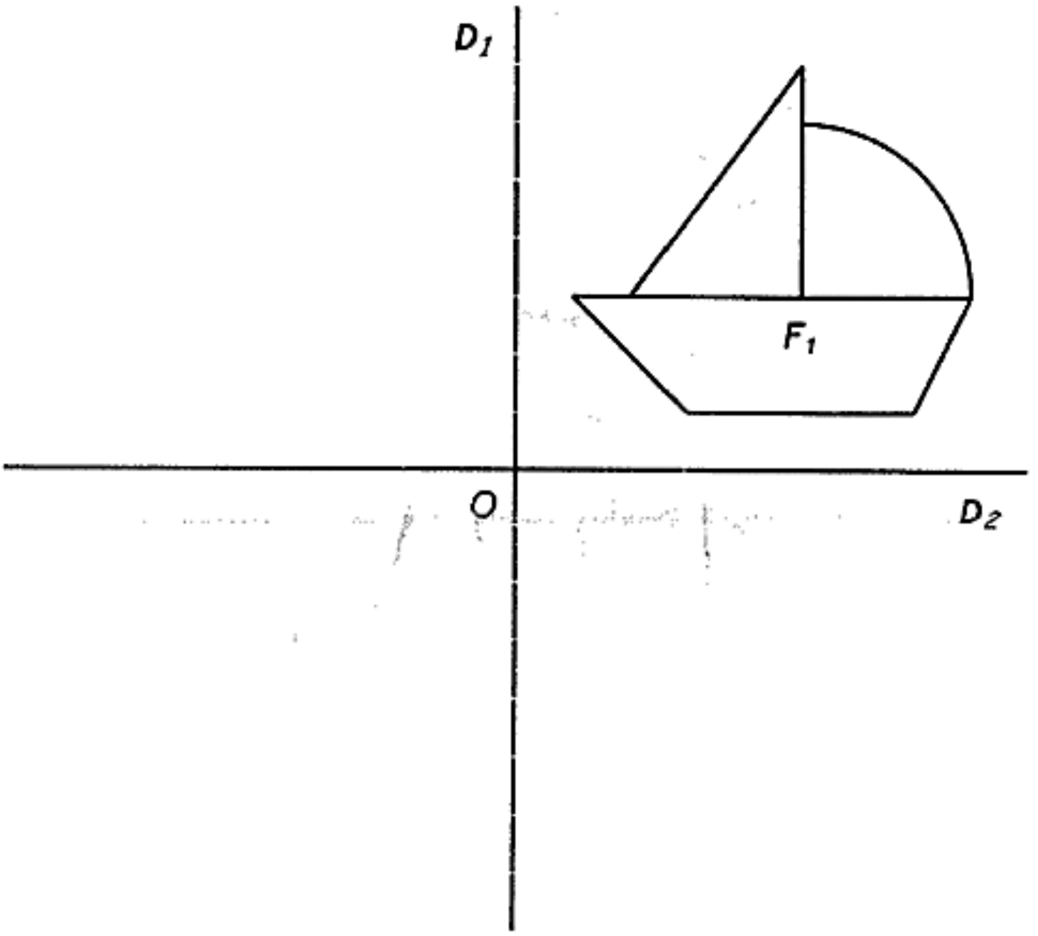
Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage. Grenoble : la pensée sauvage.

Sensevy, G. (2011) *Le sens du savoir*, Bruxelles : De Boeck.

ANNEXE 1 : ACTIVITÉ « BÂTEAU » - FICHE ÉLÈVE

- Construire en rouge la figure symétrique de F_1 par rapport à la droite D_1. La figure obtenue s'appelle F_2.
- Construire en vert la figure symétrique de F_2 par rapport à la droite D_2.
  La figure obtenue s'appelle F_3.

(Conseil : commencer au crayon de bois puis repasser en couleur après que le professeur ait vérifié.)



Question :

Comment peut-on passer directement de la figure F_1 à la figure F_3 sans faire intervenir la figure F_2 ?

ANNEXE 2 : TRANSCRIPTION

Première séance du 08 janvier 2007 de 10h30 à 11h30. Activité « Bateau ».

1 P : On va commencer par un petit rappel de ce que vous avez fait l'année dernière. Je vais donc vous donner un premier document. Et nous allons voir ensemble [inaudible]. Vous lisez la consigne et on en parle dans 2 minutes. Surtout vous ne collez rien pour l'instant.
(…)
2 P : Bon alors sur ce document, qu'est-ce que vous voyez ? Je vous écoute. Lamine ?
3 E : Un axe de symétrie.
4 P : Un axe de symétrie.
5 P : Tu es sûr ? Comment tu peux savoir que c'est un axe de symétrie ?
6 E : Car on doit reproduire la même figure.
7 P : D'accord donc tu as bien lu la consigne. Donc tu as un axe de symétrie. Yann ?
8 [Inaudible]
9 [P relit la consigne en accentuant sur certains mots]
P : Voilà la question : Construire en rouge la figure symétrique … de F1… par rapport à la droite D1. La figure obtenue s'appelle F2. [Inaudible]. Puis 2e consigne, construire en vert la figure symétrique de F2 par rapport à la droite D2. D'accord ? La figure obtenue s'appelle F3. Conseil : Vous commencez au crayon, puis vous repassez en couleur. Allez-y. La photocopie étant ce qu'elle est, si vous voyez 1,1 cm, c'est 1 cm. Vous avez besoin d'une équerre, d'une règle, éventuellement d'un crayon, d'un stylo pour repasser, d'un compas. À vous de jouer. Vous laissez les traits de construction.
10 [Inaudible]
11 [Les élèves sont au travail]
12 P : Vous tracez les traits de construction. [Ton insistant]
13 P : Allez, allez !
14 Inaudible.
15 P : Allez bien au bout de la consigne, vous avez deux schémas à faire.
16 Faites bien ce qu'on vous demande.
17 P : Alors où en êtes-vous ?
18 [En passant dans les rangs, on se rend compte que beaucoup d'élèves reportent les mesures de l'autre côté à la règle graduée, en utilisant l'axe vertical comme repère d'origine et construisent « à peu près » parallèlement à l'axe horizontal. Très peu utilisent l'équerre et encore moins le compas].
19 P : Alors moi je vais vous relire la consigne orale parce que je crois que vous n'avez pas bien ouvert vos oreilles tout à l'heure. Écoutez-moi bien. [Assez fort et lentement en faisant des micro-pauses entre les parties de phrases] Construire en rouge la figure symétrique de F1 … par rapport à la droite D1… La figure obtenue s'appelle F2… 2e consigne. Construire en vert la figure symétrique de F2… par rapport à la droite D2. On est bien d'accord ? 15 min 20 s.
20 [Pour la deuxième construction, beaucoup d'élèves retournent la feuille pour avoir « l'axe horizontal » à la verticale et donc faire exactement la même construction]
21 P : Alors peut-être ça serait bien de se rappeler comment on fait pour tracer le symétrique d'un point. [Inaudible]. Alors on a une droite D1 [au tableau P trace une droite D1 verticale]. Alors qui pourrait me donner un moyen de tracer le symétrique d'un point par rapport à l'axe ? [Est également tracé un triangle quelconque du côté droit] Jonas ?
22 E : Par exemple, on prend le point B.
23 P : Le point B. On le prend où ? Viens le faire.
24 E : On met le compas. [Jonas vient au tableau]
25 P : Regardez bien la solution de Jonas. C'est une solution.
26 [Jonas pointe le compas sur B puis trace deux arcs de cercle sur D1 et reporte deux autres arcs de cercles de mêmes mesures à partir de ces deux arcs de cercle de l'autre côté, et on obtient le point B.]

27 P : On pourrait l'appeler B'. Bon alors c'est très bien. Vous avez vu comme c'est rapide au compas ? Qui aurait une deuxième proposition ?
28 E : [inaudible]
29 P : Tu utilises une équerre.
30 E : [Inaudible]
31 P : Oui mais tu la places de quelle manière ?
32 E : [Inaudible] (…) on place le O sur l'axe.
33 P : Mais alors ça sert à rien de prendre une équerre, tu t'en sers pas vraiment. Oui Zacharie ? [En effet E a reporté les mêmes mesures mais sans se servir de l'angle droit ni tracer de droite]
34 P : [Inaudible] (…) il faut tracer la perpendiculaire.
35 P : Qu'est-ce qu'il fait là ? Comment ça s'appelle ? Il trace la perpendiculaire et il se met de l'autre côté. Qu'est-ce qu'il fait ?
36 E : Il trace le symétrique.
37 E1 : Oui mais comment ça s'appelle ?
38 P : Ça s'appelle comment de se placer de l'autre côté ? Comment ça s'appelle quand on trace un morceau et qu'on trace l'autre morceau de l'autre côté. On dit que l'on … p…
39 E : Prolonge.
40 P : Prolonge. On prolonge de l'autre côté, il reste donc bien perpendiculaire à la droite D1 de l'autre côté. Et ensuite, qu'est-ce que tu fais comme travail ? On dit que l'on … y a un mot aussi pour ça. On dit que l'on …
41 (…)
42 P : Alors ! Quand tu mesures quelque chose et que tu le … de l'autre côté. On dit que l'on … rep …
43 E : Reproduit.
44 P : Non pas reproduit, on le…
45 P : On le … reporte. On le reporte de l'autre côté.
46 P : Tous vos points doivent être transformés comme ça, on est bien d'accord. Alors une fois que vous avez fait ce travail, vous devez faire exactement le même par rapport à D2 en partant de quelle figure géométrique ? Quelle est la figure de départ ?
47 E(s) : …
48 P : C'est ? F2 pas F1. Donc vous repartez avec la figure obtenue … par rapport à D2.
49 [En passant dans les rangs, on constate à cause du rappel que beaucoup d'élèves reprennent le compas mais lors du report de l'autre côté, ils pointent sur l'axe, toujours à peu près]
50 P : Ok, très bien.
51 P : Qu'est-ce que tu attends ? Et pourquoi tu n'en as pas ?
52 P : Tu n'as pas fait ça l'année dernière ?
53 P : Tu écris ta réponse au crayon.
54 P : … ne sait pas lire. Par rapport à la droite D2.
55 P : Alors quand vous avez fini … [Inaudible].
56 P : Alors, [inaudible]. La première transformation consiste à transformer la figure F1 en une figure F2 par rapport à l'axe D1. On est d'accord ? Vous savez faire et ce que vous avez appelé l'année dernière symétrie axiale. Vous avez vu des techniques pour reproduire des points. 2e étape, vous devez reproduire la figure F2 par rapport à l'axe D2 qui est tracé sur la feuille. Je vous signale quand même, ce n'est pas anodin, que les deux axes sont perpendiculaires. [Inaudible]. Qui s'est trompé ? Elle doit être par là votre figure. [2 élèves se sont trompés de côté].
57 [Inaudible]. Vous devez obtenir ça.
58 [P passe dans les rangs]
59 P : Bon alors moi j'aimerais bien voir avec ceux qui ont terminé ce schéma. Est-ce qu'ils sont capables de répondre à la question ?

60 E : [Inaudible]
61 P : Je n'entends rien.
62 E : Comment peut-on passer directement de la figure F1 à la figure F3 sans faire intervenir la figure F2 ?
63 P : Comment peut-on passer directement de la figure F1 à la figure F3 ? Qui a une idée ?
64 [Un doigt levé]
65 P : Une seule personne. Deux. [Quelques secondes] Et les autres, vous ne voyez pas comment on peut faire ?
66 P : Alors qu'en penses-tu ?
67 E : On pourrait faire une figure F4 ?
68 P : C'est ton avis ? On est en train de travailler sur F1 et sur F3 et toi tu dis qu'il faut en faire une 4e ? C'est une réponse comme une autre mais ce n'est peut-être pas la bonne. Louis ?
69 E : Avec un trait oblique.
70 P : Avec un trait oblique ?
71 E : Une droite oblique.
72 P : Tu vas nous expliquer ça plus clairement parce qu'on ne comprend pas ce que ça veut dire.
73 E : On passe par O, et puis … euh.
74 P : Et cette droite oblique passant par O, ça nous donnerait quel résultat ?
75 E : C'est faux.
76 P : Non je n'ai pas dit ça, mais qu'est-ce que tu ferais ? Comment ferais-tu pour trouver les points images ?
77 E : [Inaudible].
78 P : Ce n'est pas très clair. Alors qui aurait une idée ? Sans passer par F2. Mathilde ? On imagine que F2 n'existe pas. Qu'est-ce qu'on fait ?
79 E : Ben le point O c'est le centre de symétrie.
80 P : Le point O c'est le centre de symétrie. Mais on n'a jamais appris le symétrique qui passe par O. Tu es d'accord ? Donc toi tu parles d'une symétrie avec un point O important, alors comment tu fonctionnerais ?
81 E : Ben on regarde la distance entre le point O et … euh … le …
82 P : Ben nomme un point. Par exemple le point A.
83 E : Ben on calcule la distance entre le point O et…
84 P : On ne calcule pas.
85 E : Ben on mesure la distance entre le point O et le point A et on reporte la même distance.
86 P : On reporte la même distance ?
87 E : De l'autre côté du point O.
88 P : De l'autre côté du point O. Sur une demi-droite qui partirait de A, passerait du point O et de l'autre côté du point O. C'est une bonne idée. Qui voit une autre méthode ? Souvenez-vous de ce que vous avez fait l'année dernière.
89 P : Personne ne trouve une autre méthode ? Oui. Clément ?
90 E : Si on plie la feuille.
91 P : Alors ça c'est une idée intéressante. L'année dernière, on avait plié la feuille. Alors si on plie la feuille, est-ce que ça va marcher ?
92 E(s) : Oui.
93 E : Il faut plier la feuille et après il faut trouer avec le compas.
94 E(s) : Non, ça va pas marcher.
95 E : Il faut plier par le point O.
96 P : Alors il faut plier par le point O. Alors ça c'est un travail très compliqué.
97 E : Il faut tracer un autre axe de symétrie.
98 P : Tracer un autre axe de symétrie…
99 [Légère agitation]

100 P : Et si je vous distribuais un morceau de papier calque ?

101 E : Ça serait pas mal.

102 P : Ça serait pas mal ?

103 Alors je vais vous donner un morceau de papier calque et vous essayez de trouver un moyen pour reproduire très facilement votre figure. Allez. On plie en 4. Vous pliez en 4 le calque.

104 Alors qui n'a pas de papier calque ?

105 Voilà. [P passe dans les rangs] Ah y a de bonnes idées. (…) ça vient. Les idées arrivent. (…) Alors vous partez de F1. Donc vous décalquez F1. Et vous vous débrouillez pour obtenir F3.

106 Vous décalquez et vous vous débrouillez pour me montrer comment faire.

107 [En passant dans les rangs, on remarque que Jonas pointe son doigt sur le point O avec le calque en dessous et le retourne comme une page en diagonale de F1 à F 3. Mathilde fait un double retournement du calque. Un autre élève calque le repère orthogonal et retourne 2 fois en cherchant la position du repère calqué centré en O. D'autres élèves font des demi-tours mais sans se servir de O.]

108

109 P : Alors, qu'est-ce que tu as fait ?

110 [Inaudible]

P : As-tu trouvé ? Explique-moi correctement ?

111 E :[Inaudible]

112 P : Ah, très bien ! On retourne la feuille de quelle manière ?

113 P : Vous avez vu ce qu'il a fait ? Il a retourné sa feuille. Voilà, d'accord, bonne idée. Alors.

114 P : Qu'est-ce que tu fais avec ton calque ? Vous n'utilisez pas les éléments de votre dessin. Oui ? Juliette.

115 E : On renverse.

116 P : Oui, on renverse. C'est renversant cette histoire.

117 [Inaudible]

118 P : Vous dessinez l'axe de symétrie ?

119 P : Y en a qui ont très très bien trouvé. Qui ont trouvé le truc.

120 P : Ah il faut une fenêtre. D'accord. Si on n'a pas de fenêtre, on ne peut pas travailler.

121 [Inaudible]

122 E : On retourne.

123 P : Alors Roxane, tu peux nous expliquer ?

124 [Inaudible]

125 P : comment faire pour retourner ?

126 E : On fait un tour.

127 P : On fait un tour, un tour complet ?

128 E : Non, trois quarts de tour.

129 P : Qu'est-ce qu'on fait ?

130 E : On renverse.

131 [Plusieurs doigts se lèvent, léger brouhaha.]

132 P : Comment faire pour que ça ne soit pas libre. Parce que là votre feuille se promène et ce qui me gêne c'est que ça se promène partout. Thomas.

133 E : On le prend, on le reporte et si on appuie très fort dessus ça fait une empreinte.

134 P : Et ton empreinte tombe par hasard extraordinairement pile là où elle doit être ? Alors là … Zacharie ?

135 E : [inaudible] (…) le point O.

136 P : Oui. On représente le point O.

137 E : Et on retourne la feuille.

138 P : Et on retourne la feuille. Ah ! Jonas ?

139 E : Ben moi je calque sur la figure F1, après avec le compas, je mets le compas sur le point O et sur le calque.
140 P : Ah ! La pointe du compas ? Donc qu'est-ce que tu fais avec ce point O ?
141 E : C'est l'axe.
142 P : C'est l'axe ? Le point O c'est l'axe. C'est un point !
143 E : Oui.
144 P : Un axe, c'est une droite. Et qu'est-ce que tu fais avec ce point avec ton compas dessus ? … Il dit qu'il met le compas sur le point O et après ?
145 E (Andréa) : Après il met le compas sur le point O et il tourne la feuille.
146 P : Vous avez entendu ? C'est là que j'aurais aimé avoir un rétroprojecteur n'est-ce pas …
147 P : Elle calque son schéma, elle bloque, elle reproduit le point O, elle met le calque comme ça. Et qu'est-ce que tu fais ? Quel geste a-t-elle fait ? Elle a tourné son papier calque. [P mime le tout]. Voilà, elle calque F1 et elle tourne naturellement. Elle a tourné autour de quoi ?
148 E : Autour de O.
149 P : Autour du point O qui lui est … complètement…
150 E (Lamine) : L'axe de symétrie.
151 E(s) : C'est le centre !
152 P : C'est le centre de symétrie. Bon. Elle a tourné. Mais elle a tourné de combien ?
153 E : 90 ?
154 E : 180 !
155 P : de 180°. Comment vous appelez ça ?
156 E : Un demi-tour.
157 P : Un demi-tour, très bien. Un demi-tour. Un tour complet, ça ferait ?
158 E : 360°.
159 P : 360°. [Inaudible]. Oui, un demi-tour. Alors voilà l'histoire, pour reproduire cette figure F1 pour qu'elle devienne la figure F3, il faut posséder un point très important, le point O, il faut tourner autour de ce point O, et tourner de 180°, c'est-à-dire faire un demi-tour. C'est ce que vous allez écrire en bas.
160 Vous essayez d'expliquer vous-même ce qu'on vient de dire. Vous essayez d'expliquer par écrit ce qu'on vient de dire. Comme si vous deviez expliquer à quelqu'un. Comme si vous vous adressiez à l'un de vos camarades au téléphone. D'accord ?
161 [Sonnerie]
P : Je récupère les copies.

2e séance du 11-01-07 de 08 h 30 à 09 h 30
162 P : Vous allez prendre votre cahier de cours. [Brouhaha].
163 P : Bon, alors est-ce que vous vous souvenez du travail de l'autre jour ? [Inaudible]. Un bateau. [Inaudible]. Vous deviez reproduire par rapport à l'axe D1, programme de 6e, vous savez faire. On utilise le compas ou l'équerre. Le compas, c'est plus rapide et plus précis à partir d'un point. En traçant deux arcs de cercle, puis deux autres arcs de cercle sans changer l'écartement et vous obtenez le point symétrique. C'est le principe du tracé de la médiatrice. Hein, on est d'accord ? Puisqu'on a des points équidistants et là de la même manière points équidistants. [Inaudible]. Alors vous connaissez. [Inaudible]. La question était : comment peut-on passer de la figure F1 à F3 ? Et quelqu'un nous a proposé de décalquer cette partie là et d'utiliser le point O pour faire tourner le calque. C'est-à-dire que vous avez bloqué le calque avec la pointe du compas et vous avez fait tourner le calque. Vous vous souvenez ? Vous m'avez dit, le calque a fait un demi-tour. Demi-tour ça veut dire ?
164 [P écrit au tableau : le calque fait un demi-tour (180°)]
P : Alors beaucoup de figures géométriques sont reproduites de cette manière. Ce n'est pas du tout la même technique que la symétrie axiale. Alors c'est normal que n'ayant pas du tout la même

transformation des points, nous n'utilisons pas le même mot et comme vous faîtes tourner autour d'un point O. Vous vous souvenez que la symétrie s'appelait comment ? On l'appellera la symétrie centrale. 07 min.

Vous allez prendre une nouvelle page, vous collez votre feuille d'activité sur une page entière, et je veux que vous colliez le calque et que vous fassiez tous cette expérience de demi-tour ! Vous vérifiez bien que ça marche ! Alors symétrie centrale. D'accord ?

165 P : Est-ce que vous connaissez un mot qui signifie que quelque chose tourne autour d'autre chose ? Par exemple, notre planète. Vous savez qu'elle tourne. On est d'accord ? Elle tourne autour du soleil. Comment appelle-t-on le fait que la terre tourne autour du soleil ? On dit qu'elle effectue une…

166 E : Une orbite ?

167 P : Une orbite, oui, mais on dit qu'elle effectue une …

168 E : Rotation.

P : Oui tout à fait. Et bien quand vous faites tourner votre calque, vous effectuez aussi une rotation, une rotation dont l'angle est de…180°. Est-ce que tout le monde a entendu ? Tourner autour de quelque chose c'est effectuer une rotation. Vous collez votre feuille ; vous collez votre calque. C'est donc la première activité et on va passer à la deuxième. Bon alors, 2e activité. […]

SOPHIE RENE DE COTRET

ESPACES DE TRAVAIL / ESPACES DE CONNAISSANCES : PEUT-ON IMAGINER UNE NAVETTE POUR Y VOYAGER ?

RESUME

Ce texte vise à tester la possibilité d'appréhender le phénomène de non usage de savoirs sus, mis en évidence et étudié par la didactique du sens commun, à partir de la notion d'espaces de travail. Il étudie l'hypothèse selon laquelle ce phénomène pourrait être lié au fait qu'un même problème peut être abordé depuis des postures ou des espaces de travail différents, et donc avec des connaissances et des savoirs différents. Admettant cette hypothèse, serait-il possible d'entraîner les élèves à changer volontairement de posture pour se donner accès à différentes visions du problème et, ce faisant, à de nouvelles réponses ?

MOTS CLEFS : Didactique du sens commun, posture, espace de travail, espace de connaissances

1. INTRODUCTION

« *Je le savais mais je n'y ai pas pensé !* » Chacun de nous s'est déjà exclamé cela en regardant une solution simple à un problème qu'on n'arrivait pourtant pas à résoudre correctement. Cette exclamation témoigne de la complexité de l'usage de savoirs sus : on a beau avoir appris des savoirs, on ne les met pas nécessairement à contribution lorsque cela serait utile. Et si cet usage dépendait de la posture depuis laquelle on conçoit le problème ? Ces postures, en fonction des connaissances qu'elles mobilisent, engendreraient des espaces de travail mathématiques différents desquels émergeraient des réponses différentes. Serait-il alors possible de changer volontairement de posture de manière à examiner un problème de plusieurs points de vue ?

Ce texte tente d'étudier ces diverses questions à partir de la didactique du sens commun. Après avoir défini le phénomène de non usage de savoirs sus, nous verrons brièvement quelques hypothèses retenues par la didactique du sens commun pour appréhender ce phénomène. Parmi celles-ci, la posture ou l'espace de connaissances depuis lequel on regarde le problème semble trouver un écho dans la notion d'espace de travail mathématique. Nous tenterons donc, à partir de l'étude de deux traitements d'un même problème, de mettre en évidence deux espaces de travail différents. Enfin, la possibilité de mettre en place un dispositif qui viserait à entraîner les élèves à changer volontairement de posture est questionnée.

2. LE PROBLEME : UN PHENOMENE DE « NON USAGE » DE SAVOIRS SUS

Il y a quelques années, des professeurs de mathématiques de Cégep (enseignement post-secondaire et pré-universitaire au Québec), à qui nous donnions un cours de didactique, ont donné une mauvaise réponse au problème suivant : *Un paquet est formé de cartes ayant toutes une lettre d'un côté et un chiffre de l'autre. Parmi les cartes suivantes* [A] [B] [4] [7], *lesquelles doit-on absolument retourner pour vérifier si la règle « S'il y a un A d'un côté, alors il y a un 4* *de l'autre » est bien respectée?* (Wason & Johnson-Laird, 1972). Bien que ce problème soit connu pour susciter une mauvaise réponse (A et 4, alors que la bonne réponse est A et 7) nous avons tout de même été surpris de constater que ces professeurs, qui connaissaient sans contredit le savoir nécessaire à la résolution du problème et qui l'avaient peut-être même déjà enseigné, se soient laissé prendre. (René de Cotret & Larose 2006) Ce phénomène nous a interpellés et nous avons cherché à recueillir d'autres cas où des personnes ne faisaient pas usage d'un savoir su lorsqu'il aurait pourtant été pertinent qu'ils y recourent. En voici deux exemples.

Le premier exemple est issu d'une recherche en didactique de l'économie dans laquelle Legardez conclut : « *Or, on constate que des savoirs scolaires sont bien enseignés et appris, mais qu'ils restent souvent des savoirs pour l'école et qu'ils sont peu « exportés » vers les savoirs sociaux « citoyens ». Il semble que ces deux genres de savoirs appartiennent à deux mondes qui coexistent sans que des savoirs scolaires interfèrent rapidement et directement avec les savoirs du jeune citoyen* » (Legardez, 2004, p. 660).

Cette citation met en évidence le fait que les savoirs appris à l'école par les élèves de l'étude ne semblent pas sollicités en dehors de la sphère scolaire, notamment dans la sphère sociale ou citoyenne, donnant ainsi une autre illustration du phénomène de non usage.

Un deuxième exemple est lié à une observation faite dans un collège de Marseille en 2006. Dans ce collège, des élèves de quatrième (13-14 ans) participaient, sur une base volontaire, à un atelier mathématique. Depuis quelques mois, afin de répondre à la question *Pourquoi les gros bateaux flottent-ils?*, ils travaillaient sur les boîtes flottantes (Chevallard 1989). Dans ce contexte, ils avaient testé la flottaison de quelques boîtes cubiques de différentes grosseurs, toujours faites du même matériel, puis, par un travail de modélisation, en étaient arrivés à conclure que l'enfoncement dans l'eau est toujours le même quelle que soit la grosseur de la boîte. Ainsi, plus la boîte est grosse plus la partie émergée est haute et donc plus elle flotte. À l'issue de tout ce travail, le professeur a demandé:

« *8h52 Prof : Vous avez maintenant une meilleure idée de pourquoi les gros bateaux flottent ?*
E : ***Il y a du métal autour de quelque chose qui flotte ou fait flotter dedans.***
E : ***Les ingénieurs calculent pour plus grand.*** » (René de Cotret, 2007, p.307)

Ces réponses apparaissent plutôt étonnantes dans la mesure où tout le travail fait sur les boîtes flottantes visait justement à fournir une explication à la flottaison des gros bateaux. Mais il semble que, bien qu'ils aient travaillé plusieurs heures à construire cette explication, ils ne l'ont pas utilisée pour répondre à la question, invoquant plutôt le recours à la pratique comme on peut le voir dans l'extrait ci-dessous :

« *8h40 Prof : On a réfléchi sur une grande quantité de boîtes sans avoir à les fabriquer. On a travaillé et réfléchi sur le modèle. En quoi c'est avantageux ?*
E : Ça enlève du travail
E : Oui, ça enlève du temps. ***Mais c'est la pratique qui prouve plus que la théorie****. Si on le met dans l'eau et qu'il coule !...*
P : Les fabricants de bateaux, ils doivent être de quel côté ? Théorique ou pratique ?
E : Des deux ! » (René de Cotret, 2007, p.307)

On observe ici une autre manifestation du phénomène de non usage d'un savoir su. Un tel phénomène devient un problème à partir du moment où l'enseignement vise à ce que les élèves puissent utiliser de manière pertinente, dans leur vie personnelle ou professionnelle, le savoir qu'ils apprennent à l'école, tel que le préconise le programme de formation de l'école québécoise (MELS 2006).

3. POUR APPREHENDER LE PROBLEME : LA DIDACTIQUE DU SENS COMMUN

C'est pour l'étude de ce type de phénomènes de non usage, qu'avec une petite équipe de recherche, nous avons développé la didactique du sens commun. Notre hypothèse de travail est que, si le savoir scolaire n'est pas mis à contribution pour résoudre un problème, c'est qu'un autre savoir est sollicité, et cet autre savoir pourrait être un savoir de sens commun. Différents exemples de non usage que nous avions répertoriés allaient dans ce sens[1].

Il existe diverses définitions du sens commun, celle que nous avons retenue regroupe des caractéristiques communes à plusieurs : « … *le « sens commun » est un savoir intuitif et immédiat sur ce qui est raisonnable de faire, un savoir qui est culturellement acquis au cours de l'éducation ou de la pratique quotidienne*. » (Gueorguieva, 2002, p.1).

Gonseth (1993) précise notamment que le sens commun est constitué de recettes ou de « prêts-à-penser » comme des proverbes lesquels, selon le contexte dans lequel ils sont utilisés, peuvent apparaître contradictoires. On entendra par exemple une personne dire à un certain moment pour appuyer son propos que *les contraires s'attirent* et, à un autre, elle référera plutôt au fait que *qui se ressemble s'assemble*. On voit que le sens commun est ainsi lié aux intérêts en jeu (Ntagteverenis, 2005) et revêt en ce sens un caractère opportuniste.

3.1 Le sens commun prendrait-il le dessus sur le savoir scolaire appris ?

Nous avons choisi d'étudier le phénomène de non usage à partir de l'hypothèse selon laquelle souvent, dans le traitement de problèmes non strictement scolaires, la dynamique entre les savoirs de sens commun et les savoirs scolaires appris témoignerait d'une mainmise des savoirs de sens commun sur les savoirs scolaires. Pour ce faire nous avons développé deux volets de recherches. Le premier vise à développer des outils permettant de décrire la dynamique entre ces savoirs et, le second, à faire en sorte que les élèves développent une clochette de vigilance ou, en d'autres termes, s'arrêtent dans leur action de sens commun pour consulter leur savoir scolaire. Ce deuxième volet a ainsi pour objectif *l'importation* du savoir scolaire par la sphère du quotidien, et ce, en complément de travaux qui, partant souvent du sens commun pour le faire évoluer vers le savoir scolaire, visent plutôt *l'exportation* du savoir scolaire ainsi appris dans le quotidien.

Des expérimentations menées dans le cadre du deuxième volet de recherche nous ont montré que, bien qu'ils disposent du savoir nécessaire pour résoudre correctement un problème, des élèves produisent une réponse fausse tout en étant certain qu'elle est correcte. Ainsi non seulement y a-t-il un problème de non usage du savoir utile mais aussi un problème d'usage de faux ou de mésusage avec certitude.

À titre d'exemple, le problème suivant *Un bâton de base-ball et une balle coûtent 1,10$ au total. Le bâton coûte 1$ de plus que la balle. Combien coûte la balle?* (Kanheman, 2004) auquel 65 des 88 élèves de 13 à 18 ans interrogés ont donné une réponse fausse (0,10$) dont 57 (soit 65% des répondants) en étant certain qu'elle était juste (René de Cotret & Larose 2006). Ces élèves se sont par ailleurs étonnés lors de la correction (la bonne réponse étant 0,05$) de ne pas y avoir pensé,

[1] Pour plus d'exemples de ce phénomène de non usage, voir René de Cotret 2011.

témoignant par là qu'ils disposaient des connaissances nécessaires à la résolution et auraient possiblement été en mesure de fournir la bonne réponse. Bien sûr ce problème peut être vu comme un piège et la réponse fausse pourrait avoir été donnée par inadvertance, mais il n'en reste pas moins que 57 des 65 élèves qui ont produit une réponse fausse (soit 87% des réponses fausses) ont tout de même dit être certains de la justesse de leur réponse.

Ces élèves ont donc su voir le problème de deux façons différentes, mobilisant dans chacune des connaissances et des savoirs différents. Il semble toutefois qu'il n'y ait pas une dynamique dans laquelle un savoir l'emporterait sur l'autre comme nous l'avions envisagé au départ, mais ce ne serait simplement pas les mêmes savoirs qui sont sollicités par les conceptions du problème vécues par l'élève à chacun des moments.

Ces études, en conjonction avec celles du premier volet, nous ont ainsi amenés à modifier notre hypothèse initiale pour retenir, non pas une opposition ou une hiérarchie entre les savoirs scolaires appris et les savoirs de sens commun, mais plutôt une posture différente du sujet, au sein de son espace de connaissances, en fonction de sa façon de concevoir le problème à un instant donné ; cette façon de concevoir pouvant être influencée par le contexte du problème et le choix des valeurs de certaines variables didactiques.

3.2 S'agirait-il plutôt d'une question de posture ?

Le fait qu'un élève puisse concevoir un même problème de plus d'une façon, selon la posture depuis laquelle il l'aborde, conduit à questionner le concept de milieu. En effet, si un même problème donne lieu à deux conceptions peut-on alors parler *du* milieu, ne devrait-on pas plutôt considérer plusieurs milieux pour un même problème selon la vision qu'en a l'élève, selon la posture adoptée ?

- Définition de milieu et d'environnement

C'est en nous inspirant de travaux de Maturana & Varela (1994) que nous avons choisi de définir le milieu comme ce à quoi est sensible l'élève ou le sujet (René de Cotret 1998,1999). Bien que cette définition soit compatible avec le système antagoniste de l'élève auquel réfère Brousseau (1998), elle s'en distingue, notamment par le fait qu'elle oblige à se demander « le système antagoniste tel que vu par qui ? ». La prise en compte de l'observateur apparaît alors essentielle.

Le milieu, selon notre définition, n'est pas quelque chose de soumis à l'élève mais plutôt un couplage entre ce qui est proposé à l'élève et ce qu'il en conçoit. Le milieu ne peut donc être objectif, il est nécessairement relatif à l'élève puisqu'il se définit comme ce à quoi cet élève est sensible. Et cette sensibilité est liée aux connaissances disponibles et mobilisées à ce moment par l'élève. Ainsi, on ne peut dire a priori si tel élément fait partie du milieu. Il en fera partie si l'élève, dans son interaction, est sensible à cet élément. La description du milieu est ainsi contrainte à rester en compréhension. Dès qu'un observateur décrit les éléments qui constitueraient le milieu d'un élève, il observe nécessairement depuis son point de vue, celui construit par ses connaissances, et cette description nous l'appellerons environnement. La prise en compte de l'observateur appelle donc la nécessité de distinguer milieu et environnement. Nous définissons l'environnement comme la description que fait un observateur du milieu d'un élève ou d'un sujet.

Cette façon de concevoir le milieu conduit à repérer différents milieux pour une même tâche au sein d'une classe. Les notions de bifurcation didactique (Margolinas 2004) et de conduite atypique (Giroux 2008) mettent en évidence, chacune à leur façon, ce caractère relatif du milieu.

Par ailleurs, au fur et à mesure des interactions de l'élève avec son milieu, des modifications du milieu peuvent se produire puisque les rétroactions risquent d'engendrer un nouveau regard sur le phénomène étudié et donc un nouveau milieu. En d'autres termes, l'espace de connaissances découpe un milieu lequel mobilise ou sollicite un espace de connaissances ; il y a en quelque sorte une co-construction du milieu et de l'espace de connaissances mobilisé. Le milieu apparaît alors non seulement relatif mais aussi instantané car modifié au fur et à mesure du travail. Il y a donc un milieu relatif au sujet à un moment donné selon sa posture ou sa position dans son espace de connaissances.

- La posture depuis laquelle on conçoit le problème

À partir de cette conception du milieu, on peut décrire la dynamique entre la savoir scolaire appris et le savoir de sens commun comme une question de posture, de position dans l'espace de connaissances. Nous appuyant sur les travaux de DeBlois & Squalli (2002), qui ont distingué les postures d'ancien élève, d'étudiant universitaire et d'enseignant depuis lesquelles de futurs maîtres analysent des erreurs d'élèves, nous proposons comme définition de travail que la posture serait le rôle depuis lequel le sujet aborde une question, ce rôle sollicitant alors un certain ensemble de connaissances et pouvant changer selon le contexte pour une même question. Il y aurait donc ici une différence avec la posture stable ou « *mobilisée quel que soit le contexte* » qu'évoque Lhoste (2008, p.391). Notre définition se conjugue par ailleurs à l'idée de représentation définie par Reuter et al. pour « *parler de des systèmes de connaissances qu'un sujet mobilise face à une question ou à une thématique* ». On peut aussi y voir un rapprochement avec la position de Schoenfeld relativement à la résolution de problème, lorsqu'il dit : « *an individual enters into a particular context with a particular body of knowledge, goals, and beliefs; what is considered to be relevant and appropriate knowledge to employ toward achieving those goals is shaped by the individual's beliefs. For example, a student may react to a question from a teacher one way, because he or she expects the teacher to expect a formal mathematical argument in response to the question. The same question from a peer might trigger a different (and equally mathematical but informal) response* » (2006 p 48-49).

Ainsi, nous proposons que la situation déclenche une posture du sujet, c'est-à-dire qu'il verra les choses depuis un certain espace de connaissances, même s'il dispose par ailleurs d'une autre configuration de connaissances qui lui permettraient de voir différemment, tel que nous l'avons vu avec le problème de la balle et du bâton. Si l'on accepte que la posture du sujet définit d'une certaine façon un espace de connaissances et de savoirs, en quoi le fait d'agir selon une posture ou une autre, par exemple en tant qu'élève ou en tant qu'enfant, viendra-t-il modifier les savoirs sollicités et, en conséquence, la façon de valider le résultat ?

Soit le problème suivant : Maurice veut acheter une petite balle qui coûte 0,95$. Il a dans sa poche trois pièces de 0,25$, une pièce de 0,10$ et cinq pièces de 0,05$. Quelles pièces devra-t-il donner au marchand pour acheter la balle ? Imaginons que le petit Maurice-enfant va au magasin pour acheter la balle, il adopte alors une certaine posture. Dans ce cas, il pourrait simplement mettre toutes ses pièces dans sa main et demander au marchand de prendre les pièces nécessaires pour acheter la balle, stratégie généralement efficace et bien connue des petits enfants. Par ailleurs, Maurice-élève adoptera une autre posture s'il doit résoudre le même problème en classe, sans que les pièces ni le marchand ne soient réellement disponibles. Il sollicitera alors possiblement ses connaissances sur les nombres décimaux et les opérations arithmétiques. Dans chacun des cas, la façon de valider sera différente. Dans la premier cas la validation est pragmatique : Maurice revient à la maison avec sa balle, il a donc donné les pièces qui convenaient ; dans le second la validation est plus théorique et fait appel aux connaissances mathématiques sur les nombres et les opérations. Cet exemple illustre deux traitements que peut engendrer une question apparemment semblable posée dans des contextes différents, témoignant par là de postures différentes. Selon le cas, ce n'est pas le même Maurice, le même sujet « connaissant », qui résout le problème ; il démontre de multiples personnalités (René de Cotret 2012). Pourrait-on dire que dans chacun des cas l'espace de travail est différent ? C'est ce que nous allons tenter d'analyser.

3.3 À chaque posture son espace de travail et de connaissances ?

Nous proposons qu'un même libellé de problème peut donner lieu à des façons différentes de le prendre en compte selon la posture adoptée ou l'espace de connaissances dans lequel le sujet se situe lors de son interaction avec le problème. C'est cet espace de connaissances qui déterminera le milieu avec lequel l'élève interagit dans une co-construction. Nous allons tenter de regarder quels espaces de travail spécifiques, et du coup quelles postures, pourraient correspondre à deux façons d'aborder un même problème, celui de la corde de balançoire. Bien que ces deux façons soient imaginées, on peut facilement penser qu'elles pourraient s'actualiser en classe ou dans le quotidien. Il s'agit donc d'une tentative, soumise à la discussion, qui vise à étudier le potentiel de l'espace de travail pour appréhender le phénomène de non usage.

- Le problème de la balançoire: une question, plusieurs réponses !

« *Wim voudrait fabriquer une balançoire et l'installer sur la branche d'un arbre gros et vieux. La branche se trouve à une hauteur de 5 mètres. Wim a déjà fabriqué un siège en bois qui convient très bien à sa balançoire. Maintenant, il va acheter de la corde. Combien de mètres de corde faudra-t-il qu'il achète ?* » (De Corte et Verschaffel, 2002, p. 8-9[2])

FIGURE 1. Exemple d'énoncé de problème figurant dans la leçon sur l'heuristique intitulée : « Sers-toi de ta connaissance du monde réel »

[2] Le dessin et sa légende font aussi partie de la citation, ils sont reproduits exactement tel qu'ils apparaissent dans le texte original.

Essayons de rendre compte de l'espace de travail géométrique de ce problème[3] destiné à des élèves de 5e année du primaire.

Au plan épistémologique, on peut considérer que l'espace réel et local est constitué principalement de l'esquisse fournie avec le problème, celle-ci illustrant l'arbre et la branche destinée à accueillir la balançoire, de même que le siège tenu par le petit garçon. Ce dernier détail est important puisque la longueur de la corde nécessaire dépend de la façon dont elle sera fixée au siège de la balançoire ; le fait qu'il y ait quatre trous dans la planche donne des indications en ce sens.

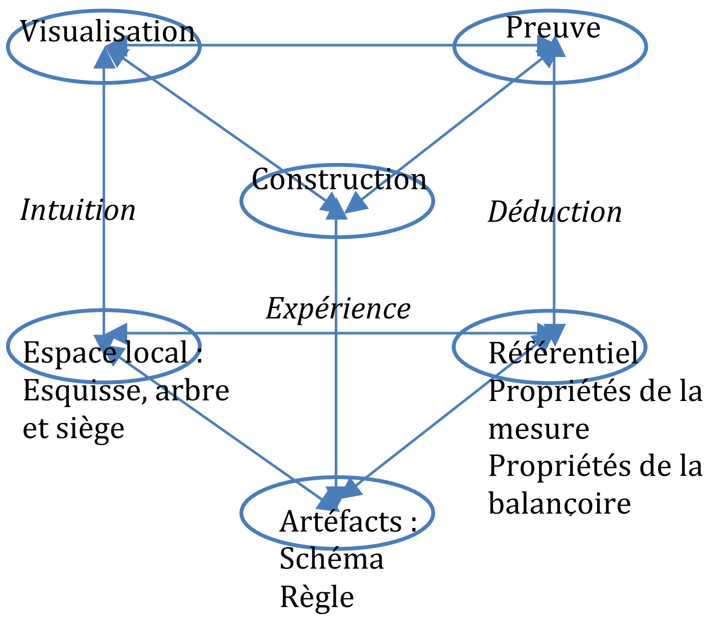


Schéma 1 : Espace de travail géométrique pour une communauté scolaire

Les artéfacts ou les instruments utiles à la résolution du problème pourraient être une règle graduée, laquelle permettrait de tracer un schéma à l'échelle (l'esquisse ne l'était pas), et le schéma lui-même, ce dernier permettant d'effectuer des « expériences » pour placer la balançoire.

La description de ce que pourrait comporter le référentiel, c'est-à-dire le « *système théorique de référence basé sur des définitions et des propriétés* » (Kuzniak, 2011 p.13) nous apparaît beaucoup plus délicate puisque pour cela il faut savoir dans quel paradigme on se situe. En effet, comme le dit Kuzniak :

« *Ces composantes* [l'espace réel, les artéfacts et le référentiel] *ne sont pas juxtaposées, elles doivent être organisées avec un but déterminé ; qui va dépendre du domaine mathématique dans sa dimension épistémologique* […] *Dans notre cadre théorique, la notion de paradigmes oriente et structure l'organisation de ce premier niveau.* […] *Le fait pour une communauté d'individus de s'accorder sur un paradigme donné pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines manières de pensée, ce fait débouche sur ce que nous conviendrons d'appeler l'ETG de référence.* » Kuzniak 2011, p. 14

Dans ce problème, quel est le paradigme, quelle est la communauté ? La notice au bas de la figure 1 précise que ce problème a été donné dans une leçon sur l'heuristique intitulée : « Sers-toi de ta connaissance du monde réel » ce qui donne une certaine indication sur le paradigme et la

[3] Bien que ce problème ne soit pas des plus riches au plan géométrique, il a l'avantage d'être simple et de permettre tout de même de mettre en évidence deux espaces de travail différents selon les postures adoptées.

communauté en jeu, soit, mais jusqu'où doit-on référer à sa connaissance du monde réel ? Voyons deux cas possibles.

Si on regarde le problème d'un point de vue d'une communauté scolaire, le référentiel pourrait être formé des propriétés de la mesure de même que des propriétés d'une telle sorte de balançoire lesquelles pourraient provenir de la connaissance du monde réel : on sait que la balançoire au repos doit être assez haute pour qu'une fois assis les pieds ne touchent pas le sol et assez basse pour pouvoir s'y asseoir facilement. L'espace de travail n'est ainsi pas strictement géométrique, il inclut une certaine « connaissance du monde réel ».

Par ailleurs, si on se situe dans une autre communauté (familiale, citoyenne, commerciale) le problème effectif auquel on aura à faire face pour fixer la balançoire entraîne un lot de questions lequel pourrait complexifier le référentiel selon les contraintes retenues. En effet, on se demandera par exemple : quel serait le diamètre de la corde ? celui-ci ayant un effet sur la longueur de corde nécessaire pour faire les nœuds ; quel type de nœud serait adéquat ? est-ce que le frottement de la corde sur la branche est à prendre en compte ? et si oui, comment ? peut-on simplement faire passer les deux cordes par-dessus la branche, une telle configuration permettra-t-elle un bon mouvement de balancier ? serait-il préférable de faire un tour et demi pour éviter le frottement ? quelle est la circonférence de la branche ? des œillets permettraient-ils un balancement plus souple ? la branche est-elle parallèle au sol ? sinon, comment ajuster la longueur des cordes ? On peut aussi, de manière très pragmatique, éviter toutes ces questions en demandant simplement comment faire au vendeur ou encore en achetant le gros rouleau de corde en rabais cette semaine-là ! On sera sûr d'en avoir assez et de la corde, c'est toujours utile !

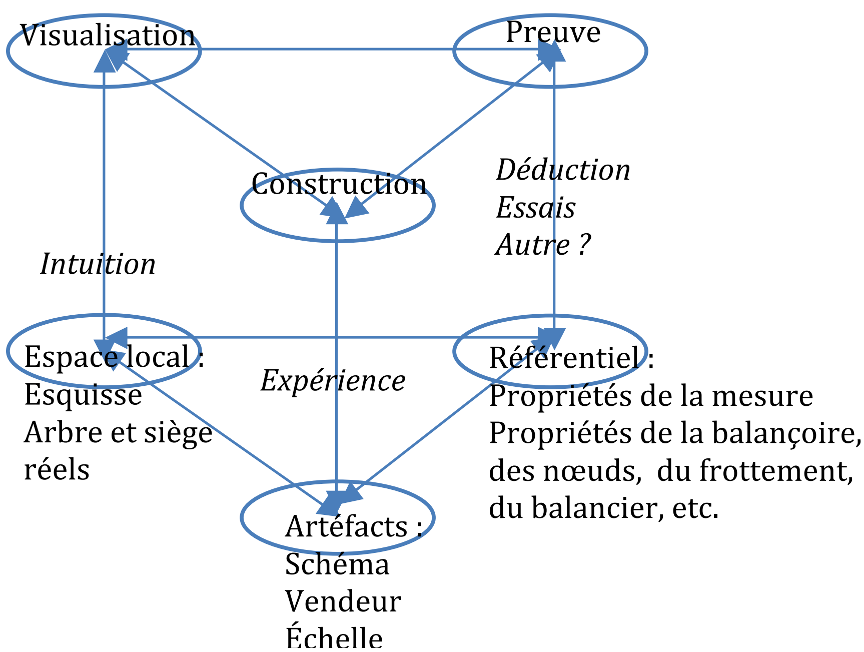


Schéma 2 : Espace de travail géométrique pour une communauté familiale

On voit que les réponses à ces questions sont nécessaires pour décrire le référentiel dans lequel on conçoit le problème et, en conséquence, pour juger de la validité de la réponse. En retour, le référentiel défini aura une incidence sur les éléments de l'ETG et donc, au plan cognitif, sur l'activité de l'élève, notamment sa représentation du problème, les outils auxquels il fera appel et les expériences qu'il pourra mener. En particulier, la démarche de validation, à laquelle réfèrent

Coutat et Richard (2011) comme étant la face Preuve-Construction-Artéfacts-Référentiel du prisme sera nettement différente selon le référentiel retenu. En effet, le référentiel semble présider au travail car il est le garant (ou la référence) de la validité du travail mené.

Dans le premier cas, celui de la communauté scolaire, la validation se fait via les propriétés de la mesure et des opérations mathématiques, après avoir déterminé une hauteur convenable pour le siège de la balançoire, disons 1m. On aura alors 5m-1m=4m entre la branche et le siège. Comme il y a 4 trous, il faut 4 fois 4 m=16m. On pourrait ajouter 1m pour les quatre nœuds et obtenir 17m.

Dans le second cas, la communauté familiale, la validation peut être pragmatique : on achète un gros rouleau de corde et on fait quelques essais avant de couper la corde à une longueur qui convient. Elle peut aussi être théorico-pratique en cherchant à obtenir des réponses aux multiples questions posées[4], que ce soit par internet, en demandant au vendeur ou autrement. Dans ce cas, il faudra faire un choix parmi plusieurs réponses possibles[5]. La validation ultime passera par l'essai de la balançoire : elle fonctionne ou non ! (comme pour les bateaux, « c'est la pratique qui prouve plus que la théorie. Si on le met dans l'eau et qu'il coule !...)

Quel lien peut-on faire entre le problème de non usage et ces espaces de travail ? Le problème de non usage pourrait s'expliquer par une forme de disjonction entre les espaces de travail ou les différentes postures. Nous faisons l'hypothèse que si les élèves arrivaient d'une part, à s'inscrire dans un espace de travail mathématique pour travailler certains problèmes du quotidien, par exemple l'installation d'une balançoire, et, d'autre part, à questionner certains problèmes de l'école depuis un espace de travail ou une posture qui pourrait s'apparenter, par exemple, à celui qu'endosseraient, selon eux, leurs parents, ils y gagneraient dans les deux cas. Et s'ils pouvaient explorer d'autres espaces de travail pour appréhender le problème ce serait encore mieux. Nous postulons que plus l'analyse du problème mettra à contribution différents espaces de travail ou différentes postures, plus la solution retenue à l'issue de leur analyse, risque d'être riche ou à tout le moins vigilante. Dans l'exemple de la balançoire, il pourrait s'agir d'examiner quatre ou cinq dispositifs de fixation pour évaluer lequel apparaît le plus adéquat ou le moins dangereux…

4. POURRAIT-ON ENTRAINER LES ELEVES À CHANGER DE POSTURE OU D'ESPACE DE TRAVAIL ?

Le non usage d'un savoir appris peut être lié à une vision du problème dans laquelle ce savoir n'apparaît pas nécessaire ou utile, même si la solution trouvée s'avère par ailleurs inadéquate ou fausse. Partant de l'hypothèse selon laquelle l'élève serait à même d'adopter une autre posture le conduisant à concevoir le problème différemment et, idéalement à y répondre de manière adéquate, la question qui se pose alors est : peut-on imaginer une façon de favoriser le passage

---

[4] À cet égard, une solution, reposant sur un dispositif où la corde fait un tour et demi autour de la branche et passe sous le siège pour se rattacher ensuite au dessus formant un triangle équilatéral, m'a été proposée par François Pluvinage et je l'en remercie. La voici : La hauteur de 75cm est plus appropriée. Pour cette hauteur, un siège de largeur 35cm et un diamètre de branche de 30cm, avec des nœuds requérant 50cm pour deux d'entre eux (nœuds de chaise) et 25 cm pour les deux autres au-dessus du siège (nœuds simples, évitant que le siège pivote et renverse son occupant), on obtient la longueur suivante en m pour un côté : $2\times0{,}5 + 2\times0{,}25 + 3\times3{,}14\times0{,}3 + 2\times0{,}3 + 3{,}80 + 3\times0{,}35 = 9{,}75$ (à 2 cm près). D'où une longueur nécessaire de 19,50m. Cette solution indique que dans l'application effective avec une classe, il serait judicieux de demander aux élèves de faire une exploration des dispositifs que l'on peut voir sur des balançoires

[5] Ce type de traitement du problème de la balançoire pourrait peut-être s'inscrire dans un Parcours d'Étude et de Recherche (PER) tel que le conçoit Chevallard.

volontaire d'une posture à une autre dans le traitement d'un problème, comme une navette entre les postures ou les espaces de travail, de manière à ce que l'élève puisse produire des solutions selon différents points de vue puis en évaluer la pertinence ? En d'autres termes, comment aider l'élève à modifier volontairement son espace de travail de manière à explorer différentes visions, voire paradigmes, liées à un problème donné ?

Dans cette optique, nous avons mis au point un dispositif visant à ce que les élèves développent une clochette de vigilance qui les conduirait à freiner leur action initiale afin qu'ils se demandent s'il n'y aurait pas un autre point de vue, une autre posture, qui pourrait conduire à une réponse plus intéressante. Ce dispositif vise en quelque sorte à ce que les élèves naviguent entre une posture spontanée et une posture plus avertie. Certaines phases de ce dispositif ont déjà été expérimentées (René de Cotret, LeBlanc & Larose 2011) et l'ensemble sera expérimenté pendant l'année 2012-2013. Le dispositif repose sur deux leviers : un levier didactique et un levier social. Le levier didactique vise l'apprentissage ou la prise de conscience du fait que *nous sommes tous victimes d'illusions cognitives et il pourrait en être autrement*. C'est en confrontant les élèves au fait qu'ils ont fourni de mauvaises réponses avec certitude aux problèmes proposés, et ce, bien qu'ils avaient les connaissances nécessaires pour produire une réponse juste, que nous visons cette prise de conscience. Le levier social tente, par la suite, de transformer cette prise de conscience collective en savoir de sens commun, donc en *savoir intuitif et immédiat sur ce qui est raisonnable de faire*, en prêt-à-penser qui puisse se manifester rapidement au cours de l'action initiale. Pour inscrire ce savoir dans le registre des savoirs de sens commun, nous proposons à toute une école de s'engager dans la recherche et le dépistage d'illusions cognitives.

Il faut souligner toutefois que cette expérimentation n'a pas été conçue pour entraîner les élèves à explorer systématiquement plusieurs postures, mais simplement pour les amener à freiner leur action, que ce soit pendant ou après la résolution, mais surtout avant la livraison de la réponse, ouvrant ainsi la possibilité d'explorer une autre façon de traiter le problème. Nous voulons donc soumettre à la discussion avec les participants au symposium la possibilité et la pertinence de concevoir un entraînement au changement de postures plus systématique.

5. CONCLUSION

En guise de conclusion, nous voudrions proposer pour le débat quelques pistes de réflexions à propos de « la relation entre la nature du travail mathématique et le monde qui l'entoure » (thème 3). Plus précisément nous voulons revenir sur deux difficultés que pose le traitement de problèmes issus de la vie de tous les jours dans la classe et dont nous avons eu un aperçu avec le problème de la balançoire. Il s'agit de définir le but du problème et, en conséquence, d'identifier le référentiel qui présidera à la validation.

Lorsqu'on propose un problème issu du « monde réel » à des élèves, par exemple le problème de la balançoire ou celui du petit Maurice, on est confronté à la question de savoir quel est le but de ce problème. Est-ce trouver une solution ou apprendre des mathématiques ? Les deux buts sont valables. Toutefois, il importe de clarifier avec les élèves celui qui sera retenu afin d'assurer que leur travail puisse se faire selon la posture attendue de manière à éviter de les plonger dans une forme d'injonction paradoxale où ils résoudraient selon un but et seraient évalués selon un autre. Veut-on réellement installer une balançoire ou veut-on plutôt apprendre à modéliser le fonctionnement d'une balançoire et anticiper, à partir de ce modèle et à l'aide des mathématiques, la longueur de corde nécessaire ? Nous avons vu plus tôt qu'il s'agissait de deux problèmes relevant en quelque sorte de paradigmes différents.

Définir le but du problème contribuerait alors à définir un ETG idoine. En effet, comme le mentionne Kuzniak : « *Cet ETG idoine doit nécessairement remplir deux conditions, d'une part, il doit permettre de travailler dans le paradigme géométrique correspondant à la problématique visée, d'autre part, il est bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont organisées de manière valide*. » (Kuzniak 2011, p. 15) Ainsi, la définition du but permettrait d'assurer autant que possible que la posture privilégiée correspond bien à la problématique visée. Par la suite, restera à voir si le traitement fait par l'élève s'effectuera dans un espace de travail personnel compatible avec le paradigme retenu.

Le choix du but déterminera la base sur laquelle il sera possible de juger de la validité de la réponse produite. Celui-ci doit donc être négocié avec les élèves, via le contrat didactique, afin qu'ils sachent à quel jeu on les convie, le jeu des mathématiques ou celui de la vie (sachant que l'un n'exclut pas nécessairement l'autre), et pour éviter qu'ils jouent à autre jeu que celui qui servira à évaluer la validité de la réponse produite[6]. Dans le cas d'un problème déjà mathématisé, le jeu est clair, mais sinon, la négociation est plus délicate pour arriver à définir la part de la validation qui repose sur les mathématiques et celle qui revient à la réalité ou au pragmatisme. En d'autres termes, jusqu'où les élèves peuvent-ils (ou doivent-ils) se servir de leur connaissance du monde réel pour résoudre le problème ?

Ces réflexions cherchent à mettre en lumières les difficultés inhérentes au traitement de problèmes du « monde réel » en classe et à étudier les contraintes, les impasses et les avantages qu'un tel travail comporte.

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques* (Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield). Grenoble: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1989) : *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche.* Publication de l'IREM d'Aix-Marseille no 16, 344 p.

Coutat, S. & Richard, P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques, In : *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, volume 16, pp 97-126.

DeBlois, L. & Squalli, H. (2002) Implication de l'analyse de productions d'élèves dans le formation des maîtres du primaire In : *Educational Studies in Mathematics* 50 (2). Kluwer Academic Publishers pp. 212-237.

DeCorte, E. & Verschaffel, L. (2002). Communautés d'apprentissage hautement performantes : recherches d'intervention visant à combler l'écart entre la théorie et la pratique, In : *Perspectives: revue trimestrielle d'éducation comparée*, Vol. XXXII, no. 4.

[6] On pourrait regarder le problème bien connu de *l'Âge du capitaine* de ce point de vue : les élèves jouent aux maths, ils fournissent donc une réponse valide dans ce contexte de jeu. Si on juge depuis le jeu de la vie, alors il y aura une distorsion.

Giroux, J. (2008), Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 28/1 9-62.

Gonseth, M.A. (1993). L'ordinaire et son ombre. *In* J. Haunard et R. Kaehr (éd.), *Si… Regards sur le sens commun* (p. 25-50). Neuchâtel : Musée d'ethnographie.

Gueorguieva, V. (2002). Sept thèses sur le sens commun. *Altérités,* 3. [En ligne] http://www.fas.umontreal.ca/anthro/varia/alterites/n3/gueorguieva.html

Kanheman, D. (2004). *Science et Vie,* mars, no.1038

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses, In : *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, volume 16, pp 9-24

Legardez, A. (2004). L'utilisation de l'analyse des représentations sociales dans une perspective didactique. L'exemple de questions économiques. *Revue des sciences de l'éducation*, XXX(3), 647-665.

Lhoste, Y. (2008). *Problématisation, activités langagières et apprentissages dans les sciences de la vie. Étude de débats scientifiques dans la classe dans deux domaines biologiques : nutrition et évolution*. Thèse de doctorat de l'Université de Nantes, 512p.

Maturana, H.R., Varela, F.J. (1994). *L'arbre de la connaissance. Racines biologiques de la compréhension humaine.* Addison-Wesley, Paris, 256p.

Margolinas, C. (2004) Les situations à bifurcations multiples: Indices de dysfonctionnement ou de cohérence. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (cédérom). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Ntagteverenis, P. (2005). Construction scientifique et construction quotidienne. La dimension syntactique du savoir commun et la question de l'objectivité. *Sociétés*, 89(3), p. 83-97.

René de Cotret, S. (2012). Sybil en formation des maîtres : un cas de personnalités multiples, Dans : J. Proulx, C. Corriveau & H. Squalli (Eds) *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques, Pratiques, orientations et recherches*, PUQ, Québec, pp. 159-170

René de Cotret, S. (2011). Des domaines d'expérience au sens commun, des ingénieries du quotidien ? In : Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck, F., & Wozniak, F. (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, pp150-172.

René de Cotret, S., Leblanc, M. & Larose, R. (2011). Study of the Potential of the Use of Degrees of Certainty to Provide the Common Sense with an "Alert Bell". In B. Sriraman & V. Freiman (Eds), *Interdisciplinarity for the 21st Century: Proceedings of the 3rd International Symposium on Mathematics and its Connections to Arts and Sciences, Moncton 2009*. Monograph 11 in The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education, Information Age Publishing, Charlotte, NC, pp.289-300.

René de Cotret, S. (2007), Un programme double : « Bouchons les trous » un environnement informatisé pour le travail de mise en équations algébriques et Esquisse d'une didactique du sens commun, In : G. Geudet et Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2006*, ARDM et IREM Paris VII, 271-312.

René de Cotret, S. & Larose, R. (2006) : La didactique du sens commun : pour un retour dans la cité… In D. Tanguay Ed., *Raisonnement mathématique et formation citoyenne*, Actes du colloque du GDM 2005, UQAM, pp. 47-59.

René de Cotret, S. (1999). Proposition d'une perspective "bio-cognitive" pour l'étude de relations didactiques, In: G. Lemoyne et F. Conne, (Éds), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Presses de l'Université de Montréal, co-éditeur De Boeck, Montréal, 103-120.

René de Cotret, S. (1998). Quelques questions soulevées par l'adoption d'une perspective "bio-cognitive" pour l'étude de relations du système didactique. *Séminaire DidaTech,* No 184, Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble, Vol 1997, 161-178.

Schoenfeld, A. (2006). Problem Solving from Cradle to Grave. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Volume 11, 41- 73. En ligne sur http://irem.u-strasbg.fr/php/index.php

Wason, P.C. & Johnson-Laird, P.N. (1972). *Psychology of Reasoning. Structure and Content*. Boston, Harvard University Press.

Auteure

Sophie René de Cotret, Université de Montréal, sophie.rene.de.cotret@umontreal.ca

La mediación docente y los espacios de trabajo matemático

Olimpia Figueras, Patricia Flores y François Pluvinage
Cinvestav, UPN, México

Resumen. El maestro pone en juego estrategias para facilitar que los alumnos aprendan matemáticas. Como resultado de varios acercamientos a clases de matemáticas de maestros de educación básica, en este artículo se caracterizan cinco dificultades que el profesor enfrenta para mediar una concurrencia significativa entre los Espacios de Trabajo Matemático institucionales e individuales.
Palabras clave: Educación básica, mediación docente, ETM

Abstract. THE TEACHER AS A MEDIATOR AND THE MATHEMATICAL WORKSPACES
The teacher brings into play strategies to promote mathematics learning by his or her students. As a result of several approaches to mathematics classes taught by teachers of basic education, this article will feature five difficulties facing the teacher to mediate a significant convergence between Institutional and Individual Mathematical Workspaces.
Keywords: Basic education, mediation, MWS

Résumé. L'ENSEIGNANT EN TANT QUE MÉDIATEUR ET LES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUES (ETM)
L'enseignant met en jeu des stratégies pour promouvoir l'apprentissage des mathématiques par ses élèves. À la suite de plusieurs approches de classes de mathématiques menées par des professeurs de l'enseignement de base, cet article caractérise cinq difficultés rencontrées par l'enseignant en tant que médiateur pour que concourent significativement les ETM institutionnels et individuels.
Mots clés. Enseignement de base, médiation, ETM

Resumo. O PROFESSOR COMO MEDIADOR E ESPAÇOS DE TRABALHO MATEMÁTICO (ETM)
O professor envolve estratégias para promover a aprendizagem da matemática pelos alunos. Após várias abordagens de matemática aulas conduzidas por professores de educação básica, neste artigo são caracterizados cinco dificuldades enfrentadas pelo professor para mediar uma concordância significativa entre ETM institucionais e individuais.
Palavras chave: Educação básica, mediação, ETM

1. Introducción

Una fuente de aprendizaje esencial para el desarrollo profesional de los maestros es su propia clase de matemáticas. Varios investigadores coinciden sobre la necesidad de que los docentes reflexionen sobre su trabajo en el aula, ver por ejemplo a: Brubacher, Case y Reagan, 2000; Robert y Rogalski, M., 2002; Robert y Rogalski, J., 2005; Sensevy, 2007; Ball, 1988; Rowland, 2008 y Saraiva y Ponte, 2003 quienes proponen enfoques diferentes a los ETM para mirar su especificidad.

La clase de matemáticas es una construcción social que se desarrolla en tiempos y espacios determinados y responde a un proyecto institucional incluido en el plan y programas de estudio por medio de sus objetivos y contenidos escolares.

Según Kuzniak (2011), los contenidos escolares son parte de un Espacio de Trabajo Matemático (ETM) que él denomina Apropiado (en adelante denotado por ETMA). Con base en su interpretación del ETMA, el maestro estructura para su trabajo de mediación lo que el autor nombra ETM de Referencia (ETMR), usando estrategias y tareas para que los estudiantes construyan significativamente sus ETM Individuales (ETMI).

Al observar clases de matemáticas surge la pregunta:

¿Cuáles son los elementos de la mediación del docente que influyen para que los alumnos construyan ETMI acordes con el logro de la intencionalidad didáctica propuesta en el currículo?

Con base en las ideas esbozadas se formuló el siguiente objetivo:

- Identificar aquellos aspectos que en las interacciones entre el maestro, los alumnos y los contenidos matemáticos escolares devienen dificultades en la estructuración de los ETMI.

2. Marco teórico de referencia

En el caso de la geometría, Kuzniak (2011) caracteriza los espacios de trabajo con base en la articulación de elementos epistemológicos y cognitivos; los primeros relativos a los contenidos matemáticos y los segundos a los procesos cognitivos implicados en su estudio. El autor apunta la necesidad de identificar los componentes que caractericen a los ETM de otras ramas de las matemáticas. Houdement y Kuzniak (2006) proponen 3 modos de pensamiento: Geometría I o natural, Geometría II o axiomática natural y Geometría III o axiomática formal. En este artículo se retoman y adaptan sus planteamientos al paradigma de Geometría I que se apega al trabajo desarrollado en la escuela primaria en el cual los estudiantes ponen en juego su intuición al experimentar con diferentes tareas que les exigen utilizar instrumentos y estrategias de solución.

Como parte de los procesos inherentes al desarrollo de las tareas matemáticas esos investigadores enfocan el uso de definiciones y propiedades de los objetos matemáticos, de instrumentos pertinentes para su estudio y del lenguaje matemático, y con respecto a los procesos cognitivos consideran la visualización, la representación y la justificación de decisiones.

El profesor ha de mediar utilizando diversas estrategias que articulen los componentes epistemológicos y cognitivos para enriquecer y favorecer la re-estructuración de los esquemas de conocimiento de los alumnos (Vigotsky, 1926/2005; Wood, Bruner y Ross, 1976 y Anghileri, 2006). Por eso, el debe implicarlos en la tarea, escucharlos, identificar sus ideas y promover que las confronten.

En la Figura 1 se muestra una imagen ideal de la trasmisión de la propuesta institucional al salón de clases: las decisiones adoptadas en cada nivel, desde las autoridades hasta los alumnos, tienen las mismas intenciones y expectativas respecto a los resultados del aprendizaje.

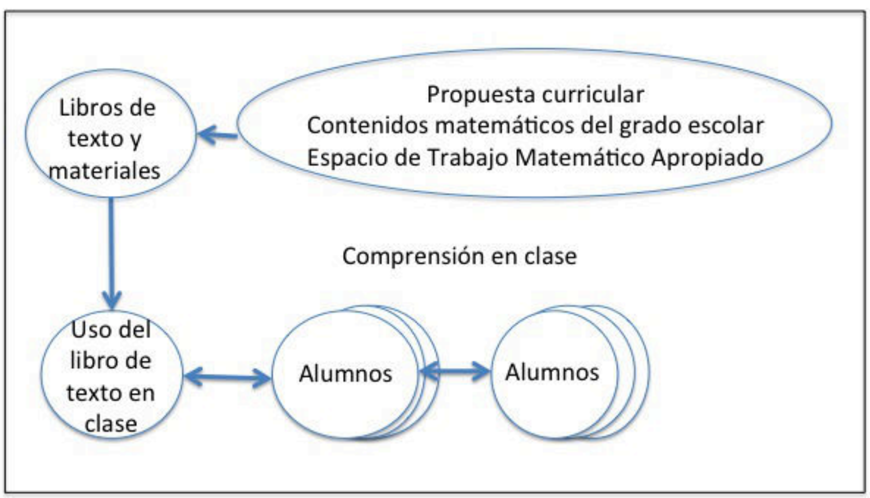


Figura 1. Transmisión de la propuesta institucional al salón de clases

Pero el docente no es un mero transmisor de mensajes educativos diseñados por las autoridades educativas, sino tiene un papel de mediador entre estos mensajes y los estudiantes. Esto entraña procesos de interpretación, necesariamente dependientes de su formación matemática y didáctica. Y la clase es un suceso que ocurre en espacios y tiempos específicos. En él, el docente y los alumnos interpretan y ordenan la dinámica de su desarrollo. En la Figura 2 se ilustra cómo puede concretarse la trasmisión de la propuesta institucional con las posibles discrepancias que existen entre los distintos protagonistas. Se pueden identificar tres etapas de interpretación. La primera interpretación del mensaje educativo oficial (ETMA) a cargo de los diseñadores de lecciones y material de enseñanza ETMA', la segunda interpretación corresponde a los docentes quienes toman decisiones al respecto y con base en su ETMR median el mensaje educativo en un punto decisivo de la cadena de interpretaciones. La tercera etapa le corresponde a los alumnos quienes significan el mensaje educativo tanto del ETMA' como del ETMR. En la clase es posible que en tre sus protagonistas se de una comunicación fluida o con interferencias.

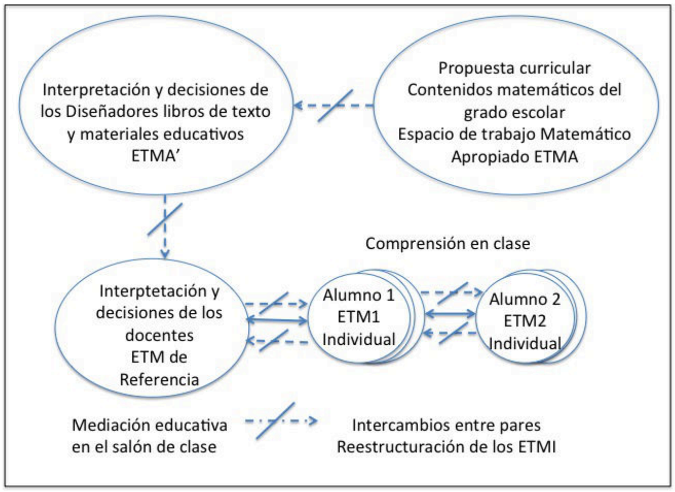


Figura 2. Discrepancias posibles en la transmisión de la propuesta institucional

Las flechas punteadas y atravesadas representan las interpretaciones y decisiones que pueden distanciarse de la propuesta curricular. En efecto, la interpretación de ésta depende de los espacios de trabajo estructurados por los diferentes protagonistas en el desarrollo real de la clase.

Es imperioso que desde el diseño curricular se proporcionen elementos útiles para que los docentes tomen decisiones y propongan soluciones útiles en función del contexto de su labor profesional.

3. Metodología

El estudio que se describe en este artículo se inscribe en un marco de investigación interpretativa, los datos fueron recabados en tres escuelas primarias del Estado de México y versan sobre contenidos matemáticos propuestos en el currículo nacional de la educación básica. Clases de matemáticas fueron grabadas en video y se utilizó la observación no participante durante esas sesiones de trabajo docente con un registro en un diario de campo. En total fueron 10 clases observadas por docente en diferentes periodos del año escolar.

Al finalizar la observación de cada clase se llevaron a cabo entrevistas semi-estructuradas a los docentes en las que se les preguntó sobre la actividad matemática desarrollada por los alumnos y el cumplimiento de los propósitos de la sesión de trabajo.

Las grabaciones en video de las clases se transcribieron y se recuperaron los datos de los diarios de campo (las participaciones del docente se señalan con D, las de las niñas y niños con Na y N respectivamente y con Ns se indican las expresiones en coro).

Se analizaron episodios de cada clase como unidades con sentido matemático completo y se hicieron dos tipos de análisis: el primero enfocado a identificar aspectos que favorecen la re-estructuración de los ETMI y el segundo centrado en el reconocimiento de dificultades para el logro del objetivo de la clase. A partir de éstos se construyeron 5 categorías que describen dificultades y que permiten a su vez pensar en los elementos que favorecen la reestructuración de los ETM de los protagonistas de la clase. Cada categoría se ejemplifica con un episodio de clase representativo de dicha situación, ya que en ellos confluyen las interpretaciones de los protagonistas y se evidencian sus respectivos ETM.

4. La mediación y los espacios de trabajo matemático

Cabe destacar que los episodios presentados ilustran las dificultades encontradas con mayor recurrencia durante las clases observadas y se reconoce que en su desarrollo pueden presentarse situaciones que favorezcan o limitan la comunicación con sentido.

Las cinco categorías que se proponen a continuación muestran la contrastación de los diferentes ETM de los protagonistas en cada una de ellas el mensaje educativo no llega de manera fluida. Cada una de las categorías se ilustra en los episodios.

4.1 $M \nrightarrow A$: *Los alumnos enfrentan dificultades por su interpretación del mensaje educativo*

En esta categoría el maestro implica a los estudiantes en la tarea incluida en su ETMR y trata de articular lo que los estudiantes saben y pueden hacer para realizarla. Pese a esto, los alumnos con base en sus ETMI interpretan de otra manera el propósito y operan en consecuencia.

En una clase de grado 4 (alumnos entre 8 y 9 años de edad), la actividad propuesta por el docente se articula en dos episodios de trabajo, en el primero el profesor presenta ejemplos y hace preguntas abiertas a los niños sobre el área de cuadriláteros y triángulos. Los alumnos expresan dos maneras de proceder para calcular el área: contar cuadritos y usar la fórmula. El docente valida la segunda propuesta para calcular el área de los triángulos.

D. Para calcular el área del cuadrado, ¿qué sería lo correcto? Multiplicar como dice Paulina el 6 por los 4 lados, o como dice Silvia multiplicar 6 x 6. ¿Y en el caso de Carlos? Carlos dice que cuando queremos calcular la superficie de una figura y tenemos cuadritos, ¿qué tenemos que hacer?

N: Tenemos que contar todos los cuadritos.

D: Pero ahí no estamos contando cuadritos, estamos trabajando con medidas.

D: Ahora, van a calcular el área, en el cuadrado primero, y luego de uno de los triángulos, ¿con cuántos triángulos formamos el cuadrado?

Ns: Con dos.

D. Pinten uno de esos triángulos. Ese triángulo, ¿qué parte es del cuadrado?

Ns: La mitad.

N: [pasa al pizarrón] De los 36 cm^2. Bueno, yo del resultado de 36 lo dividí en dos.

D: ¿Por qué lo dividiste en dos?

N: Porque del cuadrado son 36 y pues lo dividí a la mitad.

D: Bueno, ¿cuál es el resultado? A ver anótalo allá.

N: Son 18 cm^2 [anota en el pizarrón].

El docente apoya la familiarización de los alumnos con tareas similares a las propuestas en el libro de texto. En la Figura 3 se muestra una parte de la lección que estudiaron en esa clase (SEP, 1994).

A pesar de la introducción que hizo el maestro, los estudiantes recurren al conteo de flores para determinar el área de los triángulos, acción influida posiblemente por las imágenes del libro que los llevan a relacionar las flores con una retícula cuadriculada, y en consecuencia al conteo de cuadrados (1 flor = 1 cuadrado = 1 cm^2).

Esa situación hace surgir una diferencia entre la intención del profesor y lo que los alumnos hacen como se aprecia en la transcripción de la clase:

Na: ¿Cuántos metros cuadrados cubrió de flores blancas el tío de Flor?
D. Ya vimos una regla para sacar el área de todo el rectángulo y luego sacar el área del triángulo. [Se acerca a una niña] ¿Qué vas a multiplicar ahí?
Na: El 16 por…
D: ¿16? ¿De dónde salió ese 16?
Na: [Señala la diagonal, ella contó el número de flores abajo de esa recta].
D: ¿Las flores? ¿No te están indicando aquí las medidas? ¿Cuáles son sus medidas?
Na: 6 y 4.
D: ¿Qué harías ahí?
Na: Lo voy a multiplicar.
D: Las flores blancas, ¿qué parte representan de todo ese rectángulo?
Na: ¿Un pedazo?
D: Un pedazo, pero ¿qué parte representa ese pedazo de todo el tapete?
Na: La mitad.
D: La mitad. Entonces no queremos todo, tú tienes aquí de todo [Señala la operación que la niña realizó] queremos nada más la mitad. ¿Cuánto sería de la mitad? Para sacar la mitad, ¿qué operación se utiliza?
Na: Una división.
D: ¿Cuántos metros cuadrados de flores blancas tiene?
Na: 12 metros cuadrados.

[La niña regresa a su lugar pero procede a contar las flores].

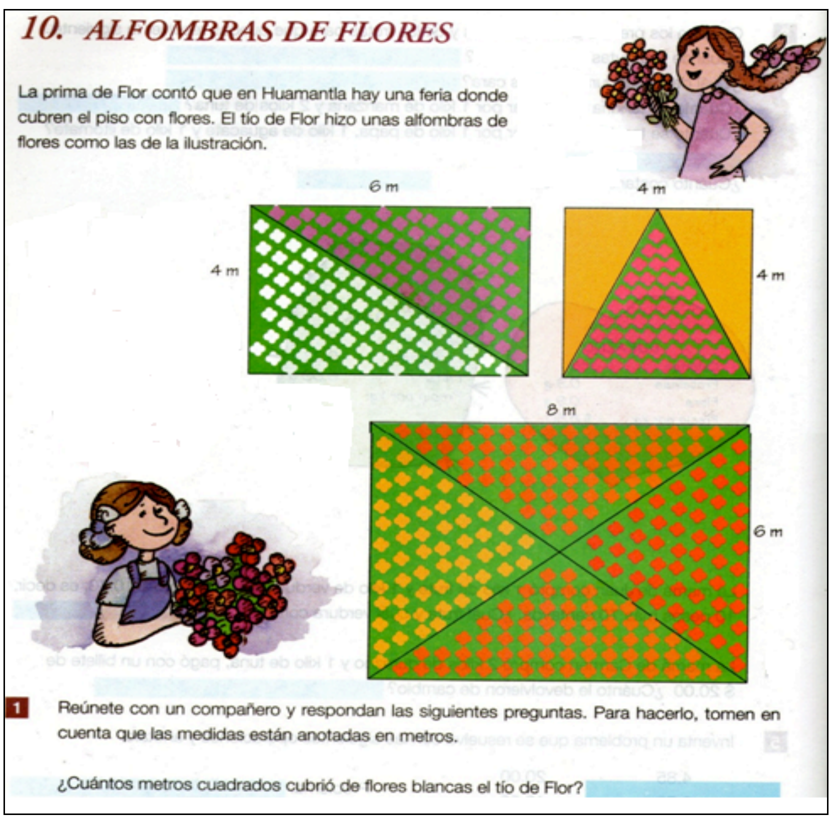


Figura 3. Primera tarea: Cálculo de áreas (SEP, 1994, pág. 178)

El trabajo previo del docente no tiene el efecto esperado, al parecer no advirtió las posibles dificultades de los estudiantes para interpretar las imágenes del texto.

Pese a que al parecer la niña da cabida en su ETMI a la explicación del maestro para que se centre en las medidas del rectángulo y obtenga el área, ella, debido a la visualización de las imágenes en el libro, se remite a un esquema de acción utilizado anteriormente para obtener el área. Como puede observarse la niña sí considera los contenidos matemáticos involucrados en la tarea, sin embargo pesa más el aspecto cognitivo. Las condiciones para que el ETMR creado por el maestro influya en las acciones de la niña se ven limitadas porque para la estudiante tiene mayor peso la visualización que el conocimiento matemático que se usa en la lección como propuesta desde el ETMA'.

4.2 M⇄A: *El maestro tiene dificultades para mediar el mensaje educativo debido a su ETMR y a los conocimientos previos de los alumnos*

En esta categoría se describe la dificultad enfrentada por el maestro para mediar el mensaje educativo del ETMA' debido a que en su ETMR no incorpora todos los elementos que dan pauta a cumplir con el objetivo y por lo tanto los estudiantes subsumen los conocimientos nuevos a la lógica de sus conocimientos previos.

En grado 4 se inicia el estudio de la noción de ángulo y su medida, con una primera lección que se titula "La vuelta al mundo". En ella se pretende que los alumnos se inicien de manera intuitiva en la comprensión de la noción de ángulo a partir de giros con diferentes amplitudes.

La lección incluye un juego compuesto por un tablero (ver Figura 4). En él se muestran puntos de salida y de llegada señalados con nombres de lugares. La medida de los giros se indica de acuerdo con el puntaje obtenido al tirar un dado; de esta manera se puede girar 1/8, 1/4, 3/8, 1/2, 5/8 y 3/4 de vuelta.

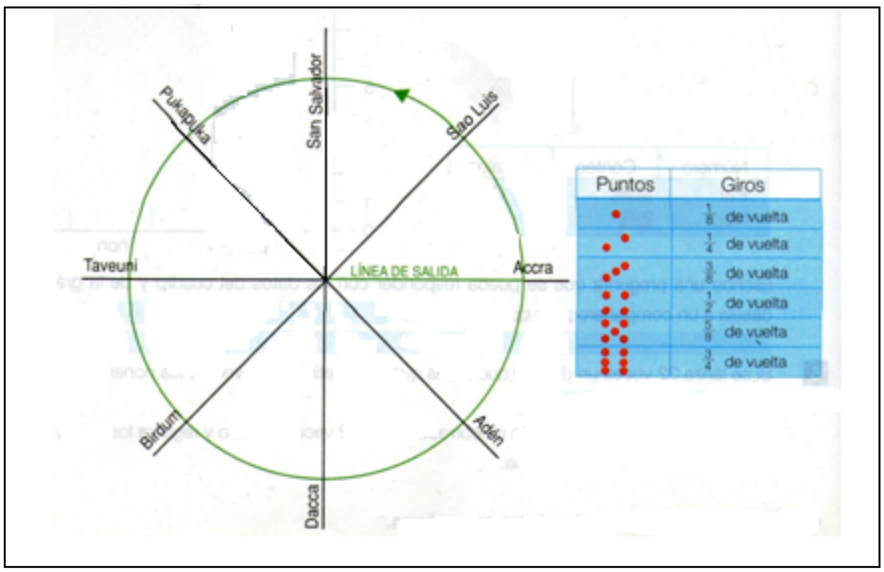


Figura 4. Tablero de la lección *La vuelta al mundo* (SEP, 1994, pág. 78)

El docente promueve un intercambio de preguntas y respuestas para asegurarse de homogeneizar la manera de proceder: tirar un dado, leer en el tablero la medida del giro asociado con el puntaje del dado y la orientación del giro.

> D. Bueno tenemos un pequeño tablero ahí, ¿qué nos indica?
> N. Puntos y giros, (ver Figura 4).
> D. Muy bien, ¿qué es lo que nos indica en los puntos?
> N. En los puntos … ¿los giros?
> …
> D. Bueno, ¿cuál es la siguiente indicación en el tablero?

Na. Dos puntos: ¼ de vuelta.
D. Si estoy en la salida, ¿hasta dónde llego para ¼ de vuelta?
N. Hasta San Salvador.
Na. A Dacca.
D. ¿Por qué Samanta?, ¿de dónde estás partiendo tú? Estás en la salida, ¿a dónde llegas con ¼? Tienes que girar hacia la izquierda, ¿hasta dónde llegas?
Ns. A San Salvador.
D. A ver, si estamos aquí [señala el punto de partida: Accra], ¿cuánto representa ¼ de aquí?
Na. [Pasa al pizarrón, la niña recalca en la circunferencia lo que representa ¼ de vuelta].
D. Si parto de Accra, de la salida, si es ¼, ¿están de acuerdo los demás?
N. Sí.
D. ¿Por qué si?
N. ¡Yo! Porque [el círculo] tiene 4 partes iguales.
D Bueno, el primero que dé 5 vueltas gana.
…
D. Pónganle ahí una palomita o una rayita, que indique una vuelta, una marca significa que ya dio una vuelta [siguen jugando y anotan las vueltas de cada uno].
No. ¡3! [en la tirada del dado]. Uno, dos, tres [cuenta los lugares para avanzar y así proceden los integrantes del equipo en las siguientes tiradas].

En el transcurso de la clase, el profesor trata de que los estudiantes operen de acuerdo con lo que exige la tarea, sin embargo no enfatiza hacer los giros sobre la circunferencia alrededor del centro del círculo, ni que éstos son parte de una vuelta. Por lo que el acercamiento a la noción de ángulo se subsume a lo que saben sobre fracciones en situaciones de partición y los alumnos asocian el círculo y sus secciones con lo que saben de agregar partes para formar fracciones de un círculo, como si fuera una pizza y además obvian los valores de los giros al bastarles el puntaje que indica el dado para avanzar.

La presentación de la noción de ángulo como un giro se desdibuja, las ideas incluidas en el libro no se integran al ETMI de los alumnos. Hay un conflicto en la interpretación que hace el docente del ETMA' y por lo tanto hay una dificultad para estructurar su ETMR y la organización didáctica de la clase.

4.3: $\mathrm{M} \substack{\longrightarrow \\ \not\longleftarrow} \mathrm{A}$ Dificultad del docente para significar la resolución alternativa de una alumna

Esta categoría describe la dificultad del maestro para incorporar a su ETMR una respuesta alternativa al plan de trabajo que ha diseñado para su clase.

En una clase de grado 6 (alumnos entre 11 y 12 años de edad) se estudia la lección 80 del libro de texto de matemáticas que trata sobre la proporción entre las nociones de distancia, tiempo y velocidad (véase Pluvinage, Rigo y Rojano, 2008 quienes hicieron el análisis de discurso de la clase).

En la lección hay una tabla de valores que indica los tiempos de 4 nadadores y se pide a los alumnos que contesten las siguientes preguntas:

¿Quién nadó la mayor distancia?, ¿quién nadó en menos tiempo?, ¿Quién nadó más rápido?

	Distancia	Tiempos		
		Horas	Minutos	Segundos
Amalia	100 metros	0	2	0
Beto	50 metros	0	0	50
Catalina	150 metros	0	2	51
Dario	1500 metros	0	40	0

En el libro se propone que los alumnos después de responder confronten en grupo sus resultados. Durante esta fase, la docente desconoce la participación de una alumna; al parecer su respuesta no encaja en el ETMR que ha estructurado para dar su clase.

D. ¿Cómo podemos saber quién nadó más rápido?
Na. Por proporción porque vemos que nadar 50 metros en 50 segundos, 100 metros se nadarán en 1 minuto 40 segundos.
D. ¿Lo puedes explicar en el pizarrón?
Na. Escribe en el pizarrón

50		50
100	1	40
150	2	30
1500	25	

D. ¿En la parte superior están los minutos y los segundos?, ¿cómo podemos saber quién hizo el mejor tiempo?, ¿qué deberíamos hacer para comparar?
Na. Amalia hizo 100 metros en 2 minutos, pero aquí hay 1 minuto 40 segundos.
D. Hay un error, borra.

En un momento ulterior, la docente dice

[…] ¿Cómo comparamos este tiempo y estas distancias? … Ya me dijiste más o menos Marina una idea. ¡Hazla! …
Na. Es que ya había hecho la tabla, pero ustedes no me entendieron.
D. ¡Ah! Ya te entendí.
Na. Me basé a lo que hizo Beto.
D. Hiciste la tabla de lo que hizo Beto, o sea, era de Beto nada más.
Na. Era para saber, porque yo pienso que Beto era más rápido, entonces si Beto hizo 50 segundos (para) 50 metros, entonces hubieran nadado diferente…
D. Muy bien.
¿Qué podemos hacer para saber cuántos segundos hizo Amalia, Catalina y Darío?

Como puede apreciarse la maestra está centrada en cómo se deben responder las preguntas y la resolución que propone la alumna queda fuera de esa expectativa; por ello hace caso omiso del razonamiento de la estudiante, el cual hubiera podido ser útil para que los demás estudiantes reflexionaran sobre las relaciones entre la velocidad, la distancia y el tiempo.

No obstante que la lección es introductoria al tema de proporcionalidad, la profesora ya quiere que los estudiantes apliquen la fórmula v= d/t. La idea de la alumna no encuentra cabida en su ETMR, la encuentra ajena a la clase.

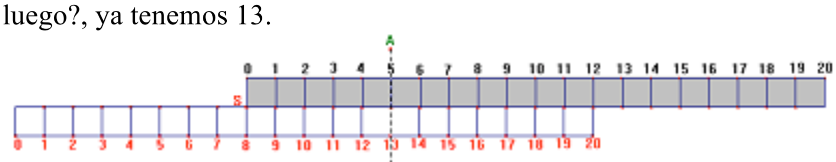
4.4 $\mathrm{M} \nrightarrow \mathrm{A} \nleftarrow \mathrm{A}$: ***Debido a cómo estructuró su ETMR, el docente tiene dificultades para que los alumnos usen un instrumento para resolver una tarea y para intercambiar ideas***

Esta categoría refiere situaciones donde el docente a partir de su ETMR promueve que los alumnos trabajen con un artefacto y que descubran la utilidad del mismo.

Es común que en la escuela los problemas aditivos se resuelvan utilizando el salto de la rana en la recta numérica e/o instrumentos como el ábaco en los que las relaciones entre los datos implicados no son evidentes. Para la clase se propuso a un docente de grado 5 que sus alumnos (edad de entre 10 y 11 años) resolvieran problemas aditivos utilizando una regla deslizante de cálculo en la que los datos del problema quedan a la vista y la actividad matemática consiste en establecer de manera pertinente las relaciones entre ellos. En esta experiencia se utilizaron dos tipos de reglas una material y otra virtual usando Cabri II (véase Figueras, Flores y Pluvinage, 2009).

Durante la clase los alumnos utilizaron la regla deslizante material para resolver los problemas y el docente se encargó de mover la regla virtual proyectada sobre el pizarrón de acuerdo con las indicaciones de los estudiantes.

D. Vamos a trabajar con una regla de cálculo, la van a observar, […] y después hacemos comentarios para qué les podría servir este material. ¿Quién quiere hacer comentarios?
No. Sirve para medir.
D. ¿Cómo lo utilizarías para medir?, ¿cómo le harías?
No. Yo lo recorrería así (desliza la regla superior) pero como no puedo medirlo por aquí, (señala el tope de la regla superior), lo haría por abajo.
D. Lo medirías por abajo. Tú ¿cómo la utilizarías?
No. Igual como una regla normal.
D. Normal para medir, […] ¿Creen que se pueden hacer cálculos con esta regla?
Ns. ¡Sííí!
D. ¿Sí?, […]. Vamos a ir resolviendo cada uno de los problemas utilizando la regla de cálculo […] y después hacemos comentarios de cómo lo resolvieron. […]. Felipe trabaja 12 horas y Lucía trabaja 4 horas menos que él. ¿Cuántas horas trabaja Lucía? (los niños lo resuelven). ¿Cómo lo resolvieron?
N. Le resté 4 horas [toma la barra superior y la desliza hacia la izquierda hasta que el número 12 queda alineado con el 4], 12 menos 4 me cayó 8 [el niño señala las relaciones que se establecieron en la regla, el 8 quedó alineado con el cero].
Ns. ¡Sí está bien!
D. Vean aquí abajo está el 12 de las horas y arriba el que le restaron nos da 8 ¿sí? Bueno vamos a pasar al siguiente problema. […]
En la feria Miguel rompe 8 globos en el juego de dardos, Ricardo rompe 5 más que Miguel y César 3 globos más que Ricardo. ¿Cuántos globos rompió César?
Na. […] Yo puse el 0 en el 8.
D. En el 8. ¿Y luego?
No. ¡María ya no lo tienes que recorrer!, si es una suma, ¡ya está!
Na. ¡Por eso!
D. A ver, ¿dónde está?
No. ¡En el 5!, ¡abajo del 5! ¡Te sale 13!
D. A ver pasa a señalarlo, tienes 8 y luego 5 dice su compañero (el niño pasa a señalarlo). Aquí abajo (del 5) 13, ¿y luego?, ya tenemos 13.



Na. Y luego 3, (cuenta y señala con un dedo) 1,2,3.
No. También ya está, sale 16.
D. ¿La hago para allá? (la maestra mueve la regla con el 0 hasta 13).
Na. Sí, da 16.

La docente promueve el manejo de la regla por parte de los alumnos. Como parte de su ETMI éstos la relacionaron con la medición y cuando se les propone solucionar problemas con ella ponen en juego una estrategia geométrica y una aritmética al hacer movimientos hacia la derecha o izquierda con sentido de suma o resta de acuerdo con el problema enunciado.

Los alumnos que establecieron relaciones y una representación pertinente en la regla deslizante la incorporaron a su ETMI como un instrumento en el que visualizaron las relaciones entre los datos y justificaron sus resultados. Estos alumnos alentaban a otros para que “vieran” las relaciones entre los datos al utilizar la regla, pero estos últimos operaron con otras estrategias de solución. Se puede observar que algunos estudiantes reorganizaron su ETMI con relación al uso de la regla deslizante. Para el resto la regla no fue significativa en sus estrategias y usaron otros saberes al respecto.

La estructura del ETMR del docente se hace evidente cuando alienta a los alumnos a explorar la regla deslizante libremente y cuando se centra más en las respuestas que en el procedimiento que siguen para resolver los problemas. Con ello se explica por qué parece que no considera relevante el intercambio de ideas entre los niños. No se logra la intención de usar el instrumento como posibilidad de tomar consciencia de las relaciones entre los datos implicados en un problema.

4.5. $M \longrightarrow \overset{\not\leftarrow}{\text{medio}} \longrightarrow A$: ***La comprensión del mensaje educativo se limita debido a que en los ETMR y ETMI hay una sobrevaloración del uso de la computadora como herramienta en la resolución de problemas***

En esta clase de grado 6 (alumnos de 11 a 12 años de edad), la utilización de la computadora y del programa Excel para realizar cálculos implicó para el maestro múltiples esfuerzos explicativos y se observa cómo el medio limita la claridad del mensaje educativo de la lección.

D. Vamos a medir la circunferencia y el diámetro de algunos objetos. Vamos a trabajar con la computadora, voy a repartir 5 objetos, si se fijan en su hoja de trabajo en la primera columna dice objetos, en la segunda columna, ¿qué dice Berenice?

Na. Medida de la circunferencia.

D. Y al final vamos a llenar la última columna, ¿qué dice Berenice?

Na. Cociente de la circunferencia entre el diámetro.

D. Vamos a medir la circunferencia y el diámetro. Les voy a dar una regla por pareja y esta cinta que no estira mucho para que ustedes midan [la longitud de la circunferencia]. Entonces van a anotar, ya saben que cada vez que metan un dato apretamos Enter, después medimos los diámetros, y también los anotamos.

¿Qué significa la tercera columna?, quiere decir cuántas veces cabe este pedacito [el diámetro] en todo alrededor. ¿Qué resultado les dio? Edson ¿qué resultado te dio?

No. Es 3 punto …

D. Todos empiezan con 3 ¿verdad? Dice aquí: Usa el método de los griegos para calcular la circunferencia de los objetos. Si ya sabemos que el diámetro cabe 3 veces ¿qué vamos a hacer? Vamos a tomar la medida de nuestro diámetro y lo vamos a multiplicar, a ver, [escribe en el pizarrón] diámetro por 'pi' ¿cuánto vale 'pi'? [Señala el valor de 'pi' escrito en el pizarrón].

No. 3.1416.

D. 3.1416, vamos a ver si con eso nos sale una medida más aproximada a la longitud que ya calculamos con el otro método. Vamos a pasar las medidas del diámetro de la otra tabla a la tabla nueva. [Explica cómo copiarlos de una hoja a otra].

Ns. Ya maestra.

D. Compara las medidas de las circunferencias de ambas tablas, la primera tabla en la que calculaste con el hilo y la que calculaste con la medida griega que pusimos ahí. ¿Qué observas?, ¿quién me dice lo que observa? A ver tú.

Na. Que los resultados son iguales.

D. ¿Qué dicen los demás?

No. Las cantidades son parecidas porque una la hicimos a mano y la otra con la computadora.

Na. Las cantidades casi todas son iguales.

D. Ella al comparar sus resultados casi todos coincidieron. Esas son dos maneras de sacar la longitud de una circunferencia, ¿cuál es la que debemos usar?, ¿cuál es más exacta?, ¿la que utiliza la fórmula o si lo hacemos a mano?

Ns. La fórmula.

D. ¿Por qué?

No. Porque casi, nos da la medida exacta y es más rápida y más eficaz.

D. ¿Están de acuerdo con él?
Ns. Sííí.

La intención de las experiencias propuestas por el docente es que con ellas los alumnos comprendan la relación entre la circunferencia, el diámetro y el número 'Pi' como constante para obtener su longitud.

Predomina la participación del profesor, no alienta la discusión sobre los distintos resultados ni la reflexión para que los estudiantes descubrieran las relaciones entre la circunferencia, el diámetro y pi.

No es claro si todos los educandos comprendieron lo mismo cuando hablan sobre la exactitud, la rapidez y la eficacia para calcular la longitud de la circunferencia o la del diámetro; si se refieren a aplicar la fórmula utilizando pi o si se refieren a hacer los cálculos a mano o utilizando la computadora. El ETMR construido por el maestro se orientó a poner énfasis en el instrumento de cálculo que se utilizó para hacer la comparación entre dos aproximaciones de la longitud de la circunferencia.

El maestro tiene dificultades para articular los saberes matemáticos con la forma conveniente de aprenderlos. Además el uso que se hace de la computadora obstaculiza una relación con mayor sentido.

5. Discusión y reflexión final

Los ETM individuales se construyen en la interacción con los otros y bajo normas institucionales. Sin embargo en la clase confluyen los elementos cognitivos y epistemológicos que subyacen a los ETM de los protagonistas en una relación dado-dándose. En esta relación se activan los conocimientos previos por un lado y se construyen o reconstruyen al mismo tiempo.

Los docentes deciden de acuerdo con su ETMR las tareas sobre los contenidos con el propósito de hacerlos inteligibles. Pero no siempre coinciden los ETMI de los alumnos y con ellos se pueden detonar sentidos diversos y lejanos a los propósitos formativos del ETMA. También el ETMR del docente puede reducir la posibilidad de construcción de los ETMI de los alumnos, no sólo en la interacción maestro-alumno(s) sino entre los mismos alumnos así como sobre las expectativas con la tecnología. Así un reto en la formación docente es de procurar la reflexión sobre la necesidad de decantar la actividad matemática, la interpretación de la misma y su comunicación.

Los docentes son los responsables de mediar la confluencia entre los ETM en el salón de clases, porque ponen en marcha el Espacio de Trabajo Matemático Apropiado (ETMA) y deciden el uso del ETMA' (libros de texto y materiales y recursos educativos derivados del ETMA) e influyen al dirigir formas de participación y proponer tareas para que los estudiantes experimenten la actividad matemática.

La cultura escolar repercute en la estructuración de los Espacios de Trabajo Matemático de Referencia (ETMR) de los profesores observados. Por ejemplo, hay pocas oportunidades de discutir entre colegas el sentido del ETMA y su expresión en el ETMA', hay predominio de la participación del docente en la clase, hay poca crítica a los materiales educativos cuando se utilizan.

Reflexionar sobre la cultura escolar lleva necesariamente a considerar que una de las dificultades que tiene el profesor para enfrentar las posibles discrepancias en las intenciones educativas es que no asume su grado de libertad para adaptar, o en su caso modificar, la propuesta curricular y adaptar los materiales educativos a las circunstancia propias de su labor profesional.

6. Referencias bibliográficas

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9,* 33-52.

Ball, D. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the learning of mathematics,* 8(1), 40-48.

Brubacher, J. W., Case, C.W. y Reagan, T.G. (2000). *Cómo ser un docente reflexivo. La construcción de una cultura de la indagación en las escuelas.* Barcelona: Gedisa.

Figueras, O.; Flores, P. y Pluvinage, F. (2009). Teacher planning mathematical activities. En: Tzekaki, M., Kaldrimidou, M., y Sakonidis, H. (Eds). *Proceedings of PME 33*, 1, 373, Salónica, Grecia.

Houdement, C y Kuzniack, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175 – 193.

Kuzniack, A., (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9 – 24.

Pluvinage, F.; Rigo, M. y Rojano, T. (2008). The teacher in the mathematical- argumentation processes within elementary school classrooms. En: Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano , T y Sepúlveda. A. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, 1, 256. México: Cinvestav-UMSNH.

Robert A. y Rogalski, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x,* 60, 6-25.

Robert A. y Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a french 10th-grade class. *Educational Studies in Mathematics,* 59, 269–298.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 69(2), 149-163.

Saraiva, M. y Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante, 12*(2), 25-52.

Secretaría de Educación Pública (1994). *Libro para el alumno. Matemáticas cuarto grado*. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México: Subsecretaría de Educación Básica y Normal.

Sensevy G. (2007). Categorías para describir y comprender la acción didáctica. En: Sensevy, G y A. Mercier (2007) *Agir ensemble. L'action conjointe du professeur et des élèves dans le système didactique*. Rennes: PUR.

Vigotsky, L.S. (2005). *Psicología pedagógica. Un curso breve*. Argentina: Aique. (Primera publicación en 1926).

Wood, D., Bruner, J. y Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89-100.

Los autores:

Olimpia Figueras <figuerao@cinvestav.mx>

Patricia Flores <pflores63@hotmail.com>

François Pluvinage <pluvin@math.unistra.fr>

El rol de las representaciones semióticas de las funciones en el proceso de resolución de problemas de variación, en particular en el diseño de la estrategia de solución

Ramiro Ávila Godoy Agustín Grijalva Monteverde José Ramón Jiménez Rodríguez
Universidad de Sonora, México

Tema 4
Visualización y representación en el trabajo matemático

INTRODUCCIÓN

La presente investigación se inicia con la formulación de la siguiente pregunta:

¿Qué es lo que permite a algunas personas tener éxito en la resolución de problemas utilizando sus conocimientos de Matemáticas?

La cual dio pie a la formulación de una serie de conjeturas sobre las posibles razones del éxito, las que a su vez dieron lugar a la formulación de nuevos cuestionamientos derivados de la necesidad de tratar de dar respuesta a la pregunta inicial; por ejemplo, nos preguntamos sobre el papel que juegan las diversas representaciones de los objetos matemáticos en el proceso de resolución de problemas, sobre el papel de los procesos metacognivos; también nos dimos a la tarea de revisar la literatura relacionada con los procesos de resolución de problemas, de visualización, metacognitivos, etc.

De la revisión bibliográfica cito a Santos Trigo (1997) que dice: *un aspecto esencial en el entendimiento de cómo el individuo resuelve problemas, ha sido observar, codificar y analizar los procesos utilizados por los expertos de determinada área al resolver problemas* (p. 58); y más adelante agrega: *En la observación sistemática del comportamiento del experto es importante considerar métodos en los que se observe con detalle el proceso que utiliza*. (p. 59).

Por otra parte, Schoenfeld (1987) considera que no solamente es importante discutir las estrategias generales (las identificadas por Polya), sino también las subestrategias que cada uno de ellos genera.

Finalmente tomamos la decisión de llevar a cabo una investigación formal basada en la observación directa de los procesos utilizados por los expertos al resolver cierto tipo de problemas. Aquí es conveniente aclarar que cuando tomamos la decisión de llevar a cabo una investigación formal, ya no era para dar respuesta a la pregunta inicial, sino a una mucho más específica, aunque relacionada; decidimos centrar nuestra atención en indagar sobre la manera en que las representaciones gráfica, numérica y analítica de los objetos *función* y *derivada de una función* son utilizadas por los sujetos que resuelven con éxito problemas no rutinarios de Cálculo. Sin embargo, aún después de haber acotado el problema, siguieron surgiendo interrogantes cada vez más puntuales, tales como ¿qué papel juegan las representaciones gráficas en la elaboración de las estrategias de solución? ¿y en la ejecución de dicha estrategia? De igual manera nos llevó a preguntarnos por el papel de las otras representaciones.

Todos estos cuestionamientos dieron lugar, en su momento, a la formulación del siguiente:

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

¿De qué manera usan las representaciones (gráfica, numérica y analítica) de los objetos ***función*** *y* ***derivada de una función****, en el análisis y resolución de problemas de matemáticas no rutinarios, las personas que tienen éxito al resolverlos*?

Este problema lo desglosamos, a su vez, en una serie de interrogantes más específicas, entre las que destacan:

a) *¿Qué papel juegan las representaciones en la etapa de análisis y comprensión de la información*?
b) *¿Qué papel tienen en el diseño de la estrategia de solución*?
c) *Y en la ejecución y evaluación de lo planeado*, *¿qué papel juegan las representaciones*?
d) *En la formulación de la solución ¿cómo se usan las representaciones*?

Sobre el papel de las representaciones en los procesos de pensamiento, Vincenç Font hace referencia a ellas diciendo

En el campo de la investigación en Didáctica de las Matemáticas se han realizado muchas investigaciones para precisar el término representación y para estudiar el papel que juegan las diferentes representaciones en el proceso de comprensión de los contenidos matemáticos (Brown 1996 y 1997, Kaput 1987,1991 y 1992, Janvier 1987, Duval 1995, Romero y Rico 1999). La mayoría están de acuerdo en que la naturaleza de las representaciones matemáticas ostensivas influyen en el tipo de comprensión que genera el alumno, y, recíprocamente, el tipo de comprensión que tiene el alumno determina el tipo de representación ostensiva que puede generar o utilizar.

CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Tanto la formulación del problema como el diseño metodológico de la investigación y los criterios con los que se interpretó la información obtenida adquieren sentido con base en una serie de consideraciones de orden teórico, entre las cuales citamos las siguientes:

- Declaramos que concebimos a la matemática al menos de las siguientes tres maneras: como una actividad de resolución de problemas, como un lenguaje simbólico y como un sistema conceptual lógicamente organizado; a la vez que consideramos cada una de ellas como aspectos constituyentes de la misma.
- Nuestra concepción de la matemática como actividad de resolución de problemas está determinada por nuestra concepción de la naturaleza de los objetos matemáticos, lo mismo que por nuestra concepción sobre el origen y desarrollo de dichos objetos.
- Asumimos que el origen y desarrollo de los objetos matemáticos y, como consecuencia, su naturaleza, son pragmáticos; lo cual significa que asumimos que tales objetos surgen y evolucionan a partir de situaciones problemáticas, que son situaciones en las que un sujeto (persona o institución) se propone realizar una tarea o responder una o más preguntas para lo cual no dispone de suficientes elementos y por lo cual no está, en ese momento, en condiciones de llevar a cabo la tarea planteada o contestar la pregunta o preguntas formuladas.

- La pretensión del sujeto, de resolver la situación problemática provoca en él, un conflicto de orden cognitivo, que equivale a decir que le origina un problema que lo activa intelectualmente para buscar solución al mismo, para lo cual pone en juego sus conocimientos previos constituidos por sistemas conceptuales y esquemas para la acción, iniciando un proceso de interacción con la situación problemática que le originó el problema tratando de interpretarla y resolverla.
- Al interaccionar con la situación problemática, el sujeto realiza una serie de actividades de muy diversa índole, algunas de las cuales son ostensibles (observables), como por ejemplo: hacer un diagrama, efectuar una operación, comunicar una idea, etc., otras son acciones interiorizadas no ostensibles tales como hacer comparaciones, analogías, deducciones, inducciones, conjeturas, generalizaciones, entre otras. Todas estas actividades están encaminadas, en un primer momento, a tratar de entender la situación, en un segundo momento, a tratar de formular una estrategia o plan de acción para resolver el conflicto, en un tercer momento, a llevar a cabo las acciones planeadas para dar respuesta a las interrogantes que originaron el conflicto o para realizar la tarea propuesta y, en un cuarto momento, a formular la respuesta y reflexionar sobre la forma en que logró superar el conflicto.
- Estas acciones dan lugar al enriquecimiento del significado de los objetos mentales puestos en juego en la interacción y, como consecuencia, a la evolución de dichos objetos o al surgimiento de otros nuevos derivados de los previamente construidos.
- El conjunto de actividades que realiza el sujeto tratando de resolver el problema, constituye un *sistema de prácticas* que, cuando corresponden a un individuo, se denomina *sistema de prácticas personales.*
- Una práctica específica se dice que es *significativa* o que tiene sentido, si para ese individuo, esa práctica desempeña una función en el logro del objetivo de resolver el problema.
- La razón por la cual hablamos de prácticas significativas es para distinguirlas de aquellas actividades que realiza el individuo al tratar de resolver el problema, pero que no resultan eficaces, es decir resultan intentos fallidos o procedimientos erróneos que luego se desechan.

- De los sistemas de prácticas significativas que un individuo utiliza para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problemáticas, emergen los *objetos matemáticos*. *Dichos sistemas de prácticas constituyen los significados personales que ese individuo tiene de tales objetos matemáticos.*
- Un conjunto de individuos que comparten el uso de un conjunto de prácticas significativas prototípicas y las utilizan para analizar, interpretar y resolver un cierto tipo de situaciones problemáticas, constituyen una institución y por ello, a tal conjunto de de prácticas se le denomina *sistema de prácticas institucionales*. Tales sistemas de prácticas constituyen los *significados institucionales* de los objetos matemáticos que emergen de dichos sistemas de prácticas; los cuales se denominan *objetos matemáticos institucionales*.
- Los objetos matemáticos personales o institucionales son todos aquellos entes presentes al realizar alguna tarea matemática, es decir, desde las situaciones problemáticas, los elementos del lenguaje (términos, signos, símbolos, etc.), las proposiciones, los conceptos, los procedimientos, las propiedades, los argumentos, los procesos, las teorías y otros, son objetos matemáticos, en general todo aquello sobre lo que podemos pensar, hablar o utilizar para realizar una actividad es un objeto y si la actividad es matemática, entonces el objeto es matemático.
- Estos objetos institucionales constituyen el sistema de referencia de la enseñanza; es decir, tanto en el diseño curricular como en la planeación de la enseñanza, lo que se hace es decidir, con conciencia o no, cuáles son los sistemas de prácticas que se promoverán respecto a un conjunto de objetos matemáticos para que los estudiantes los conozcan y aprendan a utilizarlos para resolver una serie de problemas relativos a un cierto tipo de situaciones problemáticas.

LA INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA (DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS)

Las investigaciones realizadas con el propósito de evaluar la eficacia de los aprendizajes logrados por los estudiantes en los cursos de Matemáticas, muestran que es muy baja, que el porcentaje de alumnos que no tienen éxito al tratar de resolver problemas sencillos, es muy alto.

Las investigaciones realizadas sobre los problemas de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas no sólo están orientadas a la evaluación de resultados, por el contrario son cada vez más las que se orientan a tratar de entender las causas de dichos resultados y a poner a prueba diversas alternativas de solución al problema de la calidad de los aprendizajes. Son muchos los investigadores que coinciden en que las investigaciones en Matemática Educativa se refieren a algún aspecto relacionado con el significado que los estudiantes asignan a los objetos matemáticos, además de tratar de explicar la manera en que dichos significados se forman y evolucionan como resultado de la enseñanza.

LA PLANEACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Las consideraciones teóricas expuestas, ayuden a interpretar el sentido que damos a la investigación que aquí reportamos. Para llevarla a cabo, decidimos elaborar un cuestionario con problemas matemáticos, en los que la situación problemática planteada es un objeto matemático, que sirvieran para investigar lo que hemos planteado en nuestro problema de investigación, esto es, que fueran no rutinarios y que puedan analizarse y resolverse utilizando los objetos función y derivada de una función. Estos problemas se aplicaron a un grupo de treinta y dos profesores universitarios posgraduados en Matemáticas, con varios años de experiencia docente, dedicados, 24 de ellos a enseñar Cálculo y 8 a enseñar Álgebra, todos considerados buenos profesores por sus alumnos.

De los cinco problemas seleccionados, tres se redactaron para que su lectura llevara a considerarlos problemas de Álgebra, los dos primeros se refieren a la resolución de ecuaciones, el tercero a una desigualdad. Los dos últimos se refieren explícitamente a funciones.

La versión que se presentó a los profesores que participaron en la investigación es la siguiente:

CUESTIONARIO

Problema 1.
Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$ no puede tener dos raíces distintas en (0, 1).

Problema 2.
Demostrar que la ecuación $x^n + px + q = 0$ no puede tener más de dos raíces reales, si *n* es par; ni más de tres, si *n* es impar.

Problema 3.
Resolver la desigualdad $2\sqrt{x} > 1 - \frac{1}{x}$

Problema 4.
Comparar las funciones $y = \mathrm{Sen}\, x + Tanx$ y $y = 2x$ en $(0, \pi)$.

Problema 5.
Supóngase que $f(x)$ es una función continua y derivable en [0, 1], que $f(x)$ está en [0, 1] para todo x y que $f'(x) \neq 1$ para todo x en [0, 1]. Demostrar que existe exactamente un número x en [0, 1] tal que $f(x) = x$.

LAS RESPUESTAS Y SU ANÁLISIS.

El análisis de las respuestas a cada uno de los problemas, se hizo considerando los diversos momentos de la resolución, es decir, el momento del análisis de la información proporcionada, el del diseño de la estrategia de solución, el de la instrumentación de lo planeado y el de la formulación de la respuesta.

Primeramente mostraremos la manera en que procedieron algunos profesores al resolver los problemas, así como el análisis que hicimos del proceso de solución; luego haremos algunas reflexiones generales sobre las respuestas de los profesores y, finalmente, formularemos algunas conclusiones.

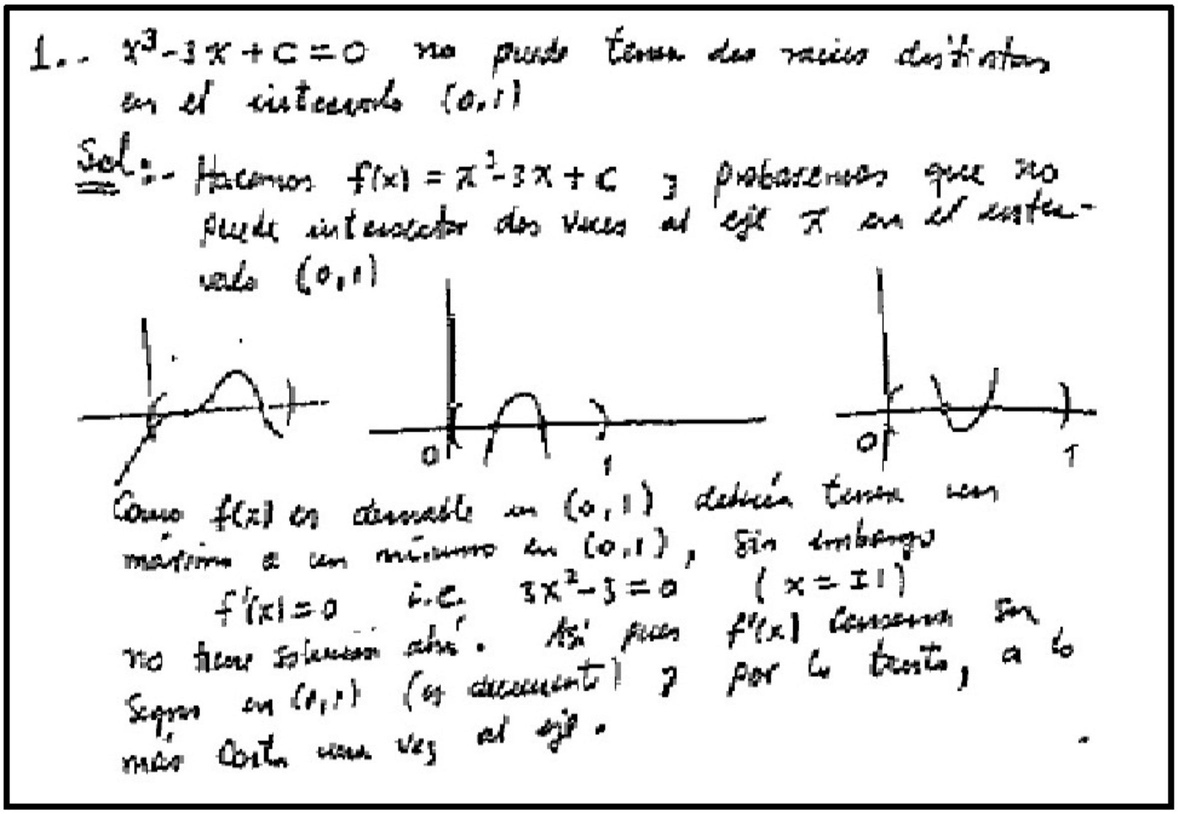
A continuación presentamos las soluciones de dos profesores al Problema 1, seguidas del análisis que de ellas hicimos, (en el anexo presentamos la soluciones a otros problemas de otro profesor sin los análisis). A los profesores los nombraremos Profesor 1 y Profesor 2.

Profesor 1

Problema 1

Demostrar que la ecuación x^3 -3x + c = 0 no puede tener dos raíces distintas en (0, 1)

La Figura 1 muestra la solución del Profesor 1



1.- $x^3-3x+c=0$ no puede tener dos raíces distintas en el intervalo (0,1)

Sol:- Hacemos $f(x) = x^3-3x+c$ y probaremos que no puede intersectar dos veces al eje X en el intervalo (0,1)

Como f(x) es derivable en (0,1) debería tener un máximo o un mínimo en (0,1), sin embargo $f'(x)=0$ i.e. $3x^2-3=0$ ($x=\pm 1$) no tiene solución ahí. Así pues $f'(x)$ conserva su signo en (0,1) (es decreciente) y por lo tanto, a lo más corta una vez al eje.

Figura 1

Análisis de la solución:

Procedemos ahora a presentar el análisis del proceso de resolución que realizó el Profesor 1.

La primera observación es el cambio de contexto que el profesor hace del problema pues la formulación original está en el contexto del Álgebra "Demostrar que la ecuación.." y él dice: "*Hacemos f(x) =* x^3 *-3x + c y probaremos que no puede intersectar dos veces el eje X en el intervalo (0,1)*…" que, evidentemente está en el contexto del Cálculo. Este cambio de contexto implica varios cambios de significado:

La "*x*", en el contexto del Álgebra, tiene el significado de incógnita, es decir, de *número desconocido;* mientras que en el nuevo contexto la *x* es una variable.

Como consecuencia del cambio de contexto, los métodos que evoca y utiliza para analizar y resolver dicho problema, son los del Cálculo y no los del Álgebra.

Cuando el profesor iguala la expresión a $f(x)$, convirtiéndola en función, crea también una nueva variable, la $f(x)$, cuyo valor está relacionado con el de x.

El cambio de contexto llevó al profesor a concebir la expresión $f(x) = x^3 -3x + c$, como la representación analítica de una curva trazada en un sistema de coordenadas cartesianas lo que, a su vez, lo llevó a reformular el problema, diciendo: "…*probaremos que no puede intersectar dos veces al eje X en el intervalo (0, 1)*".

Estas transformaciones ponen de manifiesto, no sólo algunos de los significados que la expresión $x^3 -3x + c$ tiene para el profesor (el que tiene como miembro de la ecuación original, lo mismo que el que tiene como valor de $f(x)$ en la expresión $f(x) = x^3 -3x + c$ en la cual, a su vez, le asigna también un significado geométrico viéndola como la representación analítica de una curva y, en consecuencia, concibe a $x^3 -3x + c$ como el valor de la "y" de los puntos de dicha curva); sino también muestran el papel que juegan dichos significados en el diseño de la estrategia de solución del problema, ya que inmediatamente después, aparecen tres bosquejos gráficos en los que la curva corta más de una vez al eje X, con los cuales es evidentemente que está tratando de ilustrar que, cualquiera que sea el comportamiento de la función, para cortar dos veces al eje X en el intervalo (0, 1), es necesario que la curva cambie de dirección ("de vuelta") al menos una vez en dicho intervalo, lo que, a su vez, equivale a tener un máximo o un mínimo relativo. Esta necesidad es consecuencia del hecho de que la función sea derivable en el intervalo, lo cual expresa inmediatamente después de los bosquejos gráficos: "*como f(x) es derivable en (0, 1), debería tener un máximo o un mínimo en (0, 1)*". Esta última expresión, además de poner de manifiesto que el profesor sabe, en general, lo dicho para las curvas derivables, también muestra que esta familia de curvas, es derivable en (0, 1).

Todas estas consideraciones las hizo el profesor para validar su estrategia de solución que consiste en demostrar que la curva no cambia de dirección en el intervalo de referencia. Para hacer esta demostración utiliza el hecho de que para que una función derivable cambie de dirección, es necesario que su derivada valga 0 en el punto de cambio y cambie de signo en cualquier intervalo que contenga al punto donde vale 0. Esto lo demuestra cuando afirma, inmediatamente después de haber establecido que "*f(x) es derivable en (0, 1) debería tener un máximo en (0, 1)…*", "*…sin embargo f'(x)= 0, i.e.* $3x^2 -3 = 0$ *(x = ± 1) no tiene solución ahí. Así pues f'(x) conserva su signo en (0, 1) (es decreciente) y por lo tanto, a lo más corta una sola vez al eje*"

También se observa que aunque el problema se reformuló para referirlo a la representación gráfica de una función y la estrategia de solución diseñada parece haberse inspirado en la gráfica, los conceptos, propiedades y argumentos utilizados en la demostración se presentaron analíticamente. Esto es muy claro cuando dice: "*como f(x) es derivable en (0, 1) debería tener un máximo o un mínimo en (0, 1) sin embargo f'(x)= 0, i.e.* $3x^2 -3 = 0$ *(x = ± 1) no tiene solución ahí. Así pues f(x) conserva su signo en (0, 1) es decreciente*"

En el caso de este profesor es evidente la diversidad de significados que evoca al analizar la ecuación presentada en el problema; lo mismo que el papel que juega la representación gráfica de la función $f(x) = x^3 -3x + c$, en el análisis e interpretación de la situación, así como en el diseño de la estrategia de solución; así también es observable la diversidad de significados (propiedades), que tiene de la función y el apropiado y creativo uso que hace de tales significados para argumentar su respuesta. Por ejemplo, afirma que la expresión analítica representa una función derivable de referencia; y eso, a su vez, lo lleva a ver dicha expresión analítica como representante de una curva continua y suave en el intervalo. Esta percepción de la curva lo lleva a argumentar que, para que la ecuación tenga más de una solución en el (0, 1), la curva deberá cambiar de dirección en algún punto del intervalo para que haya la posibilidad que toque al eje X, al menos dos veces en el intervalo considerado; este hecho lo asocia, a su vez, con otra propiedad de la expresión analítica, debe tener derivada igual a cero en el valor de la x del punto de la curva donde ésta cambie de dirección y cambiar de signo en cualquier intervalo que contenga a dicha x. Algo que resulta fundamental en todas las etapas del proceso, es la coordinación que hace de los registros analítico y gráfico de la función que resulta clave en el análisis e interpretación de la situación, lo mismo que en el diseño e instrumentación de la estrategia y en la formulación y la comunicación de la respuesta.

El análisis aquí hecho, muestra las siguientes asociaciones (funciones semióticas):

a) La expresión x^3 $-3x + c$, la asocia con la expresión $f(x) = x^3 -3x + c$ lo cual implica que la concibe como función.
b) La expresión $f(x) = x^3 -3x + c$ la asocia con una curva, lo cual implica que concibe la expresión como representación analítica de la curva.
c) Al asociar la expresión analítica con la curva, lo hace formular el problema a partir de la significación que tienen para él la solución o resolución de la ecuación $x^3 -3x + c = 0$, que las ve como el caso o los casos particulares en los cuales $f(x)$ vale cero y, en consecuencia, como el caso o los casos en los que la curva toca o corta al eje X, lo cual lo lleva a establecer el problema original en términos de probar que la curva no corta al eje X, en el intervalo de referencia, más de una vez.
d) De la expresión $f(x) = x^3 -3x + c$, en particular, sabe que es derivable al menos en (0, 1), y que eso significa que para cortar o tocar más de una vez el eje X en (0, 1) es necesario que la curva cambie de dirección ("de vuelta") en algún punto del intervalo y que el punto del intervalo donde la curva cambia de dirección es un máximo o un mínimo relativo de la función y que en tal punto la derivada de la función debe valer cero.
e) También deja establecido, de manera implícita, que si la curva no cambia de dirección en un intervalo, la derivada de la función conservará el signo y la función será monótona en el intervalo, esto es, si es decreciente lo será en todo el intervalo y lo mismo sucederá si es creciente.
f) De estas consideraciones establece la estrategia de solución, consistente en probar que, en el intervalo de referencia, la curva no cambia de dirección y, en consecuencia, esto será una prueba de que tal curva, no puede tocar al eje X más de una vez en el intervalo (0, 1). Esto decide hacerlo calculando los valores de x para los cuales la derivada de la función vale cero, que ya dijimos los asocia con los puntos donde la curva puede cambiar de dirección.
g) Al instrumentar la estrategia aplica lar reglas para calcular la función derivada asociada a la función $f(x) = x^3 -3x + c$, obteniendo $3x^2 -3$ que luego iguala a cero, escribiendo $3x^2 -3 = 0$ y resolviendo la ecuación de donde resulta $x = \pm 1$, que son los valores de x para los cuales la derivada vale 0 y, como consecuencia, son las abscisas de los puntos donde la curva puede cambiar de dirección.

h) Como ambos valores están fuera del intervalo (0, 1) afirma que la prueba está concluida, lo cual, textualmente, establece diciendo: “*así pues f’(x) conserva su signo en (0, ¡) (es decreciente) y, por lo tanto, a lo más corta una sola vez al eje*”

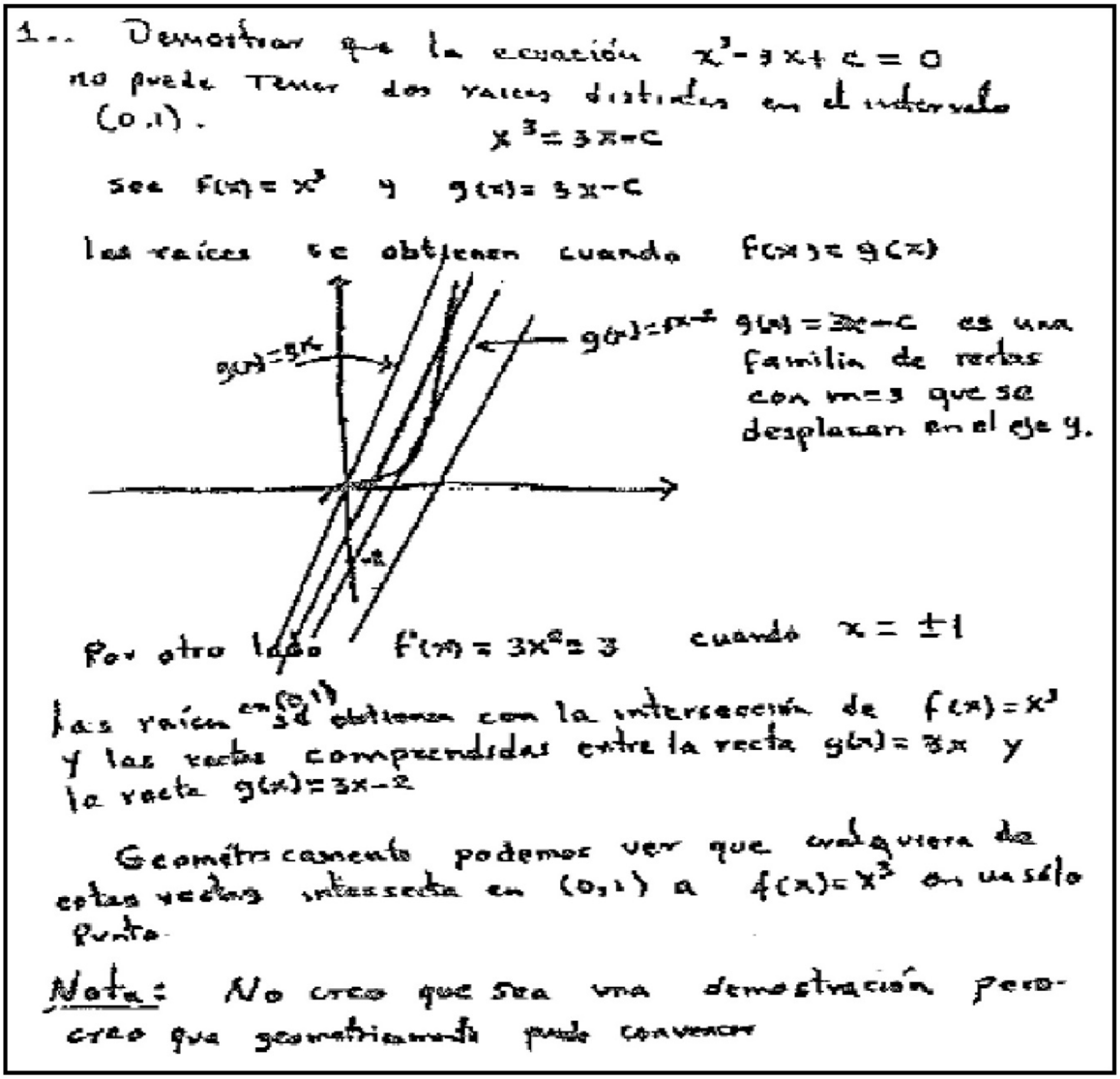
Hemos presentado aquí de manera detallada el análisis que hicimos del proceso desarrollado por el profesor 1 al resolver el problema 1; el análisis realizado de los procesos de resolución que desarrolló el profesor 1 al resolver el resto de los problemas no es posible presentarlo aquí por falta de espacio; sólo podemos decir que dicho análisis es muy similar al que hicimos del Problema 1, de tal manera que en el anexo puede verse lo que el profesor escribió al resolver los problemas 2, 3 y 4.

Profesor 2

Problema 1

Al igual que en el caso del Profesor 1, en este caso lo realizado por el Profesor 2 al resolver el Problema 1, aparece textualmente en la Figura 2

Solución



1.- Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + c = 0$ no puede tener dos raices distintas en el intervalo $(0,1)$.

$x^3 = 3x - c$

sea $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3x - c$

las raíces se obtienen cuando $f(x) = g(x)$

$g(x) = 3x - c$ es una familia de rectas con $m = 3$ que se desplazan en el eje y.

Por otro lado $f'(x) = 3x^2 = 3$ cuando $x = \pm 1$

las raíces en $(0,1)$ se obtienen con la intersección de $f(x) = x^3$ y las rectas comprendidas entre la recta $g(x) = 3x$ y la recta $g(x) = 3x - 2$

Geométricamente podemos ver que cualquiera de estas rectas intersecta en $(0,1)$ a $f(x) = x^3$ en un sólo punto.

Nota: No creo que sea una demostración pero creo que geométricamente puede convencer

Figura 2

Análisis de la solución.

Este es otro ejemplo en el que el problema fue reformulado para plantearse como un problema relativo a funciones. Primeramente la ecuación la escribe $x^3 = 3x - c$ e inmediatamente después dice: "*Sea $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3x - c$*" para luego agregar: "*las raíces se obtienen cuando $f(x) = g(x)$*"

El problema ha sido reformulado. Ahora se trata de determinar los valores de x que hacen que ambas funciones valgan lo mismo.

A continuación aparece el bosquejo de unas gráficas, en donde es evidente que $f(x) = x^3$ es visto como la representación analítica de una curva y $g(x) = 3x - c$, como la representación analítica de una familia de rectas paralelas (que es una familia de rectas, lo dice explícitamente, y que son paralelas lo expresa diciendo que m = 3 y dibujado varias de ellas paralelas). En esta reinterpretación gráfica del problema, la igualdad $f(x) = g(x)$, se cumple cuando la curva y alguna de las rectas de la familia se intersecan, esto lo establece cuando dice: "*las raíces en (0, 1) se obtienen con la intersección de $f(x) = x^3$ y las rectas comprendidas entre la recta $g(x) = 3x$ y la recta $g(x) = 3x-2$*". Las rectas $g(x) = 3x$ y $g(x) = 3x-2$ son las que intersecan o tocan a la curva en los extremos del intervalo y por ello, sirven de cota al conjunto de rectas de la familia que cortan a la curva en algún punto del intervalo (0, 1). Con base en estas consideraciones visuales, la estrategia de solución, en esta nueva versión del problema, consiste en probar que *cualquiera de las rectas de la familia que corta a la curva en el intervalo (0, 1), lo hace en un solo punto*.

Sin embargo, la imagen gráfica que tiene de la función $f(x)$, en el intervalo (0, 1) (una curva creciente, cóncava hacia arriba, que va del punto (0, 0) al punto (1, 1) y la imagen gráfica de la familia de funciones, $g(x)$, como una recta de pendiente 3 desplazándose de abajo hacia arriba en el eje Y, a medida que el valor de c aumenta, hace tan evidente que las rectas de la familia que intersecan a la curva en el intervalo (0, 1) lo hacen una sola vez en dicho intervalo y que éstas se encuentran entre la recta $g(x) = 3x$, que interseca a la curva en el punto (0, 0) y la recta $g(x) = 3x-2$ que es tangente a la curva en el punto (1, 1); que este hecho lo utilizó como argumento de prueba cuando dice: "geométricamente podemos ver que cualquiera de estas rectas interseca en (0, 1) a $f(x) = x^3$ en un solo punto. Aunque termina con una nota que pone de manifiesto que su significado de prueba matemática no corresponde al tipo de argumento que en este problema utilizó. La nota dice: "*No creo que sea una demostración pero creo que geométricamente puede convencer*".

El proceder del Profesor 2, en los problemas 2 y 3, al igual que en el caso del Profesor 1, es muy similar al que tuvo en el problema 1 y sirve para reafirmar las significaciones que pone en juego en el proceso de resolución de este tipo de problemas. Lo mismo sucede con otros muchos profesores de donde pudimos establecer que, en general, los profesores que usan los conceptos de función y derivada en el análisis, interpretación de problemas; utilizan la representación gráfica de la función para analizar e interpretar el problema, lo cual da pie a su reformulación como un problema relativo a las gráficas. En este nuevo contexto diseñan la estrategia de resolución, esto es, la representación gráfica no sólo juega un papel importante en el análisis del problema, sino también en el diseño de la estrategia de solución. Ya diseñada la estrategia, se observan dos maneras de proceder, la de aquellos que consideran que la demostración requiere de argumentos analíticos (esto se refleja desde el momento en que formula la estrategia) y, aunque dicha estrategia se concibe a partir de la representación gráfica de la función, los argumentos que se utilizan son analíticos, lo cual indica no sólo la comprensión de las propiedades de la función en ambos registros, sino la coordinación de los mismos, esto es, la comprensión entre la forma de estar representada una propiedad en un registro y la forma de estar representada en el otro. La manera de proceder es la de aquéllos que utilizan argumentos visuales, es decir, argumentan la validez de una afirmación diciendo que se ve en la gráfica. Esto parece deberse al significado de demostración matemática o a la falta de un nivel de coordinación entre los registros analítico y gráfico; es decir, de no saber cómo argumentar analíticamente lo que dicen que es evidente en la gráfica.

Conclusiones

Las personas que resuelven con éxito problemas no rutinarios relacionados con los objetos matemáticos función y derivada de una función:

- Utilizan con propiedad y creatividad los diversos registros de representación semiótica.
- Tienen un alto dominio de las reglas de operación y de transformación de las expresiones en los diversos sistemas de representación.
- Muestran capacidad para interpretar las características de una función mostradas en un registro, en los otros.
- Tienen un amplio repertorio de conceptos y propiedades asociados con las funciones en general y con la función específica del problema en particular.
- Muestran gran habilidad para transformar un problema en otro equivalente

- Tienen un buen repertorio de estrategias de solución de diversos tipos de problemas y las saben adecuar a las condiciones del problema para el diseño de la estrategia apropiada para la resolución del problema específico que se quiere resolver.
- Usan con bastante frecuencia, la representación gráfica de las funciones para reformular el problema; lo mismo que para diseñar la estrategia de solución.
- Con frecuencia utilizan el lenguaje asociado a la representación gráfica, como argumento de prueba.
- Diseñan estrategias de solución a partir de la representación gráfica de la función del problema, pero los argumentos que utilizan para desarrollar dicha estrategia, procuran que se refieran a la representación analítica.
- Muestran familiaridad con la manera de argumentar en Matemáticas.
- Tienen una concepción clara y precisa de lo que significa demostrar en Matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Font, V. (2001) Representation in Mathematics Education. Philosophy of Mathematics Education Journal, 14, 1-35. http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome 14/contents.htm.

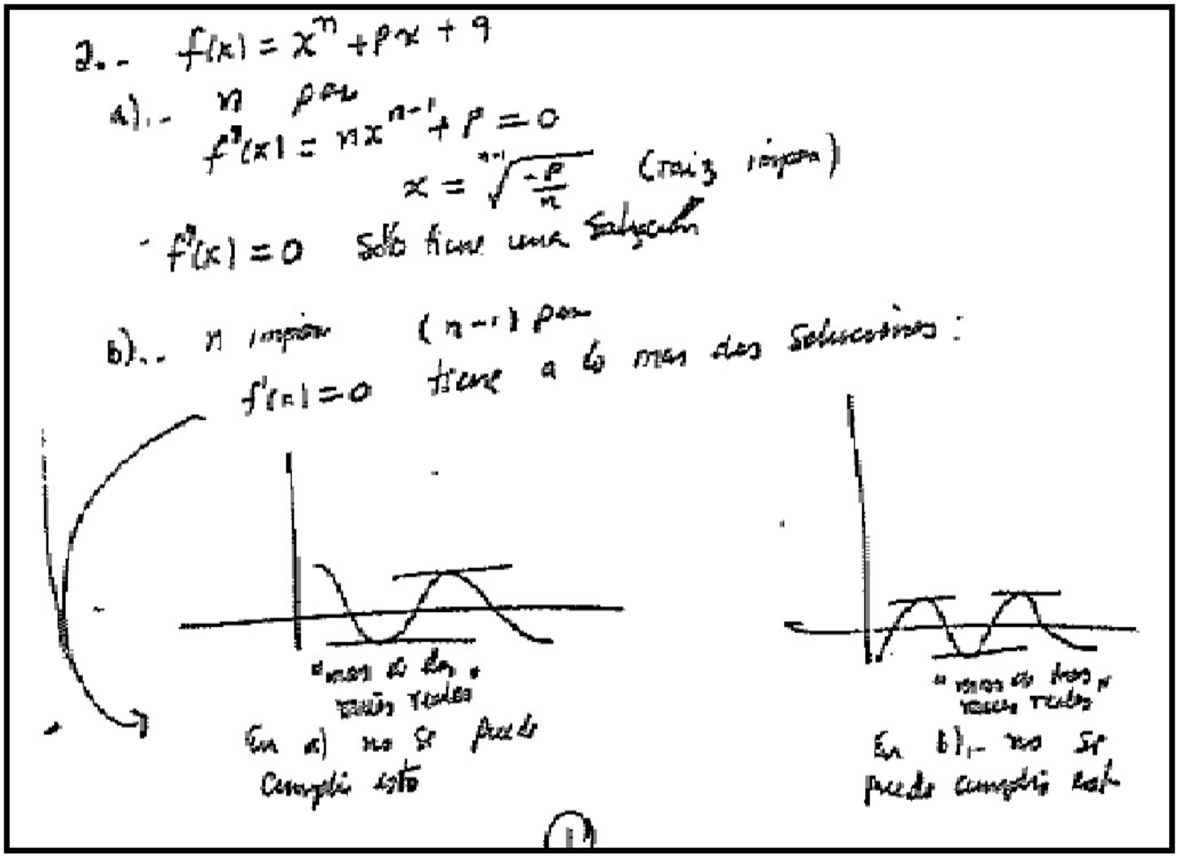
Godino J. D. (2003) Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm.

Santos Trigo, L. M. (1997) Principios y Métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica. México. Segunda Edición.

Schoenfeld, A. H. (1987). Cognitive science and mathematics education. London, Lawrence Erlbaun Ass.

ANEXO

SOLUCIONES DEL PROFESOR 1 A LOS PROBLEMAS 2, 3 Y 4



2.- $f(x) = x^n + px + q$

a).- n par

$f'(x) = nx^{n-1} + p = 0$

$x = \sqrt[n-1]{\frac{-p}{n}}$ (raiz impar)

· $f'(x) = 0$ sólo tiene una solución

b).- n impar $(n-1)$ par

$f'(x) = 0$ tiene a lo mas dos soluciones:

PROBLEMA 2

3.- Resolver $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$

Sol: - Consideraremos sólo $x > 0$ ($x \geq 0$ para que $\sqrt{x}$ tenga sentido y $x \neq 0$ para q' $\frac{1}{x}$ también lo tenga

Para simplificar expresiones tomaremos $x = y^2$ ($y>0$;
La desigualdad se convierte en

$$2y > 3 - \frac{1}{y^2} \Longleftrightarrow 2y^3 > 3y^2 - 1 \Longrightarrow 2y^3 - 3y^2 + 1 >$$

Haciendo $f(y) = 2y^3 - 3y^2 + 1$, tratemos de ver para qué valores de y es positiva

¡GRAFIQUÉMOSLA!

$f(0) = 1$ $\quad f(1) = 0$

$f'(y) = 6y^2 - 6y = 6y(y-1) = 0 \Rightarrow y = 1$

$f''(y) = 12y - 6$ $\qquad f''(0) = -6 < 0$, $f''(1) = 6 > 0$

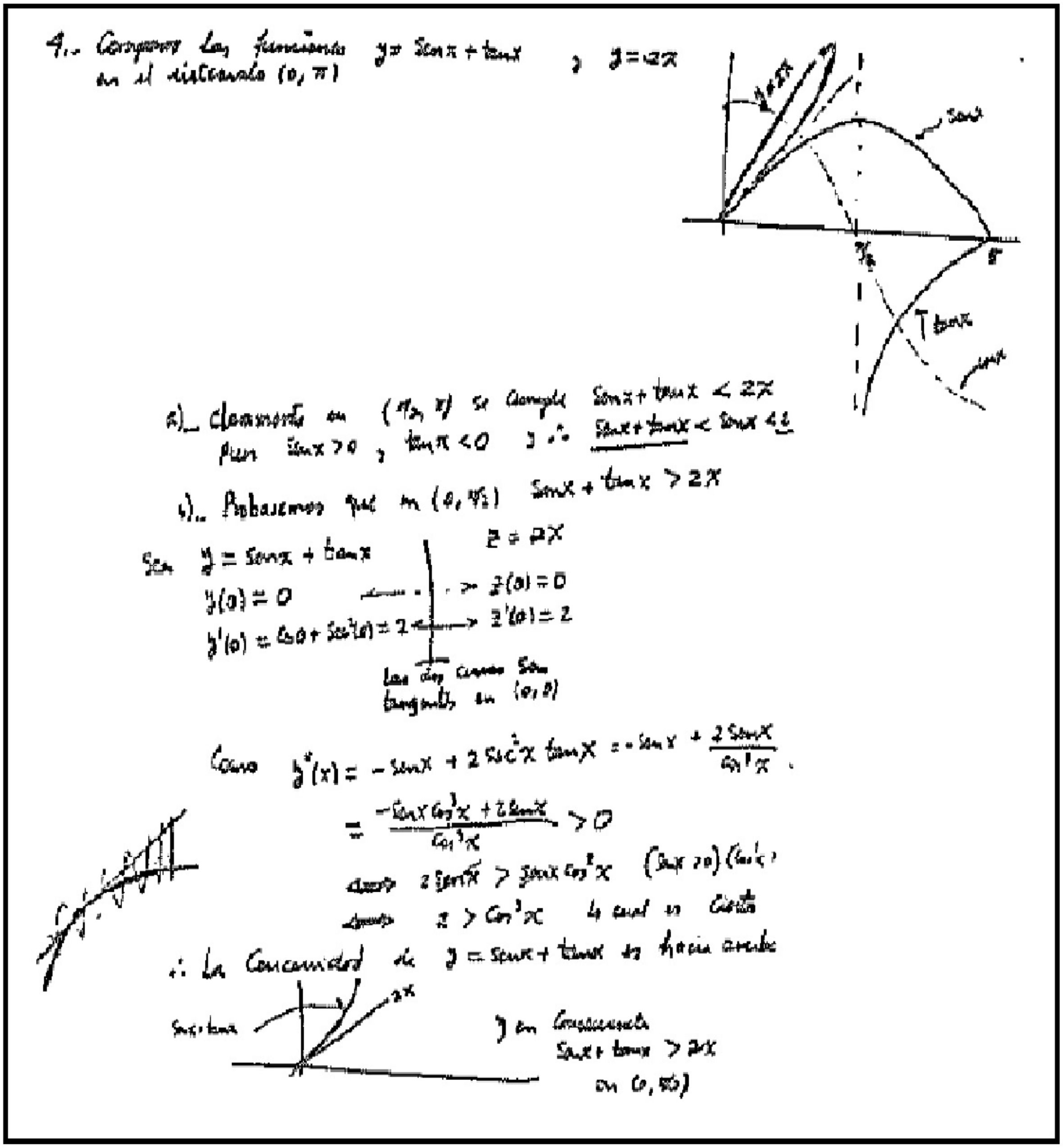
$\therefore$ f tiene máximo relativo en 0 y mínimo rel. en 1

Como f toma su mínimo en $y = 1$ y $f(1) = 0$

entonces $f(y) > 0$ $\forall$ $y \neq 1$.

$\therefore$ $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ $\quad \forall$ $x \neq 1$ $\quad (x > 0)$

PROBLEMA 3



4.- Comparar las funciones $y = \operatorname{sen} x + \tan x$ y $z = 2x$ en el intervalo $(0, \pi)$
$y = 2x$
$\operatorname{sen} x$
$\pi/2$
π
$\tan x$
a)_ claramente en $(\pi/2, \pi)$ se cumple $\operatorname{sen} x + \tan x < 2x$
Pues $\operatorname{sen} x > 0$, $\tan x < 0$ y ∴ $\underline{\operatorname{sen} x + \tan x < \operatorname{sen} x < 1}$
b)_ Probaremos que en $(0, \pi/2)$ $\operatorname{sen} x + \tan x > 2x$
Sea $y = \operatorname{sen} x + \tan x$
$z = 2x$
$y(0) = 0$
$z(0) = 0$
$y'(0) = \cos 0 + \sec^2(0) = 2$
$z'(0) = 2$
Las dos curvas son tangentes en $(0,0)$
Como $y''(x) = -\operatorname{sen} x + 2\sec^2 x \tan x = -\operatorname{sen} x + \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$
$= \frac{-\operatorname{sen} x \cos^3 x + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} > 0$
desde $2 \operatorname{sen} x > \operatorname{sen} x \cos^3 x$ $(\operatorname{sen} x > 0)$
desde $2 > \cos^3 x$ lo cual es cierto
∴ La concavidad de $y = \operatorname{sen} x + \tan x$ es hacia arriba
$\operatorname{sen} x + \tan x$
$2x$
y en consecuencia $\operatorname{sen} x + \tan x > 2x$ en $(0, \pi/2)$

PROBLEMA 4

SOLUCIONES DEL PROFESOR 3 A LOS PROBLEMAS 1, 3 Y 5

Sea $f(x) = x^3 - 3x + c$, $x \in \mathbb{R}$.

Entonces $f'(x) = 3x^2 - 3$

$= 3(x^2 - 1)$

Si $x \in (0,1)$, entonces $x^2 - 1 \neq 0$,

y así $f'(x) \neq 0$ para $x \in (0,1)$.

Se sigue que $f(x)$ es una función injectiva en el int. $(0,1)$,

y por lo tanto $f(x) = 0$ sólo puede tener una solución dentro de $(0,1)$.

PROBLEMA 1

Problema 3.

$2\sqrt{x} = 3 - \frac{1}{x}$, $2x\sqrt{x} = 3x - 1$. $4x^3 = 9x^2 - 6x + 1$.

$p(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$ 1 es una raíz de $p(x)$. Dividiendo $p(x)$ entre $x-1$,

$$\begin{array}{rrrr|l} 4 & -9 & 6 & -1 & 1 \\ & 4 & -5 & 1 & \\ \hline 4 & -5 & 1 & 0 & \end{array}$$

$p(x) = (x-1)(4x^2 - 5x + 1)$. 1 es también raíz de $4x^2 - 5x + 1$. Haciendo la división,

$$\begin{array}{rrr|l} 4 & -5 & 1 & 1 \\ & 4 & -1 & \\ \hline 4 & -1 & 0 & \end{array}$$

tenemos $p(x) = (x-1)^2(4x-1)$.

Entonces, para $x \neq 1$, $2\sqrt{x} \neq 3 - \frac{1}{x}$ ($\frac{1}{4}$ es una raíz de $p(x)$, pero no es una solución de $2\sqrt{x} = 3 - \frac{1}{x}$), por lo que $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ para todo x positivo excepto $x = 1$.

PROBLEMA 3

Problema 5.

Paso 1. Existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c)=c$.

Sea $g(x)=f(x)-x$. Como $f(0)\geq 0$, $g(0)\geq 0$. Además, $f(1)\leq 1$, por lo que $g(1)\leq 0$. Si $g(0)=0$ o $g(1)=0$, entonces $c=0$ ó 1. Si $g(0)>0$ y $g(1)<0$, entonces existe, por el Teorema del Valor Intermedio, un $c\in[0,1]$ tal que $g(c)=0$. Para este c, $f(c)=c$.

Paso 2. El número c es único.

Supóngase que existen c_1 y c_2 tales que $f(c_1)=c_1$ y $f(c_2)=c_2$. Por el teorema del Valor Medio, existe $d\in[c_1,c_2]$ tal que $f'(d)=\dfrac{f(c_2)-f(c_1)}{c_2-c_1}=1$, contradiciendo el hecho de que $f'(x)\neq 1$ para todo $x\in[0,1]$. Entonces existe un único c tal que $f(c)=c$.

QED

PROBLEMA 5

Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques ?

Fernando Hitt
Département de Mathématiques de l'Université du Québec à Montréal

Résumé.
Dans les années 80, les représentations mentales étaient analysées par les didacticiens dans une approche constructiviste. Un changement de paradigme, mais toujours dans une approche constructiviste, a eu lieu dans la même décade avec l'analyse des constructions des concepts mathématiques sous un cadre théorique basés sur les représentations sémiotiques. Nouveaux cadres théoriques sur la construction sociale des connaissances a eu lieu à la fin du siècle dernier, où les nouveaux paradigmes prennent en compte une perspective de construction sociale des connaissances. Différentes méthodes d'enseignement ont apparu sous ces cadres théoriques et nouvelles notions comme la représentation fonctionnelle et son évolution dans un milieu d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion (ACODESA). Dans ce document nous voulons montrer comme cette évolution s'insère dans un cadre théorique de l'activité dans un processus dialectique entre activité et communication dans la classe de mathématiques.

Introduction

La recherche à la fin du XIX^{e} et au début du XX^{e} siècle autour de la signification du signe a marqué le XX^{e} siècle. Il y eut deux courants principaux. D'une part, un suivi par Peirce (1992, 1998), où le signe est une triade « objet-representamen-interprète », d'autre part, celui de Saussure (1915/1973), lié au signe linguistique, où le signe est un couple constitué par le concept (représentation mentale) et l'image acoustique (son en rapport à l'objet).

Sans prendre parti pour l'une ou l'autre de ces tendances, il est indéniable qu'à partir de ces travaux, les représentations mentales ont commencé à prendre un rôle important dans l'étude de la construction des connaissances. Dans les travaux de Piaget et coll., nous pouvons trouver une approche profonde autour de la notion de représentation mentale. Dans les travaux plus récents, nous voyons cette influence pour essayer de comprendre les représentations mentales des individus à travers leurs productions. Par exemple, Richard (1990), en psychologie, se centre sur « Les Activités mentales » et Vinner et Tall (1991), en didactique des mathématiques, ont développé les aspects théoriques d'« image conceptuelle » et de « définition du concept ». Ces approches ont promu la recherche sur le rôle des représentations mentales pour essayer de comprendre les constructions cognitives des élèves. L'accent était alors sur l'étude des représentations mentales à travers les représentations sémiotiques, soit sur ce qui a été construit et non pas sur la façon dont il a été construit. Cette approche a marqué le constructivisme.

Un changement substantiel de paradigme a émergé dans les années quatre-vingt où l'objet principal d'étude était autour du rôle des représentations sémiotiques dans la formation des concepts mathématiques. C'est en essayant de voir le revers de la médaille (toujours dans une approche constructiviste), pour ainsi dire, que Janvier (1987) et Duval (1988, 1993, 1995), entre autres, se sont intéressés à l'analyse du rôle des représentations sémiotiques dans le processus de conversion entre représentations dans la construction de concepts mathématiques. L'idée derrière ces deux approches était, et continue à être, que la représentation d'un objet mathématique est partielle par rapport à ce qu'elle représente, d'où l'importance des processus de « traduction entre représentations » pour Janvier ou de « conversion entre représentations » pour Duval. Donc, Janvier a proposé sa table de conversion, tandis que Duval a introduit les notions de « Registre de représentations » et de processus de conversion entre représentations des différents registres. Pour Janvier et Duval, la conversion de représentations était liée aux représentations institutionnelles (ceux que l'on trouve dans les livres, ou dans les écrans des ordinateurs, etc.).

L'approche de Janvier est étroitement liée à la notion de fonction et à l'importance de l'élaboration des tâches sur la modélisation mathématique. Pour Janvier (Claude) et Janvier (Bernadette), cette approche sur les fonctions et les processus de modélisation les a amenés à discuter sur une représentation particulière « schéma » qui n'a pas de place dans la notion de registre chez Duval, mais cette approche a resté dans quelques documents internes.

Toutefois, dans le cas de Duval, la précision sur les processus cognitifs associés à la conversion entre les représentations conduit à analyser les unités significatives sur lesquelles on devrait se concentrer dans une représentation lorsque l'on va faire une conversion vers une autre représentation dans un autre registre. Sur quoi fixons-nous notre attention quand on veut passer d'une représentation dans un registre à une autre représentation dans un autre registre? Précisément, dans le processus d'association, nous devons prêter attention aux unités significatives liées à chacune des représentations (Duval, 1988, 1993, 1995).

Représentations dans un cadre théorique de communication dans la classe de mathématiques

Compte tenu d'un apprentissage socioculturel dans la classe de mathématiques (Hitt, 2003, 2004, 2006, 2007), Hitt présente certaines représentations qu'il n'est pas possible d'étudier exclusivement sous le cadre théorique des registres de représentation (Duval, 1993, 1995).

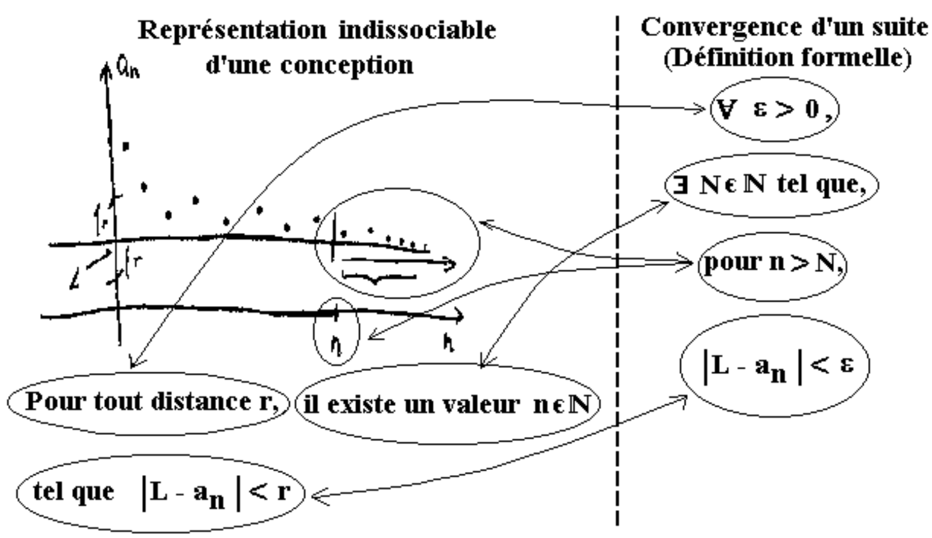


Figure 1. Un exemple d'une production en équipe liée à une représentation fonctionnelle (Hitt, 2003) dans une ambiance d'activité et communication dans la classe de mathématiques

Plus tard, Duval (2006, p. 111) reconnaît ce type de représentations et les nomme représentations auxiliaires transitoires. De notre point de vue, en les appelant ainsi, Duval (*ibid.*) leur attribut implicitement un rôle mineur dans la construction de concepts. Ainsi, Duval donne une primauté aux représentations sémiotiques institutionnelles sur les représentations, disons pour le moment, non institutionnelles dans la construction de concepts mathématiques. Cependant, cette approche néglige le rôle important des représentations « non officielles » (pour l'instant, nous allons les appeler de cette manière pour les distinguer des représentations officielles) qui émergent généralement dans la résolution de problèmes et de situations problèmes indépendamment de la construction d'un concept mathématique. Dans le processus de modélisation mathématique (Hitt et Morasse, 2009) où les représentations non officielles émergent de façon naturelle, elles n'ont pas un caractère temporaire comme Duval (*ibid.)* l'affirme ; en fait, dans une approche socioculturelle, ses représentations ont une tendance à se développer par la communication et validation dans la classe de mathématiques vers les représentations officielles.

Comme nous l'avons noté dans Hitt (2003, 2004, 2006), il y a des représentations qu'il n'est pas possible de classer à l'intérieur d'un registre de représentations. Ces représentations sont très importantes dans la construction de concepts (Hitt, 2003) ou dans la résolution de situations problèmes (diSessa et al, 1991; Hitt, 2004, 2006; Hitt et Morasse, 2009; Hitt et González-Martín, en preparation). Selon une approche de la construction sociale des connaissances, diSessa *et coll. (ibid.*) et Hitt et González-Martín (*ibid*.) montrent l'importance d'observer et d'analyser les constructions d'étudiants et, aussi, d'analyser leur évolution dans un contexte de construction social des connaissances au sein de la classe de mathématiques.

Les résultats obtenus en Hitt (2003, 2004 et 2006), Hitt et Morasse (2009) et Hitt et González-Martín (en preparation) nous ont permis d'identifier ce type de représentations comme une représentation de type fonctionnel, une représentation mentale qui émane dans la résolution d'un problème non routinier, qui s'exprime par une représentation liée à l'action. Ce caractère fonctionnel de la représentation est très important pour comprendre un énoncé mathématique et, en même temps, pour permettre l'action de résoudre le problème ou la situation problème liée à l'énoncé.

Selon ce point de vue, au regard de l'insuffisance de l'approche constructiviste de Duval, d'une part, et de la possibilité d'avoir des représentations qui n'appartiennent pas à un registre de représentations, nous avons vu la nécessité de rechercher des solutions alternatives liées à la construction socioculturelle des connaissances et d'examiner les représentations fonctionnelles en profondeur.

À la recherche d'une théorie globale et d'une théorie locale autour de l'activité et la communication dans la classe de mathématiques

Auteurs comme Sierpinska (1998), donnent préférence à une approche interactionniste sur l'approche socioconstructiviste et socioculturelle autour de l'analyse de la communication oral dans la classe de mathématiques liée aux constructions des connaissances. La plupart des auteurs dans le même volume en Steinbring *et coll., (*1998), prônent que l'interactionnisme est le mieux placé pour rendre compte des interactions de communication dans la classe de mathématiques. Par contre, Lerman (1998 p. 345) affirme de son côté que les théories socioculturelles offrent une meilleure approche pour décrire le processus par lequel l'environnement construit les individus (et vice versa). Alors, Steinbring *et coll.*, et Lerman coïncident pour le rejet de l'approche socioconstructiviste comme l'idéal pour décrire une construction sociale où la communication et l'environnement sont fondamentaux. Sierpinska (*Ibid.*), entre autres, se penche sur les interactionnistes liés aux travaux de Wittgenstein, par contre, Lerman (*Ibid.*), s'incline plutôt à une théorie de l'activité. En fait, Davydov (1999, p. 47) signale que dans une approche théorique de l'activité, on ne doit opposer activité avec communication, mais plutôt les considérer comme inséparables.

Notre travail est lié à l'analyse de ce qui se passe dans une microsociété qui est la classe de mathématiques, précisément, l'analyse des processus de résolution de situations problèmes où, la communication est essentielle, la manipulation d'objets physiques, le travail individuel, en équipe et en grand groupe, aussi comme les gestes. Sous cette perspective, nous nous approchons à la théorie de l'activité dans sa nouvelle génération. Cette théorie basée sur le travail de Liontev (considéré la 1ere génération) prendre en compte l'articulation entre *activités* et *motives, actions et objectifs,* et *opérations* restreintes à un contexte. Cette théorie peut être vue comme un système social d'interactions; et comme Nardi (1997) signale:

> Activity theory is a powerful and clarifying descriptive tool rather than a strongly predictive theory. The object of activity theory is to understand the unity of consciousness and activity. Activity theory incorporates strong notions of intentionality, history, mediation, collaboration and development in constructing consciousness. Activity theorists argue that consciousness is not a set of discrete disembodied cognitive acts (decision making, classification, remembering...) and certainly it is not the brain; rather consciousness is located in everyday practice: you are what you do. And what you do is firmly and inextricably embedded in the social matrix of which every person is an organic part. This social matrix is composed of people and artifacts. Artifacts may be physical tools or sign systems such as human language. Understanding the interpenetration of the individual, other people and artifacts in everyday activity is the challenge activity theory has set for itself. (p. 4)

Nous prenons la même théorie qui a été élargie par Engeström (1999) qui nous permet de mieux appliquer les différentes phases autour de la division du travail face à une tâche mathématique (individuel, en équipe, en grand groupe) dans notre approche méthodologique.

De ce point de vue, nous avons une théorie générale socioculturelle Vygotskienne avec une approche par la théorie de l'activité basée sur la proposition d'Engeström, qui va nous permettre d'analyser l'activité et la communication dans la classe des mathématiques face à la résolution d'une situation problème. Alors, la question qu'émerge est de savoir, ce que nous voulons promouvoir dans la classe de mathématiques ?

Dans la Figure 2, nous voulons présenter une représentation visuelle des étapes de la méthode d'enseignement ACODESA. En même temps, une adaptation du triangle d'Engeström qui montre les interactions entre les différents acteurs dans un processus de résolution d'une situation problème en accord avec la méthode ACODESA.

Comme Engeström (1999, p. 28), l'aspect principal dans la théorie de l'activité est la médiation. Cet aspect c'est basé de l'approche théorique de Vygotsky, comme le signale Cole (1999, p. 89): "Vygotsky (1934/1987) also emphasized the qualitative change in human activity engendered by tool mediation". Alors, la médiation est le principal ingrédient dans le triangle d'Engeström qui modélise un système d'activité collective. Dans l'approche théorique de Liontev, la division du travail est importante. Ainsi, dans le modèle d'Engeström on a ce composant aussi comme un aspect principal. Le sujet peut être, un élève, une équipe, le group en entier inclus l'enseignant, l'enseignant; cela dépend de l'étape en jeu dans un moment donné avec ACODESA. Les règles vont en accord avec la méthode d'enseignement. Un aspect très important est la médiation d'artefacts. Dans ce noeud, on rassemble: la situation problème, les objets physiques disponibles, les productions des élèves (représentations), la communication, etc. Les flèches nous indiquent l'interaction entre les différents acteurs dans le processus de résolution d'une situation problème. Nous avons une chaîne de significations pour arriver à une solution de la situation.

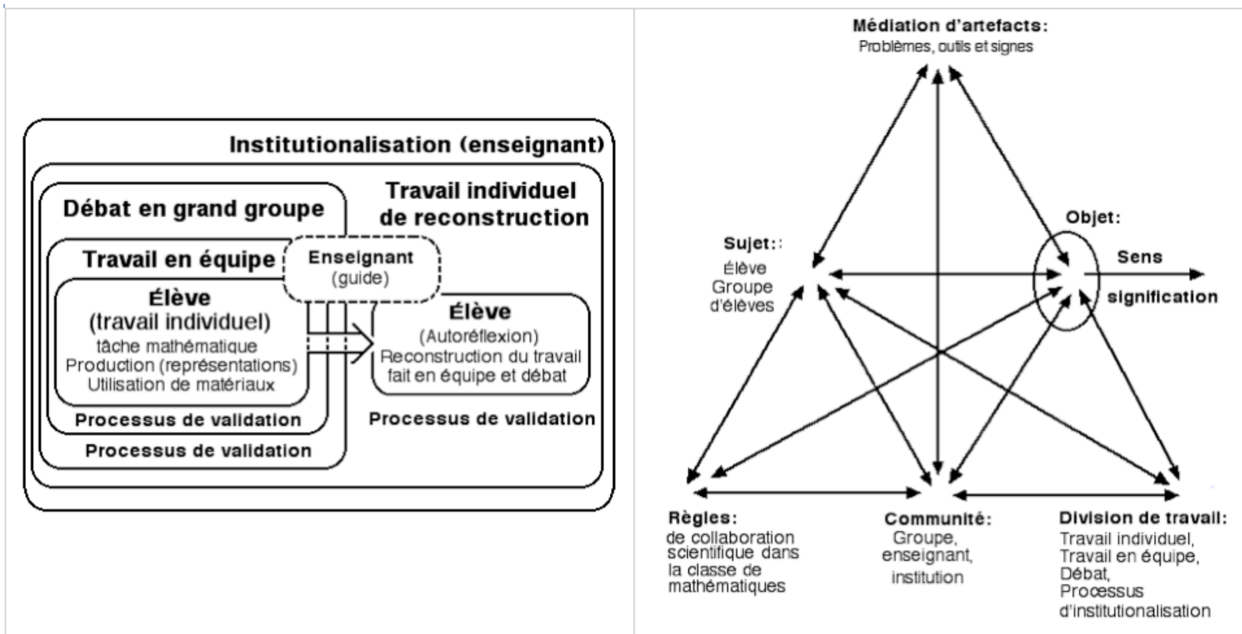


Figure 2. ACODESA (Apprentissage Collaborative, Débat Scientifique et Autoréflexion) émergé dans la théorie de l'activité selon Engeström (1999)

Dans un contexte socioculturel, nous nous sommes mis à la tâche d'analyser l'approche de Bourdieu (1980, p. 88-89), autour de la notion d'*habitus* :

> Les conditionnements associés à une classe particulière de conditions d'existence produisent des *habitus*, systèmes de *dispositions* durables et transposables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes, c'est-à-dire en tant que principes générateurs et organisateurs de pratiques et de représentations qui peuvent être objectivement adaptées à leur but sans supposer la visée consciente de fins et la maîtrise expresse des opérations nécessaires pour les atteindre, objectivement « réglées » et « régulières » sans être en rien le produit de l'obéissance à des règles, et étant tout cela, collectivement orchestrées sans être le produit de l'action organisatrice d'un chef d'orchestre.

Est-il possible d'adapter cette notion générale d'*habitus* qui est liée à la pratique dans la vie courante au milieu scolaire ? Dès notre point de vue, la réponse est oui, en prenant l'école comme un micro société où la pratique dans un milieu d'enculturation (la classe de mathématiques) joue un rôle important dans la formation d'un *habitus* lié, dans notre cas, à la modélisation mathématique en 3^{e} secondaire (élèves de 14 ans).

L'*habitus* devrait être lié aux représentations fonctionnelles et à leur évolution dans un milieu socioculturel. Nous voulons nous attarder à des éléments d'une théorie locale sur les représentations qui devrait permettre d'expliquer, d'une parte, les constructions des connaissances d'un point de vue d'enculturation dans la classe de mathématiques et, d'autre parte, la construction individuelle des connaissances des élèves dans ce milieu.

Notre approche méthodologique prend en compte différentes étapes (voir les étapes d'ACODESA) dans un milieu socioculturel lié à la théorie de l'activité. La réflexion individuelle d'un élève est faite à l'intérieur de ce milieu, le travail en équipe, la discussion en grand groupe et le retour à la réflexion individuel sont étapes dans notre méthodologie, pour finaliser avec un processus d'institutionnalisation.

Plus précisément, la méthodologie ACODESA propose les étapes suivantes pour améliorer la compréhension et la résolution de problèmes et de situations problèmes dans la classe de mathématiques. Elle a été conçue comme une méthodologie de recherche et d'enseignement.

1) **Travail individuel dans une approche social de constructions des connaissances dans la classe de mathématiques**

Le travail individuel dans un premier temps vise à fournir aux étudiants la possibilité de se représenter le problème ou la situation problème afin qu'ils puissent avoir une certaine idée avant de passer à la discussion d'équipe (voir Figure 1 et 2). Les représentations fonctionnelles (probablement non liées aux représentations institutionnelles) apparaissent souvent à ce stade et, à travers elles, les élèves produisent un schéma (représentation externe) qui leur permet de passer à l'action.

2) **Travail en équipe dans une approche social de constructions des connaissances dans la classe de mathématiques**

L'interaction entre les élèves a comme fonction l'enrichissement de l'approche individuelle développée dans la première étape. En règle générale, les étudiants ayant le plus de pouvoir de persuasion sont ceux qui vont diriger l'équipe pour la résolution de la tâche mathématique. C'est pourquoi il est crucial que chaque étudiant ait d'abord eu une approche individuelle. La manipulation des objets physiques est très importante dans cette étape (Figure 2). Habituellement, c'est là que commencent les processus de validation (Figure 1) et le travail de raffinement des représentations fonctionnelles dans un processus de communication qui doit se matérialiser vers les représentations dites institutionnelles dans un processus de communication. C'est ici que les normes (voir Figure 2) font acte de présence pour la distribution de travail entre les membres des équipes.

3) **Débat (avec la possibilité de promouvoir un débat scientifique)**

Le rôle de l'enseignant est de promouvoir la communication scientifique dans la classe de mathématiques (Legrand, 1993). Son rôle n'est pas de fournir la réponse correcte aux élèves (voir Figure 1 et 2), mais de les questionner et aussi de promouvoir un débat scientifique entre eux. Les différents résultats donnés par les équipes sont pesés et discutés par les différentes équipes jusqu'à arriver à la conviction et au consensus. Encore une fois, un processus de raffinement des représentations non institutionnelles apparaît régulièrement à ce stade. Attention! Il est habituel pour les élèves d'exprimer leur accord lors d'une discussion en grand groupe. L'enseignant peut donc penser que ses élèves ont compris, mais quelques élèves s'ils sont consultés individuellement, seront probablement incapables de reconstituer par eux-mêmes ce qui a été exprimé par les autres (Thompson, 2002). C'est pourquoi la prochaine étape est essentielle à notre modèle d'enseignement. À ce stade il faut ramasser les productions des élèves avant de passer à l'étape suivante.

4) **L'autoréflexion (dans un milieu socioculturel dans la classe de mathématiques)**

Cette étape n'est pas explicitée dans les approches d'apprentissage collaboratif et dans les investigations non plus (voir Figure 1). La reconstruction individuelle des connaissances qui ont émergées en équipe et en grand groupe est une étape essentielle pour promouvoir l'*abstraction* (reconstruction individuelle de la connaissance dans notre cas) chez les élèves. Nous prenons en compte que le consensus dans la classe de mathématique peut être éphémère pour quelques élèves et pour cela l'importance de revenir sur la reconstruction de ce qui avait été fait en classe.

5) Le processus d'institutionnalisation

À ce stade, l'enseignant résume ce qui a été produit par les étudiants et permet une utilisation efficace des représentations institutionnelles (voir Figure 1 et 2). De plus, l'enseignant peut certainement discuter les différentes représentations qui ont émergé au cours de la résolution de la tâche mathématique.

Comment et quand utiliser la méthodologie ACODESA?

Les situations problèmes sont généralement conçues dans le but de générer une pensée diversifiée. Par contre, en général, les exercices sont conçus pour promouvoir une pensée avec un but précis, ou si vous voulez, ils sont conçus pour consolider la connaissance en savoir (distinction entre connaissance et savoir dans le sens de Conne, 1992). Les problèmes ou les situations problèmes pour lesquels ACODESA est intéressante sont ceux qui permettent des voies de solution diversifiées.

De cette façon, la méthodologie ACODESA a un sens quand il s'agit de la résolution de situations problèmes ou des problèmes où l'on a l'intention de promouvoir une pensée diversifiée comme une phase préliminaire avant de promouvoir une pensée vers un but précis. C'est-à-dire, on essaye de promouvoir une connaissance et après le savoir.

Dans un cours magistral, il est difficile de promouvoir une pensée diversifiée. C'est dans une approche d'apprentissage collaborative que la pensée diversifiée pourrait donner plus de fruits. Les différents membres de chaque équipe pourraient avoir des idées différentes et la discussion en grand groupe proportionne l'opportunité aux élèves de préciser leurs idées et commencer le travail d'un pensée vers un but précis. Le control de la classe pour faire avancer les élèves est donné par les différentes étapes de la méthode d'enseignement ACODESA; et la théorie de l'activité proportionne la base théorique pour un apprentissage où les différentes étapes de la méthode et la manipulation d'objets jouent un rôle important.

De cette façon, la méthodologie ACODESA a un sens quand il s'agit de la résolution de situations problèmes ou des problèmes où l'on a l'intention de promouvoir une pensée diversifiée comme phase préliminaire avant de promouvoir une pensée vers un but précis.

Les situations problèmes sont généralement associées à des processus de modélisation mathématique. Ces processus sont habituellement associés à des tâches non routinières qui génèrent chez les élèves la production des représentations fonctionnelles, soit des représentations qui sont liées à l'action et se dégagent lors de la lecture d'un énoncé mathématique pour comprendre la tâche, et la production d'une représentation qui émerge en vue de résoudre la tâche. La représentation n'est pas fonctionnelle si elle n'est pas liée à l'action.

Cette distinction combinée au fait de travailler une méthode d'enseignement où la dialectique artéfact-outil, division du travail, communication dans la classe, dans un contexte d'interaction sociale nous éloigne du constructivisme, socioconstructivisme et interactionnisme et nous approche à la théorie de l'activité et elle à une théorie socioculturelle Vygotskienne. Dans ce contexte, dans notre cadre théorique, nous distinguons les représentations fonctionnelles qui peuvent s‘extérioriser par des représentations non institutionnelles ou institutionnelles. Avec la méthodologie ACODESA, nous essayons d'être le moteur pour la construction d’un *habitus* au sens de Bourdieu. Cela dit, nous essayons de promouvoir la construction d'une structure (structurant dans le sens de Bourdieu) qui sert à la structuration de l'activité des individus lorsqu'il s'agit de résoudre un problème ou une situation problème dans le contexte de la modélisation mathématique. En bref, un *habitus* lié à la résolution des problèmes et des situations problèmes liés à la modélisation mathématique dans un environnement socioculturel.

Immergés dans un cadre théorique de l’action, nous pouvons utiliser l’approche d’Engeström où l’*habitus* est construit comme une chaine où chaque anneau peut être représenté par le triangle d’Engeström, dans une approche complexe (un système) pour l’étude de la communication dans la classe de mathématiques (voir Figure 2).

But de l’expérimentation

Nous avons développé cinq activités conçues pour travailler pendant 13 rencontres d’une heure 15 minutes. L'intention générale de l'expérience était de promouvoir la construction d'un *habitus* chez les élèves sur la résolution de situations problèmes en lien avec le contenu mathématique sur la modélisation mathématique et les fonctions. Plus précisément, notre intention était de promouvoir chez l’élève un *habitus* lié à la construction d’un schéma (à partir d'un énoncé lié à une situation problème), de promouvoir l’association avec d'autres représentations : verbales, numériques, construction de l’allure de la représentation graphique (qui peut jouer comme élément de contrôle), construction de la représentation algébrique et, finalement, la représentation graphique à l’aide de la représentation algébrique. Tout cela pour expliquer à l’aide des différents modèles construits le phénomène étudié. La méthode ACODESA, en plus de promouvoir la coordination entre représentations en incluant les représentations fonctionnelles dans un milieu socioculturel, veut promouvoir une sensibilité à écouter ses coéquipiers et à faire un débat scientifique si nécessaire. L’argumentation pour convaincre et la sensibilité à la contradiction devraient prendre un niveau plus haut vers la démonstration. Ici, l’*abstraction* passe par plusieurs étapes et se termine avec la reconstruction des processus développés avec ses coéquipiers et en grand groupe, *abstraction* qui devrait être intégrée à un savoir dans leur processus d’apprentissage.

Expérimentation sur la modélisation mathématique en 3e secondaire avec ACODESA

Nous avons effectué une expérimentation de 13 séances avec deux groupes de 3^{e} secondaire au Québec (âge de 14 ans). L'enseignant était intéressé par la méthodologie ACODESA et à mener une expérience avec deux groupes d’étudiants : un groupe dit « fort » par l’enseignant de 36 élèves et un groupe dit « faible » de 24 élèves.

Description générale des activités[1]

La première activité (le photographe) favorise la construction d'une représentation fonctionnelle

[1] Présentation préliminaire ont été travaillées dans le cours MAT3225 Didactique de la variable et les fonctions à l'UQAM, par C. Janvier, B. Janvier, L. Charbonneau et F. Hitt en différents cours. L'activité du "Randonneur" a été considérablement améliorée par V. Passaro (2007, 2009) dans son mémoire de maîtrise.

et de son produit dans la représentation d'un schéma, la représentation verbale qui consiste à expliquer la situation en termes de covariation entre variables.

La deuxième activité (le randonneur) favorise la construction d'une représentation fonctionnelle et de son produit dans la représentation d'un schéma, la représentation verbale qui consiste à expliquer la situation en termes de covariance entre variables et l'« allure de la représentation graphique » produite à partir de certaines données expérimentales.

La troisième activité (jacuzzi) favorise les mêmes éléments que dans les deux autres activités, ainsi que la représentation algébrique et un retour à la représentation graphique (d'un point de vue plus précis) une fois l'expression algébrique trouvée.

Les quatrième et cinquième activités (les carrés et les ombres) font la promotion des mêmes aspects que la troisième activité, mais cette fois-ci, on essaye de renforcer la construction d'un *habitus* chez les élèves lié aux processus de modélisation mathématique et aux fonctions.

Dans Hitt et Morasse (2009), Gonzalez et coll. (2008), Hitt et Gonzalez (en cours), nous avons montré les caractéristiques à la fois de l'évolution d'une représentation « schéma » liée à une représentation fonctionnelle et de la construction des connaissances dans un travail collaboratif et l'autoréflexion. Tous ces aspects sont liés à la méthodologie ACODESA. Dans ces documents, nous avons discuté différents aspects des résultats expérimentaux, montrant des exemples de productions liées aux représentations fonctionnelles, de processus de covariation entre les variables en tant que prélude à la notion de fonction et de constructions individuelles et sociales des connaissances. C'est ici que nous discutons de la notion d'*habitus* de façon plus précise. Dans ce document, nous analysons la notion d'*habitus* que nous pensons que certains étudiants ont développée et que nous pensons forme une connaissance stable.

Comme nous l'avons déjà dit, nous avons choisi deux classes et en analysant les vidéos, nous avons choisi quelques élèves pour les suivre dans leur parcours des 13 sessions d'une heure 15 minutes. L'expérimentation a été développée pendant un mois et demi. Deux caméras ont filmé toutes les sessions.

La formation des équipes de trois élèves sous certains caractéristiques (faible, moyen, fort) n'a pas été telle que planifiée dans la méthodologie ACODESA (Hitt, 2007). Le professeur nous a expliqué que dans son école, chaque élève doit choisir une activité personnelle qui va durer tout au long de l'école secondaire (cinq ans). Ainsi, de façon naturelle les équipes se forment parce qu'ils ont des activités similaires liées soit au sport, soit au design assisté par ordinateurs, soit à la musique, les arts, etc. Il nous a demandé de respecter les équipes ainsi formées au fil des ans. Alors, on a demandé aux élèves de rester toujours avec une seule équipe de leur choix. Mais le professeur a permis aux élèves de changer s'ils le voulaient. En fait, dans certains cas, quand les compagnons d'un élève n'étaient pas en classe, l'élève pouvait travailler avec une autre équipe.

Co-construction de connaissances sous une approche de la théorie de l'activité

Groupe de 36 élèves

Dans le groupe de 36 élèves, nous avons choisi deux équipes, même si dans certaines activités il y avait plus de deux personnes par équipe. En général, deux couples ont toujours été ensemble, chacun de leur côté, pendant les activités. Voici les caractéristiques de ces quatre personnes.

Harold et *Luc*

Les idées intuitives de *Harold* lui permettent de commencer chaque situation avec un schéma qui lui permet de passer à l'action. Quand il travaille tout seul, il passe à la représentation numérique et essaye de trouver l'allure de la représentation graphique de la fonction en jeu. Quand il travaille en équipe, sous l'influence de *Luc*, il essaye d'aller le plus vite possible vers la représentation algébrique. Nous pensons que, dans son pays d'origine, *Harold* a eu une formation où les représentations algébriques ont une priorité. Il n'aime pas travailler les autres représentations en général. Ses schémas sont en général faits sans prendre beaucoup de soins. Il a de la difficulté à faire une manipulation cohérente des symboles algébriques et il a tendance à répéter ce qu'il a fait avec *Luc* sans faire vraiment une réflexion profonde. Nous pouvons dire qu'en général l'*habitus* que nous avons voulu promouvoir chez cet élève n'a pas fonctionné. Sa formation s'opposait à notre approche, et son coéquipier (*Luc*), qui avait beaucoup d'influence sur lui aussi, avait une préférence marquée pour les représentations algébriques.

Luc a eu une formation similaire à *Harold* dans son pays d'origine (différent de celui de *Harold*). Il donne une priorité aux représentations algébriques et c'est difficile de le faire s'attarder aux autres représentations (il a eu une grande influence sur *Harold*). Il a en général une bonne manipulation des symboles algébriques. Même si sa performance est bonne en général, nous ne pouvons pas dire qu'il a construit un *habitus* dans le sens que nous avons voulu. C'est plutôt le contraire, l'*habitus* qu'il avait construit dans son pays d'origine fait un blocage par rapport à notre approche.

Annie et *Carol*

Annie est une fille très attentive à ce qu'elle fait. Quand on lui demande de faire premièrement un schéma, elle le fait à l'échelle. Cela et la manipulation des objets physiques lui ont permis dans toutes les situations d'arriver à trouver l'allure de la représentation graphique sans problème. Elle a de la difficulté à passer aux processus algébriques. La discussion avec ses coéquipiers (en particulière avec *Carol*) lui permet d'avancer avec ses idées intuitives. Elle a bien construit un *habitus* comme nous l'avons promu, même si elle a de la difficulté avec l'approche algébrique. En fait, son approche avec les représentations différentes de l'algébrique lui permet d'avoir un moyen de contrôle sur les processus algébriques.

Carol est une fille qui essaye de comprendre ce que les autres disent. Elle a de la difficulté à mettre en œuvre ses idées intuitives, mais une fois qu'elle voit les autres faire, elle essaye de comprendre toutes les approches des autres. Elle a l'habileté de bien résumer ce que les autres disent. Par exemple, quand le professeur dit quelque chose, elle est capable de répéter avec ses propres mots l'idée du professeur. Dans les processus d'*abstraction*, elle essaye de résumer et présenter toutes les idées discutées en classe.

Cette fille est très à l'aise quand elle travaille en équipe avec *Annie*. Nous pouvons dire que cette fille a construit un *habitus* comme prévu par les chercheurs et le professeur. Même nous pouvons dire qu'elle a développé une sensibilité à la contradiction. Dans la dernière activité de reconstruction, elle a essayé toutes les approches de ses compagnons de classe et dans la représentation algébrique, même si elle n'a pas pu la résoudre, elle a exprimé sa déception (sentiment de malaise lié à la contradiction cognitive).

Nous avons choisi ces deux équipes parce que, même si les équipes étaient dans les deux extrémités de la salle, nous avons montré en Hitt et Morasse (2009) et Hitt et Gonzalez (en processus) que le schéma et l'approche numérique de *Annie* et *Carol* ont eu une influence dans la résolution de la dernière activité chez *Harold* et *Luc* dans leur approche algébrique. En fait, *Harold* est allé directement vers *Carol* pour lui demander si elles avaient fini, et la réponse de *Carol* fut : « l'ombre mesure un tiers de la distance parcourue par le bonhomme ». *Carol* a fait un geste du bras qui montre qu'une ligne droite représente graphiquement la situation.

Dans le groupe de 24 élèves

Après les premiers cours, *Elena* est allée demander au professeur de donner ses cours «comme avant ». Elle a expliqué qu'avec la méthodologie suivie elle est incapable de faire quoi que ce soit. Elle a dit qu'elle regarde ses compagnons faire des choses, mais qu'elle n'arrive pas à faire comme eux. Par contre, elle explique que quand le professeur fait un cours magistral, elle peut le suivre et après elle peut résoudre des problèmes similaires. Elle pense que premièrement il faut voir comment le professeur fait et elle peut l'imiter. Les deux autres membres de son équipe sont faibles et pensent de la même manière. Tous avaient de la difficulté à travailler de façon organisée. En général, ils attendaient l'étape du débat pour regarder ce que les autres avaient fait. Un élément intéressant est que cette fille a pu améliorer son approche quand ses compagnons n'étaient pas là. Dans ce cas, elle était obligée de travailler avec une autre équipe. On a vu qu'elle pouvait améliorer ses représentations et même profiter des idées des autres, par exemple lorsqu'elle a travaillé la première activité avec une équipe différente (avec *Lino, Yag, Mina* et *Ago*). *Elena* n'a pas développé un *habitus* dans le sens que nous avions promu.

Betty*, *Damien*, *Agnes*, *Charlie

Betty est très dynamique, elle participe immédiatement avec les idées de ses compagnons, mais elle a une tendance à s'arrêter rapidement une fois une idée développée. Elle aime la manipulation d'objets. Par conséquent, pendant que l'activité est liée à la manipulation des objets et à la recherche de représentations, elle est très accrochée à la situation problème. Quand ses compagnons passent à une étape algébrique, elle a tendance à décrocher et à ne pas faire beaucoup attention à ce que ses compagnons disent. Alors, dans le travail d'*abstraction* que l'on demande dans l'avant-dernière phase de la méthodologie, elle ne le fait pas en profondeur. L'*habitus* que nous avons voulu promouvoir avec cette fille reste à moitié chemin, mais dans les premières étapes elle aide ses coéquipiers dans la résolution de la situation.

Damien est quelqu'un qui s'engage de temps en temps dans le travail de ses coéquipiers. Il peut suivre les idées des autres, mais il n'essaye pas de réfléchir beaucoup. Quand il s'accroche à une situation problème, il a de bonnes idées, mais en général, il a une grande tendance à répéter ce que ses coéquipiers font sans faire un effort supplémentaire vers une *abstraction*. L'*habitus* que l'on a voulu promouvoir n'a pas bien fonctionné avec lui. Quand il travaille avec une équipe forte, il peut retenir ce que ses coéquipiers font; quand l'équipe est faible, il reste au même niveau que ses coéquipiers. La méthodologie n'a pas bien fonctionné avec cet élève.

Charlie semble être plus méthodique dans son travail. Il semble qu'il a une bonne mémoire et qu'il peut faire des associations avec des contenus traités les années précédentes. Il a besoin de travailler avec une équipe dynamique pour aider les autres avec ses idées. Dans une occasion où il a changé pour une équipe plus faible, il a eu une tendance à rester au même niveau que les autres. En général, il a bien réussi avec son équipe forte dans laquelle il a été un pilier pour la résolution des situations proposées grâce à sa capacité d'intégrer des connaissances apprises antérieurement. La méthodologie a bien fonctionné avec lui et nous pensons qu'il a construit un *habitus* dans le sens que nous avons promu.

Agnes est une fille très dynamique. Elle a tendance à être leader sans imposer ses idées aux autres. Elle n'a pas d'habileté pour la manipulation des objets physiques comme *Betty*. Par contre, *Agnes* a la capacité d'assimiler ce que les autres disent d'une façon extraordinaire. Par exemple, lors de la dernière activité, elle a fait une erreur de calcul quand elle est passée au tableau. Le professeur lui a signalé son erreur. Elle a non seulement corrigé l'erreur en cours de route, mais elle a su donner une explication cohérente intégrant le résultat à une coordination entre représentations. Dans son cahier, on peut remarquer l'erreur, mais dans le processus d'*abstraction*, elle a su montrer le processus sans erreur. Il semble que la communication avec ses pairs lui donne l'opportunité d'organiser ses idées. Elle a une bonne connaissance et un savoir-faire pour passer du côté pratique manipulatoire au côté algébrique. Elle a eu une bonne équipe qui lui a permis d'avancer (*Betty* qui est due dans la manipulation des objets physiques, *Charlie* qui aide beaucoup avec ses associations avec des contenus déjà travaillés et *Damien* qui n'aide pas beaucoup). Nous pensons qu'elle a développé un *habitus* comme nous l'avons promu. Elle fait un schéma de la situation pour passer tout de suite à l'action. Elle a besoin de ses pairs dans la manipulation des objets physiques. Elle a une bonne communication avec ses pairs et ils discutent de ce qu'elle propose et cela lui permet d'avancer. Elle a une bonne approche vers la manipulation des symboles algébriques.

Frida

Frida (élève qu'en général a une préférence à travailler seule) a tendance à imaginer la situation problème et à utiliser ses idées intuitives. Idées qui sortent du commun. Cette fille a tendance à travailler seule, même si elle est en principe liée à une équipe. Elle a de la difficulté à se concentrer dans la tâche demandée. Toutefois, quand elle s'accroche, ses idées intuitives sont très riches, voire surprenantes (voir débat en Hitt & Morasse, 2009). Les idées promues par notre méthodologie fonctionnent bien lorsqu'elle s'accroche à l'activité, sinon, elle reste dans son coin sans faire grand-chose. Elle peut même, de temps en temps, être indifférente à ce qui se passe dans la classe.

Anne

Anne c'est une fille leader dans son groupe (cinq élèves). Il semble qu'elle soit la seule à travailler de façon organisée. Une autre fille a tendance à la suivre et à poser des questions. Les autres trois filles se contentent de regarder ce qu'elles font. *Anne* a des intuitions et elle les suit. La communication avec l'autre fille lui permet d'avancer en organisant ses idées pour donner une explication. Elle est une fille qui est très attentive à ce que les autres disent. Elle a construit un *habitus* comme nous l'avons voulu promouvoir. Elle commence avec un schéma qui lui permet de passer à l'action. Elle respecte les consignes d'approcher la situation de façon numérique, elle essaye de donner l'allure de la représentation graphique de la fonction, puis elle passe au registre algébrique. C'est ici où elle a de la difficulté et ses pairs ne l'aident pas en général dans cette partie. C'est plutôt lors de la discussion en grand groupe qu'elle profite des idées des autres qu'elle ne trouve pas avec ses coéquipiers.

C'est dans le groupe de 24 élèves que la méthodologie ACODESA a le mieux fonctionné. Le bruit que faisaient les 36 élèves de l'autre groupe a incité l'enseignant à la moitié de l'expérimentation à ne permettre la communication qu'entre deux élèves voisins sans qu'ils aient le droit de déplacer leur table.

Discussion

Notre préoccupation générale au sujet de la construction des connaissances dans la classe de mathématiques dans une approche de la théorie de l'activité nous a amenés à examiner des questions générales telles que la notion d'*habitus* de Bourdieu. En même temps, dans notre approche théorique, nous avons considéré l'étape d'autoréflexion. Les deux approches liées à un cadre théorique de l'action où l'apprentissage se développe dans un milieu socioculturel, nous permettent d'utiliser le triangle d'Engeström dans une approche complexe d'analyse de la communication dans la classe de mathématiques.

Nous sommes conscients que nous avons pris la notion d'*habitus* de Bourdieu dans un sens local dans la classe de mathématiques. En fait, dans nos considérations théoriques, l'élève arrive à l'école avec des pratiques issues de son milieu, alors, l'*habitus* n'est pas constructible uniquement à partir de l'interaction sociale dans la salle de classe. De notre point de vue, nous avons besoin d'un processus d'autoréflexion (dans la reconstruction individuelle) pour la construction d'un *habitus* (comme produit final dans un contexte d'enculturation).

L'enseignant devrait mettre beaucoup plus d'emphase dans chacune des étapes pour que les élèves puissent mieux saisir quand faire le travail individuel, celui en équipe ainsi que de laisser voir l'importance de l'étape de reconstruction liée à une étape d'autoréflexion, puisque le « consensus » dans la classe de mathématiques, de notre point de vue, est éphémère pour quelques élèves.

La construction de l'*habitus* se fait à travers la communication, dans un travail collaboratif, dans un milieu socioculturel de construction social des connaissances, combinée avec des processus individuels à l'intérieur de ce milieu. Dans cette étude, nous avons pu observer que pour certains élèves la méthodologie ACODESA n'a pas été efficace. Probablement qu'il faudrait revenir à l'idée originale (Hitt, 2007), où la composition des équipes devrait être pensée en prenant en compte les habiletés des étudiants. Il semble qu'il ne faut pas laisser la formation des équipes faibles, mais plutôt combiner ses élèves avec des élèves forts. Une autre chose qui pourrait être importante est de travailler un cours au complet comme nous l'avons fait avec des enseignants (*Ibid.*).

La méthodologie ACODESA vise à proportionner une nouvelle approche d'enseignement dans un contexte socioculturel (théorie de l'activité), en tenant compte des aspects individuels à l'intérieur de ce milieu et d'une construction sociale des connaissances dans la classe de mathématiques avec une approche théorique liée aux représentations.

REMERCIEMENTS

La recherche présentée dans ce document a été réalisée grâce à la subvention Fonds de la Recherche sur la Société et la Culture du Québec (No. 008-SE-118696), Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada (No. 410-2008-1836, CID 130252).

Références

Bourdieu, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris, Éditions de Minuit.

Cole M. (1999). Cultural psychology: Some general principles and a concrete example. In Engeström Y., Miettinen R. Punamäki R-L. (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 87-106). Cambridge: Cambridge University Press.

Conne F. (1992). Savoir et Connaissance dans la Perspective de la Transposition Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 12, no. 2.3 pp. 221-270.

diSessa A., Hammer D., Sherin B. & Kolpakowski, T. (1991). Inventing Graphing : Meta-Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior,* 10, 117-160.

Duval R. (1988). Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 235-253.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5*, 37-65.

Duval Raymund (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Peter Lang, Suisse.

Duval Raymund (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61: pp. 103-131.

Engeström Y. (1999). Activity thery and individual and social transformation. In Engeström Y., Miettinen R. Punamäki R-L. (Eds.), *Perspectives on activity theory* (pp. 19-38). Cambridge: Cambridge University Press.

Engeström Y., Miettinen R. Punamäki R-L. (Eds.). (1999). *Perspectives on activity theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gonzalez A., Hitt F. & Morasse C. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concepto co-variation and spontaneous representations. À case study. In Figueras, O. & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of PME*, and the XX North American Chapter Vol. 3, pp. 89-97. Morelia, Michoacán, México: PME.

Hitt F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg, Vol. 8, pp. 255-271.

Hitt F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. En Gisèle Lemoyne (Rédactrice), *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : complexité et diversité des cadres d'étude*. *Revue des Sciences de l'Éducation*. Volume XXX, no. 2, pp. 329-354.

Hitt F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Strasbourg, Vol. 11, pp. 253-268.

Hitt F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

Hitt F. & Morasse C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes. Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009.*"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009.* G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy). http://math.unipa.it/~grim/cieaem/quaderno19_suppl_2.htm

Janvier C. (Editor). (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Legrand M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères*, no. 10, 123-159, janvier 1993.

Lerman S. (1998). Research on Socio-Cultural Perspectives of Mathematics Teaching and Learning. In Sierpinska A. & Kilpatrick J. (pp. 333-350). ICMI Studies series. Kluwer Academic Publishers.

Passaro V. (2007). Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire. Mémoire de Maîtrise option didactique des mathématiques non publié, Université du Québec à Montréal. Montréal, Québec, Canada, 283 pages.

Passaro V. (2009). Obstacles à l'acquisition du concept de covariation et l'introduction de la représentation graphique en deuxième secondaire. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, *14*, 61-77.

Pierce, C. S. (1992). The essential Pierce : Selected philosophical writings. N. Houser & C. Klosel (Eds). Vol. 1. Bloomington, IN: Indiana University Press.

Pierce, C. S. (1998). The essential Pierce : Selected philosophical writings. N. Houser & C. Klosel (Eds). Vol. 2. Bloomington, IN: Indiana University Press.

Richard J-F. (1990). *Les activités mentales. Comprendre, raissonner, trouver des solutions*. Armand Colin, Paris.

Saussure F. (1915/1973). *Cours de linguistique générale*. Paris : Payot.

Sierpinska A. (1998). Three épistémologies, three views of classroom communication : Constructivism, Sociocultural approaches, Interactionism. In Steinbring H., Bartolini Bussi & Sierpinska A. (Eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (pp. 30-64). NCTM. Reston, Virginia.

Steinbring H., Bartolini Bussi & Sierpinska A. (Eds). (1998). *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. NCTM. Reston, Virginia.

Tall D. & Vinner S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Thompson P. (2002). Some remarks on conventions and representations. In Hitt F. (ed.). *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico.

Vinner S. (1983). Concept Definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Annexe[1]

Page 1

cahier de l'équipe

Nom de l'équipe :

____

Noms des membres de l'équipe :

____

____

____

____

Directives : Utiliser stylo à l'encre noire, si vous avez changé d'avis, écrire avec stylo à l'encre rouge. Après la discussion avec toute la classe, si vous avez changé d'opinion, utiliser un stylo à l'encre vert.

Activité du photographe professionnel

Page 2

Un photographe professionnel se promène près de la statue de Jacques Cartier. Le photographe marche sur le trottoir qui devant la statue. Puisque lui fait des photos professionnelles, il est intéressé à l'enregistrement de la distance entre lui et la statue selon la distance qu'il a parcourue sur le trottoir. Une fois que les photos sont développées dans son laboratoire, l'enregistrement lui permettra de savoir quels sont les endroits où il doit se placer pour obtenir les meilleures photos. Par exemple, voici deux positions pour prendre une photo.

[1] Les activités dans une présentation préliminaire ont été travaillées dans le cours MAT3225 Didactique de la variable et les fonctions à l'UQAM, par C. Janvier, B. Janvier, L. Charbonneau et F. Hitt en différents cours. L'activité du "Randonneur" a été considérablement amélioré par V. Passaro dans son mémoire de maîtrise (voir Passaro, 2007).

Page 3
1) Description du phénomène en mots et faire un dessin sur la situation.

Page 4
Maintenant, avec l'information que nous avons obtenue avec la situation: Description en mots, dessin et enregistrement de l'information, etc, nous voulons trouver différentes façons de donner l'information à des autres photographes. Qu'est-ce que nous pouvons faire qui soit différente de ce que nous avons fait déjà pour transmettre l'information de la situation?

****

Page 1

cahier de l'équipe

Nom de l'équipe :

____

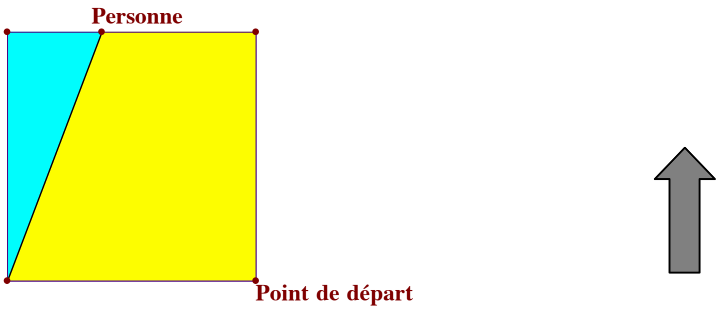
Noms des membres de l'équipe :

____
____
____
____

Directives : Utiliser stylo à l'encre noire, si vous avez changé d'avis, écrire avec stylo à l'encre rouge. Après la discussion avec toute la classe, si vous avez changé d'opinion, utiliser un stylo à l'encre vert.

Activité sur le jacuzzi

Page 2
Une personne recouvre son jacuzzi (carré), à l'aide d'une toile élastique fixée sur un côté (5 mètres). Pour cela, la personne se déplace autour du jacuzzi comme le montre la figure.



Nous sommes intéressés à la relation entre la distance parcourue par la personne et l'aire de la surface couverte au fur et à mesure que la personne avance.

Page 3

1) Description du phénomène en mots et faire un dessin sur la situation pour chaque étape. Séparez par un trait chaque étape.

Page 4

Maintenant, avec l'information que nous avons obtenue avec la situation à la page 3, nous voulons trouver différentes façons de donner l'information à vos compagnons. Qu'est-ce que nous pouvons faire qui soit différente de ce que nous avons fait déjà pour transmettre l'information de la situation?

****

Page 1

cahier de l'équipe Nom de l'équipe : ____________________ Noms des membres de l'équipe : ____________________	Directives : Utiliser stylo à l'encre noire, si vous avez changé d'avis, écrire avec stylo à l'encre rouge. Après la discussion avec toute la classe, si vous avez changé d'opinion, utiliser un stylo à l'encre vert. Activité : Le randonneur

Page 2

Un randonneur entreprend une longue randonnée en forêt. Il suit une piste fermée qui lui permet donc de revenir à son point de départ à la fin de la randonnée. En suivant cette piste, il ne repasse jamais au même endroit de la forêt. Il ne fait qu'un seul tour de piste.
Un poste de secours est situé à l'intérieur de la région délimitée par la piste. Un grand mât avec un drapeau permet au randonneur de repérer l'emplacement du poste de secours quel que soit l'endroit où il se trouve sur la piste.
Trace une piste et place le poste de secours à l'endroit de ton choix en respectant l'énoncé.

Ma piste de randonnée :

Page 3

1) Description du phénomène en mots et faire un dessin sur la situation pour chaque étape. Séparez par un trait chaque étape.

Page 4

Maintenant, avec l'information que nous avons obtenue avec la situation à la page 3, nous voulons trouver différentes façons de donner l'information sur le phénomène à vos compagnons. Qu'est-ce que nous pouvons faire qui soit différente de ce que nous avons fait déjà pour transmettre l'information de la situation?

Page 5

Existe-t-il d'autres grandeurs qui sont dépendants l'un de l'autre?

Page 6
On change un peu la situation et on utilise la nouvelle représentation. Avec les membres de ton équipe, vous décidez de changer l'emplacement du poste de secours. Vous devez donc d'abord choisir cet emplacement EN LE GARDANT SECRET, CAR CHAQUE ÉQUIPE CHOISIT SON NOUVEL EMPLACEMENT. Ensuite, vous devez représenter à l'aide d'un graphique cette nouvelle situation. Vous vous intéressez donc à la distance parcourue par le randonneur depuis le point de départ (qui n'a pas changé) et à la distance la plus courte entre le randonneur et le poste de secours. Dans le cahier de l'équipe, vous avez le plan de la piste sur lequel vous devez indiquer l'emplacement du poste de secours par un gros point coloré. Vous avez aussi une page blanche pour tracer votre graphique d'équipe. L'élève responsable de tracer le graphique de l'équipe n'a pas besoin de le tracer dans son cahier (il doit écrire dans son cahier que c'est lui le responsable du graphique de l'équipe).

Page 7
Le nouvel emplacement choisi est :

Page 8
Nous avons obtenu le graphique suivant :

Page 9
On interprète les graphiques des autres équipes À FAIRE DANS LE CAHIER D'ÉQUIPE ! Les graphiques vont circuler dans la classe. Vous devez, en équipe, interpréter ces graphiques, c'est-à-dire trouver quel est l'emplacement du poste de secours choisi par l'équipe qui a tracé chacun de ces graphiques. Pour chaque graphique, il y un responsable qui écrit son nom. Ensuite, il écrit le nom de l'équipe qui a produit le graphique, il trace une esquisse de ce graphique (croquis qui donne l'allure du

graphique) puis il indique l'emplacement identifié par l'équipe à l'aide d'un point sur le plan de la piste de randonnée.

Chaque membre de l'équipe DOIT être responsable d'au moins une production.

Exemple :

Nom de l'équipe	Esquisse du graphique	Emplacement du poste de secours
Nom du responsable :		

Page 10

Améliorons la nouvelle représentation.

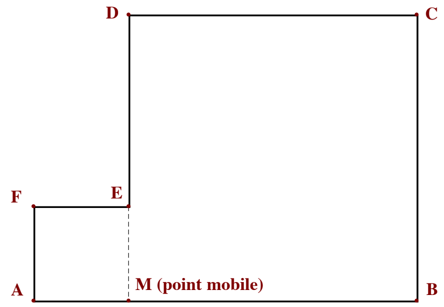
As-tu des propositions pour améliorer la représentation ?
Si oui, prends-les en note :

Dans la classe, les élèves ont proposé :

****

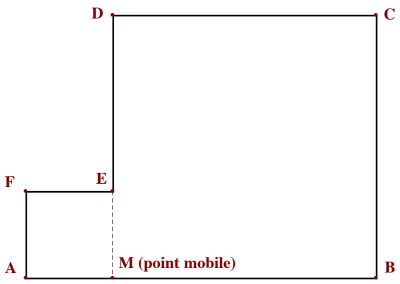
Page 1

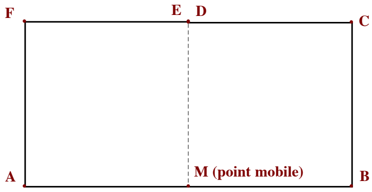
Nom de l'élève : ________________________________ Noms des membres de l'équipe : ________________________________ ________________________________ ________________________________ ________________________________ Groupe : ______________ Date : _________________	Directives : Pour ce premier travail individuel, utilise un stylo à encre noire. Pour le travail d'équipe, si tu modifies ta réponse, utilise un stylo à encre rouge. Après le bilan avec la classe, si tu modifies ta réponse à nouveau, utilise un stylo à encre verte. Activité sur les carrés

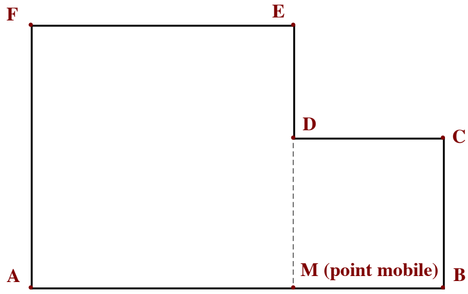


Page 2

Sur un segment $\overline{AB} = 10 \quad cm$, on a pris un point M (point mobile) sur le segment $\overline{AB}$ et on a construit deux carrés (AMEF et MDCB) comme le montre la figure. Si on fait varier M au long du segment, on a différents carrés.







Nous sommes intéressés par la relation entre la distance $\overline{AM}$ et l'aire totale des carrés.

Décris le phénomène à l'aide des différentes représentations que tu as utilisées dans les activités précédentes.

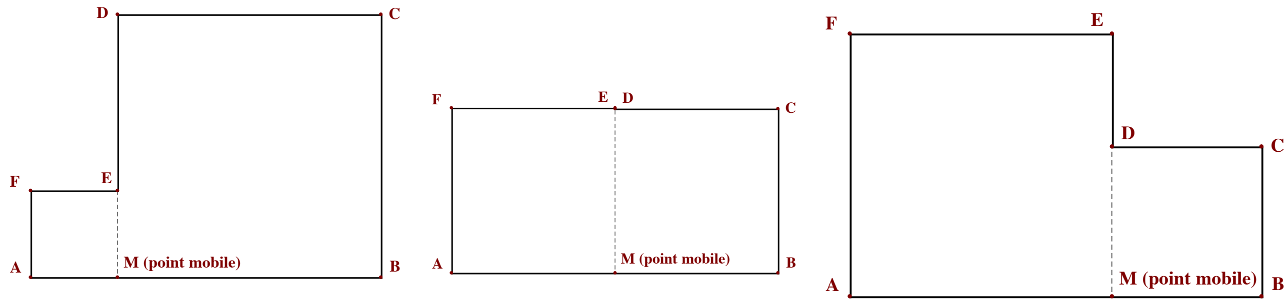
Page 3

Page 4

Existe-t-il d'autres grandeurs qui sont dépendantes l'une de l'autre? Explique.

Page 5

Sur un segment $\overline{AB} = 10 \quad cm$, on a pris un point M (point mobile) sur le segment $\overline{AB}$ et on a construit deux carrés (AMEF et MDCB) comme le montre la figure. Si on fait varier M au long du segment, on a différents carrés.



Nous sommes intéressés par la relation entre la distance $\overline{AM}$ et le périmètre formé par les carrés (il ne faut pas prendre en compte le côté pointillé).

Décris le phénomène à l'aide des différentes représentations que tu as utilisées dans les activités précédentes.

****

Page 1

Nom de l'élève :

____

Noms des membres de l'équipe :

____
____
____
____

Groupe : _____________

Date : ________________

Directives :
Pour ce premier travail individuel, utilise un stylo à encre noire.
Pour le travail d'équipe, si tu modifies ta réponse, utilise un stylo à encre rouge.
Après le bilan avec la classe, si tu modifies ta réponse à nouveau, utilise un stylo à encre verte.

Activité sur les ombres

Page 2
Supposons que nous avons une source lumineuse d'une hauteur de 6 m (un lampadaire), nous pouvons observer l'ombre sur le sol lorsqu'une personne de 1,5 m d'hauteur marche dans la rue. Nous nous intéressons aux relations entre les grandeurs en jeu. Existe-t-il de grandeurs qui sont dépendantes l'une de l'autre? Lesquelles? Sélectionne deux grandeurs qui sont dépendantes l'une de l'autre et décris le phénomène à l'aide des différentes représentations que tu as utilisées dans les activités précédentes.

Page 3

Page 4
Si tu connais la longueur de l'ombre de la personne, peux-tu connaître la distance qui la sépare du lampadaire?

EL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL DE REFERENCIA DE LA MATEMÁTICA EN LA ESCUELA SECUNDARIA MEXICANA

Silvia E. Ibarra O.; Martha C. Villalva G.; Ana Gpe. Del Castillo B.
{sibarra, mcris, acastillo}@gauss.mat.uson.mx
Universidad de Sonora, México

RESUMEN. Esta investigación tiene su base en la noción de significado institucional referencial del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino et al, 2009) y se ubica en el tema "El trabajo matemático y los aspectos sociales e institucionales". Utilizando una metodología de carácter cualitativo, nos propusimos caracterizar el significado institucional referencial de la matemática en la escuela secundaria en México (12-15 años), a través del análisis de los planes y programas oficiales, de los libros de texto en uso, y de la observación participante del trabajo en aula con un grupo de 42 profesores.

1. INTRODUCCIÓN

Desde 1988 se inició en México una serie de transformaciones a la educación básica (4-15 años de edad), la cual culminó con los cambios curriculares propuestos a partir del ciclo escolar 1992-1993. El principal impacto de dichas transformaciones en el currículo matemático consistió en el abandono del enfoque estructural de la matemática escolar, para dar lugar a una matemática de carácter funcional, además de proponer a la solución de problemas como la estrategia metodológica central. La hoy llamada Reforma Integral de la Educación Básica dio inicio en 2004 con la Reforma de la Educación Preescolar, prosiguió en el año 2006 con la Reforma de la Educación Secundaria, cerrando este proceso en 2009 con la Reforma a la Educación Primaria.

En el caso particular de la escuela secundaria, (12 a 15 años de edad), en julio de 2011 se introdujo una nueva modificación, que mantiene el enfoque por competencias y agrega los llamados Estándares Curriculares. El Programa de estudio de matemáticas vigente declara que los Estándares Curriculares comprenden los aprendizajes esperados de los alumnos que permitirán conducirlos a altos niveles de alfabetización matemática. El enfoque didáctico explicita la necesidad de promover el aprendizaje de las matemáticas mediante situaciones problemáticas que involucren el uso de las herramientas matemáticas por estudiar, tomando también en consideración los procesos de construcción de conocimiento que viven los estudiantes. Otro elemento central del Programa de Matemáticas es el desarrollo de las competencias matemáticas en los alumnos: a) Resolver problemas de manera autónoma; b) Comunicar información matemática; c) Validar procedimientos y resultados; d) Manejar técnicas eficientemente.

Considerando que son los profesores los encargados de hacer efectivos los cambios propuestos en cualquier reforma curricular, la Secretaría de Educación Pública (SEP), entidad gubernamental responsable de la formación continua de los profesores mexicanos en servicio, ha venido convocando anualmente, desde 2009, a diferentes instituciones educativas y grupos de investigadores universitarios a diseñar acciones de formación, capacitación y actualización dirigidos a los maestros de Educación Básica.

Como resultado de dichas convocatorias cada año se estructura el llamado Catálogo Nacional de Formación Continua y Superación Profesional para Maestros de Educación Básica en Servicio, el cual está organizado por áreas de conocimiento; en cada una de ellas se ofrecen cursos, diplomados y programas de posgrado (especialidades, maestrías y doctorados). Las áreas de conocimiento se han ido incrementando, de tal forma que por ejemplo en la versión 2011-2012 se ofrecen programas en Español, Matemáticas, Ciencias, Formación Cívica y Ética, Historia, Uso Educativo de las Tecnologías, Educación Física, Educación Artística, Formación Económica y Financiera, Idiomas, así como programas para la atención a diferentes niveles y modalidades. En la versión 2011-2012 de tal Catálogo, se proponen en el área de matemáticas 31 cursos y 20 diplomados, la mayoría de los cuales plantea profundizaciones sobre el enfoque por competencias, el uso de tecnología y la resolución de problemas. Encontramos ahí propuestas para profesores de preescolar, primaria y secundaria.

Otras de las acciones de apoyo a la implementación de la Reforma fue la elaboración de los llamados *planes de clase*, disponibles en la web de la SEP para consulta de todos los maestros del país. Estos documentos contienen propuestas didácticas que se estructuran siguiendo el programa oficial de la materia, para cada uno de los tres años que contempla la educación secundaria; las propuestas mencionadas pueden ser modificadas por los maestros usuarios, en dependencia del contexto y ambiente específico en el que desarrollen su actividad profesional.

Además de lo anterior, anualmente se lanza una convocatoria para la elaboración de los libros de texto de matemáticas que serán utilizados diariamente por profesores y estudiantes. Puesto que no existe, como en el caso de la escuela primaria, un libro de texto que sea único, la intención de la SEP es asegurarse que los textos en uso cumplan con los principios curriculares oficiales.

Desde nuestro punto de vista, uno de los factores básicos para el logro exitoso de la implementación de las propuestas curriculares se basa en la comprensión e interpretación que los docentes logren construir sobre sus planteamientos fundamentales, por ejemplo el enfoque didáctico, la organización de los contenidos, etc. En este sentido, se han realizado pocas investigaciones en el entorno nacional que hayan hecho algún seguimiento sobre cómo es que los docentes conceptualizan los cambios curriculares y cómo es que les dan concreción en las aulas. A este respecto, Ávila (2001) señala:

> *"En la primera etapa de nuestro estudio acerca de la incorporación de los materiales y principios educativos introducidos en 1993, nos percatamos de que algunos profesores se reconocían a sí mismos como desconfiados de las reformas educativas promovidas por el Estado. Para algunos de ellos, incluso resultaba que estas reformas al ser "solamente modas", luego se sustituían por "otras nuevas modas". A su entender, este hecho implicaba el reconocimiento de la propia Secretaría del error cometido al haber impulsado una cierta forma de enseñar las matemáticas años atrás… Teniendo esta opinión sobre las reformas impulsadas sucesivamente –y consecuentes con su postura- algunos de los profesores a quienes observamos trabajar señalaron explícitamente no haber incorporado en su práctica de enseñanza las ideas promovidas por los nuevos textos y programas. Al menos no en el periodo hasta entonces regido por las nuevas directrices. Su quehacer, según nos dijeron, se basaba más en la experiencia alcanzada a lo largo de su profesión que en las ideas provenientes de materiales y textos, aún cuando estas fuesen definidas por el Estado."*

Por su parte, los resultados de la investigación de Mena (2005), le llevaron a concluir:

> *(…) que un cambio tan significativo en el sistema educativo requiere un cambio integral del profesor, pues para interpretar bien los cambios en los planes y programas, necesita tiempo para construir su propio entendimiento de los cambios, trabajar sobre sus esquemas cognitivos producto de experiencias anteriores exitosas que no le dejan tomar decisiones sobre cómo responder a las sugerencias de la Reforma.*

2. Objetivos de la investigación

En este contexto, planificamos una investigación, que toma como eje la noción de significado institucional referencial del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, EOS por sus siglas (Godino et al, 2009), planteándonos el siguiente objetivo general:

O1) Describir el significado institucional referencial de la matemática en la escuela secundaria en México.

A su vez, este objetivo nos lleva a plantear el siguiente, de carácter específico:

O1.1) Conocer cuál es el significado que los profesores, como representantes de la institución escolar, construyen sobre los planteamientos oficiales.

Y, a partir de éste, se propone el siguiente objetivo particular:

O1.1.1) Identificar conflictos semióticos, entendiendo éstos como cualquier discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos instituciones o personas.

Como ya señalamos, para el abordaje de la investigación, utilizamos algunos elementos teóricos del EOS, los cuales se explicitan en el apartado siguiente.

3. ELEMENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS

El EOS es un marco teórico que propone articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y su aprendizaje. Sus autores (Godino, Batanero y Font, 2009, p.3) ubican tres grandes etapas en su construcción:

> *En nuestros primeros trabajos, publicados en el periodo 1993 - 98 desarrollamos y precisamos progresivamente las nociones de "significado institucional y personal de un objeto matemático" (entendidos ambos en términos de sistemas de prácticas en las que el objeto es determinante para su realización) y su relación con la noción de comprensión…*
>
> *En una segunda etapa, a partir de 1998, hemos considerado necesario elaborar modelos ontológicos y semióticos más detallados que el elaborado hasta dicha fecha (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005). Esta reflexión surge del hecho que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico…*
>
> *En una tercera etapa de nuestro trabajo nos hemos interesado por los modelos teóricos propuestos en el seno de la Didáctica de las Matemáticas sobre la instrucción matemática. Proponemos distinguir en un proceso de instrucción matemática seis dimensiones, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus respectivos espacios de estados y trayectorias: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de recursos instruccionales), cognitiva (génesis de significados personales) y emocional (que da cuenta de las actitudes, emociones, etc. de los estudiantes ante el estudio de las matemáticas)*

En nuestra investigación, se utilizaron las nociones de práctica y objeto matemático así como la tipología de objetos primarios, las nociones de configuración y trayectoria epistémica, (Godino, Batanero y Font, 2009, p.12). Entenderemos por significado institucional de un objeto matemático al sistema de prácticas operativas y discursivas que hace una persona o una institución para resolver un campo de problemas; como práctica matemática consideramos a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.), realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino, Batanero y Font, 2009, p.4).

Del desarrollo de esos sistemas de prácticas surgen otros elementos, a los cuales identificamos como los objetos matemáticos; así pues, designaremos como un objeto matemático a todo lo que es indicado, señalado, o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. Si los objetos son compartidos en el seno de una institución o comunidad, serán objetos matemáticos institucionales.

Los tipos de significados institucionales (Godino et al 2009, p. 5), son:

a) Referencial.- Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido.

b) Pretendido.- Sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio.

c) Implementado.- En un proceso de estudio específico es el sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente.

d) Evaluado.- Subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

En cuanto a los tipos de objetos matemáticos primarios que se reconocen en el EOS están los siguientes:

a) Elementos lingüísticos. Son todas aquellos términos, expresiones, notaciones, gráficos, en sus diversos registros (escrito, oral, gráfico, gestual, etc.).
b) Situaciones-problemas. Son los problemas, ejercicios, aplicaciones extra matemáticas, etc.
c) Procedimientos. Aquí son considerados las operaciones, los algoritmos, las técnicas de cálculo, etc.
d) Conceptos-definiciones. Son todos aquellos introducidos mediante una definición, descripción o mediante una o varias de sus propiedades. Estamos considerando a los conceptos en un sentido amplio, es decir no los estamos restringiendo a aquello que se dice de un objeto. Como ejemplos podemos citar recta, punto, función, ecuación lineal, sistema de ecuaciones lineales, vector, etc.
e) Proposiciones. Son los enunciados sobre los conceptos, por ejemplo al decir que las diagonales en un cuadrado son perpendiculares, estamos enunciando un atributo de estas figuras. En un momento dado, por medio de las propiedades también podemos introducir a los conceptos.
f) Argumentos. Son las aseveraciones que usamos para validar o explicar los enunciados deducidos de otros, o derivados de ellos en cualquier otra forma.

Identificaremos las redes de objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas institucionales, esto es, cómo van apareciendo y relacionándose las seis entidades primarias que se mencionaron con anterioridad: situaciones, lenguaje, procedimientos, conceptos, argumentos y proposiciones. Dichas redes son las que denominaremos configuraciones epistémicas. El conjunto de configuraciones epistémicas, secuenciadas en el tiempo didáctico, se denomina trayectoria epistémica y ella es la que describe integralmente la ruta que siguió la construcción de los significados institucionales que nos interesan.

Metodológicamente, nuestro estudio fue de corte cualitativo, utilizando técnicas e instrumentos como el análisis documental, cuestionarios y la observación participante. Las nociones teóricas nos dieron elementos para acciones metodológicas, las cuales describiremos en función de los objetivos que fueron expuestos en el apartado 2 de este escrito.

O1) Describir el significado institucional de referencia de la matemática en la escuela secundaria en México. Para alcanzar este objetivo, se hizo un análisis del programa oficial de la materia, de planes de clase y de los textos autorizados a cuatro casas editoriales (Ediciones sm, Santillana, Grupo Patria y Mc. Graw Hill).

O1.1) Conocer cuál es el significado que los profesores, como representantes de la institución escolar, construyen sobre aspectos esenciales del programa oficial: el conocimiento matemático y su tratamiento didáctico. Para esto se realizó observación participante durante la implementación de un taller impartido a 42 profesores que trabajan en ese nivel educativo. Los materiales utilizados en el taller estuvieron organizados en dos bloques, el primero de ellos denominado “Desarrollo de la actividad docente: el programa de matemáticas, los planes de clase, los libros de texto y otros materiales didácticos”; el segundo “Actividades e integración del conocimiento”. Ambos buscaron poner en relieve el nivel de conocimiento, tanto a nivel discursivo como operativo, que tienen los profesores sobre algunos aspectos claves de la matemática de la escuela secundaria: las relaciones funcionales, la variación directamente proporcional, la variación inversamente proporcional. Por otro lado nos interesó conocer las prácticas de enseñanza, no desde el punto de vista teórico, sino a partir de elementos de carácter práctico.

O1.1.1) Identificar los conflictos semióticos más frecuentes. Esta información también surgió de la observación participante durante el taller que se señaló en el inciso anterior.

4. EL SIGNIFICADO INSTITUCIONAL REFERENCIAL: RESULTADOS Y CONCLUSIONES.

La información que se generó a partir de la revisión documental, nos permite afirmar que los documentos oficiales (programas de los tres cursos de matemáticas y planes de clase), contienen todos los elementos que formalmente se espera encontrar en una propuesta curricular. Sin embargo, la versión vigente aprobada en agosto de 2011, que adiciona ligeras modificaciones a la versión 2006, contiene algunas superposiciones en los temas que no han sido suficientemente aclaradas. Además de lo anterior, incluye la noción de Estándar Curricular, que es novedosa en el lenguaje del profesorado mexicano.

Un aspecto central del enfoque curricular consiste en incentivar la construcción de un significado integrador para la matemática, es decir la generación del conocimiento matemático a partir del estudio de situaciones y/o problemas intra y extra matemáticos, así como el uso de diferentes representaciones para las nociones matemáticas en juego. Mediante estos procesos de estudio, se pretende que el profesor promueva el desarrollo de las siguientes competencias matemáticas en los estudiantes:

a) Formular y validar conjeturas.
b) Plantearse nuevas preguntas.
c) Comunicar, analizar e interpretar procedimientos de resolución.
d) Buscar argumentos para validar procedimientos y resultados.
e) Encontrar diferentes formas de resolver los problemas.
f) Manejar técnicas de manera eficiente.

Esto será posible si el profesor desarrolla, entre otras, las siguientes competencias profesionales:

a) Centrar la atención en los estudiantes y en sus procesos de aprendizaje.
b) Planificar para potenciar el aprendizaje.
c) Trabajar en colaboración para construir el aprendizaje.
d) Generar ambientes de aprendizaje.
e) Usar materiales educativos para favorecer el aprendizaje.
f) Evaluar para aprender.

Como ya se señaló, los Estándares Curriculares están organizados en cuatro ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida, Manejo de la información y Actitud hacia el estudio de la matemática. Para cada grado escolar, las trayectorias epistémicas propuestas se estructuran en cinco bloques, en cada uno de los cuales se incorporan de manera secuenciada, contenidos de los tres ejes mencionados. Sin embargo, estas trayectorias epistémicas propuestas, lejos de promover un significado integrador de la matemática, presenta los objetos matemáticos en forma secuencial, pero parcelada y desarticulada.

Los planes de clase son exhaustivos en cuanto a que cubren todos los contenidos matemáticos de la escuela secundaria, y en ese sentido, son susceptibles de constituirse en un apoyo adecuado para la labor cotidiana de los maestros. Las trayectorias epistémicas formuladas son consistentes con los programas oficiales.

En cuanto a los textos autorizados, como se mencionó antes, se revisaron los siguientes: Block, D. y García, S. (2007); Filloy, E., et al. (2009); Mancera, E. (2009); Rivera, M. et al. (2007).

Un requisito para la autorización de los textos es que se apeguen a los programas oficiales, en este sentido las trayectorias epistémicas propuestas en ellos son consistentes con la propuesta institucional. Sin embargo, podemos percibir diferencias en la forma de concretar el enfoque que en ella se establece.

Del análisis de los planes de estudio, programas, planes de clase y textos autorizados, identificamos los siguientes objetos primarios constituyentes del significado institucional de referencia:

Situaciones: En algunos textos se manejan situaciones que parten de experimentaciones concretas, y se apoyan fuertemente en el contexto de partida para la emergencia de los objetos matemáticos en estudio.

Se articulan situaciones de contextualización y ejercitación.

Tienden a problematizar, pero en general no se promueve explícitamente la emergencia de nuevas preguntas y problemas.

Procedimientos: Llenado de tablas. Reconocimiento de patrones. Interpretación de gráficos. Interpretación de fórmulas. Algoritmos de operaciones aritméticas y algebraicas. Construcción de gráficas. Manipulación de recursos tecnológicos. Articulación de diferentes representaciones.

Lenguaje: Se hace uso del lenguaje natural, icónico, numérico, algebraico y gráfico. (En cada actividad se articulan al menos dos de ellos).

Conceptos: Eje "Sentido numérico y pensamiento algebraico": Números racionales y sus operaciones (problemas aditivos y multiplicativos); la literal y sus operaciones, vista como número general y como incógnita (Patrones y Ecuaciones).

Eje "Forma, espacio y medida": Figuras planas (polígonos y círculo); cuerpos geométricos (poliedros, esferas, cilindros); perímetros, áreas, volúmenes y sus respectivas unidades de medida.

Eje "Manejo de la información": la literal como variable (funciones); proporcionalidad directa, inversa y múltiple; variación lineal, cuadrática y exponencial; nociones de probabilidad (espacio muestral, eventos, cálculo de probabilidades en situaciones elementales); estadística descriptiva (lectura de gráficos, rango, media, desviación media).

Proposiciones: Eje "Sentido numérico y pensamiento algebraico": Propiedades de las operaciones de los números racionales (enunciadas en lenguaje natural y en lenguaje algebraico); propiedades para el manejo de ecuaciones (leyes de cancelación, propiedades de la igualdad, inversos aditivos y multiplicativos, operaciones inversas).

Eje "Forma, espacio y medida": Teorema de Pitágoras; propiedades de la congruencia y semejanza en diversos polígonos.

Eje "Manejo de la información": Reglas de correspondencia entre distintos modos de representación de relaciones entre variables (expresión algebraica, tabla de valores, gráfica, lenguaje natural).

Argumentos: Justificar la validez de procedimientos y resultados obtenidos.

Transitar del razonamiento intuitivo al deductivo.

Analizar los recursos que se utilizan para presentar información.

Del análisis de los objetos matemáticos y de las trayectorias epistémicas propuestas en los programas, planes de clase y textos, se detectaron conflictos semióticos potenciales para los aprendices debido a la ruptura existente en la organización de los ejes temáticos: por ejemplo, los contenidos del Eje "Manejo de la información" incluyen temas que corresponden a los otros dos ejes, especialmente al eje "Sentido numérico y pensamiento algebraico", y al presentarlos en los programas, planes de clase y textos autorizados, en forma separada, el estudio de un objeto matemático particular se ve interrumpido, por lo que es posible percibir una desarticulación e incompletez en una situación particular.

Detectamos que los profesores muestran especial confusión en temas relacionados con el estudio de la variación, particularmente en la identificación de comportamientos generales de las variables cuando los valores de éstas se proporcionan en tablas, igualmente la información presentada de esta manera puso en evidencia serias confusiones en concepciones fundamentales como las relaciones directa e inversamente proporcionales.

Del mismo modo, se pudo percibir que las limitaciones en el dominio del conocimiento y habilidades relacionadas con los contenidos matemáticos dificultan tareas didácticas como la adecuación de contextos, propuestas de integración, sistematización de la evaluación continua acorde al enfoque por competencias, entre otras.

Con las reservas que merece el escaso tiempo asignado al curso-taller, pudo advertirse que la mayoría de los participantes se expresan en términos acordes al enfoque propuesto en los planes y programas. Aunque están conscientes de lo difícil que resulta para muchos profesores concretar dichos enfoques con actividades en el aula dadas las condiciones de tiempos limitados, lo numeroso de los grupos, las actividades administrativas y otros factores, consideran que los materiales de apoyo para el profesor son cada vez más consistentes con lo que se espera promover en el aula. Particularmente encuentran útil entender y mejorar los planes de clase propuestos para promover en el aula las competencias matemáticas que el enfoque curricular propone desarrollen los estudiantes de secundaria.

Finalmente queremos señalar que las reflexiones del grupo de trabajo que realizó esta investigación sobre los resultados obtenidos, nos permitieron identificar elementos para diseñar acciones de formación, actualización y capacitación para los profesores, que sean más acordes con las necesidades detectadas. Particularmente mencionaremos la urgencia de generar espacios donde los profesores puedan reflexionar de manera colegiada sobre sus propias prácticas.

REFERENCIAS

Ávila, A. (2001). La experiencia matemática en la educación primaria. Estudio sobre los procesos de transmisión y apropiación del saber matemático escolar. Tesis doctoral, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Block, D. y García, S. (2007). Fractal 1. Matemáticas Secundaria Primer Grado. Ediciones sm. México.

Block, D. y García, S. (2007). Fractal 2. Matemáticas Secundaria Segundo Grado. Ediciones sm. México.

Block, D. y García, S. (2007). Fractal 3. Matemáticas Secundaria Tercer Grado. Ediciones sm. México.

Filloy, E., Figueras, O., Ojeda, A.M., Rojano, M.T., y Zubieta, G. (2009). Matemáticas 1°, Mc Graw Hill. México.

Filloy, E., Figueras, O., Ojeda, A.M., Rojano, M.T., y Zubieta, G. (2009). Matemáticas 2°, Mc Graw Hill. México.

Filloy, E., Figueras, O., Ojeda, A.M., Rojano, M.T., y Zubieta, G. (2009). Matemáticas 3°, Mc Graw Hill. México.

Godino, J.D, Batanero, C. y Font, V. (2009). Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Versión ampliada y revisada del artículo Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007).The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135.

Mancera, E. (2009); Matemáticas 1. Santillana Ateneo. Editorial Santillana. México.

Mancera, E. (2009); Matemáticas 2. Santillana Ateneo. Editorial Santillana. México.

Mancera, E. (2009); Matemáticas 3. Santillana Ateneo. Editorial Santillana. México.

Rivera, M., León, M.A., Sánchez, J.L., Carrillo, A. (2007). Matemáticas 1. Grupo Editorial Patria. México.

Rivera, M., León, M.A., Sánchez, J.L., Carrillo, A. (2007). Matemáticas 2. Grupo Editorial Patria. México.

Rivera, M., León, M.A., Sánchez, J.L., Carrillo, A. (2007). Matemáticas 3. Grupo Editorial Patria. México.

SEP (2006). *Educación Básica. Secundaria. Plan de Estudios 2006.* México: SEP.

SEP (2011). *Plan de estudios 2011. Educación básica*. México: SEP.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. México: SEP.

ARTURO MENA-LORCA , JAIME MENA-LORCA, ASTRID MORALES-SOTO

HACIA UNA NOCIÓN DE ESPACIO DE TRABAJO ALGEBRAICO

TOWARDS A CONCEPT OF ALGEBRAIC WORKSPACE

RESUMEN

Dado lo apropiado de la perspectiva que representa la teoría de *paradigmas y espacios de trabajo geométrico*, ETG, para el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, parece enteramente natural analizar la posibilidad de considerar *paradigmas y espacios de trabajo algebraico*. Una razón inmediata para ello es ampliar el espectro de empleo del ETG. Otra se origina en el hecho de que en muchas cuestiones geométricas en el aula, en todos los niveles, se acostumbra a traducir los problemas al plano algebraico. Por otra parte, en Chile, en el último lustro se ha hecho mayor hincapié en que los profesores que enseñan Matemáticas conozcan la disciplina, pero los datos apuntan en contrario; además y en particular, la inducción de los profesores noveles en el sistema educacional es un tema del país. Interesa, por tanto, postular ciertos *espacios de trabajo algebraico* y estudiar los tránsitos que hacen los profesores entre uno y otro. Para esto último, sería deseable que, aun cuando ellos no conocieran explícitamente esos espacios de trabajo, tuvieran alguna noción de que hay aspectos epistemológicos y cognitivos diferentes que tener presentes en las distintas etapas de la formación de sus estudiantes. Nuestras evidencias preliminares muestran que ese no es el caso.

PALABRAS CLAVE:

Paradigmas, álgebra, espacio de trabajo geométrico, espacio de trabajo algebraico.

ABSTRACT

Given the appropriateness of the perspective shown by the theory of *paradigms and geometric workspaces*, ETG, for the study of teaching and learning of geometry, it seems entirely natural to analyze the possibility of considering *paradigms and algebraic workspaces*. One immediate reason for this is to broaden the spectrum of use of ETG. Another stems from the fact that in many geometric questions posed in the classrooms at all levels, it is customary to translate them to the algebraic realm. Moreover, in Chile, in the last five years it has been placed a greater emphasis on the necessity that teachers who teach mathematics know the discipline, but the evidence indicates otherwise; also and in particular, the induction of new teachers in the educational system is an issue of the country. Therefore, it is of interest to posit certain *algebraic workspaces* and study the transits that teachers do between the two. For the latter, it would be desirable that, even if they do not know explicitly those workspaces, they had some notion that there are different cognitive and epistemological aspects to keep in mind in the various stages of formation of their students. Our preliminary evidence shows that this is not the case.

KEY WORDS:

Paradigms, algebra, geometric workspaces, algebraic workspaces.

RÉSUMÉ

Compte tenu de la bonne perspective que c'est la théorie des *paradigmes et des espaces de travail géométrique*, ETG, pour l'étude de l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie, il semble tout à fait naturel d'analyser la possibilité d'envisager des paradigmes et des espaces de travail algébriques. Une raison immédiate pour cela est d'élargir le spectre d'utilisation du ETG. Une autre provient du fait que, dans de nombreuses questions géométriques dans la salle de classe, à tous les niveaux, il est de coutume de les traduire dans le champ algébrique. En outre, au Chili, au cours des cinq dernières années on a souligné que, pour enseigner les mathématiques, les professeurs doivent savoir la discipline, mais les données montrent le contraire ; aussi, et en particulier, l'induction de nouveaux enseignants dans le système est une question du pays. C'est d'intérêt, par conséquent, de proposer quelques *espaces de travail algébriques* et d'étudier comment les enseignants font les transits entre eux. Pour ce dernier, il serait souhaitable, même si elles ne savent pas explicitement de ces espaces de travail, qu'ils ont quelque notion de qu'il existe différents aspects cognitifs et épistémologiques qui convient de noter dans les différentes étapes de la formation de leurs étudiants. Notres données préliminaires montrent que ce n'est pas le cas.

MOTS-CLÉS :

Paradigmes, l'algèbre, la géométrie d'espace de travail, espace de travail algébrique

1. INTRODUCCIÓN

1.1. *Un espacio de trabajo algebraico*

Tras la oportunidad de examinar la teoría de *paradigmas y espacio de trabajo geométrico*, ETG, de C. Houdement y A. Kuzniak (1996, 2006; Kuzniak, 2004; Montoya, 2010), pareció natural analizar la posibilidad de considerar un *espacio de trabajo algebraico*, ETA. Una razón, claro está, es ampliar el espectro de empleo del ETG, y apuntar aun a generar *espacios de trabajo matemático* (Kuzniak, 2011). Por otra parte y como se sabe, en muchas cuestiones geométricas en el aula, en todos los niveles, se acostumbra traducir el problema al plano algebraico. Naturalmente, el empleo del álgebra no es cuestionable en sí, pero en la práctica ese tránsito se suele hacer muy rápido y el tema geométrico puede desleírse en beneficio del trabajo aritmético-algebraico –puede incluso darse el caso de que en una asignatura como la trigonometría los aspectos algebraicos eclipsen a los propiamente geométrico al recibir, por ejemplo, identidades y ecuaciones un tratamiento superior al de los problemas geométricos–. Sin embargo, ante una tarea tal como una resolución de problemas el *referencial* teórico no parece siempre implícito y es interesante observar cómo el aprendiz trabaja realmente.

1.2. *Los profesores debutantes*

Nos interesó particularmente el caso de los *profesores debutantes* o *noveles* ponen en juego. En Chile –como en otros países, pensamos– hay dos circunstancias que harían aconsejable examinar su caso, precisamente desde un punto de vista paradigmático. En un sentido pedagógico, ellos procuran poner en práctica los paradigmas (*sensu lato*) que les fueron ofrecidos durante su formación, y sus esfuerzos se estrellarán contra usos y costumbres de la institución (OECD, 2004). Además, y más atingente a nuestro estudio, nos pareció que en ellos podría ser más aparente la eventual transición y/o contradicción entre los *paradigmas* matemáticos que procuran poner en juego en sus clases.

Por otra parte, aun cuando los documentos educacionales del país no ponen, hasta fecha reciente, mayor énfasis en que los profesores conozcan los contenidos que enseñan, tras el informe de la OECD (2004) y, posiblemente, teniendo en cuenta el *Global Forum* de Educación que se llevó a cabo en el país en 2005, se ha venido insistiendo en la necesidad de que los profesores que enseñan Matemáticas sepan esa disciplina. Dos muestras de ello son la Prueba INICIA (MINEDUC, 2011a) y los Estándares de desempeño para la formación inicial de docentes (MINEDUC, 2011b).

1.3. *Nuestra perspectiva*

Hemos utilizado una perspectiva en la que distinguimos tres aspectos, entrelazados.

Uno, de carácter histórico-epistemológico, apropiado, según nos pareció, para aproximarnos al tema. Otro, naturalmente, la observación en el aula, que hemos realizado en instituciones tanto en el centro de nuestro país como en sus extremos norte y sur. El tercero proviene de la consideración de que, en forma independiente a que la mirada al trabajo en un determinado paradigma ha de hacerse sin una referencia indebida a otro 'más avanzado', es conveniente determinar con precisión el objeto matemático subyacente, o, más bien, el trozo de matemática que subyace en el trabajo del aprendiz –una mirada incorrecta a este aspecto podría redundar en un "*idóneo* inadecuado"–.

Comenzaremos con algunas consideraciones generales acerca de la importancia de reparar en el aspecto paradigmático de los estudios. Luego procuramos llevar esa reflexión hacia el caso de paradigmas en relación con el trabajo escolar de álgebra, y contrastar brevemente la situación respecto de los ETG. A continuación, damos una breve mirada a la historia y la epistemología del Álgebra, para fundamentar nuestra posición. Ahondamos luego un tanto en ello en relación con las etapas en que se ha desarrollado el álgebra, para utilizarlas en el examen de lo que ocurre en las aulas. Hacemos a continuación una propuesta de espacios de trabajo algebraico y nos aproximamos a las transiciones que nos preocupan. Finalmente, expresamos algunas conclusiones de este reporte.

2. PARADIGMAS

2.1. *Ciencia y paradigma*

La discusión de los filósofos de la ciencia del siglo pasado modificó el concepto mismo de lo que es una ciencia. Una noción que se introdujo en esa discusión fue la de paradigma.

Tras el simposio acerca de la obra de Kuhn que presidió Popper, ocurrido en Londres en 1965, Lakatos y Musgrave publicaron *Criticism and the Growth of Knowledge*, en1970. Las perspectivas desarrolladas allí han sufrido, por cierto, cierta transformación (Cf. Barker, Andersen y Chen, 2006), sin embargo, las categorías que se introdujeron en esos trabajos aún están vigentes.

Kuhn utiliza profusamente el término *paradigma;* la ciencia progresa en distintas etapas: preciencia, ciencia normal, revolución, preciencia… En la etapa precientífica faltan acuerdos en aspectos fundamentales y hay constante debate acerca de ello, existen tantas teorías como investigadores, cada uno de estos está obligado a comenzar de nuevo. La etapa propiamente científica consiste en que todos los científicos adhieren a un mismo paradigma.
Para Lakatos y Musgrave, la ciencia es una sucesión de teorías enlazadas en *programas de investigación científica*. La ciencia tiene un núcleo o centro firme, rodeado de un cinturón protector de hipótesis auxiliares, y heurísticas, que son reglas metodológicas, procedimientos aplicables (o no) a la investigación, a la solución de problemas, y que definen implícitamente el marco conceptual del programa.
La historia de la ciencia es la de paradigmas que compiten entre sí; la competencia es buena para el progreso científico. Es bueno que los científicos adhieran a un programa hasta que este alcance su punto de saturación y deba ser reemplazado por otro. La "ciencia normal" de Kuhn es un programa que ha conseguido el monopolio.

2.2. *Paradigmas en el aula*

No es obvio, por supuesto, que estas discusiones de los grandes filósofos de la ciencia del siglo pasado tengan algo que decir respecto de lo que sucede en un aula en la que se aprende matemáticas. (En cualquier caso, en el aprendizaje de la Física, por ejemplo, se observa claramente que se debe dejar atrás al menos el modo de pensar aristotélico por otro que proviene de Galileo y otros científicos).

Pensemos, sin embargo, en la actividad de un conjunto de alumnos trabajando en un problema de matemáticas. Ellos subscriben un conjunto de creencias acerca de lo que son los objetos que estudian, algunas de las cuales han podido ser comprobadas o aprendidas; hay cierto tipo de "argumentos" que aceptarán, ciertas "herramientas" que tienen a su alcance y que pueden utilizar; hay preguntas que encuentran de interés… Más aún, parecería claro que, conforme avanzan sus estudios, los paradigmas a los cuales adhieren van también progresando.

2.3. *Paradigmas y "espacio de trabajo geométrico"*

La consideración precedente, ingenua, ha sido debidamente elaborada por Alain Kuzniak y Katherine Houdement para el caso de la geometría, hasta el punto de convertirla en la teoría que se denomina precisamente Teoría de paradigmas y espacio de trabajo geométrico (Kuzniak 2004, 2006; Houdement y Kuzniak 2006). La teoría ha clarificado la situación en el aula, y ha demostrado, en particular, que el paradigma que pone en juego el profesor puede estar en conflicto con aquel que debería utilizar con sus alumnos –en efecto, puede ocurrir que él trate de reproducir aquel que se le ha demandado y/o que ha podido construir en la etapa final de sus estudios, pero sus estudiantes podrían no estar en condiciones de seguirle–.

3. PARADIGMAS Y "ESPACIO DE TRABAJO" ALGEBRAICO

3.1. *Una pregunta inmediata*

Una pregunta inmediata y, en realidad, inevitable, es, si acaso hay una teoría, análoga a la anterior, para el caso del

Tal teoría debería considerar a comunidades de estudiantes trabajando en problemas, los aspectos cognitivos implícitos –intuición, experiencia, razonamiento–, la disciplina que conocen.
Habría que examinar las maneras de trabajar en las distintas etapas escolares: los paradigmas subyacentes, la materia bajo estudio, eventualmente, los recursos materiales (herramientas, artefactos) que se utilicen, la clase de argumentaciones (demostraciones) aceptadas; el tipo de explicaciones que provee el profesor (tal vez apropiada, infructuosa o errónea; incluso, contraproducente).
Se necesitaría preguntarse si acaso el trabajo de aula se realiza de acuerdo a diferentes puntos de vista, si a su vez estos determinan el rol de los objetos y/o el tipo de argumentación que se acepta; qué papel juegan (si alguno) en esos puntos de vista: la experimentación, la conjetura, el dibujo, la deducción, la “intuición‟ , la manipulación algebraica. Habría que determinar cuál es el rol de problemas, operaciones, transformaciones, representaciones…

3.2. *Similitudes y diferencias*

Lo anterior es, en algunos aspectos, similar al del caso de la Geometría. Sin embargo, es natural esperar que algunos aspectos jugarán roles de importancia diversa. La visualización y la medición, por ejemplo, pueden estimarse en forma diferente en el caso algebraico. Por otra parte, en las dos primeras “etapas” del caso geométrico, GI y GII (Cf. Kuzniak, 2004), se trabaja frecuentemente con métodos *ad hoc* para cada demostración (argumentación) o construcción; los métodos del álgebra, por el contrario, tienden a ser implícita o aun explícitamente universales, y los cuantificadores son relevantes, bien sea de manera no expresa. El lenguaje del álgebra parece decididamente más codificado que el de la geometría en aquellos estadios. La vinculación con la realidad, la modelación, discurren en carriles diversos en los casos del álgebra y de la geometría.

Para discernir el “espacio de trabajo‟ adecuado, el profesor debería aprender que hay: paradigmas diferentes en diversas etapas del estudio del “álgebra”, rupturas entre los diferentes niveles, y comprenderlos y usarlos en su diseño de clases y en sus interacciones con alumnos, de manera de explicarse claramente, proponer actividades apropiadas y corregir malentendidos didácticos.
Para determinar los paradigmas en juego, es relevante establecer qué caracteriza a los problemas y ejemplos significativos que se entregan a los estudiantes. Por sobre otras consideraciones, importa que el profesor y el alumno no trabajen en distintos “espacios de trabajo” algebraico.

4. ÁLGEBRA: HISTORIA Y EPISTEMOLOGÍA

4.1. *Epistemología e historia*

Con seguridad, la historia de la disciplina puede darnos alguna idea acerca de los obstáculos que deberán enfrentarse, las etapas que podrían seguirse, los esfuerzos que habrá que realizar, y ciertos puntos delicados.
En efecto, la humanidad ha recorrido un camino que ha debido ir construyendo, y, si bien el lenguaje y, en realidad, la conceptuación disponible hoy en día para realizar ese tránsito son más claras (aun cuando eventualmente más inaccesibles para un neófito), parece posible pensar que aquellas etapas recorridas en la historia nos pueden sugerir las que deberán atravesar los alumnos en forma individual y también de manera colectiva.
De hecho, Piaget y García (1989) sostienen que las diversas etapas en la construcción de distintas formas de conocimiento son secuenciales y que el mismo orden secuencial es evidente en la historia. Según ellos, un aspecto cualquiera del conocimiento no puede ser disociado de su contexto histórico y, por lo tanto, la historia del concepto puede dar alguna indicación acerca de su significación epistémica. Ellos consideran que estos niveles son la herramienta más constructiva que hallaron en su búsqueda de los mecanismos comunes entre historia y psicogénesis (Ibíd., p. 29).
Basados en la premisa anterior, daremos a continuación algunos elementos de la historia del álgebra, tomada en una acepción suficientemente amplia, enfatizando algunos aspectos de carácter epistemológico.

4.2. *El álgebra*

Hay distintas maneras de considerar qué es el álgebra. De hecho y según describiremos, hoy en día la expresión comporta dos acepciones bastante diferentes.
Una primera observación es que el álgebra está inextricablemente ligada a los números, a las ecuaciones y a los

"ecuaciones" implícitas: encontrar x tal que $2+x=5$ es restar 5-2, etc. A su vez, pensar en operaciones puede hacerse en forma concreta, obteniendo resultados o bien fijarse en las propiedades que estas cumplen.

G. Nessemlam (1842) introdujo tres fases históricas del álgebra: la retórica, la sincopada y la simbólica; tales etapas se refieren al uso del lenguaje. En la etapa retórica, el lenguaje utilizado es la lengua materna. Ella se presta bien para problemas sencillos, pero, evidentemente, se constituye en una dificultad para problemas más complejos. Aryabhata, hacia el 500 d. C., trabajará de esa manera, sin símbolos: ...tome la raíz cuadra de esto, substraiga el doble del primer término... Tan tarde como el año 1540, cuando Tartaglia se encuentra con Cardano, en lugar de una fórmula le enseña un verso que utiliza para resolver las ecuaciones cúbicas: "Cuando el cubo y la cosa juntas son iguales a un número discreto…" (en terminología actual, $x^3+cx=d$).
Diofanto, hacia 250 d. C., había incluido algunos símbolos en sus trabajos, y comienza así el álgebra sincopada: si se trata de encontrar dos números cuya suma es 20 y el producto 96, dirá $2x$ es la diferencia requerida, luego, los números son $10+x$, $10-x$... (Por supuesto, él usa letras griegas para los números, no aptas para cálculos, y los símbolos + y – no están a su disposición).
El modo de trabajo simbólico, el habitual en una clase de álgebra de secundaria, pertenece a una etapa más avanzada del álgebra.
Una primera cuestión es, entonces, la de las exigencias cognitivas que comportan estas fases y el tránsito entre ellas.

4.3. *Los Números*

La Historia, la de la humanidad, empieza con los números; de números son los primeros registros escritos que se conocen. La dificultad conceptual que suponen es manifiesta en los registros de que se dispone: se comienza a contar sin números (nombres estandarizados a los hijos, de acuerdo al orden de nacimiento; nombres que señalan, en orden, a dedos, muñecas, codos, hombros), o se cuenta hasta sólo hasta tres (hotentotes, *qawéshkar* del Sur de Chile, algunos aborígenes de Australia), o cuatro (guaraníes); cantidades "grandes" aludidas jalándose los cabellos…

Contar números (naturales) "grandes" o aun contar indefinidamente supone agrupamiento de cantidades y, en el mejor de los casos, base de numeración. El sistema posicional se presta más no solo al registro de tales números "grandes", sino a las operaciones entre ellos. Los Harappan, en el Punjab, entre 2500 y 1700 a. C., desarrollaron el primer sistema decimal que se conoce; los babilonios tuvieron un sistema sexagesimal del cual todavía hoy usamos ciertos elementos; los mayas utilizaron un sistema de base 20. El 0, propiamente tal, fue inventado solo en India y los otros pueblos que usan notación posicional enfrentan ambigüedades en la lectura de números de tres o más "dígitos".
La dificultad que todo esto supone puede estimarse al considerar que Gerbert d'Aurillac, quien sería el Papa Silvestre II en el año 1000, trató antes de esa fecha de introducir el sistema decimal en Europa, pero su éxito fue escaso, y Fibonacci, en su *Liber Abaci* lo deberá intentar nuevamente en 1202.

Los números racionales, positivos, aparecen antes que los enteros negativos. Lo hacen a veces como fracciones de unidades de medida (de mano, de palma, de codo, entre los egipcios; de codos entre los babilonios). Los indios tienen un sistema más abstracto. Los griegos los identifican con la división de trazos: poseen un "álgebra geométrica".
Los enteros aparecen en una forma muy "moderna" con Brahmagupta, en 628, como pares (ganancias, pérdidas) de un negocio: al final del día, ganar 9 y pagar 2 es equivalente a ganar 7 y no gastar.

4.4. *Construcción de los números*

En cuanto al álgebra, un problema central fue siempre y naturalmente, si había soluciones y, de haberlas, en qué ámbito habitaban.
Se podría pensar, entonces, que los números se fueron ampliando sucesivamente para encontrar soluciones de ecuaciones cada vez más demandantes. Así, $x+2=5$ y $2x=6$ tendrían soluciones en **N**, pero $x+2=1$ obligaría a ampliar a **Z**; luego $6x=2$ ampliar a **Q**; $x^2=4$ se puede resolver en **Q**, pero $x^2=2$ requiere de extenderse a **R**; posteriormente, $x^2+1=0$ obliga a ampliarse a **C**. Así, se habría construido sucesivamente **N**, **Z**, **Q**, **R** y **C** (y, por otros motivos, los cuaterniones de Hamilton y las octavas de Cayley).

octoniones por Graves en 1843; **Z** y **Q** en1860, por Weierstrass; **R** por Weierstrass, en 1860, Dedekind en 1872, Cantor en el mismo año, Kronecker en 1887; **N** por Peano en 1889).

En cualquier caso, es efectivo que se fue ampliando el universo de números en relación con la resolución de ecuaciones, y es importante señalar el obstáculo que cada extensión de los números comporta. Para los pitagóricos, convencidos que solo había números racionales (positivos) la construcción de la raíz cuadrada de 2 como diagonal de un cuadrado de lado 1 comportaría un descalabro tal que, según la tradición, Hippasos de Metapontum habría sido ahogado en el mar; M. Stifel, 1544, negará que los irracionales sean "verdaderos números". Descartes rechazará las soluciones negativas de las ecuaciones; tan tarde como 1803 Lazarus Carnot alegará de una multitud de "absurdos palpables que resultan de la noción misma de número negativo". Cardano, al trabajar con imaginarios, dirá "dejando de lado las torturas mentales que esto involucra…". Los nombres de "irracionales", y de "imaginarios", "sofísticos" o "imposibles" reflejan estos obstáculos.

4.5. *'Visualizaciones'*

Representar los números enfrentó también dificultades. Antes del plano de Argand-Gauss para los números complejos, Euler se refirió a los imaginarios diciendo que lo único que sabíamos de ellos era que no eran positivos, ni negativos, ni cero. Fácil de leer en el plano complejo, pero no en los modelos que se había propuesto, como por ejemplo, el de (la geografía de) los países bajos, que tienen una parte "virtual" –quitada al mar o bien que puede ser quitada por él–.

4.6. *La simbología*

La simbología es crucial para el desarrollo del álgebra; respecto de los números mismos, ya señalamos que alguna sirve para anotar, con restricciones, pero no para calcular. Las notaciones para las operaciones evolucionan tardíamente: Widmann introduce los símbolos para suma y resta en 1489; Stiefel los popularizará en 1554; la × para multiplicar es de Oughtred en 1631 y la contigüidad y ausencia de símbolo es de Pascal; Bombelli presenta alguna notación abreviada para raíces cuadradas y cúbicas; el signo igual es de Recorde en 1557.

La introducción de letras (incógnitas, parámetros) es lenta. La expresión en idioma común acota el desarrollo del álgebra. François Viète, en 1579 y luego en 1591, introduce las cantidades literales. Antes de ello, la incógnita será la "cosa" (Nicolo Fontana, hacia 1540) o similar. La evolución de la escritura de las ecuaciones transita paso a paso desde Regiomanto (1464), pasando por Luca Pacioli, (1494), François Viète (1593), Simon Stevin (1585), Christophe Klau (1593), para terminar estableciéndose en su forma actual con Descartes, en 1630.

4.7. *Ecuaciones y problemas*

La modelación de problemas es seguramente un aliciente para la resolución de ecuaciones; sin embargo, se observa por doquier y con frecuencia la presencia de problemas "inútiles", suerte de juegos inofensivos hechos por el placer del cálculo (en Egipto, India, Arabia, Grecia…).

5. ETAPAS EN EL DESARROLLO DEL ÁLGEBRA

5.1. *La teoría de ecuaciones*

Al examinar la historia del álgebra y de las ecuaciones, se puede percibir cómo hay etapas bien definidas, que no son solo períodos en el desarrollo histórico o del aprendizaje, sino que representan además maneras de organizar el conocimiento[1]. Cada etapa comienza con una reorganización de lo que se ha heredado de las precedentes; una vez que se alcanza un nuevo nivel, lo que es sobrepasado es integrado siempre en las nuevas estructuras.

Las etapas operacionales de la teoría de ecuaciones son claramente identificables (Cf., al respecto, Mena, 2010).

La *primera etapa* está caracterizada por el estudio de formas aisladas. Esta comienza con ecuaciones lineales

tratadas por egipcios y babilonios. Hacia el año 400 a. C. se encuentra un algoritmo (completar cuadrado) para resolver problemas que usan (en nuestra terminología) ecuaciones cuadráticas. Euclides ofrecerá un método geométrico para encontrar una longitud (que corresponde a nuestra ecuación cuadrática). Hacia el año 830, al-Khâwârazmi, con el apoyo de explicaciones geométricas, trata, por separado, diversas ecuaciones lineales y cuadráticas.
Otros árabes (incluyendo a Omar-al-Khayam) intentarán resolver algún tipo de ecuaciones cúbicas.
Luego de una que aparece en la *Flos* de Leonardo de Pisa, en 1225, encontramos que Scipione del Ferro conoce un tipo de ecuación cúbica hacia 1500. Con seguridad, Nicolo Fontana (Tartaglia) sabe otro[2]. Se trata de hacer un cambio de variable de manera de encontrar una resolvente cuadrática que se sabe trabajar.
Cardano se entera, hacia 1540, le sonsaca el caso y lo publica, junto con el de la ecuación cuártica desarrollado por su discípulo Ferrari –que usa una resolvente cúbica–.

En la *segunda etapa* se cambia el enfoque desde el analizar cada objeto a un estudio de las relaciones o transformaciones entre diferentes objetos. Lagrange, en 1770, considera la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones cúbica y cuártica, y trata de entender por qué se habían podido resolver. Observa que para ellas se usaban resolventes: ciertos cambios de variable permiten encontrar una ecuación asociada de menor grado, cuya solución se conoce y a partir de la cual se obtienen las soluciones de la ecuación original. Intenta ese camino para ecuaciones de grado 5, pero ahora el grado, en lugar de disminuir, sube. Concluye entonces que se necesita un nuevo enfoque si se quiere avanzar sobre el asunto.
Habrá trabajos similares de Vandermonde (1770), Waring (1770), Ruffini (1798, 1802, 1813).
En 1824, Niels Heinrik Abel publica una memoria en que demuestra correctamente que es imposible resolver la ecuación quíntica por radicales (aunque sí se puede encontrar una para la ciclotómica de grado arbitrario, por ejemplo).

En la *tercera etapa,* deliberadamente se ignora la multiplicidad de especificidades de los objetos o situaciones, y aquella se caracteriza por la evolución de estructuras y por nuevas síntesis. Esta etapa comienza con la introducción de la teoría de grupos con Galois. En varias memorias que presenta a la Academia de Ciencias de París –en 1829, 1830, 1831 y 1832 (Galois, 1962)– establece cuándo se puede encontrar una fórmula para resolver una ecuación algebraica y cuándo no: la ecuación es soluble por radicales si el grupo (en la terminología actual) es soluble.
Este resultado significa el término de la teoría centrada resolver ecuaciones y el comienzo de una nueva etapa en que predominan las estructuras.
Desde un punto de vista cognitivo, el acceso a este nuevo estado de cosas presenta, en principio un salto de proporciones: en 1870, Camille Jordan (1870) publicó su *Traité des substitutions et d'équations algébriques*, que desarrolla y comenta *in extenso* las memorias de Galois; ese año coincidieron en París los grandes matemáticos Sophus Lie (de los grupos y las álgebras de Lie) y Felix Klein (del *Erlangen Programme*, que unificó las geometrías), quienes leyeron juntos el texto de Jordan y encontraron que era "un libro con siete sellos".

5.2. *El álgebra abstracta*

La irrupción de los grupos es también el comienzo de la etapa del álgebra abstracta: pronto aparecerán, anillos, ideales, espacios vectoriales… cada uno estudiado por su cuenta.
La definición de grupo abstracto la dará Arthur Cayley en 1854; es este concepto abstracto el que permitió, por ejemplo, que Felix Klein los utilice posteriormente en la Geometría. Esa definición acentúa el cambio de énfasis que había habido, al centrarse no en los objetos sino en su manipulación, y con ello abre el camino para la proliferación de estructuras que le siguieron. El Álgebra se convierte así en lo que hoy conocemos: el estudio de las estructuras algebraicas.

Hay aun otras dos direcciones que señalar en esta evolución.
Por una parte, Nicolas Bourbaki (1939-1998) llevará la propia noción de estructura a un ámbito más amplio, y dirá que toda la Matemática consiste en el estudio de las estructuras algebraicas, topológicas (geométricas, *sensu lato*) y de orden.
En un sentido similar, la teoría de categorías unificará todas esas estructuras en una sola mirada global, y que parece completar un amplio ciclo: bajo esa perspectiva, no son los objetos los importantes, sino las flechas entre

ellos (Cf. Mac Lane, 1972).

6. ESPACIOS DE TRABAJO ALGEBRAICO

6.1. *La complejidad del álgebra*

Como queda dicha y de acuerdo a lo que nos enseña la historia del tema, el álgebra se nos presenta como una construcción muy compleja, en la que los números y su operatoria se entrelazan con problemas que pueden resolverse con ello; luego, a los números se agregan 'letras' que permiten trabajar mejor –plantear ecuaciones, generalizar las afirmaciones…– pero que a la vez presentan su propia dificultad. El avance en las propiedades de los números se realiza a la par de la resolución de las ecuaciones, las cuales a su vez dependen de aquellos pero, además, de los problemas que se progresivamente se pueden ir planteando con ellas.

6.2. *Nuestra hipótesis*

Hemos postulado cuatro "espacios de trabajo" algebraico, y luego los hemos podido identificar a partir de estudios exploratorios.
Por cierto, tales espacios comportan aspectos epistemológicos, paradigmáticos y cognitivos definidos, y el tránsito de una a otra comporta cambios en todos esos ámbitos (más o menos pronunciados, según el caso). De tal manera, esas etapas constituyen elementos de interés para la elaboración eventual de una teoría de Paradigmas y "espacios de trabajo" algebraico.

En lugar de señalarlos como ETA, que podrían confundirse con espacios de trabajo para el análisis (Cf., por ejemplo, Vandebrouck, 2011) y recordando la etimología árabe de la palabra álgebra (*al-jabr*), los llamaremos provisoriamente ETJ.

Damos primero una muy breve descripción, y luego la ampliamos vía un ejemplo que utilizamos en nuestro estudio: J0 representa una etapa previa a la aparición de los números. En J1, etapa de la *aritmética elemental*, hay ya números, y algún lenguaje numérico, incluso escrito. J2, que podemos llamar etapa del *álgebra elemental*, ya presenta una posibilidad de trabajar con letras, variables, incógnitas, parámetros. J3, etapa de las *estructuras algebraicas*, es ya una etapa avanzada, que corresponde además a ideas generales de conjuntos y de estructuras algebraicas.

6.3. *Las palomas y el gavilán*

El siguiente problema nos ha servido para confirmar nuestra hipótesis y para relacionar etapas históricas del desarrollo del álgebra con etapas que consideramos naturales en el aprendizaje de aula –de modo también empírico: por ejemplo, para encuestar a profesores–:

Cierto gavilán atacó un palomar. Las palomas eran valientes y lo rechazaron. Maltrecho su orgullo, al huir, él dice "Adiós cien palomas", implicando con ello que sólo en su número radicaba su fuerza. Pero una paloma le contesta: "Nosotras, más nosotras, más la mitad de nosotras, más la cuarta parte de nosotras, más usted señor gavilán, sí somos cien". Se pregunta cuántas son las palomas.

En los albores de la Historia de la Matemática (y, digamos, en el jardín de infantes), el problema no puede ni siquiera plantearse, pues no hay suficiente abstracción, no hay lenguaje apropiado. En efecto, para la estructura del problema es irrelevante que se trate de palomas, gavilanes o hipopótamos. No bastaría tampoco con disponer de una palomar grande para experimentar. Esto es característico de J0.

En una segunda etapa, (y en la enseñanza básica), se trataría el problema como una cuestión de números (naturales); la solución se busca por tanteo y error, postulando alguno y examinando si satisface las condiciones del problema. Naturalmente, los primeros experimentos indican que se debe trabajar con múltiplos de cuatro, menores que cuarenta, mayores que veinte... Se persiste hasta encontrar la solución, o bien hasta agotar todos los casos posibles para demostrar que no la hay. Esto corresponde a la llamada Aritmética Elemental, y caracteriza al

En un tercer estadio (y también en la enseñanza media), se dispone ya del Álgebra Elemental. Así como los números podían representar palomas, así también las letras reemplazan a los números. La ecuación $x + x + (x/2)+(x/4)+1=100$ contiene toda la información necesaria; una vez escrita, la solución se obtiene de un modo mecánico que no requiere de mayor reflexión. Este es el espacio J2.

Estudiar Lógica y Conjuntos (cuarta etapa) representa una mayor abstracción, un grado más alto de generalidad. El problema inicial está aún más lejano (y no tiene que ver con palomas). Ahora es la ecuación misma la que puede pensarse como un caso particular de los objetos en estudio; $\varepsilon(x)$: $x+x+(x/2)+(x/4)+1=100$ es, en realidad, una *función proposicional*, que determina un subconjunto (eventualmente vacío) del conjunto **N** de los números naturales (nuestro conjunto de referencia en este caso). Este subconjunto se llama la solución de la función proposicional (en **N**). Conectivos lógicos, intersecciones, dominios de funciones, cuantificadores y, muy relevante, la distinción entre implicación y equivalencia (que permite distinguir, vía el axioma de especificación, si acaso la solución de la ecuación inicial se ha convertido en un conjunto que contiene elementos adicionales a los que debería) son un lenguaje apropiado y necesario en esta etapa. Esto también puede (y debe) expresarse como acciones de grupos (en el caso del ejemplo, el grupo aditivo de **R**, el grupo multiplicativo de **R**; en otros, ciertos grupos de matrices y/o de aplicaciones lineales). Este es un caso de J3.
Como cabría advertir, J3 evoluciona, a su vez, hacia el estudio de ecuaciones en diversas estructuras algebraicas –grupos, anillos, dominios euclidianos, cuerpos, espacios vectoriales; considerar, insistimos, acciones de grupos y/o de cuerpos…–.

Es necesario agregar que el punto de vista propiamente algebraico en Matemáticas evoluciona, además, hacia la teoría de categorías y, más bien, de funtores. En esa mirada, ya no son los objetos los importantes (que quedan definidos, cuando tienen propiedades universales, salvo un único isomorfismo), sino las flechas entre ellos (Cf. Mac Lane, 1972; Mena, 2010).

6.4. *Acerca de la transición de J1 a J2 en Chile*

Los programas de estudio del Ministerio de Educación de Chile, MINEDUC, tratan, como cabría esperar, el tema de las ecuaciones en forma simultánea con algunos aspectos del estudio de los números:

En *5° Básico*, en el eje *Números y álgebra*, la Unidad 3, junto con el estudio de operatoria y problemas elementales con fracciones y decimales, incluye: "Calcular expresiones algebraicas y reemplazar las letras por el valor numérico… Representar situaciones numéricas con letras. Utilizar el procedimiento de reducción de términos semejantes".

En *6° Básico*, en el mismo eje, la Primera Unidad incluye operatoria de potencias de 10, números mixtos, decimales, uso de calculadoras, porcentajes y "Resolver problemas, en contextos diversos, que involucran las cuatro operaciones aritméticas en el ámbito de los números naturales, las fracciones y los decimales positivos". La Segunda Unidad incluye trabajos con potencias, "Representar generalizaciones que surjan a partir de relaciones numéricas, utilizando letras como variables. Representar generalizaciones que surjan a partir de relaciones numéricas, utilizando letras como variables. Reconocer ecuaciones de primer grado con una incógnita en el ámbito de los números naturales y verificar la igualdad. Utilizar estrategias para resolver ecuaciones de primer grado que son modelos de diversas situaciones de la vida cotidiana. Verificar soluciones de ecuaciones de primer grado con una incógnita obtenidas en la resolución de ellas mediante sustitución de la incógnita o el análisis del contexto".

En *7° Básico*, se establece en *Aprendizajes esperados* 01: "Los estudiantes resuelven mentalmente y de manera escrita una lista de ecuaciones de primer grado, cuya solución es un número natural, y argumentan acerca de las estrategias empleadas. Por ejemplo: a. $2x+1=17$; b. $3x–2=16$". En *Aprendizajes esperados* 08: "Resolver problemas que impliquen plantear y resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, en el ámbito de los números enteros y fracciones o decimales positivos, y problemas que involucran proporcionalidad".

De tal manera, la transición de J1 a J2 debería darse en el período que va de 5°, a 6° y/o 7° básicos. Ello no obstante, nuestros datos, obtenidos en profesores noveles del norte, del centro y del sur del país, indican que estos no estarían preparados para auxiliar a los niños a realizar esa transición, cosa que está de acuerdo con estudios más generales acerca de la preparación de nuestros profesores básicos (Cf. OCDE, 2004, e. g.).

Nuestros datos indican que en este tránsito se es menos exitoso que el anterior.
No se encuentra, por ejemplo, profesores que tengan claro por qué una ecuación tiene solución: ninguna versión, siquiera ingenua (digamos, la 'definición de un conjunto por comprensión') del axioma de especificación se ofrece como respuesta a tal pregunta.
Aun cuando todos los profesores que han egresado de alguna institución formadora del país han estudiado funciones, muy pocos de entre nuestros encuestados pueden identificar una ecuación como una función proposicional[3] del tipo $f(x)=g(x)$ y, de esa manera, la ausencia del estudio del dominio, previo a la resolución de la ecuación, le impide considerar de manera clara la solución efectiva de la ecuación. Tampoco se pueden beneficiar de (incluso, alguna versión ingenua de) la diferencia entre equivalencias lógicas e implicaciones en un solo sentido.
Nuestros datos indican, además, que los profesores, aun en el caso de que tengan postgrados en enseñanza de la matemática, no comprenden por qué la palabra 'álgebra' se utiliza tanto en su versión elemental como para el estudio de aquellas estructuras.

6.6. *Las palomas, nuevamente*

Una estudiante de nuestro postgrado (Cf. Sanhueza, 2012) planteó el problema de las palomas a un grupo de 30 profesores de educación básica participantes en un curso de desarrollo profesional docente.
En primer lugar, se les solicitó intentar el problema por ensayo y error. Solo 1 de ellos resolvió correctamente el problema; a 13 de ellos el ensayo y error no les dio resultado correcto; 14 no supieron encarar el problema por ensayo y error, y 2 no respondieron.
Luego, se les solicitó intentar el problema por medio del planteamiento de una ecuación. En ese caso, hubo 3 respuestas correctas, 17 incorrectas; 8 que no pudieron plantear una ecuación, y 2 profesores no respondieron la pregunta.

7. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

La idea de nuestro proyecto es estudiar la transición de un espacio de trabajo a otro, particularmente, de J1 a J2 y de J2 a J3.

Sin embargo, las experiencias realizadas no han permitido recoger directamente información al respecto.
Por una parte, la falta de claridad acerca de lo que comportan el trabajo aritmético elemental y el trabajo de ecuaciones algebraicas también elementales hace difícil que el profesor pueda plantearse cómo realizar un tránsito entre espacios de trabajo. Por otra, hay aun una confusión mayor en lo que se refiere a la relación de las estructuras algebraicas con el estudio de, por ejemplo, las ecuaciones; en adición a ello, no se aprecia que los profesores puedan utilizar rudimentos de teoría de conjuntos para clarificar por qué una ecuación tiene solución, cómo inciden los dominios de las funciones involucradas, por qué (o por qué no) se puede garantizar que el procedimiento de resolución no altera la resolución buscada.

Entretanto esta cuestión no ofrece avances significativos, parece que el profesor seguirá, como de costumbre, haciendo clases en que se reiteran ejercicios de manera mecánica, particularmente de operatoria básica, sin esperanza de mayor claridad.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto FONDECYT N° 1110988.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barker, P., Andersen, H. & Chen, X. (2006). *The Cognitive Structure of Scientific Revolutions.* Oxford: Cambridge.

Bell, E. T. (1945). *The Development of Mathematics*. New York: McGraw Hill

Bourbaki, N. (1939-1998). *Éléments de mathématique*, 10 vols. (Algèbre, 1973). Paris: Hermann.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de L'Apprentissage de la Géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Galois, E. (1962). *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*. Robert Bourgne y J.-P. Azr, (Éds.). Paris: Gauthier-Vilars.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques,* 16(3), 289-321.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes Géométriques et Enseignement de la Géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.

Jordan, C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris: Gauthier-Vilars.

Bourbaki, N. (1939-1998). *Éléments de mathématique*, 10 vols. (Algèbre, 1973). Paris: Hermann.

Galois, E. (1962). *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*. Robert Bourgne y J.-P. Azr, (Éds.). Paris: Gauthier-Vilars.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes Géométriques et Enseignement de la Géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.

Jordan, C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris: Gauthier-Vilars.

Kuhn, T. (1962). *The structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Paris: IREM de Paris 7.

Kuzniak, A. (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 6.2, 167-187.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives,* 16*,* 9-24.

Lakatos, I. & Musgrave, A. (1970). *Criticism and the Growth of Knolwedge*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mac Lane, S. (1972). *Categories for the working Mathematician*. New York: Springer Verlag.

Mena-Lorca, A. (2010). *Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo*. Tesis doctoral, no publicada. Centro de Investigación Avanzada y de Tecnología Aplicada, Instituto Politécnico Nacional, México.

MINEDUC (2001a). Los resultados de la prueba INICIA. Ministerio de Educación de Chile. http://www.mineduc.cl/index2.php?id_contenido=14084&id_portal=1&id_seccion=10

MINEDUC (2011b). Estándares orientadores para egresados de carreras de pedagogía en educación básica. http://www.ciae.uchile.cl/index.php?page=view_noticias&id=114

MINEDUC. (2012). *Curriculum Nacional*. Ministerio de Educación. http://www.curriculum-mineduc.cl/

Montoya E. (2010). *Étude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili*. Thèse pour obtenir le titre de Docteur. Paris : Université Paris Diderot-Paris 7.

Nesselman, G. (1842). *Versuch einer Kritischen Geschichte der Algebra, 1. Teil. Die Algebra der Griechen*. Berlin: G. Reimer.

Newton, I. (1718). *Opticks, or, A treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light.* The second edition, with additions. London : W. and J. Innys. http://www.fordham.edu/halsall/mod/newton-optics.html

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psychogenesis and the history of Science*. New York: Columbia University Press.

Popper, K. (1999). *The Logic of Scientific Discovery.* Padstow, Cornwall: J International Ltd.

Sanhueza, M. (2012). *Aproximación teórica didáctica a los "Espacios de Trabajo Algebraico". Enseñanza de la ecuación lineal en Chile.* Trabajo final para optar al grado de Magíster en Didáctica de las Matemáticas, no publicado.

Vandebrouck, F. (2011). Points de vue et domaines de travail pour l'étude des fonctions, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de Strasbourg*, 16, 149-185.

Autores:

Arturo Mena-Lorca. Centro de Investigación Avanzada en Educación, e Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile, arturo.mena@ucv.cl

Jaime Mena-Lorca. Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile, jmena@ucv.cl

Astrid Morales-Soto. Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile, ammorale@ucv.cl

UN ESPACE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE POUR LA MISE EN EVIDENCE DES SIGNIFICATIONS GEOMETRIQUES DE LA MULTIPLICATION DE NOMBRES REELS ET COMPLEXES : MEDIATION SEMIOTIQUE ET PARCOURS DES ELEVES

A MATHEMATICAL WORK SPACE FOR THE EXPLANATION OF THE GEOMETRICAL MEANINGS OF MULTIPLICATION OF REAL AND COMPLEX NUMBERS: SEMIOTIC MEDIATION AND STUDENTS' CHOSEN PATHS

Raquel Isabel Barrera Curin

quellita@gmail.com

Laboratoire de Didactique André Revuz – Université Paris Diderot – Paris 7

Resumen. Este trabajo contribuye, por un lado, a determinar las implicaciones didácticas de un análisis de trabajos epistemológicos que relacionan números, calculo y geometría y por otro lado, a constituir un marco teórico que favorece el análisis del trabajo matemático de los alumnos en el proceso de encuentro entre un objeto matemático y la construcción de su sentido en geometría. El marco teórico consiste en una articulación de elementos asociados al Espacio de Trabajo Matemático y a la mediación semiótica. El método de análisis será bosquejado, para finalmente presentar una parte de nuestros resultados de la investigación. Estos resultados corresponden a la determinación de trayectorias de individuos, las cuales resultan de diversas interacciones producidas entre los diferentes planos del Espacio de Trabajo Matemático. Las producciones de los alumnos otorgan información acerca de las dificultades y oportunidades que les permitieron poner en relación la multiplicación y algunas de sus significaciones .

Palabras clave. *Espacio de Trabajo Matemático, mediación semiótica, registros de representación, trayectorias, producto de números reales y complejos, signo-artefacto.*

Abstract. This project aims, first of all, to determine the didactic implications of analyzing epistemological investigations of links between numbers, arithmetic and geometry, and second, to build a theoretical framework for examining students' mathematical work in situations where mathematical objects encounter their geometrical meanings. This theoretical framework is largely based on the Space for Mathematical Work and semiotic mediation. We outline our method of analysis and conclude with partial results of our project. These results are based on determinations of the paths chosen by individual students, leading to interactions between the different planes of a Space for Mathematical Work. The students' work reveals both the obstacles they encountered and the clues that guided them toward establishing a link between multiplication and some of its geometric meanings.

Keywords. *Space for Mathematical Work, semiotic mediation, registers of representation, student's chosen paths, complex and real numbers product, sign-artifact.*

Resumo. Este trabalho contribui tanto para a determinação das implicações didáticas de uma análise de trabalhos epistemológicos sobre a ligação entre números, cálculo e geometria, quanto para o estabelecimento de um arcabouço teórico que favoreça a análise do trabalho matemático dos alunos, no encontro entre um objeto matemático e seu sentido na geometria. Nossa articulação teórica aborda principalmente o Espaço de Trabalho Matemático e a mediação semiótica. O método de análise será esboçado para apresentar uma parte de nossos resultados de pesquisa. Esses resultados abordarão a determinação das trajetórias individuais, resultantes das interações produzidas entre os diferentes planos de um Espaço de Trabalho Matemático. As produções dos alunos levam em conta tanto os obstáculos quanto os indícios que lhes permitam de relacionar a multiplicação a algumas de suas significações geométricas.

Palavras-chave. Espace de Travail Mathématique, mediação semiótica, registros de representação, trajetória dos alunos, produto dos números reais e complexos, signo-artefato.

Résumé. Ce travail contribue, d'une part, à déterminer les implications didactiques d'une analyse des travaux épistémologiques portant sur la mise en relation entre nombres, calcul et géométrie et, d'autre part, à constituer un cadre théorique favorisant l'analyse du travail mathématique des élèves lors de la rencontre entre un objet mathématique et son sens en géométrie. Notre articulation théorique porte principalement sur l'Espace de Travail Mathématique et la médiation sémiotique. La méthode d'analyse sera esquissée pour finalement présenter une partie de nos résultats de recherche. Ces résultats portent sur la détermination de *parcours d'individus* résultant des interactions produites entre les différents plans d'un Espace de Travail Mathématique. Les productions des élèves rendent compte des obstacles ainsi que des indices leur permettant de mettre en lien la multiplication et certaines de ses significations géométriques.

Mots clés. *Espace de Travail Mathématique, médiation sémiotique, registres de représentation, parcours des élèves, produit de nombres réels et complexes, signe-artefact.*

1. DES RELATIONS ENTRE DES ANALYSES ÉPISTÉMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE D'UN OBJET MATHÉMATIQUE A LA CONCEPTION D'UN OUTIL THÉORIQUE POUR L'ANALYSE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES

Tout au début de cette recherche nous nous sommes intéressés aux relations entre nombres, calcul et géométrie dans l'histoire (i.e. Hérodote, s.d. / 1964 ; Bkouche, 1994 ; 2009 ; 2009b) et, plus particulièrement, aux études rendant compte d'une analyse épistémologique (Glaeser, 1981 ; Ribeiro, 1997 ; Freudenthal 2003; Bruter, 2000 ; Flament, 2003) et didactique (Douady, 1986 ; Brousseau, 1996 ; Conne & Lemoyne, 1999 ; Davis & Simmt, 2006) de la multiplication. Cette analyse, qui porte sur cet objet mathématique et qui vise la détermination des conditions de sa compréhension (Sierpinska, 1991), a constitué le premier pas méthodologique pour le démarrage de notre recherche. Notre intérêt aux travaux historico-épistémologiques et didactiques, portant sur les liens entre des représentations géométriques et calcul numérique, enrichit une analyse didactique actuelle des processus mettant en relation la multiplication et certaines de ses significations à travers la géométrie. De ce fait, l'acceptation d'une mise en relation entre ces deux analyses permettrait, d'une part, que les objets mathématiques en jeu se déprennent de leur simplicité (Artigue & Robinet, 1982) et, d'autre part, que la construction de futurs processus d'enseignement favorise l'acquisition de significations de ces objets. Compte tenu ce qui précède, nous avons été conduits à la conception d'une séance expérimentale nous permettant d'étudier en profondeur, grâce au travail de plusieurs élèves, la maîtrise qu'ils manifestent ou au contraire les obstacles qu'ils rencontrent, à l'intérieur d'un travail mathématique qui a nécessairement besoin de différentes représentations sémiotiques dans le processus visant la rencontre entre un objet mathématique et sa signification (Duval, 1993).

1.1. Espace de Travail Mathématique (ETM) et registres de représentation sémiotique : la géométrie comme intermédiaire entre un objet mathématique et sa compréhension

Aujourd'hui, le fait que la notion de multiplication soit intimement liée à l'idée de calcul peut bloquer les possibilités d'envisager une représentation géométrique du produit. De même, l'association des nombres réels à la notion de grandeur peut aussi constituer un élément de blocage lorsqu'il s'agit de représenter les nombres négatifs ainsi que de donner un sens au produit de deux nombres négatifs. De ce fait, la multiplication des entiers négatifs ne permet pas une représentation géométrique à moins que ces « quantités » soient traitées en termes de sens et de direction (Argand, 1806). En outre, le sens du produit de deux fractions ne peut être trouvé que dans les réductions et les agrandissements (Brousseau, 1996). En ce qui concerne les nombres complexes, l'extension de la définition de leurs opérations est liée à la représentation des quantités imaginaires par des vecteurs ou des segments de droite de Wessel (Flament, 2003). En conséquence, la géométrisation de la multiplication pour différents ensembles de nombres peut être rencontrée dans un contexte géométrique de transformation.

Pour nous, les représentations en géométrie portant ces transformations répondent à un système de représentation sémiotique complémentaire du système numérique et mobilisent des variables cognitives qui visent à favoriser la compréhension d'un objet mathématique. En outre, les concepts algébriques et arithmétiques ne sont représentés qu'à travers un schéma symbolique (Radford, 2003) où un *signe* « bears an arbitrary or non-motivated relationship to its signified » (Radford, 2003, p.5). De ce fait, un intermédiaire, outre ces signes-représentants, entre une conception et l'accès à ses significations nous semble toujours nécessaire, étant donné que « there is not mathematical thinking without using semiotic representations » (Duval, 2008, p.1).

Grace à la notion d'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) nous pouvons rendre compte de la complexité mathématique et cognitive des élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes de ce type. Cette notion suppose une mise en réseau de deux niveaux, l'un cognitif et l'autre épistémologique, et cette mise en réseau s'appuie sur un certain nombre de *genèses* notamment *sémiotique (entre les représentations géométriques et la visualisation des objets mathématiques), instrumentale (entre la prise en main des instruments et la construction mathématique)* ou *discursive (entre le référentiel théorique et l'accès à la preuve)* (*voir introduction de ce numéro spécial, figure 2*). Nous nous sommes intéressés donc à l'analyse de cette relation bilatérale en vue de la caractériser selon sa nature, ce qui nous a permis d'élargir notre domaine de connaissance théorique des espaces de travail mathématiques pour l'analyse de *parcours d'action* de différents individus. Ces actions se produiront au milieu d'une situation expérimentale qui vise : la mise en œuvre de connaissances mathématiques anciennes, l'interprétation géométrique d'un objet mathématique, l'analyse des représentations géométriques, un travail collaboratif et la mise en fonctionnement d'un raisonnement déductif à l'intérieur d'une situation non traditionnelle d'apprentissage. D'un point de vue plus classique, le point de départ des genèses articulant les deux plans de l'ETM se trouverait prioritairement au niveau épistémologique. Néanmoins, l'action des composantes du plan épistémologique peut bien être déclenchée par des besoins du niveau cognitif. Dans ces processus articulant les deux plans d'un ETM appelés genèses, nous pouvons préciser non seulement l'existence mais aussi les permanentes interactions et conversions entre différents registres de représentations sémiotiques. Comme le souligne Duval, « mathematical objects are never accessible by perceptions or by instruments. The only way to have access to them is using signs or semiotic representations » (Duval, 2006, p. 107). En conséquence, une hypothèse émerge concernant la possibilité d'une entrée cognitive au travail mathématique : avoir conscience de la signification *métaphorique* (caractéristiques sémantiques produites par visualisation ou reconnaissance des significations dans un contexte visuel) d'un objet mathématique permettrait une entrée cognitive *à l'action* à l'intérieur d'un ETM ce qui en même temps favoriserait la manipulation des composants du plan épistémologique.

1.2. Espace de Travail Mathématique et l'élargissement de l'aspect cognitif : médiation sémiotique et l'intervention des signes-artefacts dans un espace d'interactions sociales

Au sein des différents travaux portant sur les notions sémiotiques présentes dans des processus d'apprentissage-enseignement des mathématiques, qu'ils aient intégré ou non des outils informatiques, qu'ils restent sur les registres de représentation sémiotiques ou qu'ils fassent une spéciale attention au rôle du langage et à la compréhension des objets mathématiques, toutes ces positions, « autour du rapport entre mathématiques et sémiotique, investissent des questions d'ordre épistémologique, cognitif et socioculturel » (Falcade, 2006, p. 3-4). En prenant en compte notre intérêt spécifique à la genèse sémiotique à l'intérieur d'un ETM, les limitations de l'approche sémiotique déjà existante ainsi que la délimitation théorique donnée aux artefacts au sein de l'approche de l'Espace de Travail Géométrique nous ont amenés à la recherche d'autres approches théoriques portant sur la médiation sémiotique et sur la construction sociale de connaissances mathématiques. Pour cela, nous avons travaillé notamment concentrés sur les travaux de Bartolini Bussi et Mariotti (2008) concernant la Théorie de la Médiation Sémiotique (TMS) ainsi que sur certaines réflexions associées à la construction sociale de connaissances mathématiques et à la complexité du processus de compréhension d'un objet mathématique de Radford (2000, 2004) et Sfard (2008). Cela dit, nous intégrons l'ETM dans un processus socio-constructiviste de l'apprentissage (fondement épistémologique de la TMS) où les dimensions socioculturelle et sémiotique s'intègrent dans la *zone de développement proximale* définie par Vygotsky (1934-1997). C'est dans cette *zone*, fondamentale pour l’articulation des deux plans de l’ETM, que des *signes-artefacts, historiques ou technologiques,* remplissent leur rôle de médiateurs (Vygotsky, 1931-1978) se transformant en signes mathématiques porteurs du sens. De ce fait, il nous semble approprié d'intégrer explicitement des *intermédiaires médiateurs* là où les différentes genèses (Kuzniak, 2012) se produisent, à l'endroit où la recherche et l'acquisition de sens des objets mathématiques peuvent devenir accessibles grâce à la médiation sémiotique et, quand cela est possible, grâce aussi à la médiation sociale. Notre intérêt à l’aspect social des processus d’apprentissage, ainsi qu’à l’étude des processus de médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Marioti, 2008) favorisant la construction collaborative d’un objet mathématique, nous ont conduits à l’élaboration d’un cadre théorique articulant des éléments cognitifs et didactiques (Barrera Curin, 2012). Notre approche s’intéresse aux interprétations métaphoriques des connaissances mathématiques et aux utilisations médiatiques de ces interprétations jusqu’à ce que la compréhension de nouvelles connaissances devienne *explicitable* et *interprétable* grâce à sa verbalisation dans une situation de communication. De ce fait, nous avons commencé par donner un contexte à notre point de départ concernant le rôle des représentations géométriques pour l’apprentissage d’objets mathématiques usuellement représentés dans un autre cadre mathématique : l’importance de la visualisation ainsi que l’importance de prendre en compte la complexité cognitive des situations d’apprentissage qui impliquent nécessairement des changements de registres de représentation sémiotique. Ensuite, l’analyse de l’Espace de Travail Mathématique nous a conduits à une proposition théorique (voir le schéma présenté dans l’*annexe 1)* qui rend compte, d’une part, de l’aspect dynamique de ses composantes et, d’autre part, de l’articulation des plans épistémologique et cognitif grâce à l’action du signe-artefact dans un contexte de médiation sémiotique. De ce fait, nous rendons compte des fondements de nos propositions didactiques et confirmons une nouvelle conception de l’enseignement de mathématiques.

2. METHODOLOGIE

L'expérimentation a été mise en place dans l’Ile de France dans quatre classes de Terminale S (dernière classe du lycée scientifique, élèves d’entre 17 et 18 ans) par les professeurs de ces classes. 34 groupes de deux à quatre élèves ont effectué le travail demandé sur une séance de deux heures de recherche. Cette séance expérimentale a été intégrée à la progression des enseignants qui venaient de commencer le chapitre sur les nombres complexes. Les enseignants participant à cette expérience partageaient nos réflexions sur le fait que les représentations géométriques des nombres complexes sont nécessaires pour développer l'acquisition générale de ces nombres (Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A., & G**i**atilis, G. (2007). Les élèves ont eu à résoudre une suite de cinq questions proposant une approche géométrique de la multiplication de nombres réels et complexes. Dans un premier temps, les élèves devaient effectuer la construction géométrique du produit de deux nombres réels dans le cadre proposé par Descartes dans sa *Géométrie* (1637). Puis, il leur était demandé de trouver une relation entre des points donnés dans le plan et la multiplication de nombres complexes. En s'appuyant sur ces activités, notre but était de décrire et de caractériser des *parcours* d'élèves dans l'ETM en précisant notamment leurs possibilités de rencontrer les significations géométriques de la multiplication à partir de l'analyse de la représentation géométrique de la multiplication de Descartes. Cette représentation géométrique représente aussi un icône du théorème de Thalès dont sa relevance dans l'enseignement français nous a permis de lui attribuer le rôle d'un signe-artefact, destiné à être interprété et à évoluer jusqu'à être visualisé comme une représentation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres.

La dernière question de la séquence ou question de synthèse (*annexe 2*) sollicite un retour réflexif des élèves sur l'ensemble de l'activité. Elle est fondamentale dans le processus de recherche et son analyse doit permettre une première description des parcours effectués par les élèves dans le travail mathématique. 24 groupes ont répondu à cette question de synthèse. Pour décrire le rôle de la géométrisation dans l'approche de la multiplication chez les élèves, nous avons étudié leur manière de résoudre des problèmes de construction géométrique mettant en jeu la multiplication des nombres réels et des nombres complexes. Petit à petit nous sommes amenés à répondre une question qui articule nos recherches dans les contextes épistémologique et expérimentale : y a-t-il des interactions entre les plans cognitif et épistémologique de l'ETM approprié par les élèves rendant compte d'une compréhension géométrique de la multiplication ?

Je précise que la phase expérimentale de cette recherche n'est présentée que partiellement dans cet article.

3. PARCOURS DES ÉLÈVES : ANALYSES DE QUELQUES RÉSULTATS

Les groupes de travail faisant partie de notre expérimentation – appelés *individus* tout au long de l'analyse puisqu'ils ont été considérés comme des entités étant donné leur dépendance dans ce processus collaboratif d'apprentissage – ont tout d'abord été classés *à la main* en fonction de leurs réponses à la dernière question : nous avons étudié chaque séquence et chacune des réponses à la dernière question en cherchant des éléments de réponse en concordance ou non avec ceux que nous avions déterminé *a priori*. Il en est résulté une première classification avec trois types de réponses possibles. Puis un traitement sur quinze variables binaires a été effectué avec le logiciel C.H.I.C. dont l'arbre de similarité (*annexe 4*) associé à l'analyse nous a permis d'identifier, avec quelques variations bien sûr, étant donné la quantité réduite de données (ce qui ne permet pas la visualisation de relations de similarité significatives), les trois groupes déjà trouvés *à la main* : Transformation (T ; des réponses se référant aux réductions, agrandissements, déplacements ainsi qu'à une rotation ou à une homothétie) ; Proportionnalité et théorème de Thalès (PTTh ; des réponses explicitant les relations de proportionnalité ou le théorème de Thalès avec ou sans représentations géométriques et mentionnant ou non la multiplication des nombres complexes) ; Complexe (C ; des réponses se référant exclusivement aux propriétés de la multiplication des nombres complexes, sans faire référence explicite aux transformations géométriques). Un aspect très intéressant qui résulte de cette première classification mise à l'épreuve du logiciel de statistique implicative est l'isolement du groupe associé aux « propriétés de la multiplication de nombres complexes » par rapport aux deux autres groupes. Ce point est intéressant dans notre étude didactique car il est important de savoir le type de travail géométrique accompli par les élèves qui ont repéré les propriétés géométriques de la multiplication des complexes. Un regard approfondi sur chacune des réponses nous a permis d'identifier un autre facteur à prendre en compte qui pourrait intervenir d'une façon très intéressante dans l'étude des interactions entre différents cadres mathématiques : il s'agit de l'existence ou non d'une référence explicite ou implicite à la règle de signes (RS) dans les réponses à la dernière question. Pour avancer dans l'identification de parcours caractéristiques, nous avons fait une analyse très fine de chacune des autres questions de la séquence. Un de nos objectifs était d'apporter une réponse aux interrogations suivantes apparues à l'issue de l'analyse de la question de synthèse (dernière question de la séquence) :

– Serait-il possible d'établir des relations entre le pôle propriétés de la multiplication de nombres complexes et les éléments de réponse concernant les transformations ? Comment s'explique

l'existence d'un groupe d'élèves qui ne concluent que sur les propriétés algébriques des nombres complexes sans mettre en relation ce résultat avec le travail géométrique effectué pendant la séance ? Comment les propriétés de la multiplication de nombres complexes ont influencé le travail des individus surtout face aux questions portant sur les significations géométriques de la multiplication et sur les constructions ? – Quel appui sur le figural peut-on identifier au cours de la séance ? A quel moment et de quelle façon se fait-il présent ? Quelle influence a pu exercer notre signe-artefact sur la suite du processus de compréhension de la multiplication ?
Nous ne donnerons ici que quatre exemples de parcours rencontrés de manière à illustrer quelques-uns des résultats obtenus. Les figures correspondent à des scans des productions des élèves. Nous présentons une réécriture des réponses des élèves dans l'*annexe 3.*

3.1. Comparaison de deux groupes de la classe « C » avec une synthèse portant uniquement sur les propriétés de la multiplication des nombres complexes

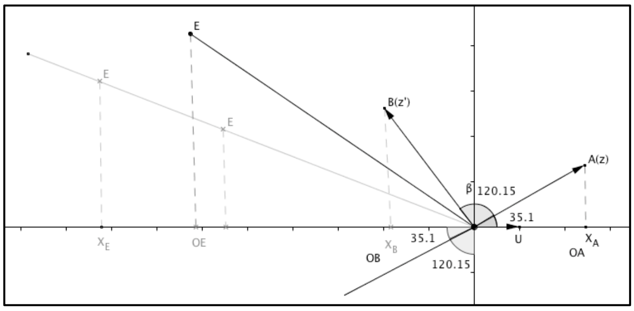
Ces deux premiers groupes appartenant à la même classe (C), diffèrent dans le formalisme présenté dans leur réponse à la dernière question (*figure 1*).

La multiplication est une addition d'angle et une addition des longueurs par rapport à l'origine.

$\|\overrightarrow{OE}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|$ $\widehat{UOE} = \widehat{UOA} + \widehat{UOB}.$ Multiplier 2 nombres représentés géométriquement permet d'en trouver un troisième géométriquement définit par dorme de son vecteur et son angle.

Figure 1. En bas, synthèse du groupe C2-I7 (classe 2, individu 7). En haut, synthèse du groupe C1-I4 (classe 1, individu 4)

Cette différence nous a orientés dans l'étude des parcours des individus en nous donnant un critère qui sera le point d'entrée dans cette analyse : la mise en relation des genèses discursives portant sur les propriétés mathématiques – référence théorique pour l'interprétation des énoncés, la preuve et la construction – et les genèses sémiotiques qui sont le cœur de la relation entre les différents plans de l'Espace de Travail Mathématique et que notre séquence visait à faire émerger ou à identifier. Dans les réponses observées dans la *figure 1*, nous pouvons observer que ces deux individus ne font aucune allusion au reste de la séance et leur réponse ne fait apparaître aucune mise en relation avec les éléments figuraux présents dans l'activité. Lorsqu'on examine leurs productions sur d'autres questions de la séquence, on constate un travail de construction très précis avec les mesures effectuées sur les figures. Le groupe C2-I7 (*figure 2*) s'appuie sur sa construction et sur l'usage des normes comme des longueurs. Il reste attaché à ses connaissances théoriques antérieures à la séance et ne s'appuie que de manière superficielle sur la situation donnée en classe qu'il se contente d'effectuer sans mettre en relation avec le but recherché.



$$\frac{\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\|}{\|\vec{U}\|} = \frac{4\times 3{,}2}{1{,}65}\ (cm)\ = 7{,}7\ cm$$

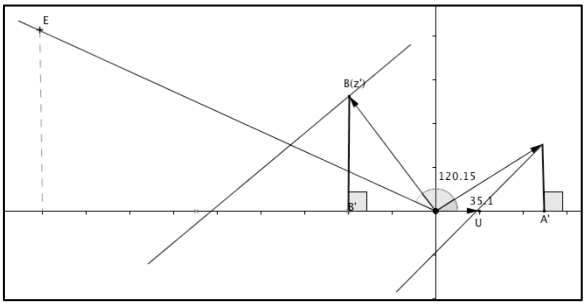
$\|\overrightarrow{OU}\| = 1u = 1{,}65\ cm$ $\quad\|\overrightarrow{OA}\| = 2{,}4u$

$= 4\ cm$

$\|\overrightarrow{OB}\| = 1{,}9u = 3{,}2\ cm$

$2{,}4\times 3{,}2 = 4{,}56\ u$ $\quad\|\overrightarrow{OA}\|\times\|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OE}\|$

$4{,}56\times 1{,}65 = 7{,}5\ cm$



$$\frac{OU}{OA} = \frac{OB}{OE}$$

$$\Leftrightarrow OE = \frac{OB\times OA}{OU}$$

$$\Leftrightarrow OE = OB\times OA$$

$$\Leftrightarrow 7{,}1 = 4 + 3{,}1$$

$$\Leftrightarrow OE = 7{,}1.$$

Figure 2. A gauche, réponse 4.b pour C2-I7. A droite, réponse 4.b pour C1-I4

Quant au second groupe, il ne parvient pas à faire la construction du produit des mesures pour le produit des affixes et effectue une addition. Plus précisément, le fait de rester rattachés aux connaissances théoriquement préalables avec quelques influences du travail fait pendant la séance peut bien expliquer la procédure de réponse de C2-I7 : la multiplication des normes sur l'unité peut être influencée par la multiplication de Descartes (justifié par le théorème de Thalès) et les traces perpendiculaires supposent qu'il fallait suivre les indications qui orientaient le travail dans la question précédente. La mesure en centimètres a bien été présente étant donné qu'il n'y a pas de coordonnées à multiplier. Puis une bonne relation entre unité et centimètres ainsi que la somme d'angles ont permis de calculer la position du produit.

On peut penser qu'il n'y a pas des influences discursives formelles par rapport à la multiplication de nombres complexes outre les propriétés apprises, de même qu'il n'y a pas une profonde réflexion sur le travail développé au cours de la séance. Cela a bien pu être une contrainte sous-jacente à l'aspect non-traditionnel de la séance. Quant à la représentation géométrique de la multiplication de C1-I4 (*figure 2*) nous observons qu'elle présente des différences et de ressemblances avec celle de C2-I7 : parmi les similarités, nous pouvons mentionner la présence des projetés orthogonaux et les tracés de mesures. Des erreurs dans le calcul sont aussi observables car la multiplication exprimée dans l'expression algébrique est devenue addition dans le passage au numérique, ce qui explique l'erreur de formulation dans la réponse à la dernière question. Par contre, nous nous intéressons à ce qui est observable mais pas tout à fait explicable dans la construction du produit : deux triangles et deux droites qui semblent être des droites parallèles. Ces éléments, seraient-ils l'indice d'une influence du signe-artefact qui commence à devenir signe mathématique et notamment un représentant de la multiplication ? Et de quelle relation entre multiplication et transformation cette influence rend-elle compte ? En restant dans l'analyse de l'écrit, ces questions ne peuvent que donner lieu à des hypothèses. Les conclusions élaborées dans la synthèse de chacun de ces individus, semblent s'appuyer sur une genèse instrumentale privilégiant la construction qui vient même faire obstacle à la genèse discursive articulée avec la visualisation. Les élèves ont donné une solution qui est bien de type constructif et permet de réaliser le produit de deux nombres complexes dans le plan avec le défaut de la construction des projetés orthogonaux. Une possible influence du signe-artefact a probablement aussi été présente.

3.2. Comparaison entre deux groupes se rattachant à deux synthèses différentes, Thalès (PTTh) et Transformation (T).

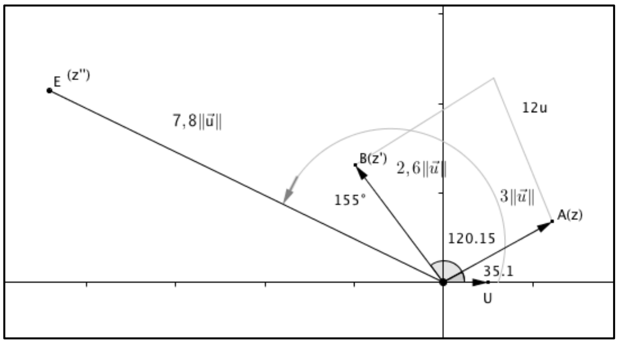
Les deux groupes suivants appartiennent à deux classes différentes (PTTh et T) et nous allons comprendre leur différence au-delà de certaines similitudes sur la dernière question (*figure 3*).

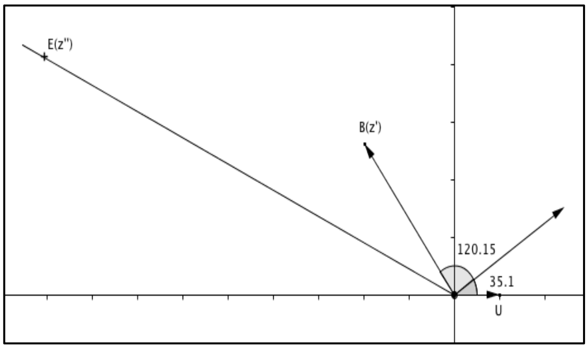
Sur les figures, géométriquement, on utilise Thalès.
On généralise dans le plan de réels et on trouve $x_E = x_C \times x_D < 0$
(x_C et x_D $n'ont$ pas le même $signe$).
On généralise ensuite dans le plan complexe et on a : $z" = zz'$ $\Leftrightarrow$ $|z"| = |z\times z'|$ et $arg(z") = arg(zz')$.

Lorsqu'on introduit un repère si le signe négatif intervient dans la multiplication, alors le produit sera négatif.
On peut onc dire que la multiplication de Descartes obéit à la règle de signes de la multiplication de termes de toute nature qu'ils soient.
Si $\theta\epsilon \left]0;\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ alors le produit sera positif (et la norme et l'angle rentrent en jeu).
Si $\theta\epsilon \left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right[$ alors le produit sera négatif.
Si l'angle est nul, alors seules les normes ou longueurs rentrent en jeu, donc le produit sera positif
Si l'angle est plat, le signe « - » rentre en jeu, produit négatif.

Figure 3. En haut, synthèse du binôme C3-I1 (PTTh ; classe 3, individu 1). En bas, synthèse du binôme C1-I9 (T ; classe 1, individu 9).

Le groupe C1-I9 (T) (*figure 3*) base sa synthèse sur un lien immédiat entre la multiplication et la règle de signes obtenu dans un repère. Puis il élargit cette relation à la multiplication de Descartes ainsi qu'à toute multiplication où interviennent des facteurs de *toute nature*. Par contre, le jeu de cadre qui apparaît autour de la règle des signes méritait d'être retravaillé dans le sens où nous ne pouvions pas accepter une mise en relation entre la règle des signes et la généralisation géométrique autour des nombres complexes que l'élève est en train d'évoquer. Il faut noter la précision de sa réponse en fonction de la nature des angles et notamment l'étude de l'angle nul et de l'angle plat qui permet d'articuler nombres réels et nombres complexes dans le cadre de la configuration géométrique étudiée.





On appelle z" le produit de z et z'. On a

$|z"| = |zz'|\ et\ arg\ (z") = arg\ (zz')$

Donc $arg(zz') = 155{,}25°$

$|zz'| = OB \times OA$ »

(! problème pour convertir l'unité en cm)

$\widehat{UOE} = \widehat{UOA} + \widehat{UOB}$

$\|\overrightarrow{OE}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\|$

$1{,}2 \Leftrightarrow 1 \quad 4 \Leftrightarrow 3{,}3$

$3{,}2 \Leftrightarrow 2{,}7$

$2{,}7 \times 3{,}3 \approx 9$

Figure 4. A gauche, réponse 4.b pour C3-I1 (PTTh). A droite, réponse 4.b pour C1-I9 (T)

L'individu C3-1 (PTTh) (*figure 3*) rend compte dans sa synthèse des différents moments de la séance en intégrant l'un dans l'autre : il a donné une interprétation géométrique de la multiplication pour différents ensembles de nombres (réels et complexes) en généralisant dans le plan complexe. Peut-on dire que le mot *généralisation* rend clairement compte d'une mise en relation entre les différents moments de la séance ? D'une certaine manière oui puisqu'il s'agissait d'étendre les ensembles de nombres, mais pas réellement d'un point de vue géométrique puisque les règles en jeu sont différentes. Pour approfondir cette analyse il faut, bien sûr, observer les réponses apportées par ces deux groupes à la question 4.b (*figure 4)*. Il apparaît clairement que les connaissances algébriques sur les nombres complexes ont guidé la construction géométrique qui ne s'appuie pas sur les autres constructions de la séance. Dans leurs réponses, nous n'avons aucun élément qui permet de rendre compte, d'une façon explicite, de la visualisation et de la compréhension géométrique de la multiplication de nombres complexes comme une transformation dans le plan. L'entrée dans l'ETM pour cette question est donc épistémologique avec pour résultat une *construction* à la règle graduée permettant de visualiser dans le plan le placement du produit de la multiplication de deux nombres complexes. Dans cette séance, les deux groupes ont eu une approche différente de la question 2b (*figure 5*).

Cette fois, seul le groupe C1-I9 (T) a utilisé les transformations dans sa réponse à une des premières questions de la séquence. Ce qui est très intéressant dans l'analyse de cette réponse est le fait de parler d'une réduction et d'un agrandissement du triangle BCA.

> 2) On place le point D et on construit la (//) à (CA) passant par D.

> Construction analogue à celle de la figure A, sauf que le triangle BOE est une réduction du triangle BCA, contrairement à la figure A, où BDE était un agrandissement de BCA. Donc :
>
> $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$
>
> $BE \times BA = BD \times BC$
>
> Or $BA = 1 \; donc \; BE = BD \times BC.$

Figure 5. En haut, réponse 2.b pour C3-I1 (PTTh). En bas, réponse 2.b pour C1-I9 (T)

De ce fait, la relation de proportionnalité sous-jacente au théorème de Thalès ainsi qu'à la représentation géométrique de la multiplication de Descartes a été : soit transposé à la visualisation de triangles semblables, c'est-à-dire l'entrée épistémologique à l'ETM par le théorème de Thalès a produit une genèse sémiotique vers le plan cognitif permettant la visualisation des triangles semblables réduits ou agrandis selon la nature du facteur BD opérant sur BC ; soit elle a été induite par la visualisation de triangles semblables, c'est-à-dire l'entrée cognitive à l'ETM a permis de visualiser la transformation d'une figure en termes d'agrandissement ou de réduction et de l'interpréter grâce au référentiel théorique disponible comme le résultat d'une relation multiplicative inhérente, dans ce cas, au théorème de Thalès. Si nous revenons à la réponse à la dernière question donnée par le même individu (C1-9) (*figure 3*), l'observation la plus frappante que nous pouvons faire et qui montre des relations étroites entre les genèses figurale et discursive est la mise en relation de la règle de signes avec les angles des affixes. Le jeu de cadre qui apparaît autour de la règle des signes est probablement la conséquence de notre activité car cette règle des signes n'est pas traitée géométriquement dans l'enseignement obligatoire. Les réponses des deux groupes rendent compte de leur engagement au travail tout au long de la séance. L'un d'entre eux, a réussi à tenir un discours mathématiquement correct en associant l'icône du théorème de Thalès à la représentation géométrique de la multiplication de deux nombres réels. L'autre, le groupe rattaché à T, a pu mettre en œuvre au moins partiellement, les processus cognitifs pertinents lui permettant de faire interagir les genèses figurale et discursive en intégrant les différents éléments de son Espace de Travail Mathématique personnel pour interpréter le produit de deux nombres réels comme une transformation dans le plan.

4. CONCLUSION

Cet article rend compte de la mise en relation entre certains éléments épistémologiques, théoriques, méthodologiques et expérimentaux autour de l'étude de la rencontre entre un objet mathématique – la multiplication – et ses significations en géométrie. Les productions des élèves classifiées selon leur parcours à l'intérieur d'un ETM ont été caractérisées non seulement en fonction de leur réponse à la dernière question de la séquence, mais aussi en fonction d'un attachement ou non au référentiel théorique prédominant, lequel favorisait ou empêchait des entrées cognitives au travail mathématique.

Les analyses présentées nous ont permis de constater un point en commun entre les différents parcours : la puissance du discours (propriétés de la multiplication de nombres complexes) qui a conduit la plupart des groupes à favoriser une genèse instrumentale dans la question 4.b (cf. *Figures 2 et 4*). Nous avons aussi essayé de comprendre les groupes qui ne concluent que sur les propriétés algébriques du produit de deux nombres complexes sans mettre en relation ce résultat avec le travail géométrique effectué pendant la séance. L'analyse didactique du reste de leur parcours donne déjà quelques éléments de réponse. Une explication possible pourrait venir d'un blocage lié au passage à l'interaction entre l'instrumental et le discursif lorsque les éléments de preuve ne sont pas tout à fait congrus aux instruments utilisés, ici par exemple l'homothétie et la rotation, de la manière que nous nous attendions à la compréhension de la dynamique entre Thalès, multiplication, facteurs, opérateurs et transformations. En conséquence des nouveaux questionnements émergent grâce à la diversité des synthèses ainsi qu'aux ressemblances et différences entre les parcours étudiés. Les réponses obtenues rendent compte de l'engagement des élèves tout au long de la séance. Elles montrent aussi la difficulté à gérer les différentes genèses propres aux ETM ainsi que la complexité cognitive de l'activité proposée. Ceci nous amène à situer le travail des élèves à l'intérieur d'un Espace de Travail Mathématique où la signification des objets mathématiques doit émerger grâce à l'action d'une genèse cognitive. Cette genèse suppose des enjeux sémiotiques complexes tels que ceux qui ont été décrits par D'Amore et Fandino (2007) pour rendre compte des difficultés de passage entre différentes représentations. La transposition du produit de Descartes à un produit opérant directement sur des nombres représentés géométriquement, ne peut être que le résultat d'une assimilation du fait que le travail porte sur une *idée mathématique* qui sort complètement des connaissances traditionnelles de l'objet mathématique en jeu. Nous ne travaillons plus par rapport aux techniques de calcul ni par rapport à la démonstration. Nous travaillons par rapport aux idées, et la compréhension de ces idées ne peut se produire que sous une entrée cognitive à l'ETM et ceci ne sera possible que grâce à une disposition implicite, non habituelle, mais mobilisable pour les élèves (Lakoff & Nunez, 1997).

Ainsi, la multiplication peut devenir interprétable géométriquement : les transformations, telles qu'agrandissement ou réduction, peuvent devenir des déplacements pour décrire la représentation géométrique du produit. De ce fait, la richesse de l'ETM proposé ainsi que la diversité des ETM personnels, nous conduisent à souligner l'importance de la médiation introduite par le professeur pour progresser vers une institutionnalisation intégrant toute la richesse de l'activité proposée. En plus de la médiation liée au signe mathématique (ici le signe Théorème de Thalès), il nous a clairement manqué cette deuxième médiation culturelle (Radford, 2004) laquelle a dû être portée, dans notre cas, par l'enseignant dans la classe. Dans cette médiation culturelle, l'enseignant acquiert un rôle fondamental de guide à l'intérieur de la diversité des Espaces de Travail Mathématiques résultant d'une seule proposition didactique. L'analyse des résultats dont une partie a été présentée dans cet article s'intègrent à des nouvelles perspectives de recherche concernant le développement d'une conception de l'enseignement portant sur la relation entre pensée et communication et entre apprentissage et médiation. Nous ne pouvons que revenir sur l'importance de réfléchir à des situations qui permettent aux élèves de s'exprimer, de développer leurs pensées et de répondre à leurs questionnements sous une médiation plus active de l'enseignant. Nous tenons donc à ce qu'un travail collaboratif puisse être motivé et développé dans le cadre de la formation initiale et continue des enseignants : un travail fondé sur des réflexions épistémologiques des contenus mathématiques fondamentaux ainsi que sur l'analyse de processus cognitifs intervenant dans leur compréhension.

REFERENCES

Argand, R. (1806). *Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Paris : chez Mme Vve Blanc.

Barrera, Curin, R. (2012). *Etude des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*. Thèse de doctorat. Non publiée.

Bkouche, R. (1994). *Autour du théorème de Thalès*. Lille : IREM de Lille.

Bkouche, R. (2009). *Grandeurs et Nombres*. Lille : IREM de Lille.

Bkouche, R. (2009b). *Histoire du calcul : de la géométrie à l'algèbre*. Rouen : Vuibert.

Brousseau, G. (1996). *Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat. Non publiée.

Bruter, C.P. (2000). *La construction des nombres : histoire et épistémologie*. Ellipses.

Conne F. & Lemoyne, G. (1999). *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI.* Springer.

Davis, B. & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching : an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 293-319.

Descartes, R. (1637). *La géométrie*. Oeuvres complètes tome 3. Paris : Gallimard (2009).

Douady, R. (1986). *Liaison école-collège : nombres décimaux* (Rapport technique). Paris.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la Pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 5, p. 37-65.

Duval, R. (2006). Décrire, visualizer ou raisoner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de didactique et sciences cognitives*, 8, 13-62. IREM de Strasbourg.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach. In *Semiotics in Mathematics Education, Epistemology, history, Classroom, and Culture.* Rotterdam: Sense Publishers.

Falcade, R. (2006). Théorie de situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction. Thèse de doctorat non publiée.

Flament, D. (2003). Histoire des nombres complexes, entre algèbre et géométrie. Paris : CNRS éditions.

Freudenthal, (2003). *Didactical phenomenology of mathematics structures*. Springer.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie de nombres relatifs. *RDM, 2*(3), 303-346.

Herodote (1964). *L'Enquête, livre II*, trad. A Barguet, in: Hérodote, Thucydide, *Oeuvres complètes*, Gallimard La Pléiade, Paris.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses geneses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24. Irem de Strasbourg.

Kuzniak, A. (2012). Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations. Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education. 8 – 15 July. Seoul, Korea.

Lakoff, Nunez, (1997). The Metaphorical Structure of Mathematics: Sketching Out Cognitive Foundations for a Mind-based Mathematics. In L.D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Methaphors and Images,* (21-89). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A., & Giatilis, G. (2007). Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. In *International journal of mathematical education in science and technology* (Vol. 37, p. 681-706). Taylor and Francis Online.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematics thinking and Learning* (Florence, Kentucky, USA). 5(1), 37-70.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In: Arrigo G. (ed.) (2004). Proceedings of the Ticino Mathematics Education Conference. Quaderni Alta Scuola Pedagogica. Bellinzona (Switzerland): Centro didattico cantonale. 11-27.

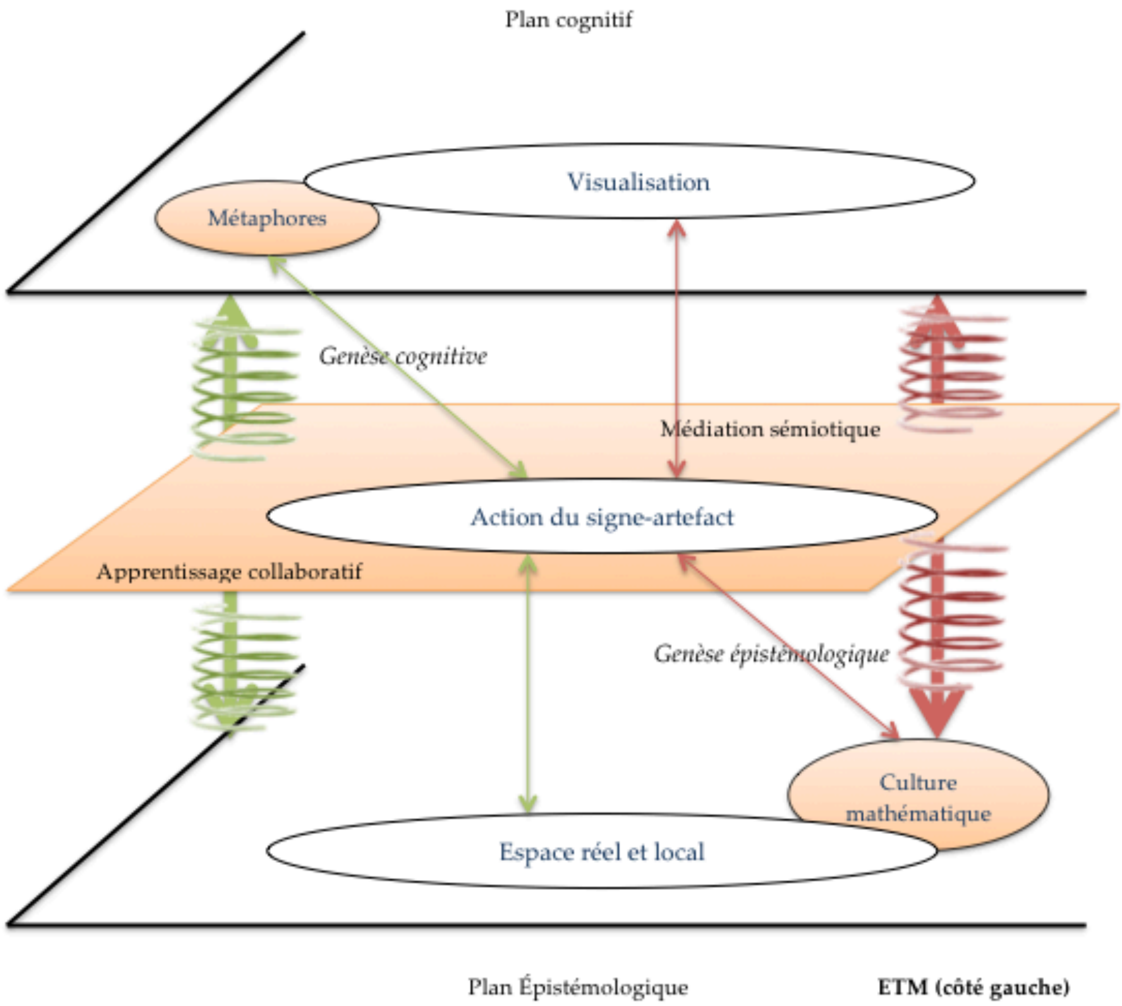
Ribeiro, (1997). On the epitsemology of integers, *RDM, 17*(2), 211-250.

Vygotsky, L. (1931-1978). Mind in society: The development of higher psychological processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotsky, L. (1934-1997). *Pensée et langage*. 3è édition, Paris : La Dispute.

Raquel Isabel Barrera Curin
Stagiaire Postdoctoral
Département de Mathématiques
Département d'Education
Université du Québec à Montréal
barrera_curin.raquel_isabel@courriel.uqam.ca
quellita@gmail.com

ANNEXE 1 : Schéma rendant compte de l'aspect dynamique des composantes de l'ETM et de l'articulation des plans épistémologique et cognitif grâce à l'action du signe-artefact dans un contexte de médiation sémiotique. Pour plus de détails sur cette articulation théorique voir Barrera Curin 2012.



ANNEXE 2(a) : SÉQUENCE EXPÉRIMENTALE D'APPRENTISSAGE

Travail avec annexe 1

La configuration « Figure A » correspond à ce que Descartes (mathématicien et philosophe, 1596-1650) a considéré comme une représentation géométrique de la multiplication. Nous vous présentons aussi son texte historique la décrivant.

I. Lire le texte de Descartes (annexe 1), puis observer la configuration « Figure A » pour répondre à la question suivante :

a. Nous proposons $AB = 1\ cm$. BE, est-il bien le produit annoncé par Descartes ? Qu'en pensez-vous ?

Travail avec annexe 2

II. Observer la configuration « Figure B » pour répondre aux questions suivantes :

a. Nous voudrions construire la représentation géométrique d'un produit ayant les caractéristiques de la multiplication de Descartes :
   - Sachant que $BA = 1cm$ placer D entre B et A.
   - Construire E pour que BE donne le produit de la multiplication de BD par BC.

b. Décrire votre construction et expliquer pourquoi elle peut être considérée comme analogue à la multiplication de Descartes.

Travail avec annexe 3

III. Observer la configuration « Figure C » où nous avons repéré sur la droite numérique certains nombres. Du côté positif nous avons placé le point A d'abscisse +1 et du côté négatif le point D d'abscisse -2. (AC) et (DE) sont parallèles.

a. Projeter orthogonalement les points C et E sur l'axe des abscisses. Pouvez-vous justifier que l'abscisse du point E est le produit des abscisses des points D et C ? Comment ?

b. Si de manière plus générale, l'abscisse du point C est $x_C > 0$ et l'abscisse du point D est $x_D < 0$, décrire la représentation géométrique du point E sur (BC) d'abscisse $x_E = x_C x_D$.

Travail avec annexe 4

IV. Nous allons étudier une nouvelle configuration, similaire à la configuration précédente, mais celle-ci est située dans le plan complexe avec certains éléments complémentaires.

a. Soit $(O;\vec{u},\vec{v})$, un repère orthonormé direct du plan appelé plan complexe. Nous vous rappelons qu'un nombre complexe est appelé affixe d'un point M et d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$. Utiliser les informations données sur la configuration « Figure D » pour répondre aux questions suivantes :

- Pouvez-vous affirmer que dans cette représentation géométrique, la multiplication de z et z' donne toujours le produit z'' (affixe du point E et du vecteur $\overrightarrow{BE}$) ? Expliquez votre réponse.
- Dans votre réponse à la question précédente, avez-vous établi des liens entre $\|\overrightarrow{BC}\|$, $\|\overrightarrow{BD}\|$ et $\|\overrightarrow{BE}\|$? Lesquels ? Et entre ÂOC, ÂOD (les angles associés aux facteurs) et ÂOE (l'angle associé au produit) ? Si vous ne les avez pas encore considérés, quels liens établiriez-vous entre ces éléments pour expliquer la représentation géométrique du produit de deux nombres complexes ?

Travail avec annexe 5

b. Observez les représentations géométriques de deux nombres complexes dans la configuration « Figure E ».

- En prenant en compte tes réponses dans les questions précédentes construire la représentation géométrique du produit de z et z'.
- Décrire votre construction.
- Quel lien pouvez-vous établir entre le produit de Descartes et le produit que vous venez de construire ?

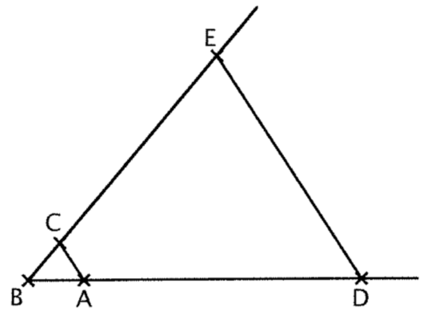
Dernière question :

V. En vous appuyant sur le travail que vous avez fait dans cette séance et sur vos connaissances antérieures, quelle *signification géométrique* pouvez-vous donner à la multiplication ?

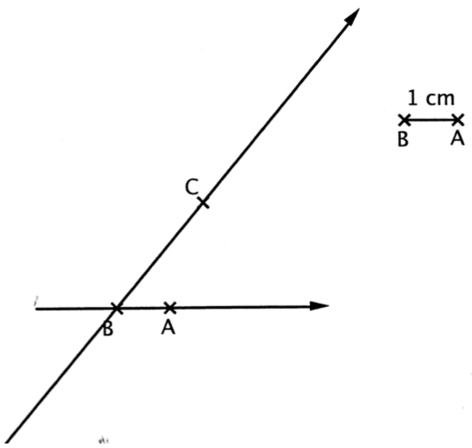
ANNEXE 2(b) : ANNEXES ASSOCIES A LA SÉQUENCE EXPÉRIMENTALE D’APPRENTISSAGE

Annexe 1 (Figure A)

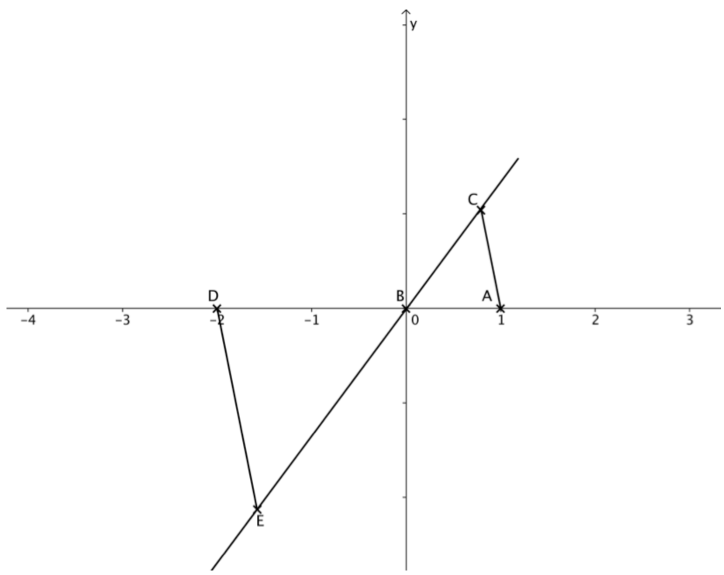
Soit par exemple *AB* l’unité et qu’il faille multiplier *BD* par *BC* ; je n’ai qu’à joindre les points *A* et *C*, puis tirer la parallèle à *CA*, et *BE* est le produit de cette multiplication (Descartes, 1637).



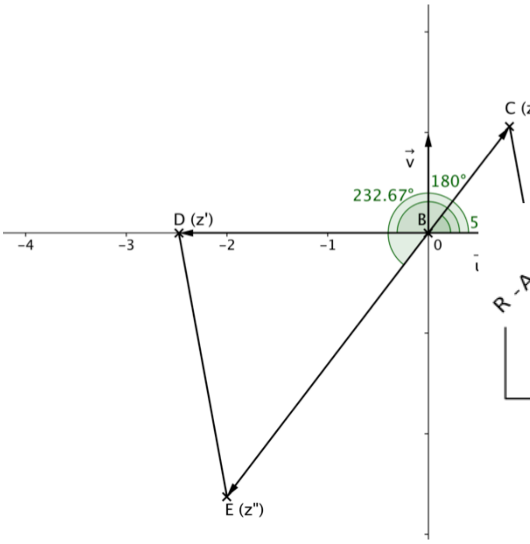
Annexe 2 (Figure B)



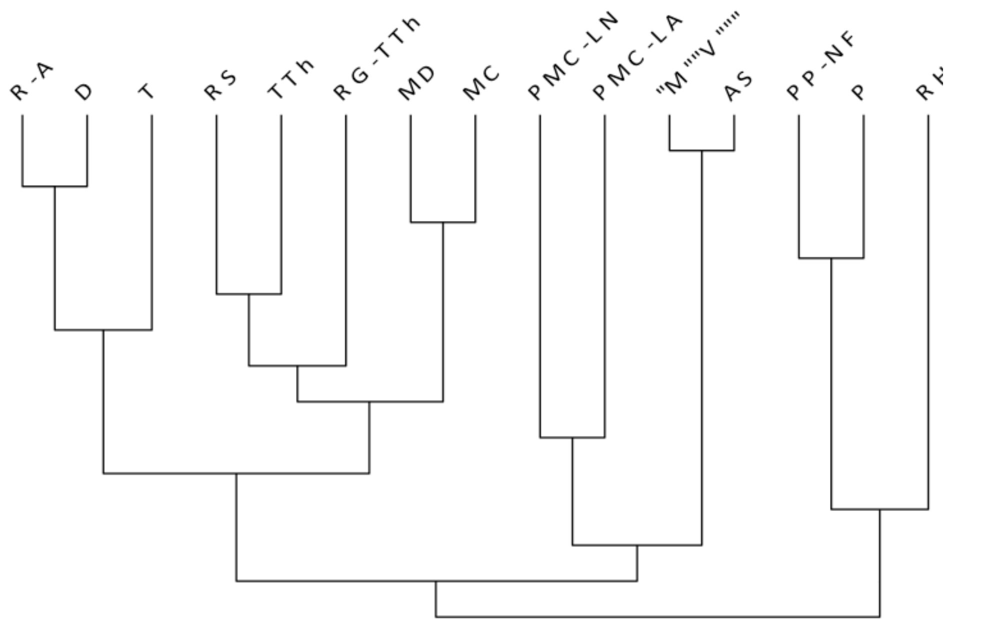
Annexe 3 (Figure C)



Annexe 4 (Figure D) **Annexe 5** (Figure E)



ANNEXE 4 : ARBRE DE SIMILARITÉ OBTENU AVEC LE LOGICIEL C.H.I.C.



Liste de variables (éléments possibles de réponse à la dernière question).

Dans l'étude de la dernière question de la séquence, les trois premières classes ont été principalement prises en compte.

Premier classe : (T)

R-A : Réduction - agrandissement

D : Déplacement.

T : Le produit comme une transformation.

Deuxième classe : (PTTh)

RS : Règle de signes.

MD : Multiplication de Descartes.

TTh : Théorème de Thalès

RG-TTh : Représentations géométriques du théorème de Thalès pour expliquer la multiplication en géométrie pour des facteurs de différente nature.

MC : Multiplication de nombres complexes.

Troisième classe : (C)

PMC-LN : Propriétés de la multiplication de nombres complexes en langue naturelle.

PMC-LA : Propriétés de la multiplication de nombres complexes en langage algébrique

M « V » : "Multiplication de vecteurs".

AS : Agrandissement ou réduction d'une surface

Quatrième classe :

RH : Rotation et homothétie

PP-NF : Position du produit en fonction de la nature des facteurs.

P : Proportionnalité.

Matías Camacho-Machín Carolina Guerrero-Ortiz

INTERPRETACIÓN, MODELIZACIÓN Y ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

INTERPRETATION, MODELING AND ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS (ODE)

RESUMEN

En este trabajo se discuten los resultados de la experimentación en el aula de algunas actividades de enseñanza, dirigidas a fortalecer el desarrollo de las habilidades de modelización e interpretación de fenómenos que pueden ser explicados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Destacamos en nuestra investigación resultados relacionados con el uso de las herramientas digitales en los procesos de modelización, así como el papel que juegan los registros de representación en el desarrollo de las actividades de modelización e interpretación. Encontramos que el uso que hacen los estudiantes de las herramientas digitales favorece la comprensión del fenómeno estudiado, dado que la presencia de diferentes representaciones de un mismo objeto, en particular, la visualización del campo de pendientes asociado a una EDO resulta ser un elemento importante que facilita el uso posterior de las herramientas algebraicas pertinentes.

PALABRAS CLAVE

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Modelización, Herramientas Digitales, Registros de Representación, Modelos Matemáticos.

ABSTRACT

This work discusses the results obtained after trying out certain teaching activities, in the classroom, aimed at improving the development of modeling skills and the interpretation of phenomena that can be explained by means of ordinary differential equations (ODE). Some of the results regarding the use of digital tools in the modeling processes in this research, as well as the role of several representation registers in the modeling and intrerpretation activities. It was observed that the way the students make use of the digital tools enhances their comprehension, given that the presence of different representations of the same object, especially the visualization of the field of slopes associated with an ODE turns out to be an important element that facilitates the later use of algebraic tools.

KEY WORDS

Ordinary Differential Equations, Modeling, Digital Tools, Representation Registers, Mathematical Models.

1. INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

La búsqueda de estrategias efectivas para la enseñanza de las matemáticas constituye una parte importante de las investigaciones recientes en el campo de la educación matemática. Particularmente en el caso de las Ecuaciones Diferenciales (ED) han surgido distintas propuestas para el tratamiento de conceptos relacionados con ellas (Camacho-Machín et al, 2012; Kwon, 2002; Perdomo-Díaz, 2010; Rasmussen, 2001; Raychadhuri, 2007; 2008). En esta línea, presentamos algunos de los resultados obtenidos al desarrollar en el aula una secuencia de enseñanza dirigida a la introducción de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). En dicha secuencia se utilizó la modelización de situaciones en contexto para favorecer el análisis cualitativo de las representaciones algebraica, gráfica y numérica, asociadas a las EDO. Se pudo observar que el uso de estas representaciones con apoyo de la tecnología puede favorecer la comprensión de los estudiantes respecto al significado de EDO y las situaciones que se pueden describir mediante ellas.

En una investigación previa (Guerrero, Camacho & Mejía, 2010) se constató, entre otros resultados, que aun cuando los estudiantes poseían habilidades algebraicas para resolver EDO, no eran capaces de utilizarlas cuando su trabajo se desarrollaba dentro del registro geométrico. Nos preguntamos ahora *¿Cuáles son los elementos importantes que surgen en una enseñanza basada en procesos de modelización para apoyar a los estudiantes en la transformación de un registro de representación en otro? Y ¿cómo influyen las herramientas digitales en los procesos matemáticos y argumentaciones que desarrollan los estudiantes?.* Es por esto que, en las actividades de enseñanza, se trata de potenciar las habilidades de los estudiantes en el análisis e interpretación de las representaciones gráfica y algebraica de modelos matemáticos para diversos fenómenos, tratando con ello de dotar al estudiante de herramientas que le faciliten su uso en diferentes contextos de aprendizaje. Concretamente, el objetivo de investigación consiste en *identificar de qué manera los estudiantes establecen relaciones entre el contexto y los conceptos matemáticos presentes cuando modelizan un problema que conduce al planteamiento de una EDO y qué papel juega la tecnología en tal proceso.*

Diversas investigaciones (Arslan, 2010; Guerrero-Ortiz, 2008; Guerrero et al. 2010) muestran las dificultades que encuentran los estudiantes en el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, principalmente relacionadas al trabajo con las representaciones algebraica y gráfica. Se ha encontrado que el proceso de reconocer a un objeto matemático a través de sus diferentes representaciones, por ejemplo, su representación algebraica y su representación gráfica (campo de direcciones), no es una actividad fácil para los alumnos. Las dificultades relacionadas con el trabajo simultáneo en diferentes registros de representación han mostrado estar relacionadas, en parte, con la enseñanza tradicional en donde se privilegia el aprendizaje de métodos algebraicos y en parte con los obstáculos cognitivos del aprendizaje.

Habre (2000) analizó el uso que hacen los estudiantes del campo de direcciones asociado a una EDO, encontrando que la gran mayoría de los participantes preferían el método algebraico de solución sobre el método gráfico, argumentando que con este método se obtienen respuestas exactas al problema, mientras que con el método gráfico es necesario revisar, adicionalmente, el trabajo de manera analítica. En un problema que requería la identificación de soluciones de equilibrio, los estudiantes respondieron correctamente, identificándolas mediante el análisis del campo de direcciones, pero ninguno de ellos intentó verificar su respuesta mediante el estudio algebraico de la EDO. Habre concluye que los estudiantes encuentran ciertos obstáculos al tratar de manera simultánea diferentes sistemas de representación. En otra investigación, Rasmussen (2001) encontró que los estudiantes no consideraban las representaciones gráficas como funciones solución de una EDO, también observó la existencia de algunos dilemas conceptuales respecto al significado de solución de equilibrio, lo que desde su punto de vista es debido a que su noción de solución de equilibrio no está relacionada con una función constante, dificultad que ya había sido anteriormente reportada por Zandieh y McDonald (1999). Particularmente, en el trabajo de los alumnos con las representaciones algebraicas, Rowland & Jovanoski (2004) identificaron las dificultades que se presentan cuando se les pide interpretar de manera contextual los términos involucrados en una EDO y contrariamente, al trasladar la descripción del contexto a una expresión matemática. Encontraron que los estudiantes piensan en términos de cantidades, más que en términos de tasa de variación (Rowland, 2006). Se hizo evidente además la dificultad con la conceptualización de una constante como tasa de cambio, al respecto mencionan que los estudiantes pueden estar pensando que una "constante" es eso "una constante", algo que no está cambiando y por lo tanto no puede ser una tasa de cambio.

Por otro lado, Arslan (2010) realizó una investigación, en la que participaron estudiantes de alto rendimiento en la resolución algebraica de ED. El objetivo era identificar la comprensión conceptual que tienen los alumnos sobre el significado de una ED y sus soluciones. Encontró que los participantes resolvían las ecuaciones de manera rutinaria, sin una verdadera comprensión de lo que realmente esto significa. La autora indica que estos errores, en general, se debieron a que al resolverlas confundían el tipo de ED o al uso de la simbología. Arslan reporta también tres tipos de dificultades: las relacionadas con la interpretación conceptual del significado de ED, dificultades con la interpretación de las soluciones (gráficas y algebraicas) y dificultades para relacionar una ecuación diferencial con las rectas tangentes a sus soluciones (campo de pendientes).

Guerrero-Ortiz (2008) y Guerrero-Ortiz et al. (2010) presentan los resultados obtenidos al investigar las dificultades que encuentran los estudiantes cuando interpretan las soluciones de las EDO y la problemática relacionada con los conceptos fundamentales involucrados en su significado. Entre los elementos que se consideraron en este trabajo, se encuentran: la descripción del comportamiento de las funciones mediante su derivada, la noción de derivada como recta tangente y la idea de solución de equilibrio. La investigación se realizó con estudiantes de ingeniería, quienes desarrollaron varias actividades en un ambiente dinámico, relacionadas con la interpretación de las soluciones representadas en forma algebraica y gráfica de una EDO que modela el comportamiento de una población. Se encontró que, cuando los estudiantes trabajaban con la representación gráfica de las EDO, difícilmente hacían uso de notación o estrategias algebraicas para justificar sus afirmaciones, resultados éstos análogos a los reportados por Habre (2000). En relación con la interpretación de las soluciones, cuando sus actividades matemáticas se desarrollaban en un ambiente algebraico, los estudiantes tendían a olvidar el contexto que se quería representar. Además, se encontró que la comprensión errónea de conceptos básicos de cálculo como función, tangente y derivada, era trasladada al campo de las Ecuaciones Diferenciales, limitando con ello el establecimiento de relaciones entre los términos de una Ecuación Diferencial y el contexto. En otras palabras, se hizo presente la existencia de una barrera entre el contexto y las representaciones.

De los resultados mencionados en esta revisión de la literatura, se puede inferir que existe una problemática relacionada con el tratamiento de diferentes registros de representación en el contexto de las EDO. Creemos que esta problemática está fuertemente vinculada a la interpretación que hacen los estudiantes de los parámetros y a la comprensión de su relación con el contexto. Como consecuencia de ello dirigiremos nuestro trabajo hacia el análisis de las relaciones que los estudiantes establecen entre las representaciones de un mismo objeto, a través de la construcción de modelos matemáticos con apoyo de herramientas digitales.

2. MARCO CONCEPTUAL

Las actividades que se analizan en esta investigación están estrechamente ligadas al estudio y desarrollo de modelos matemáticos que describen diversos fenómenos. En un proceso de modelización están implícitos elementos como la comprensión, el razonamiento, la argumentación, la explicación y la escritura de las relaciones matemáticas presentes.

En este trabajo, se realizará un análisis de los argumentos o estrategias que utilizan los estudiantes para justificar las razones por las que un modelo matemático se ajusta a determinado fenómeno, entendiendo que la argumentación está ligada a la justificación de una afirmación o una tesis. En la justificación de una afirmación, se distingue entre la producción de argumentos y razonamientos, y la prueba de aceptabilidad de los argumentos producidos. La generación de estas razones demanda la respuesta a una serie de preguntas que conducen a una explicación o preguntas que proponen la producción de argumentos, por ejemplo: ¿por qué?, ¿Por qué afirmas que…?, ¿Por qué respondes que…?, ¿Por qué se produce este fenómeno?, ¿Por qué se obtiene este resultado?, etc. Duval indica que no es suficiente con argumentar sino que es necesario examinar la aceptabilidad de las razones que se exponen, es decir, un argumento se acepta o rechaza dependiendo de dos criterios: su pertinencia y su fuerza. La pertinencia de un argumento se mide en relación con los contenidos de la afirmación y los elementos que lo justifican, la fuerza de un argumento depende del hecho de que resiste un contra-argumento. Un argumento fuerte y pertinente implica que quien lo exprese esté convencido de la afirmación que realiza. Otro elemento relacionado con la argumentación es la explicación. En la explicación se dan razones para hacer comprensible cierta información, a veces puede tener un carácter descriptivo el cual contribuye a presentar el sistema de relaciones asociado a lo que se quiere explicar (Duval, 1999).

Los procesos cognitivos vinculados a la argumentación, justificación y razonamiento, pueden ser explicados en términos de lo que Doerr y Lesh (2003) han llamado *Models and Modeling Perspective,* estos autores diferencian entre Modelos y Modelos Matemáticos. Los modelos se refieren a los sistemas conceptuales dotados de relaciones, operaciones y reglas que gobiernan las interacciones, que a la vez pueden ser expresados usando sistemas de notación externa. Estos modelos también pueden ser usados para describir, construir o explicar los comportamientos de otros sistemas. Un modelo matemático se refiere a las características estructurales de los sistemas conceptuales que intervienen, por ejemplo, la representación en forma de estructura matemática de las condiciones físicas de una situación. En este sentido, Doerr y Tripp (1999) consideran dos aspectos importantes de un modelo: el modelo interno (o mental) y el modelo externo. El modelo interno se refiere a la comprensión individual que uno tiene de un sistema conceptual, en el que aparecen involucrados los aspectos psicológicos tanto de las representaciones como de las relaciones y el razonamiento. El modelo externo está constituido por las representaciones, que pueden ser símbolos, figuras y todo lo que el individuo puede expresar a otros. Estos investigadores también señalan que un modelo externo puede ser diferente al modelo interno, debido a que el modelo interno es personal y está determinado por las experiencias del individuo en determinadas situaciones. En un mismo individuo los modelos interno y externo pueden ser diferentes. El simple hecho de describir externamente el sistema puede provocar cambios en el modelo interno de quien realiza la descripción. Las diferencias entre el modelo interno y sus representaciones pueden provocar modificaciones en el modelo interno y en las mismas representaciones. Los modelos interno y externo son sistemas que están en interacción continuamente.

En este documento hablamos de modelo en dos sentidos, nos referimos como modelo matemático al planteamiento de relaciones entre los elementos involucrados, pero también consideramos una visión más global de "*modelo*" en el sentido de Doerr y Tripp quienes señalan:

> It is sometimes tempting to think of a model as residing in a particular set of mathematical symbols (e.g, in the symbols of a particular functional relation) that are external to that individual. However, the meaning of those symbols, we argue, resides partly in the head of the individual and partly in the symbols. In that sense, a model is a system whose meaning is constituted by the interactions of internal systems, external systems, and the representations that are distributed across these systems.
>
> (Doeer & Tripp, 1999, pp. 233)

Esta aproximación a la modelización y la consideración de los modelos en los términos anteriormente descritos, nos proporcionará elementos para describir, explicar y predecir las actividades matemáticas del grupo de estudiantes que se analizan en esta investigación.

3. METODOLOGÍA

La investigación se desarrolló con 7 estudiantes de Maestría en Matemática Educativa, quienes durante sus estudios de licenciatura tomaron, al menos, un curso de cálculo diferencial e integral y uno de ecuaciones diferenciales. El grupo de estudiantes se caracteriza por ser todos ellos procedentes de diferentes instituciones y haber estudiado diferentes carreras universitarias, entre estas, ingeniería, informática y licenciatura en matemáticas. En la mayoría de las universidades mexicanas, los programas de estudio de ED se orientan hacia la enseñanza de conceptos fundamentales, clasificación y métodos de solución de ED. Conviene señalar que sólo en algunos casos existe algún acercamiento a las ED mediante la modelización de diversos fenómenos. Todos los participantes eran profesores de bachillerato en activo.

Los estudiantes trabajaron en parejas (excepto uno de ellos) para resolver una serie de tareas, posteriormente a la resolución de cada una de las tareas se discutió el proceso de solución en forma grupal. Durante esos episodios tuvieron la oportunidad de expresar dudas, plantear y discutir diferentes caminos de solución y considerar algunas condiciones adicionales a las propuestas en las actividades. Durante el desarrollo de las actividades tuvieron libre acceso a ordenadores con internet y software educativo, facilitándose así el uso de CAS y software de Geometría Dinámica (Derive, Excel, GeoGebra y Wolfram Alpha).

3.1 Instrumentos de recogida de información

Se utilizaron cuatro instrumentos para recoger la información:

1) Registros escritos de las tareas propuestas. Se presentaron las Tareas por escrito, en las que se describía la situación modelizada, de tal manera que los participantes respondieran a una serie de interrogantes propuestos (Anexo 1)
2) Grabaciones, mediante el software de captura de imágenes CamStudio, del trabajo realizado en los escenarios computacionales GeomED y DE tools, que permitían bosquejar los campos de direcciones. Para realizar operaciones algebraicas y representaciones numéricas y gráficas de las soluciones se utilizó: Excel, Derive, Wolfram y Geogebra,
3) Grabaciones del audio de las discusiones sostenidas por los equipos de trabajo.
4) Videograbaciones de la discusión grupal y de las exposiciones del profesor-investigador.

3.2 Desarrollo de la investigación

La secuencia de enseñanza se presentó como parte complementaria de los cursos que los estudiantes de Maestría deben tomar. Se desarrollaron nueve sesiones de dos horas cada una, una sesión por semana, durante las cuales se abordó la solución y discusión de once tareas (S1, S2, S3…S11) que fueron presentadas en orden gradual de dificultad, éstas se describen a continuación:

En las tareas S1 y S2, se trabajó en la construcción de una EDO de la forma $\frac{dU(t)}{dt} = kU(t)$ a partir de la modelización de dos situaciones, una de crecimiento (S1) y otra de decrecimiento (S2). Se utilizaron para ello diversas representaciones del mismo problema y se favorecieron los procesos de interpretación y validación de la EDO que describe el contexto y la solución o soluciones obtenidas.

En la Tarea S3, se definieron los conceptos de EDO y sus soluciones. Durante el proceso de modelización e interpretación se explicó el uso del escenario computacional (GeomED y HPGSolver) y se analizó el comportamiento de diferentes situaciones para una EDO, por ejemplo, los casos: $\frac{dN(t)}{dt} = 0$, $\frac{dN(t)}{dt} > 0$ y $\frac{dN(t)}{dt} < 0$. Con esta actividad se abordaron temas como pendiente de una recta en un punto, regiones donde una EDO es positiva o negativa y soluciones de equilibrio. Para la resolución de esta Tarea se utilizó la aplicación informática HPGSolver, desarrollado por Blanchard, et. al. (2002).

En la tarea S4, se consideraron como condiciones adicionales a las situaciones anteriores, algunos factores que pueden influir positiva o negativamente en el desarrollo de la población. Entre estos, se consideraron la competencia por el alimento, la pesca o la sobrepoblación. Esta Tarea plantea el desarrollo de habilidades de interpretación en dos trayectorias distintas:

1. Construir un modelo matemático mediante el análisis del fenómeno y por comparación con otros fenómenos más sencillos.

2. Obtener información de un fenómeno a través del estudio del modelo matemático que lo describe.

El proceso de solución desarrollado por los estudiantes en la Tarea S4 es el centro de atención en este trabajo.

Finalmente, en las Tareas S5-S11, se estudia con más profundidad y desde diversas perspectivas, la interpretación que realizan los estudiantes de problemas de crecimiento de poblaciones y situaciones de predador-presa.

4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A continuación discutiremos el proceso de solución desarrollado por los estudiantes, centrando la atención en la identificación de los argumentos que utilizan para la elección del modelo matemático que se ajusta al contexto definido.
Tal y como se indicó con anterioridad, en las sesiones de enseñanza previas (Tareas S1-S3) se exploró la modelización de algunos problemas que conducen a una EDO de la forma $\frac{dU(t)}{dt} = kU(t)$. Por ello, en la Tarea S4 se trataba de incorporar nuevos elementos que condicionaban la situación representada por una EDO conocida.
Se identifican a continuación las estrategias que los estudiantes utilizaron para validar el modelo propuesto para varios casos, en ellos se pide determinar la EDO que se ajusta a las condiciones de un contexto (apartados a y b, Anexo 1). En términos generales, se pide que hagan el estudio de algunos valores de los parámetros y las soluciones correspondientes que justifiquen por qué el modelo matemático podría funcionar.

4.1 Interpretación de una EDO con parámetros arbitrarios

En el ítem a, se observa que los participantes en general, no tuvieron problemas al proponer una ecuación del tipo $\frac{dN}{dt} = kN(t) - H$ para describir la variación de la población, cuando H representa la disminución de la población debido a la pesca. Sin embargo, al pedir que justificaran sus respuestas se encontraron ciertas incongruencias. Por ejemplo, Rita y Evan proponen inicialmente una EDO como la anterior pero, al justificar su respuesta, sugieren como solución de la EDO una función *N(t)* que tiene como elemento a la misma *H*, como se puede observar la Fig. 1

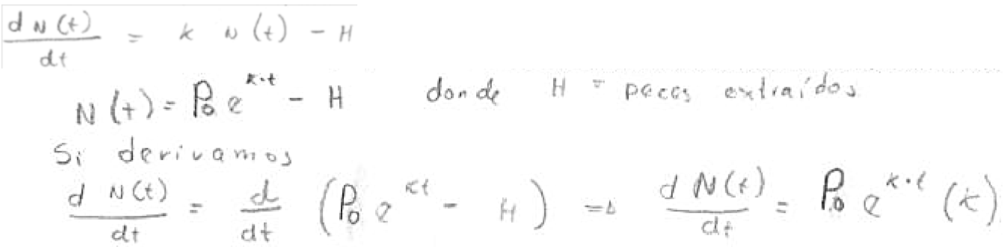
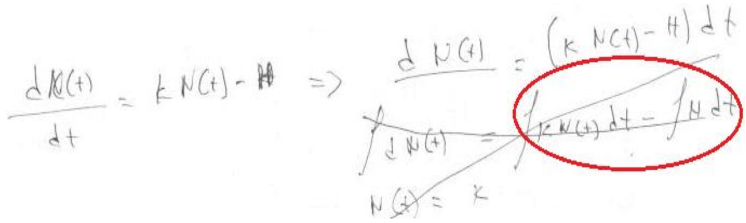


Fig.1. Rita y Evan interpretan H como tasa constante de variación
y como la cantidad que es extraída

Estos alumnos interpretan *H*, en la EDO y en la función solución *N(t)*, como la cantidad de peces que desaparecen debido a la pesca. Esto denota una falta de comprensión de lo que *H* representa: en la EDO representa una tasa constante de variación y en la función solución *N(t)*, se referiría a una cantidad constante de peces extraída por la pesca. No se observa un análisis preciso de la EDO que proponen en un inicio $\frac{dN}{dt} = kN(t) - H$, ya que al derivar la función solución que ellos mismos sugieren $N(t) = P_0 e^{kt} - H$ obtienen como resultado $\frac{dN}{dt} = P_0 e^{kt}(k)$, y no analizan si efectivamente es una solución de la ecuación propuesta. La solución en este caso correspondería a una función de la forma $N(t) = \frac{ce^{kt} + H}{k}$. Las manipulaciones algebraicas reflejan la ausencia de una reflexión profunda sobre lo que constituye la solución de una EDO. Su forma de actuación posterior sugiere que esto puede deberse en gran medida a la presencia de parámetros arbitrarios.

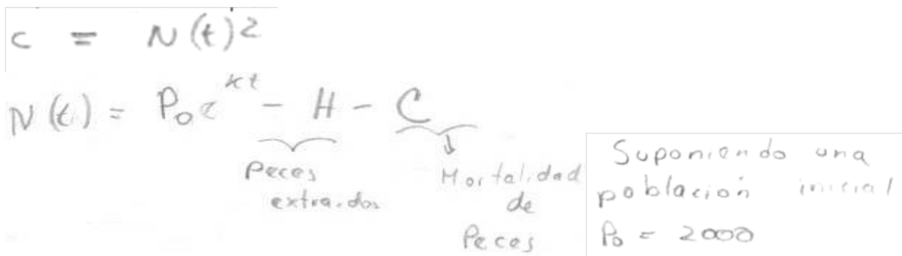
Otra pareja, Colin y Owen también proponen la misma EDO $\frac{dN}{dt} = kN(t) - H$ para describir la variación de la población. Sin embargo, al justificar su elección cometen un error de tipo algebraico al resolver la EDO mediante el método de separación de variables. Así, su interpretación está influenciada por este hecho. Al parecer son conscientes del error pues no continúan las operaciones y como se observa en la Fig.2, invalidan el resultado



Proceso de solución de Colin y Owen
Fig. 2

Su argumento final es una lectura casi literal de la expresión a la que conducirían las operaciones en el lado derecho: "*ya que al transcurrir el tiempo (dado en años) se disminuirá siempre la misma cantidad y así al transcurrir un determinado tiempo t, se extraerán t veces la cantidad H, es decir* tH", si bien su interpretación puede estar mediada por el error algebraico que cometieron, Rowland y Jovanoski (2004) reportan una situación similar en estudiantes que confundían cantidades con tasas de variación.

Con respecto al ítem b, en el que además de considerar la variación debida a la pesca (*H*), se consideran también las muertes derivadas de la competencia, (representado este hecho como un fenómeno proporcional a $N(t)^2$ dando lugar a la EDO $\frac{dN}{dt} = kN(t) - cN^2(t) - H$), se observó en el trabajo realizado por la pareja formada por Rita y Evan, que asociaron la constante ***c*** al término $N(t)^2$ como una igualdad. De este modo, en lugar de referirse a la EDO hacen referencia a $N(t) = P_0 e^{kt} - H - C$ como la variación de la población. Se observa nuevamente una confusión entre la representación de la variación (dada por la EDO) y la cantidad (dada por $N(t)$). (Fig. 3)



Rita y Evan variación y cantidad
Fig.3

Hemos descrito el procedimiento de solución seguido sólo por dos de los equipos participantes, ya que en ambos apartados (a y b), los otros equipos escriben la ecuación correspondiente, pero no ofrecen información adicional.

En las actividades mencionadas hasta este momento, los estudiantes no utilizaron herramientas computacionales para justificar o probar sus respuestas. Conjeturamos que, dado que no se proponen valores numéricos concretos para las variaciones propuestas en la EDO inicial, los estudiantes no son capaces de avanzar en el estudio de casos particulares haciendo uso de las herramientas tecnológicas que tienen a su disposición. Este hecho se evidencia al analizar su actuación posteriormente cuando se les presentan datos definidos numéricamente. En esos casos, se hace presente el empleo de diferentes representaciones y el uso de herramientas digitales.

4.2 Las herramientas digitales y los registros de representación

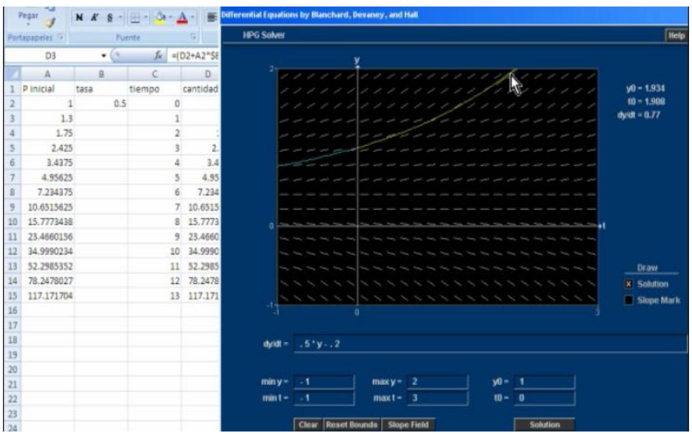
En el apartado c) se pide representar una EDO para una tasa de crecimiento $k = 1/2$ y una disminución de la población debido a la pesca de $H = 1/5$. Y en el apartado d) se dan los valores para los parámetros: $k = 2, c = \frac{1}{2}$ y $H = 3/2$, donde *c* es un factor asociado a la muerte por sobrepoblación. En ambos casos, se pide representar y analizar la EDO que describe el cambio en la población, así como argumentar sobre las relaciones entre la EDO, las soluciones y el contexto.

En esta parte de la tarea, el uso del software para representar campos de direcciones resultó ser fundamental. A continuación se describen las trayectorias de solución mostradas por los equipos que participaron, organizadas de acuerdo al uso que hacen de las herramientas tecnológicas. Dos de los equipos, Lander y Athan, y Colin y Owen, utilizaron el software únicamente para describir el comportamiento de la población, pero no ofrecieron argumentos algebraicos para justificar sus resultados. Rita y Evan establecieron relaciones entre la representación gráfica y la representación algebraica, finalmente Zeth (el estudiante que resolvió individualmente las tareas), utiliza, además de la tecnología, argumentos analíticos para justificar su interpretación.

Lander y Athan, hacen uso de dos representaciones de las soluciones para contrastar sus resultados. Primero representan (en HPGSolver) el campo de direcciones y las soluciones para distintas condiciones iniciales relacionadas con la EDO $\frac{dN}{dt}=\frac{1}{2}N-\frac{1}{5}$, posteriormente construyen en una hoja de cálculo la solución numérica y terminan contrastando ambas representaciones. En un principio no asocian las curvas (soluciones) que muestra el software con la función que representa la población, lo que se observa en el siguiente fragmento de la transcripción

> Athan: *lo que quiero es que veamos cual es la cantidad de peces a lo largo del tiempo. En el tiempo cero, ponle aquí cantidad de peces, es la que teníamos, es uno, ahí no hay otra cosa. Pero .. en el siguiente instante de tiempo tenemos 1 por 0.5, por la tasa, … y en el siguiente instante de tiempo tendrías 1.5..*
>
> Pro2: *y la pesca?*
>
> Athan: *… ahhh pero ahí la pesca iría en la misma fórmula, vamos hacerlo en dos columnas una con pesca y otra sin pesca. Entonces como quedaría, el anterior mas, …Ahora vamos iniciar con una cantidad de 1.5*

La discusión anterior se genera después que los estudiantes trazan diferentes soluciones en el campo de direcciones, tal como la transcripción muestra. Pese a que Athan tiene la representación gráfica de las soluciones, está buscando observar valores concretos para la cantidad de peces, así que deciden construir en una hoja de cálculo la representación numérica de la situación. Utilizan estos valores numéricos para compararlos con los valores que ofrece la representación gráfica de las curvas solución, para una misma condición inicial (Fig. 4).



Lander y Athan contrastan las soluciones de la EDO
(DE Tools)
Fig. 4

Después de probar con diferentes valores para las condiciones iniciales finalmente se convencen de que la solución que obtienen numéricamente en la Hoja de Cálculo y la que observan en el campo de direcciones es la misma. Esta acción refleja la necesidad de los estudiantes de observar alguna congruencia entre sus modelos, en este caso, el modelo interno representado inicialmente en la tabla de valores y el modelo externo dado por las curvas solución. Conviene señalar que, previamente a la tarea que ocupa nuestra atención (Tarea S4), los estudiantes modelaron algunas situaciones en las que la atención se centró en la construcción de modelos matemáticos a partir de la representación numérica. En este sentido, se puede concluir que en esta tarea, los estudiantes tratan de integrar algunos de los conocimientos adquiridos previamente.

Como se ha indicado, en ambas actividades (apartado c y d), utilizan el software para representar el campo de direcciones y las soluciones de la EDO y en cada caso describen el comportamiento de la población tomando como referencia la solución de equilibrio N=0.4 para el apartado c) y, N=1 y 3 para el apartado d). No justifican algebraicamente sus afirmaciones.

Colin y Owen, usando el software como herramienta para visualizar, identificaron en el apartado c), la solución de equilibrio (*N=0.4*) como un límite para el que la población aumenta o disminuye. En el apartado d) que conduce a la EDO $\frac{dN}{dt} = 2N - \frac{1}{2}N^2 - \frac{3}{2}$ nuevamente identifican las soluciones de equilibrio (*N=1* y *N=3*) y describen el comportamiento de la población. Aquí se muestra la información que obtuvieron:

> *"la población disminuye para valores menores a 1, para valores entre 1 y 3 la población aumenta, pero llega un instante en el tiempo donde se estabiliza. Mayor a 3 la población disminuye".*
>
> "*caso **N(t) <1**, la población disminuye porque se sacan más peces de los que nacen y mueren más peces de los que nacen.*"
>
> "*caso **1< N(t) <3**, la población aumenta pero se queda fija al alcanzar el valor de 3, porque llegan a un estado de equilibrio donde la población se estabiliza.*"
>
> "*caso **N(t) >3**, la población inicial decrementa, pero al llegar a 3 la población se estabiliza debido a que al inicio hay una sobrepoblación pero llega a un instante donde disminuye rápidamente y llegando a 3 se estabiliza.*"

En el trabajo de Rita y Evan se observa que al tratar de establecer relaciones entre la representación gráfica y los parámetros de la EDO, confunden la solución de equilibrio H/k y la cantidad de peces que son extraídos.

Rita y Evan buscan relaciones entre los parámetros y las curvas
Fig. 5

En párrafos anteriores se mostró que estos estudiantes arrastraban dificultades en la comprensión de la representación de la cantidad y de la variación en una EDO, lo que se manifiesta también cuando tratan de mirar en la gráfica la cantidad de peces que se extrae. Gráficamente este error puede relacionarse también con un intento de generalizar la traslación de funciones, tal y como se puede observar en la figura anterior los estudiantes hacen referencia al campo de direcciones de $\frac{dN}{dt} = kN$ (lado superior derecho) y refieren también al campo de $\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2}N - \frac{1}{5}$, donde señalan un desplazamiento vertical. Esta situación refleja la búsqueda de una congruencia entre una idea que ellos tienen y la representación gráfica de la situación.

Por otro lado, Zeth bosquejó los campos de direcciones para cada una de las ecuaciones y, a partir de ellos, obtuvo y representó la información relativa a la situación correspondiente. Por ejemplo, en la figura 6 se muestra el campo de pendientes asociado a la ecuación $\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2}N - \frac{1}{5}$

.

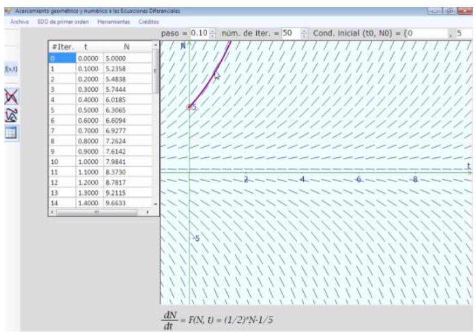
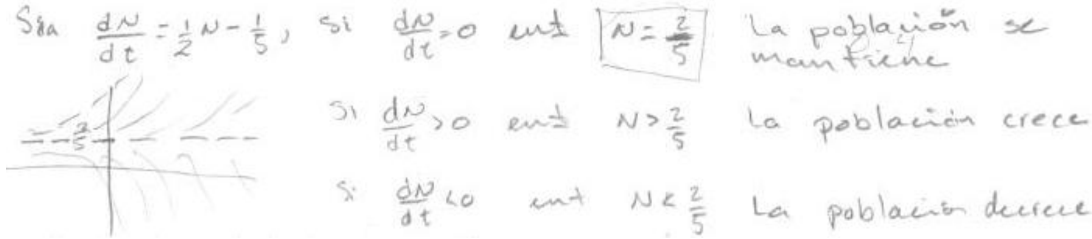


Fig. 6. Zeth bosqueja el campo de direcciones (GeomED) correspondiente
a la EDO
$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{2}N - \frac{1}{5}$$

Utilizando como referencia la información que muestra el software (tabla de valores y campo de direcciones), Zeth relaciona el crecimiento en el campo de pendientes (zona en la que los segmentos de línea tienen pendiente positiva) con la expresión $\frac{dN}{dt} > 0$, el decrecimiento (región en donde los segmentos de línea tienen pendiente negativa) con $\frac{dN}{dt} < 0$ y la solución de equilibrio con $\frac{dN}{dt}=0$. Por otro lado, tal como se observa en el registro escrito, en cada momento tiene presente el contexto que está siendo modelizado.



Zeth traslada la información obtenida en forma gráfica con el software a una representación algebraica
Fig. 7

En la respuesta al apartado d) del mismo problema, se encuentra que Zeth comienza gradualmente a introducir notación y operaciones algebraicas un poco más complejas para justificar sus afirmaciones. Nuevamente, traza el campo de direcciones correspondiente a la EDO y de ahí obtiene información que resulta relevante para el desarrollo de las operaciones algebraicas. Destacan dos procesos importantes en el estudio de las EDO: uno tiene que ver con el reconocimiento de las soluciones de equilibrio y el otro con la identificación de los valores donde la EDO cambia de signo.

Zeth identifica las pendientes y expresa su análisis en relación con ellas, es decir, comprende el campo de direcciones como un conjunto de segmentos de línea y reconoce los valores de N en los cuales la pendiente vale cero ($N=0$ y $N=3$), las soluciones de equilibrio. Aunque en las primeras sesiones se definió el campo de pendientes, hasta este momento no se había observado que los estudiantes asociaran la pendiente con el crecimiento o decrecimiento (Fig. 8).

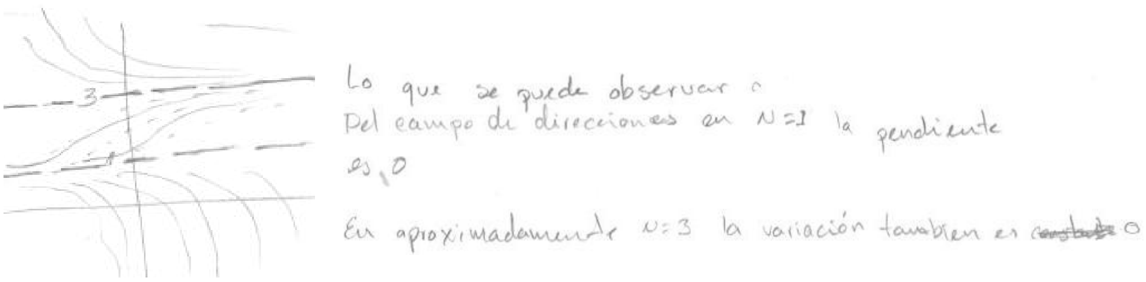


Fig.8

Nuevamente, una vez que tiene una idea del comportamiento de la población, determina algebraicamente las soluciones de equilibrio y reconoce los valores donde la derivada cambia de signo, elementos que utilizó posteriormente para presentar algunas conclusiones sobre la evolución de la población, como se observa en la siguiente secuencia extraída del registro de su resolución (Fig. 9):

Encuentra las soluciones de equilibrio	Para comprobar de manera analítica $\frac{dN}{dt}=0$ ent. $2N-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}N^2=0$ $4N-3-N^2=0$ $N^2-4N+3=0$ $(N-3)(N-1)=0$ $N=3$ ó $N=1$
Identifica las regiones donde $\frac{dN}{dt}>0$ y $\frac{dN}{dt}<0$.	Luego, $\frac{dN}{dt}<0$ cuando $N<1$ ó $N>3$ $\frac{dN}{dt}>0$ cuando $1<N<3$
Justifica algebraicamente	$\frac{dN}{dt}<0$, $2N-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}N^2<0$ por lo tanto $-N^2+4N-3<0$ $N^2-4N+3>0$ $(N-1)(N-3)>0$ Solución de $(N-1)(N-3)>0$ es $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$. $-++++$ $---$ $+++++$ 1 3

Fig. 9

El trabajo realizado por Zeth muestra que el software puede ser una herramienta de ayuda en la visualización de campos de direcciones que facilita la comprensión del comportamiento de la situación que está modelizando. Este estudiante, una vez que posee una visión general de la situación, hace uso de herramientas algebraicas para justificar lo que observa. Es decir, la representación gráfica de la situación modelada, le permite tener una idea general sobre los elementos que son relevantes en el fenómeno que representa la EDO. Percibir la evolución del fenómeno es para él un primer paso para introducir el uso de las representaciones algebraicas que expresan esta misma información. El comportamiento seguido por este estudiante muestra un estilo de razonamiento diferente a los demás participantes, podemos pensar que viene sugerido por su propia formación, aunque no es el único matemático en el grupo. Ha sido capaz de integrar los componentes cognitivos y epistemológicos de la tecnología para obtener los resultados correctos. Este hecho constituye una limitación a los resultados de la investigación, puesto que no se puede contrastar con otras formas habituales de actuación de los matemáticos donde se procede al revés, es decir, primeramente de una manera algebraica y a continuación de una forma gráfica (Eisenberg, 1994).

Al concluir ésta actividad los estudiantes discutieron en forma grupal las estrategias seguidas en la resolución de la Tarea y en la obtención de las conclusiones y expresaron también sus dudas y reflexiones que surgieron durante el proceso seguido. En líneas generales, se observaron dos tipos de procedimientos para justificar que el modelo matemático se ajusta a las condiciones propuestas: argumentos basados en la representación gráfica y numérica de la EDO con ausencia de justificaciones algebraicas y, argumentos obtenidos a partir de las representaciones gráficas y justificados mediante el análisis de la representación algebraica de la situación.

5. CONCLUSIONES

En relación con el objetivo propuesto en esta investigación, podemos concluir que los estudiantes han utilizado el software como mediador entre los modelos mentales de los fenómenos estudiados y los modelos matemáticos que representan de manera escrita, principalmente cuando se tratan casos particulares. En este sentido, contar con diferentes herramientas digitales para representar el mismo fenómeno da confianza al estudiante y le impulsa a comprobar la información haciendo uso de diferentes medios, por ejemplo la representación de la solución de forma numérica y gráfica. Este hecho también refleja una necesidad de observar alguna congruencia entre sus modelos internos y externos, así como entre las representaciones de un mismo objeto.

Observamos que la representación gráfica de las EDO puede ser empleada como un elemento indicador del comportamiento global del fenómeno y, que es a través de la identificación de elementos relevantes que se puede introducir a manera de justificación o precisión de detalles la representación algebraica. En esta investigación, se han podido observar algunos indicios del empleo del registro gráfico como nexo entre el contexto modelizado y los modelos matemáticos que lo representan. Ahora bien, convendría modificar la secuencia de enseñanza con el objetivo de que los estudiantes sean capaces de integrar los diferentes componentes cognitivos y epistemológicos que aparecen con las herramientas tecnológicas, aunque que creemos que en nuestra experimentación hemos podido constatar avances en este sentido. Se han encontrado también evidencias de que las tareas propuestas han podido hacer menos sinuoso el tránsito de un registro de representación a otro para establecer conexiones más robustas entre ellos (los participantes acuden directamente a argumentos en los diferentes registros) ejerciendo de este modo como mediadoras, conjuntamente con la tecnología, para la comprensión de los conceptos, tanto de ED como de otros que intervienen.

El empleo de la tecnología como elemento de visualización y cálculos numéricos favoreció la exploración de diferentes casos, la elaboración de conjeturas sobre el comportamiento de la población y la comprensión de las nociones de condición inicial, solución de equilibrio y variación.

En las actividades posteriores S5-11, hemos observado que en casos como el de parámetros arbitrarios (apartados a y b), los estudiantes han mostrado gradualmente un uso más amplio del software para explorar distintos casos y con ello la representación algebraica ha tenido mayor presencia.

REFERENCIAS

Arslan, S. (2010). Do students really understand what an ordinary differential equation is? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol.41 (7), pp.873- 888.

Blanchard, P., Devaney, R. & Hall, G. (2006). Differential Equations (PCtools). Brooks/Cole. Cengage Learning.

Camacho-Machín, M.; Perdomo-Díaz, J. & Santos-Trigo, M. (2012). Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias vía la Resolución de Problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 230(2), pp. 9-32.

Doerr, H., M. & Tripp, J. S. (1999). Understanding How Students Develop Mathematical Models. *Mathematical Thinking and Learning*, Vol.1 (3), pp. 231-254.

Duval, R. (1999). *Argumentar, Demostrar, Explicar: ¿Continuidad o Ruptura Cognitiva?* México, Grupo Editorial Iberoamérica.

Eisenberg, T. (1994), On understanding the reluctance to visualize, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 26(4), p. 109-113.

Guerrero-Ortíz, C. (2008). *Interpretación geométrica de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estrategias y dificultades.* (Tesis de maestría). CINVESTAV-IPN, México.

Guerrero, C., Camacho, M. & Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), pp.341–352.

Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 455-472.

Kwon, O. (2002).Conceptualizing the realistic Mathematics Education approach in the teaching and learning of ordinary differential equation. *In 2nd international conference on the teaching of mathematics*, at the undergraduate level, Hersonissos, Crete , Greece, July 1-6, 2002.

Perdomo-Díaz, J. (2010). *Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de Resolución de Problemas* (Tesis doctorado). Universidad de la Laguna. España.

Raychadhuri, D. (2007). A layer framework to investigate student understanding and application of the existence and uniqueness theorems of differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(3), 367-381.

Raychadhuri, D. (2008). Dynamics of a definition: a framework to analyse student construction of the concept of solution to a differential equation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(2), 161-177.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.

Rowland, D. & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(4), 503-516.

Zandieh, M. & M. McDonald, M. (1999). Student understanding of equilibrium solution in differential equations. In F. Hitt, & M. Santos (Ed.), *Proceedings of the 21st annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 253-258). Columbus, OH: ERIC.

Anexo 1 (Tarea S4)

Situación

Supongamos una población N(t) en condiciones ideales, esto es, sin considerar que elementos externos como el alimento, el espacio y la sobrepoblación afectan el desarrollo de la población. Entonces la ecuación diferencial $\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$ *describe la variación de dicha población, en donde se establece una relación de proporcionalidad entre la variación de la población y la propia población.*

En los siguientes casos, se presentan diferentes situaciones que consideran la presencia de elementos externos como los que se mencionaron anteriormente. Obtén para cada uno, la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la población[1] de peces con respecto al tiempo[2].

a) Hemos supuesto que la población de peces N(t) en un estanque crecerá a una tasa proporcional a la población si no es perturbada y si hay suficiente comida. Considera la condición de que cada año una cantidad fija H de peces se extrae del estanque para la venta. ¿Cuál sería la ecuación diferencial que describe este caso?

b) Adicionalmente a las condiciones especificadas en el inciso anterior. Considera que a medida que la población crece también aumenta la mortalidad de peces, ya que aumenta la competencia por el espacio vital y por el alimento. Experimentalmente se ha observado que el número de muertes producidas por este fenómeno es proporcional a $N(t)^2$*, denotemos por c a la constante de proporcionalidad. Escribe la EDO que describe el cambio en la población considerando este último hecho, además de la pesca (H).*

c) Para los valores particulares de $k = 1/2$ *y* $H = 1/5$ *representa la ecuación diferencial y el campo de direcciones para el inciso a). Explica por qué las soluciones mostradas en el campo de direcciones reflejan las condiciones propuestas.*

d) Considera los valores de $k = 2, c = \frac{1}{2}$ *y* $H = 3/2$ *en el inciso b. Explica por qué las soluciones mostradas en el campo de direcciones reflejan las condiciones propuestas.*

Autores:

Matías Camacho-Machín. Universidad de la Laguna, España. mcamacho@ull.es

Carolina Guerrero-Ortiz. Colegio de Ciencias y Humanidades. CCH-UNAM, México. cguerrero@cinvestav.mx

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por la beca del CONACYT (México) con número de referencia 169440 y el Proyecto de Investigación con referencia EDU EDU2008-05254 y EDU2011-29328 del Ministerio de Ciencia e Innovación del Plan Nacional I+D+i del Gobierno de España.

[1] Cantidad medida en toneladas.
[2] Medido en años

GAGATSIS ATHANASIOS & DELIYIANNI ELENI

MATHEMATICAL WORKING SPACE RELATIONS WITH CONVERSIONS BETWEEN REPRESENTATIONS AND PROBLEM SOLVING IN FRACTION ADDITION

RELACIONES EN EL ESPACIO DE TRABAJO MATEMATICO CON CONVERSIONES ENTRE REPRESENTACIONES Y PROBLEM SOLVING RELATIVO A LA ADICION DE FRACCIONES.

ABSTRACT

The present study focused on the cognitive level of Mathematical Working Space (MWS) and the component of the epistemological level related to semiotic representations in fraction addition. A test measuring students' conversion and problem-solving ability in fraction addition was developed and administered to 388 primary and secondary school students (about 11-14 years old) three times. Multivariate analysis of variance (MANOVA) for repeated measures and implicative method revealed that the students' performance improved as they move within primary school and within secondary school. A hiatus in performance progress is indicated though when the students moved from primary to secondary school. This finding is in line with compartmentalized way of thinking indicated for this age group. Didactical implications are discussed.

KEY WORDS:

conversion, problem solving, fraction addition, transition, mathematical working space

RESUME

La présente étude est centrée sur le niveau cognitif de l'Espace de Travail Mathématique (ETM) et sur la composante du niveau épistémologique liée aux représentations sémiotiques de l'addition des fractions. Un test mesurant les capacités de conversion des étudiants et l'usage de stratégies de résolution de problèmes et de représentations dans l'addition des fractions a été développé. Ce test a été appliqué à 388 élèves du primaire et du secondaire (entre 11 et 14 ans) trois fois. Une analyse de variance multivariée (MANOVA) pour les mesures répétées, ainsi qu'une analyse implicative, ont révélé que la performance des étudiants s'améliore au sein du même niveau scolaire (primaire, secondaire). Toutefois, un hiatus dans le progrès des performances apparaît quand les étudiants passent de l'école primaire au secondaire. Ce résultat est soutenu par la façon compartimentée de penser qui caractérise ce groupe d'âge. Des implications didactiques sont discutées.

MOTS CLEFS:

conversion, la résolution de problèmes, addition de fractions, transition, espace de travail mathématique

RESUMEN

Este estudio se centra en el nivel cognitivo del área de trabajo de Matemáticas y el componente del nivel epistemológico relacionado con las representaciones semióticas de la adición de fracciones. Se desarrolló una prueba de medición de las capacidades de conversión de los estudiantes y el uso de estrategias de resolución de problemas y representaciones en la adición de fracciones. Esta prueba se aplicó a 388 estudiantes de educación primaria y secundaria (entre 11 y 14 años) tres veces. Un análisis multivariado de varianza (MANOVA) para medidas repetidas y análisis implicativo reveló que mejora el rendimiento de los estudiantes en el mismo grado escolar (primaria y secundaria). Sin embargo, una brecha en la evolución del rendimiento se produce cuando los estudiantes pasan de primaria a secundaria. Este resultado se apoya en el pensamiento compartimentado que caracteriza a este grupo de edad. Se discuten las implicaciones educativas.

PALABRAS CLAVE:

conversión, resolución de problemas, suma de fracciones, transición, espacio de trabajo matemático

RESUMO

Este estudo centra-se no nível cognitivo do Espace de Trabalho Matemático (ETM) e a componente do nível epistemológico relacionado com as representações semióticas da adição de fracções. Um teste foi desenvolvido para medir a capacidade de conversão de registos ? dos alunos e o uso de estratégias de resolução de problemas de adição de fracções. Este teste foi aplicado três vezes a 388 alunos do ensino primário e secundário (alunos entre 11 e 14 anos). A análise de variância multivariada (MANOVA) para medidas repetidas e a análise implicativa revelaram uma melhoria do desempenho dos alunos quando eles se mantém no mesmo grau (primário e secundário). No entanto, uma lacuna na evolução do desempenho ocorre quando os alunos passam do primário para o secundário. Este resultado é suportado pelo pensamento compartimentado que caracteriza este grupo etário. Algumas implicações educacionais são discutidas.

PALAVRAS-CHAVE:

conversão, resolução de problemas, adição de fracções, espaço de trabalho matemático,

1. INTRODUCTION

In the Mathematical Work Space (MWS) two levels are involved: one of epistemological nature related to mathematics content and the other to cognitive aspects. In fact, mathematical work is the result of a continuous process of genesis that allows an inner joint at epistemological and cognitive levels and articulation of these two levels. Representations are a basic component of any epistemological plane related to a particular mathematical field (Kuzniak, 2011). Particularly, a representation is any configuration of characters, images or concrete objects that stand for something else (DeWindt & Goldin, 2003).

Fraction addition is an important and challenging notion in the learning of Mathematics in both primary and secondary education (Deliyianni, Elia, Panaoura, & Gagatsis, 2007). A number of studies indicate the necessity of using a variety of appropriate representations to support students' construction of fractions. For instance, Cramer, Wyberg and Leavitt (2008) point out that fraction circles vividly demonstrate the need to find common denominators when adding fractions and that these representations show the steps to be taken to exchange given fractions with equivalent ones having common denominators. Adjiage and Pluvinage (2000) propose the use of a uni-dimensional geometrical representation to express fractions. In fact, the number line has been acknowledged as a suitable representational tool for assessing the extent to which students have developed the measure interpretation of fractions and reaching fraction additive operations (Keijzer & Terwel, 2003).

In this study, we concentrated on the cognitive processes of the students dealing with fraction-addition conversions and problems in an one-year period during their transition either within primary school (Grade 5 to 6), within secondary school (Grade 7 to 8), or from primary to secondary school (Grade 6 to 7). Conversion means a transformation of representations that consists of changing a system of representation without changing the objects denoted. It is used in a broad sense. Thus it is not necessarily related to registers. A number of researchers (e.g. Hitt, 1998; Gagatsis & Shiakalli, 2004) stress the important role conversion ability plays in problem solving and understanding mathematical concepts. However, the development of conversion and problem-solving ability hasn't been examined extensively yet and particularly within the scope of MWS. In this study, an analysis of the students' cognitive processes is undertaken taking into account that the mathematical work in a school can be described in three different levels: personal, reference and appropriate MWS. Mathematics aimed at by the institutions is described in the reference MWS. This should be arranged by the teacher in an appropriate MWS, in order to allow effective implementation in the classroom where each student works within his personal GWS (see Introduction).

The contribution of the study becomes even more important considering the critical transitional stage of the students that are examined and the difficulties students face during their transition from one educational level to the other (Whitley, Lupart, & Beran, 2007). In fact, we move a step beyond Deliyianni's and Gagatsis's (2013) study that proposes a model of the development of students' multiple-representation flexibility and problem-solving ability in fraction addition. Multiple-representation flexibility refers to switching between different systems of representations of a concept, as well as to recognizing and manipulating the concept within multiple representations (Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2011). Deliyianni and Gagatsis's (2013) findings provided evidence for the strong interrelation between representational flexibility and problem solving developmentally. The results indicated also the students' established pre-existent knowledge and the important role the initial state of the aforementioned cognitive parameters play in their advancement.

2. METHOD

Data were collected from 388 primary and secondary school students (about 11-14 years old) in Cyprus. A test (Deliyianni & Gagatsis, 2013) that measures students' conversion and problem-solving ability in fraction addition was developed and administered to the same students three times, with intervals of 3 to 4 months between them. The first measurement took place at the end of the school year, while the next two measurements were conducted in the next school year. To be precise, 108 students were 5th graders, 132 students were 6th graders and 148 students were 7th graders at the first measurement, while 108 students were 6th graders, 132 students were 7th graders and 148 students were 8th graders at the second and the third measurement. All students had already been taught the fraction concept, fraction equivalence, fraction order and same and different denominator fraction addition before the first measurement.

The tasks were designed in such a way that they are similar to a variety of situations and tasks on fractions that are included in the Mathematics textbooks used in Cyprus. The designing of the tasks preceded a detailed analysis of the content of the mathematics textbooks of the four grades under study (Deliyianni et al., 2007). In conversion tasks the representations (i.e., source and target) that students are asked to use are predetermined. In problem-solving tasks the only predetermined or given representation is the system(s) of representation of the statement of the problems, while the representational transformation processes that students need to apply in order to reach a solution are tacitly required (i.e. indirect treatments, recognitions and conversions).

In particular, the test (see Appendix) that was constructed included:

1. Conversion tasks having the diagrammatic and the symbolic representation as the source and the target representation, respectively. Same denominator fraction additions were presented in number line (COLSs) and circular area diagram (COCSs), whereas different denominator fraction additions were presented in number line (COLSd) and rectangular area diagram (CORSd).

2. Conversion tasks having the symbolic and the diagrammatic representation as the source and the target representation, respectively. Pupils were asked to present the same denominator fraction addition in circular area diagram (COSCs) and in number line (COSLs), whereas they were asked to present the different denominator fraction additions in rectangular area diagram (COSRd).

3. One diagrammatic addition problem in which the unknown quantity is the summands (PD).

4. One verbal problem that is accompanied by auxiliary diagrammatic representation and the unknown quantity is the summands (PVD).

5. One verbal problem whose solution requires not only fraction addition but also the knowledge of the ratio meaning of fraction (PV).

6. One justification task that is presented verbally and is related to same and different denominator fraction addition (JV).

The problem with a diagram as an informational representation (PD) and the verbal problem with a diagram as an auxiliary representation (PVD) require the application of the trial and error strategy or a visualization strategy (i.e., composition of the parts of a geometric figure). The two verbal problems (PV, JV) require the use of deductive reasoning and the choice of the appropriate operations, respectively.

To compare students' mean performance in the components of conversion and problem-solving ability at the three measurements, MANOVA for repeated measures and paired t-test was carried out with SPSS. Differences were significant at a p value of 0.05 or smaller. Furthermore, the implicative statistical method (Gras, Briand, & Peter 1996) has been conducted by using C.H.I.C.. The analysis gives information concerning whether success in one task tends to imply success in another task and the difficulty of the tasks based on students' performance.

3. RESULTS

3.1. *Students' mean performance in conversion and problem-solving tasks*

The results of the multivariate analysis showed that there is a significant interaction between the time of measurement and the age of the students [Pillai's $F(28, 746)=5.25$, $p<0.001$] concerning conversion and problem-solving ability in fraction addition. Specifically, we found that students' performance in conversion tasks from a symbolic to a diagrammatic representation [$F (4, 379) =3.41$, $p<0.01$], conversion tasks from a diagrammatic to a symbolic representation [$F (4, 379) =4.53$, $p<0.01$], verbal problems [$F (4, 379)= 5.33$, $p<0.01$] and problems with a diagram as an informational and an auxiliary representation [$F (4, 379)= 10.71$, $p<0.01$] varies depending on whether students move either within primary school (Grade 5 to 6), within secondary school (Grade 7 to 8) or from primary to secondary education (Grade 6 to 7). The means and standard deviations for these components at the three measurements by age group are presented in Table 1.

According to the results, students' performance significantly improved between the first and the third measurement, as they moved within primary school (Grade 5 to 6) in all dimensions: conversion from a symbolic to a diagrammatic representation ($t=-5.12$, $df=107$, $p<0.05$), conversion from a diagrammatic to a symbolic representation ($t=-6.01$, $df=107$, $p<0.05$), verbal problems ($t=-5.33$, $df=107$, $p<0.05$) and problems with a diagrammatic representation ($t=-4.44$, $df=107$, $p<0.05$).

As for the students who move from primary to secondary school (Grade 6 to 7), they have the highest mean performance at the first measurement compared with the other two age groups both in conversion and problem-solving dimensions. At the second measurement, as these students enroll in secondary school (Grade 7), their performance is decreased significantly in verbal problems ($t=2.69$, $df=131$, $p<0.01$) and problems with a diagram as an informational and an auxiliary representation ($t=3.90$, $df=131$, $p<0.01$). In conversion tasks from a symbolic to a diagrammatic representation ($t=1.03$, $df=131$, $p=0.31$) and conversion tasks from a diagrammatic to a symbolic representation ($t=0.49$, $df=131$, $p=0.16$) a stability of performance is noted between the first two measurements. Except the conversion tasks from a diagrammatic to symbolic representations ($t=1.72$, $df=131$, $p=0.44$), the performance of these students increased significantly in all the dimensions between the second and the third measurement: conversion from a symbolic to a diagrammatic representation ($t=-2.52$, $df=131$, $p<0.05$), verbal problems ($t=-2.93$, $df=131$, $p<0.05$), problems accompanied by a diagram ($t=-2.61$, $df=131$, $p<0.05$). However, their performance at the third measurement is similar to their performance one year before at the first measurement in conversions from a symbolic to a diagrammatic representation ($t=-1.14$, $df=131$, $p=0.13$), conversions from a diagrammatic to a symbolic representation ($t=-1.05$, $df=131$, $p=0.15$) and verbal problems ($t=-0.05$, $df=131$, $p=0.48$).

TABLE 1

Students' mean performance and standard deviations in fraction-addition conversions and problems at the three measurements by age group

			Students' group					
			Grade 5 to 6		Grade 6 to 7		Grade 7 to 8	
Measurement	Competence	Representation	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD
1st measurement	Conversion	Symbolic to diagrammatic	0.53	0.37	0.62	0.38	0.46	0.35
		Diagrammatic to symbolic	0.31	0.30	0.41	0.38	0.38	0.35
	Problem solving	Diagrammatic	0.17	0.26	0.27	0.29	0.17	0.25
		Verbal	0.44	0.44	0.59	0.44	0.37	0.43
2nd measurement	Conversion	Symbolic to diagrammatic	0.65	0.33	0.57	0.36	0.53	0.41
		Diagrammatic to symbolic	0.47	0.36	0.39	0.35	0.43	0.37
	Problem solving	Diagrammatic	0.24	0.26	0.21	0.26	0.20	0.26
		Verbal	0.50	0.44	0.43	0.41	0.49	0.44
3rd measurement	Conversion	Symbolic to diagrammatic	0.71	0.35	0.66	0.34	0.62	0.37
		Diagrammatic to symbolic	0.50	0.38	0.45	0.37	0.43	0.36
	Problem solving	Diagrammatic	0.29	0.28	0.27	0.28	0.25	0.28
		Verbal	0.65	0.42	0.52	0.43	0.50	0.46
N			108		132		148	

The students who move within secondary school (Grade 7 to 8), exhibit a stability of performance in the one year period between the first and the third measurement in conversion tasks from a diagrammatic to a symbolic representation (t=-1.66, df=147, p=0.05). An important improvement in their performance is noted, though, in conversion tasks from a symbolic to a diagrammatic representation ($t=-4.76$, $df=147$, $p<0.05$), verbal problems ($t=-3.28$, $df=147$, $p<0.05$) and problem-solving tasks that are accompanied by a diagram ($t=-3.43$, $df=147$, $p<0.05$).

3.2. *Implicative relations*

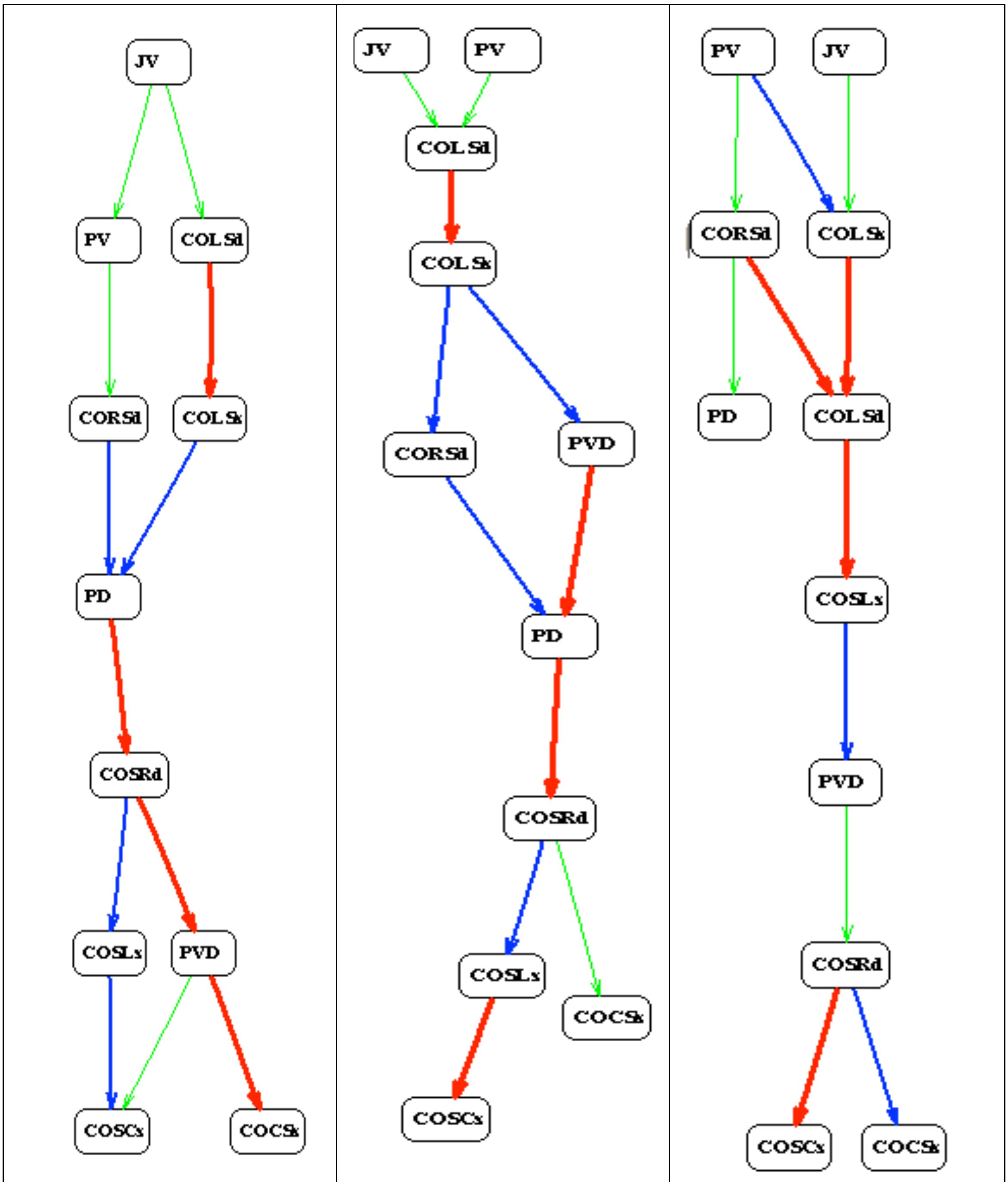
Diagrams 1 to 3 present the implicative relations of students' answers in conversion and problem-solving tasks at the three measurements during their transition within primary school (Diagram 1), within secondary school (Diagram 2) and the transition level from primary to secondary school (Diagram 3). In the beginning of the implicative chains the most difficult tasks for the specific group of students are presented. According to implicative analysis the success in these tasks tends to imply success in the rest of the tasks. In the end of each implicative chain, the easiest tasks are shown. All the implicative indexes (according to the classic theory) range between 79 and 100.

At the first measurement, the most difficult tasks are the verbal problems for the students who move within primary school (Grade 5 to 6). Students' success in solving them tends to imply success in conversion tasks having diagrammatic (number line, rectangular area diagram) and symbolic representation as source and target representation, respectively. Therefore, their successful solution results in students' success in solving problems having a diagram as an informational or an auxiliary representation. These tasks may be characterized by a moderate degree of difficulty for this group of students. At the first measurement the easiest tasks are the conversion tasks having symbolic and diagrammatic representation (number line, circular and rectangular area diagram) as the source and target representation respectively. An easy task is also the same denominator fraction-addition conversion task from circular to symbolic representation. It should be mentioned also that as far as the students are concerned the same denominator fraction-addition conversion tasks are easier than different denominator fraction-addition conversion tasks. Furthermore, students encounter more difficulties in the tasks involving number line in relation with the tasks involving other types of diagrammatic representations.

When these students are enrolled in Grade 6 (second and third measurement) the same tasks as at the first measurement were still the most difficult. However, the number of easy tasks increases at the third measurement. For instance, at the third measurement the diagrammatic problem belongs to the easy-task group while at the first and second measurement it is found to have a moderate degree of difficulty.

Verbal problems are the most difficult tasks for the students who move from primary to secondary school (Grade 6 to 7) as well. The tasks which have a moderate degree of difficulty are conversion tasks having diagrammatic (number line, rectangular area diagram) and symbolic representation as the source and target representation respectively. A big number of tasks at the first measurement, which are similar to the tasks at the third measurement for the students who move within primary school, belong to the easy-task group.

However, at the second measurement as these students move to secondary school radical alterations are revealed concerning the way students behave during the solution of conversion and problem-solving tasks. In fact, two separate implicative chains appeared indicating a compartmentalized way of thinking. In one of these implicative chains, problems that are accompanied by a diagram and conversion tasks having symbolic and diagrammatic representation as source and target representations, respectively, are included. The other implicative chain consists of verbal problems and conversion tasks having diagrammatic and symbolic representation as the source and the target representation respectively. At the third measurement, the same tasks as at the first measurement are considered to be difficult. However, many tasks belong at the first measurement in easy-task group (e.g., diagrammatic problems) but at the third measurement these tasks are assigned to the group of moderate-degree-of-difficulty tasks. In the end of the implicative chain conversion tasks that involve the circular area diagram as the source or target representation arose.



1st measurement	2nd measurement	3rd measurement

Diagram 1. The implicative relations of students' answers in fraction-addition conversion and problem-solving tasks at the three measurements (transition within primary school)

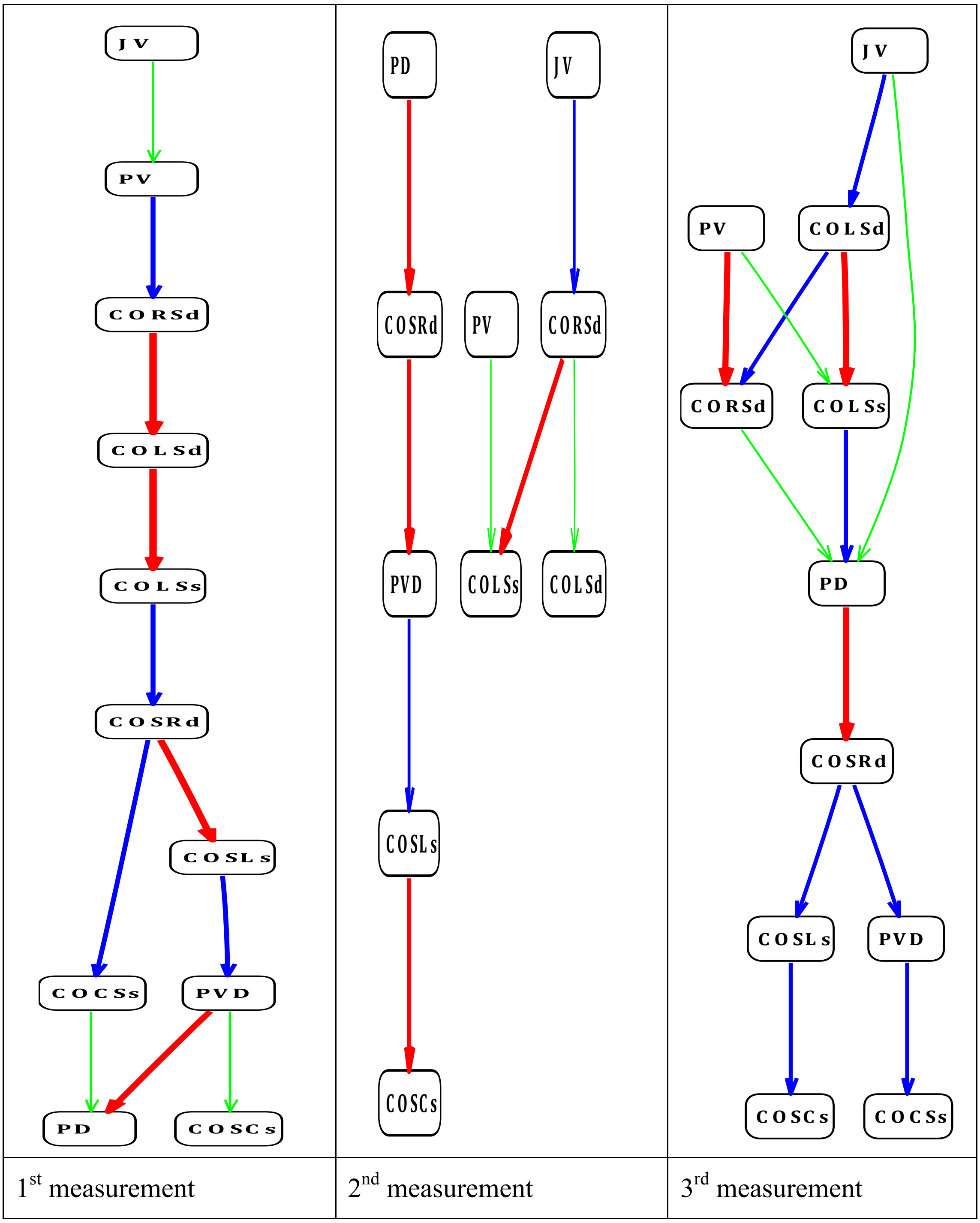


Diagram 2. The implicative relations of students' answers in fraction-addition conversion and problem-solving tasks at the three measurements (transition from primary to secondary school)

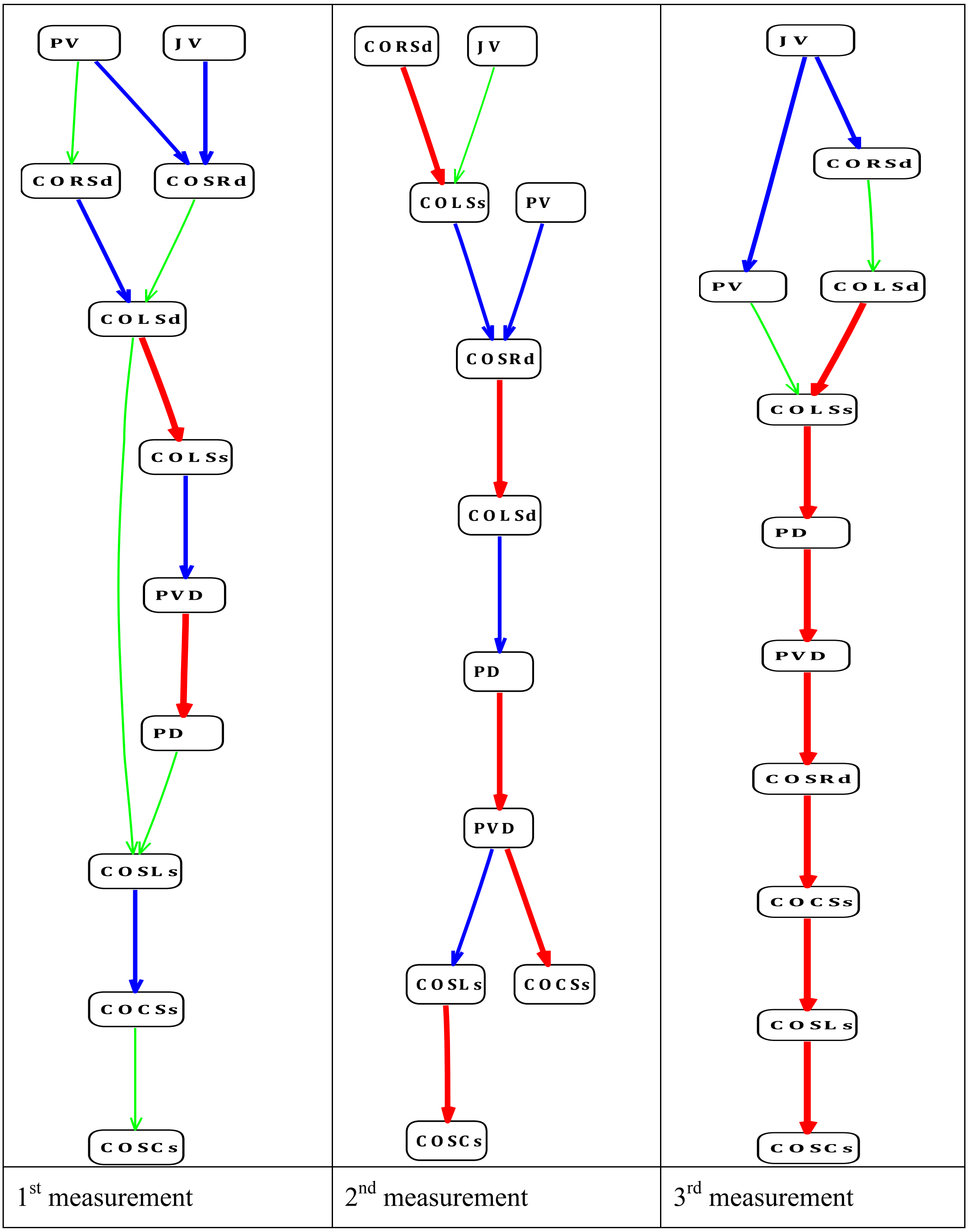


Diagram 3. The implicative relations of students' answers in fraction-addition conversion and problem-solving tasks at the three measurements (transition within secondary school)

At the first measurement the most difficult tasks are the verbal problems for the students who move within secondary school (Grade 7 to 8). These tasks are the most difficult at the second and third measurement as well. Students' improvement through measurements is evident in the implicative chains. A characteristic example is the different denominator fraction-addition conversion task from a symbolic to a rectangular area diagram (COSRd) that is found in the beginning of the implicative chain at the first and second measurement but at the third measurement it is found at its end.

4. DISCUSSION

In this study, we focused on the cognitive processes of the students dealing with fraction-addition tasks involving different modes of representations over an one-year period during their transition either within primary school (Grade 5 to 6), within secondary school (Grade 7 to 8), or from primary to secondary school (Grade 6 to 7).

According to the results, interesting variations in students' performance regarding conversion ability having diagrammatic and symbolic representation as the source and target representation respectively, and vice versa, and verbal and diagrammatic problem-solving ability across the different age groups are revealed. Particularly, the findings indicated that the students' performance improved within the same educational level (primary school, secondary school). However, in line with previous studies (e.g. Whitley et al., 2007) we did find a hiatus in performance progress when the students move from primary to secondary education. This finding is even verified further by the results that revealed the compartmentalized way of thinking of this age group. In fact, as far students who are at the transition level from primary to secondary school are concerned, success in one type of conversion did not necessarily imply success in another mode of conversion for the same concept; that is fraction addition. Lack of implications or connections among different types of conversion (i.e., with different starting representation) of the same mathematical content is the main feature of the phenomenon of compartmentalization (Duval, 2006) and indicates that students of this age group did not construct the whole meaning of fraction addition and did not grasp the whole range of its applications. As Even (1998) supports the ability to identify and represent the same concept in different representations and the flexibility to move from one representation to another allow students to see rich relationships, and develop deeper understanding of the concept. This inconsistent behavior can be also seen as an indication of students' conception that different representations of the same concept are completely distinct and autonomous mathematical objects and not just different ways of expressing the meaning of a particular notion. In other words, students may have confused the mathematical object of fraction addition with its semiotic representation (Duval, 2006).

A hypothetical interpretation for students' behaviour could be that the development of students' fraction-addition understanding was indicative of "U-shaped behavioural growth" (Strauss & Stavy, 1982): the early appearance of a type of behaviour in Phase 1, a later dropping out of that type of behaviour in Phase 2, and the subsequent reappearance of the initial type of behaviour in Phase 3. In fact, there is a U-shaped behavioural growth in the sense that students at the transition level from primary to secondary school performed better in primary school (Grade 6), their performance decreased at the beginning of secondary school (Grade 7) while it increased but remained at the same level as in primary school at the end of the school year in secondary school (Grade 7).

One possible factor contributing to this lack of improvement is the differences regarding the representations and the representation transformations used in primary and secondary education Mathematics textbooks used in Cyprus (Deliyianni et al., 2007). Taking into account the stage-environment fit theory Whitley et al. (2007) indicate that students experience declines in performance, if their educational environment does not support their current developmental stage and does not promote continued cognitive and emotional developmental growth. Thus, we assume that for students going through early adolescence, changing domains of fraction-addition symbolism from primary to secondary school might not be appropriate, and as a result students experience academic difficulties.

Founded on the various MWS levels, it seems that the MWS of the primary school students (personal) and teachers (reference) are based on the same paradigm regarding fraction addition. Within the MWS of both, students and teachers, the component of the epistemological level related to semiotic representations is conceived and approached in the same way. The mathematical work of both teachers and students is based on the use not only of symbolic representations, but also of diagrammatic and verbal representations and their interrelations. In other words, the reference MWS has been adapted to the personal MWS. Thus it has been successfully transformed into an appropriate MWS.

The MWS of the secondary school students (personal) and the schools and teachers (reference) are based on a different paradigm regarding fraction addition. Secondary school students at this early stage (Grade 7) need to use not only symbolic representations, but also diagrammatic and verbal representations and their coordination in order to solve fraction-addition tasks. Schools and teachers, however, promote a more abstract and symbolic approach to the representation and learning of fractions. Therefore, when the students encounter tasks that require flexible manipulation of representations in fraction addition, they face difficulties. In other words, the reference MWS which is aimed to by secondary schools concerning the concept of fraction addition has not been successfully transformed into an appropriate MWS, as it does not allow its successful implementation in the classroom where every student works within his/her personal MWS.

A limitation of this study was the fact that it does not investigate the phenomenon of congruence and non congruence between a source and target representation in conversion tasks, which is useful to be examined in a future research. The findings of this study support, though, Schoenfeld, Smith and Arcavi's (1993) claim that learning to understand and be competent in handling multiple representations can be a long-winding, context dependent, nonlinear and even tortuous process for students. In fact, the appropriate MWS must be constantly changed to fit the constraints that arose. The selection and organization of tasks given to students by their teacher are essential in the constitution of the appropriate MWS (see Introduction). For this reason the use of multiple representations in fraction-addition learning, the connection, the coordination and comparison with each other and the conversion from one mode of representation to another, should not be left to chance, but should be taught systematically in both primary and secondary education, so that the students develop the skills of representing and handling mathematical knowledge in various forms with flexibility.

REFERENCES

Adjiage R, & Pluvinage F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour expression des rationnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(1), 41–88.

Cramer, K., Wyberg, T. & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13* (8), 490-496.

Deliyianni, E., Elia, I, Panaoura, A., & Gagatsis, A. (2007). The functioning of representations in Cyprus mathematics textbooks. In E.P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.). *Current Trends in Mathematics Education* (pp. 155- 167). Rhodes: Cyprus Mathematics Society & University of Aegean.

Deliyianni, E., & Gagatsis, A. (2013). Tracing the development of representational flexibility and problem solving in fraction addition: A longitudinal study. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, DOI:10.1080/01443410.2013.765540.

DeWindt-King, A. M., & Goldin, G. A. (2003). Children's visual imagery: aspects of cognitive representation in solving problems with fractions. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *2*(1), 1-42.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103- 131.

Evapmib (2007). *Une base se questions d' evaluations en mathématiques*. Retrieved March 25, 2007, from http://ctug48.univfcomte.fr/evapmib/siteEvapmib/accueil.php

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 105-121.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité : le cas du domaine numérique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 25 – 44.

Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657.

Gras, R., Briand, H., & Peter, P. (1996). Structuration sets with implication intensity. In E. Diday, Y. Lechevallier & O. Opitz (Eds), *Proceeding of the International Conference on Ordinal and Symbolic Data Analysis – OSDA, 95*. Springer: Paris.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function*. The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

Keijzer, R., & Terwel, J. (2003). Learning for mathematical insight: A longitudinal comparative study on behaviour. *Learning and Instruction*, *13*, 285 – 304.

Kuzniak, A. (2011). L' espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

Strauss, S., & Stavy, R. (1982). *U-shaped behavioural growth.* New York: Academic.

Whitley, J., Lupart, J., & Beran, T. (2007). Differences in achievement between adolescents who remain in a K-8 school and those who transition to a junior high school. *Canadian Journal of Education*, *30*(3), 649- 669.

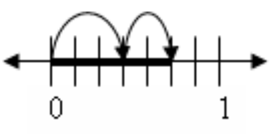
Authors:

1. Pedagogical Institute of Cyprus, deliyianni6@hotmail.com

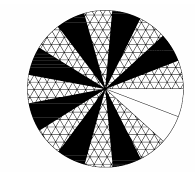
2. University of Cyprus, gagatsis@ucy.ac.cy

APPENDIX

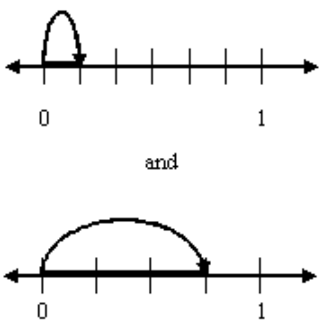
1. Write the fraction symbolic expression that corresponds to the shaded part of the following diagrams:



…............................ (CoLSs)



…............................ (CoCSs)

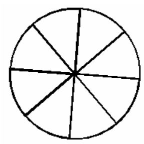


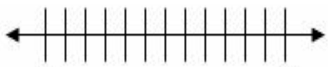
…............................ (CoLSd)

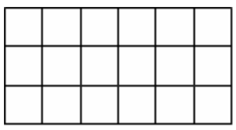
…........................... (CoRSd)

(*Conversion tasks – symbolic to diagrammatic representation*)

2. Illustrate the following symbolic expression on the diagram which is next to them:

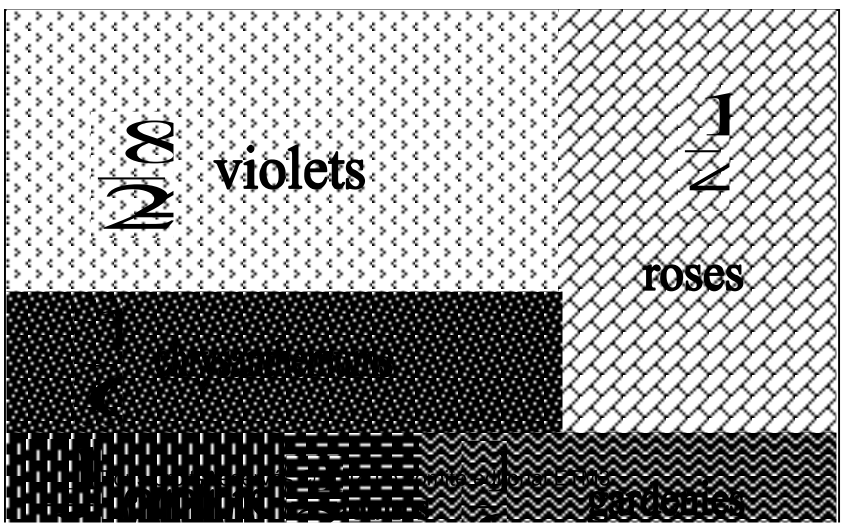
1/8 + 5/8=…  (CoSCs)

1/12 + 7/12=….  (CoSLs)

2/9 + 1/6=…  (CoSRd)

(*Conversion tasks – diagrammatic to symbolic representation*)

3. Each kind of flower is planted in a part of the rectangular garden as it appears in the diagram below:

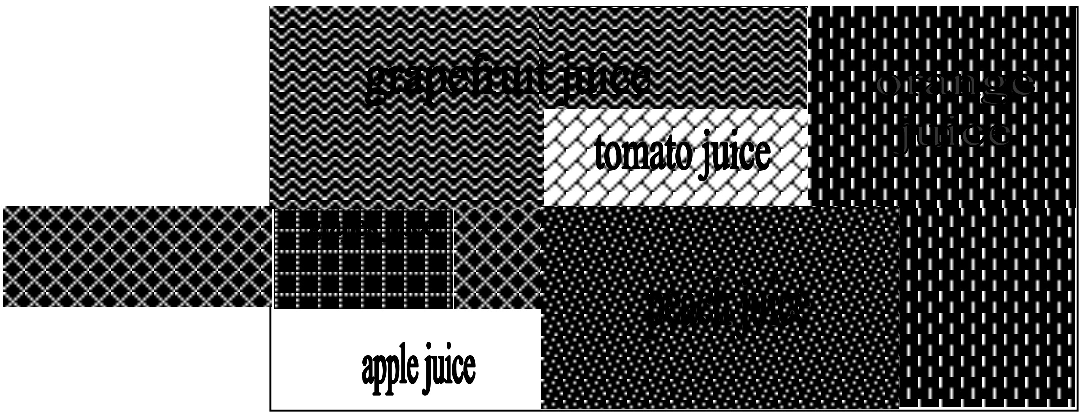


Indicate the three kinds of flowers that are planted in the 3/4 of the garden? (PD)

(*Problem-solving task with an informational diagrammatic representation*)

4. A juice factory produces the following kinds of natural juice:

- ¼ of the production is grapefruit juice.
- 5/18 of the production is orange juice.
- 3/36 of the production is tomato juice.
- 2/9 of the production is peach juice.
- 1/18 of the production is grapes juice.
- 4/36 of the production is apple juice.



Indicate the four kinds of juice that make up 1/2of the production? (PVD)

(*Problem-solving task with an auxiliary diagrammatic representation*)

5.

Clowns:	1/2 hour
Dancers:	1/3 hour
Animals:	1 hour
Acrobats:	1/6 hour
Jugglers:	2 hours

Write as a fraction, what part of the total duration of the performance corresponds to the jugglers' program (PV, Evapmib, 2007).

(*Verbal problem-solving task*)

6. In the addition of two fractions whose numerator is smaller than the denominator, the sum may be bigger than the unit. Do you agree with this view? Explain. (JV)

(*Verbal justification task*)

PANAGIOTA KALOGIROU, ATHANASIOS GAGATSIS

VISUALIZATION AS A FACTOR OF SPATIAL ABILITY AND THE RELATIONSHIP BETWEEN STUDENTS' SPATIAL ABILITY AND GEOMETRICAL FIGURE APPREHENSION[1]

ABSTRACT

This study is a part of a research program designed to study the spatial ability and the geometrical figure apprehension development of pupils aged 10-13 years. For the implementation of the research we developed a test with two parts: a spatial ability test and a geometrical figure apprehension test. Data were obtained from 183 primary school students and 401 secondary school students and analysed using the statistical package C.H.I.C. The results of the study give a first insight into the relationship between visualization as a factor of spatial ability and geometrical figure apprehension, as well as the performance differences between the different grades of students.

KEY WORDS

Visualization, spatial ability, geometrical figure, geometric work space.

1. INTRODUCTION

Spatial ability is generally accepted to be related to skills involving the retrieval, retention and transformation of visual information in a spatial context (Halpern, 2000). The amount and types of abilities that have been identified in the spatial domain vary

[1] This paper has been written in the context of the research project *"*Spatial Ability and Geometrical Thinking Development*"* of the University of Cyprus.

considerably, but it is generally accepted that visualization is one of the main spatial abilities.

However the role of spatial ability is elusive and, even in geometry, complex (Clements, 1997). During the past twenty years, several mathematics educators have investigated students' geometrical reasoning based on different theoretical frameworks. Duval (1995, 1999) analyzed geometrical thinking from a cognitive point of view. In particular, he distinguishes four types of apprehension for a "geometrical figure": perceptual, sequential, discursive and operative. In an on-going project we investigate the relationship between spatial ability and geometrical figure apprehension, as proposed by Duval (1995, 1999). Although the process of visualization has been extensively studied in the field of geometry, the relationship between visualization as a factor of spatial ability and the apprehensions of a "geometrical figure" proposed by Duval (1995, 1999), have not empirically been verified yet.

2. THEORETICAL BACKGROUND

2.1. *Spatial Ability*

Spatial ability has been the focus of much research ever since it was documented as a distinct dimension by factor analytic studies dating from the 1920s (Goldberg & Meredith, 1974). More specifically, spatial abilities relate to individuals' abilities to search the visual field, to apprehend forms, shapes and positions of objects, to construct mental representations of these forms, shapes and positions, and to manipulate such representations mentally (Carroll, 1993). Researchers have broken down the concept of spatial ability into specific factors that are believed to contribute to spatial comprehension.

As a result of a meta-analysis of studies carried out between 1974 and 1982, Linn and Petersen (1985) made a classification of spatial tests into three distinct categories and labeled these categories spatial perception, spatial visualization and mental rotation. *Spatial Perception* was defined as the ability to determine spatial relations despite distracting information and can be done efficiently using a gravitational/kinesthetic process. *Spatial Visualisation* was defined as the ability to manipulate complex spatial information when several stages are needed to produce the correct solution and can be done efficiently using an analytic process (Linn & Petersen, 1985). *Mental Rotation* was defined by Linn and Petersen (1985) as the ability to rotate, in imagination, quickly and accurately two- or three-dimensional figures.

On the other hand, Hegarty and Waller (2005) stated that the most comprehensive review of factor analytic studies of spatial ability was conducted by John Carroll in 1993. Carroll (1993) analyzed more than 140 datasets and detected five major clusters: Visualization, Spatial Relations, Closure Speed, Flexibility of Closure and Perceptual Speed. Carroll's (1993) definition of *Visualization* factor does not differ from than that of other researchers. *Spatial Relations* factor reflects the ability to perceive an object from different positions. It is usually defined by speeded tests involving rotations and/or reflections (Lohman, 1988). *Closure Speed* factor concerns individual differences in ability to access spatial representations in long-term memory when incomplete or obscured cues to those representations are presented. The subjects are not told what to look for in a given representation. *Flexibility of Closure* factor involves finding hidden patterns or figures in a bigger complex pattern when the subjects are informed about what to look for. Flexibility of Closure factor is sometimes called *Field Independence* or *Disembedding* by other researchers (Velez, Silver, & Tremaine, 2005). *Perceptual Speed* factor is characterized by the speed in finding a given configuration in a mess of distracting material. The task may include comparing pairs of items, locating a unique item in a group of identical items, or locating a visual pattern in an extended visual field.

Beyond the different definitions, spatial ability attracted a great amount of research because it is routinely implicated in accounts of creative and higher-order thinking in science and mathematics (West, 1991). There is extensive research in mathematics showing a relationship between spatial ability and mathematical performance (e.g. Battista, 1990) and documenting the central role that spatial ability has in learning within many areas of mathematics (Bennett, Seashore, & Wesman, 1974). Several studies have shown that spatial ability is positively related to success in geometry (Fennema & Tartre, 1985) and mathematics (Battista, Wheatley, & Talsma, 1982). Battista (1990) found that spatial visualization and logical reasoning were significantly related to both geometry achievement and geometry problem solving.

2.2. *Learning of Geometry*

Geometry is typically regarded as a difficult branch of mathematics to many students. Importantly, the ability to recognize plane shapes by the students seems to be influenced by a number of factors, including visual perception. According to English and Warren (1995), the way an individual visualizes a shape is one of the most important factors that affect the development of spatial ability. Yet many people experience difficulty with this process.

During the past twenty years, several mathematics educators have investigated students' geometrical reasoning based on different theoretical frames. For example, van Hiele developed a model referring to levels of geometric thinking (van Hiele, 1986), Fischbein introduced the theory of figural concepts (Fischbein, 1993), Duval reported the cognitive analysis of geometrical thinking (Duval, 1998) and Kuzniak (2006) introduced the notion of geometric work space (GWS).

The GWS (Kuzniak, 2006) is a place that is organised to ensure the work of people solving geometry problems (e.g. mathematicians or students). It establishes the reference to the complex setting in which the problem solver acts. It comprises two planes that are at the same time material and intellectual: the components plane and the cognitive plane. According to Kuzniak (2011) the cognitive plane was introduced to describe the cognitive activity of a particular user and Duval's approach was used to clarify the cognitive processes involved in problem solving in geometry. Adapting Duval (1995), three processes were defined:

1. A visualisation process with regard to space representation and the material support.

2. A construction process determined by the instruments used (ruler, compass etc.) and the geometric configuration.

3. A discursive reasoning process that conveys argumentation and proof.

Furthermore, the make-up of a GWS vary with the education system (the intended GWS), the school circumstances (the implemented GWS) and on the practitioners (students' and teachers' personal GWS).

Duval (1995, 1999) distinguishes four apprehensions for a "geometrical figure": perceptual, sequential, discursive and operative. To function as a geometrical figure, a drawing must evoke perceptual apprehension and at least one of the other three apprehensions. Particularly, *perceptual apprehension* refers to the recognition of a shape in a plane or in depth. In fact, one's perception about what the figure shows is determined by figural organization laws and pictorial cues. Perceptual apprehension indicates the ability to name figures and the ability to recognize in the perceived figure several sub-figures. *Sequential apprehension* is required whenever one must construct a figure or describe its construction. The organization of the elementary figural units does not depend on perceptual laws and cues, but on technical constraints and on mathematical properties. *Discursive apprehension* is related with the fact that mathematical properties represented in a drawing cannot be determined through perceptual apprehension. In any geometrical representation the perceptual recognition of geometrical properties must remain under the control of statements (e.g. denomination, definition, primitive commands in a menu). However, it is through *operative apprehension* that we can get an insight to a problem solution when looking at a figure.

Operative apprehension depends on the various ways of modifying a given figure: the mereologic, the optic and the place way. The mereologic way refer to the division of the whole given figure into parts of various shapes and the combination of them in another figure or sub-figures (reconfiguration), the optic way is when one made the figure larger or narrower, or slant, while the place way refer to its position or orientation variation. Each of these different modifications can be performed mentally or physically, through various operations. These operations constitute a specific figural processing which provides figures with a heuristic function. In a problem of geometry, one or more of these operations can highlight a figural modification that gives an insight to the solution of a problem.

Based on the above, the cognitive processes of Kuzniak (1996) correspond to the Duval's geometrical apprehensions. Specifically, visualization process represents operative and perceptual apprehension, construction process represents sequential apprehension and discursive reasoning process represents discursive apprehension. Therefore, the aim of the present study is to investigate the relationship between visualization as a factor of spatial ability and process of the cognitive plane of the Geometric Work Space (Kuzniak, 1996).

3. HYPOTHESES AND METHOD

In the present paper three hypotheses are examined: (a) there is a relationship between visualization as a factor of spatial ability and geometrical figure apprehension, (b) differences exist in the geometrical figure apprehension performance of primary and secondary school students and (c) there are similarities in the way primary and secondary school students behave during the solution of the spatial ability and geometrical figure apprehension tasks. It should be mentioned that the Cypriot curriculum does not give much emphasis on spatial ability.

The study was conducted among 584 students 10 – 13 years old, who were randomly selected from schools in Cyprus. Specifically, 183 students were in primary school (grades 5 and 6), while 401 students were in secondary school (grades 7 and 8).

Data were collected through a test which was constructed for the needs of the present study (see Appendix). The test has been developed after an extensive review of the relevant literature in mathematics education and cognitive psychology in relation to the spatial ability and geometrical figure apprehension. The test consists of two parts: a spatial ability test and a geometrical figure apprehensions test. A total of 10 marker tests were included in the battery for the following three components from the domain of spatial ability: Visualization (VZ), Mental Rotations (MR) and Flexibility of Closure (CF). Based on an a priori analysis of the whole test: the Visualization (VZ) component consists of the tests: Paper Form Board test (see Eliot & Smith, 1983, test 127, p.149), Paper Folding test (see Eliot & Smith, 1983, test 312, p.337), Surface Development test (see Eliot & Smith, 1983, test 315, p.341) and Perspective Taking/Spatial Orientation test (Hegarty, Kozhevnikov & Waller, 2008). The Mental Rotation (MR) component includes the: Card Rotations test (see Eliot & Smith, 1983, test 176, p.198), Cube Comparisons test (see Eliot & Smith, 1983, test 266, p.290) and Hands test (see Eliot & Smith, 1983, test 211, p.234). Finally, the tests corresponding to the component of Flexibility of Closure (CF) are the: Hidden Figures test (see Eliot & Smith, 1983, test 053, p.71), Hidden Patterns test (see Eliot & Smith, 1983, test 054, p.72) and Overlapping figures test (see Eliot & Smith, 1983, test 057, p.76).

A total of 13 tasks were included in the test for the following components of geometrical figure apprehension: Perceptual apprehension (PE), Operative apprehension (OP) and Discursive apprehension (DI). Operative apprehension depends on the various ways of modifying a given figure: the mereologic (OPme), the optic (OPop) and the place way (OPpw). Most of these tasks were used by previous studies which investigated geometrical figure apprehension (see Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou, & Panaoura, 2009 ; Elia, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou, & Michael, 2009; Michael, Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Monoyiou, 2009).

For the analysis of the collected data the similarity statistical method (Lerman, 1981) was conducted (using the computer software called C.H.I.C. Classification Hiérarchique, Implicative et Cohésitive) (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). Two similarity diagrams -one for the primary school students and one for the secondary school students- were constructed. The similarity diagram, which is analogous to the results of the more common method of cluster analysis, allows for the arrangement of the tasks into groups according to the homogeneity by which they were handled by the students. This aggregation may be indebted to the conceptual character of every group of variables.

4. RESULTS

Table 1 presents the percentages of students' correct answers to the tasks of the test by grade.

Table 1

Students' percentages of success on spatial ability and geometrical figure apprehension tasks

	VZ	MR	CF	PE	OPop	Oppw	OPme	DI
Primary	46.5%	57.6%	54.3%	58.1%	67.5%	34.3%	48.8%	31.2%
Secondary	56.9%	65.5%	70.1%	78.1%	83.0%	62.3%	60.7%	54.2%

According to the results, secondary school students have higher percentages of success in relation to primary school students due to both the overall cognitive development that takes place during the school years and the teaching and learning at school. The greatest performance differences between the older students and the younger students appear in the discursive apprehension tasks and the place way modification tasks of the operative type of geometrical figure apprehension. However the highest percentage for both groups is observed in operative apprehension tasks with optic modification (67.5% for primary school students and 83% for secondary school students) and lowest percentage in discursive apprehension tasks (31.2% for primary school students and 54.2% for secondary school students).

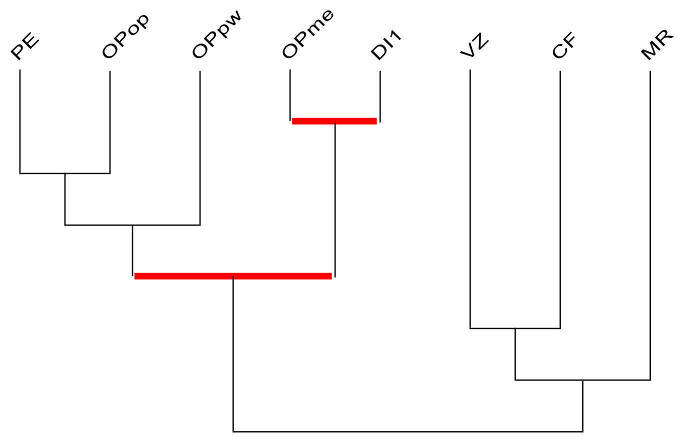


Figure 1. Similarity diagram of primary students' responses to the test.

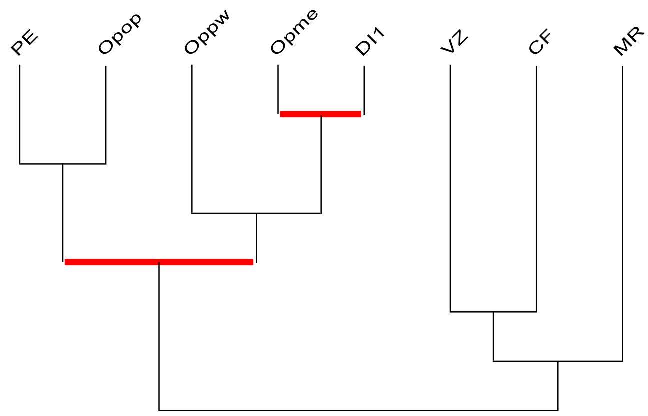


Figure 2. Similarity diagram of secondary students' responses to the test.

Figures 1 and 2 present the similarity diagrams of primary and secondary school students' responses to the tasks of the test. Particularly, in both figures one similarity group with two sub-groups can be distinctively identified. The first sub-group consists of the variables corresponding to the geometrical figure apprehension tasks (PE, OPop, OPpw, Opme and DI). In the second sub-group the variables representing the spatial ability tasks (VZ, CF and MR) are included. Between the two subgroups there is a low similarity link, indicating the weak connection between the spatial ability tasks and the geometrical figure apprehension tasks.

Comparing the two diagrams all relations between the variables remain invariant indicating a stability of the way the primary and secondary school students behave during their solution process (e.g. VZ, CF and MR). However, a difference is observed in the case of the operative place way modification task. In particular, primary school students respond in a similar way while solving the perceptual, operative optic way and operative place way modification tasks (PE, OPop, OPpw), while secondary school students solve in a similar way the operative place way, operative mereologic and discursive tasks (OPpw, OPme, DI).

According to the diagrams students behave in more similar way towards visualization and closure flexibility tasks compared to the mental rotation tasks. The kinds of activities used to measure spatial visualization ability frequently require a manipulation in which there is movement among the internal parts of a complex configuration and/or the folding and unfolding of flat patterns (Pellegrino, *et al.*, 1984). Flexibility of Closure is the skill that allows a person to find a simple object when it is embedded in a more complex figure. Tests of this factor require participants to find a model that is embedded in a distracting pattern (Kimura, 1999).

5. CONCLUSIONS

This study investigated the relationship between visualization as a factor of spatial ability and geometrical figure apprehension. Considering the similarity diagram there is a relationship between the solution of spatial ability and geometrical figure apprehension tasks since all variables are linked together. It also suggested the invariance of this structure across primary and secondary school students. Thus, emphasis should be given in all the aspects of visualization through spatial ability and geometrical figure apprehension in both educational levels concerning teaching and learning.

Furthermore, differences existed in the geometrical figure understanding performance of primary and secondary school students. Particularly, secondary school students' performance was higher in all the dimensions of the geometrical figure understanding relative to the primary school students' performance. The performance improvement can be attributed to the general cognitive development and learning take place during secondary school. In fact, secondary school curriculum in Cyprus involves many concepts already known and mastered during primary school. This repetition of concepts leads to higher performance even though primary and secondary school instructional practices differ.

Concerning the way students behaved during spatial and geometrical tasks solution process it was observed that the behaviour of primary and secondary school students was similar during the solution process of the tasks. This finding revealed that spatial ability and geometrical figure understanding stability existed to a considerable extent in these students' behaviour. However, the similarity diagrams revealed a small but important difference in the personal geometric work space of the students in primary and secondary education. Secondary school students appeared to deal with geometrical figures in the operative apprehension tasks including place way modifications of geometrical figures similarly with the discursive apprehension tasks. Primary school students were found to approach these operative apprehension tasks in a similar way as the perceptual apprehension tasks. Furthermore, a considerably higher performance of the secondary school students was identified in discursive apprehension and in operative apprehension including place way modifications of geometrical figures compared to the primary school students. These findings suggest that primary school students approached the geometrical figures in the tasks requiring place way modifications as drawings, relying mainly on visual perception, and not as representations of mathematical objects. This does not apply for secondary school students who did not rely so much on the figures' appearance but on their geometrical properties.

As Fischbein and Nachlieli (1998) point out, geometrical figures are simultaneously concepts and images (spatial representations). They are not mere iconic representations, but semiotic ones. A semiotic representation illustrates the organization of the relations between representational units. Therefore, in the learning of geometry it is not enough to see and understand what is represented at first glance.

This difference in the personal work space of the students might be due to the change of geometrical paradigm (Houdement & Kuzniak, 2003) from the primary school to the secondary school curriculum and teaching. The reference geometric work space in primary education adapts Geometry I (GI, Natural Geometry) which has as a source of validation the real and sensible world and it is closely related to perception and instrumentation. The reference geometric work space in secondary education promotes Geometry II (GII, Natural Axiomatic Geometry), which is based on classic Euclidean Geometry and the objects that are used, such as figures, are valid only through their definition even if this definition is often based on some features of real and existing objects (Kuzniak, 2012). Thus, this small difference in the personal work space of the primary and secondary school students as it was revealed in the similarity diagrams and in their performance discrepancy in tasks of discursive reasoning and operative apprehension of geometrical figures is an indication that secondary school students have started working within GII. This does not mean that they have abandoned GI. As the similarity analysis showed, they are probably in a transitional stage between GI and GII. This gives further support to Kuzniak's (2012) idea that both geometric paradigms need to be included in geometry learning in secondary education to develop a coherent (GI|GII) Work Space where both paradigms have the same importance.

In light of the above, it seems that there is a need for further investigation into the subject with the inclusion of a comparison of the strategies primary and secondary school students use in order to solve spatial ability test according to geometrical figure apprehension. Besides, longitudinal performance investigation in spatial ability in relation to geometrical figure apprehension for specific groups of students (e.g. low achievers) as they move from primary to secondary education will be carried out.

REFERENCES

Battista, M. T. (1990). Spatial visualization and gender differences in high school geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 47-60.

Battista, M. T., Wheatley, G. H., & Talsma, G. (1982). The Importance of Spatial Visualization and Cognitive Development for Geometry Learning in Pre-service Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(5), 332-340.

Bennett, G. K., Seashore, H. G., & Wesman, A. G. (1974). *Manual for the differential aptitude test (5th ed.)*. New York: The Psychological Corporation.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000*). CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2.* Rennes: Association pour la Recherche en Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factoranalytic studies.* New York: Cambridge University Press.

Carter, C. S., LaRussa, M. A., & Bodner, G. M. (1987). A study of two measures of spatial ability as predictors of success in different levels of general chemistry. *Journal of research in science teaching*, 24(7), 645-657.

Clements, D.H. (1997). Constructing constructivism. *Teaching Children Mathematics, 4*(4), 198-200.

Deliyianni E., Elia I., Gagatsis A., Monoyiou A., & Panaoura A. (2009). A theoretical model of students geometrical figure understanding. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 696-705). Lyon, France.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education.* Berlin, Springer, pp. 142-157.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century.* Dordrecht, Kluwer Academic, pp. 37-51.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. *Basic Issues for Learning*. Retrieved from ERIC ED 466 379.

Elia, I., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Monoyiou, A., & Michael, S. (2009). A structural model of primary school students' operative apprehension of geometrical figures. In M. Tzekaki, M.Kaldrimidou, & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol.3* (pp.1-8). Thessaloniki, Greece.

Elliot, J. & Smith, I.M. (1983). *An International Dictionary of Spatial Tests*. Windsor, United Kingdom: The NFER-Nelson Publishing Company, Ltd.

English, L., & Warren, E. (1995). Facility with plane shapes: a multifaceted skill. *Educational Studies in Mathematics*, *28* (4), 365-383.

Fennema, E., & Tartre, L. A. (1985) The use of spatial visualisation in mathematics by girls and boys, *Journal of Research in Mathematics Education, 16*, pp. 187- 206.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, *20*(10), 1193- 1211.

Goldberg, J., & Meredith, W. (1974). A longitudinal study of spatial ability. *Behavior Genetics*, *S*, 127- 135.

Halpern, D.F. (2000). *Sex differences and cognitive abilities.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Hegarty, M., & Waller, D. (2005). Individual differences in spatial abilities. In P. Shah & A. Miyake (Eds.). *The Cambridge Handbook of Visuospatial Thinking*. Cambridge University Press (pp. 121–169).

Hegarty, M., Kozhevnikov, M., & Waller, D. (2008). *Perspective Taking/Spatial Orientation Test.* University of California, Santa Barbara.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different geometrical paradigms. *Proceedings of CERME 3 Bellaria,* Italy.

Kimura, D. (1999). *Sex and cognition.* Cambridge, MA: MIT Press.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. *Canadian Journal of Science and Mathematics, 6*(2) 167-187.

Kuzniak, A. (2011). The mathematical work space and its geneses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 9-24.

Kuzniak, A. (2012). Understanding the nature of the Geometric Work through its development and its transformations. *Proceedings of 12th International Congress on Mathematical Education,* Seoul, Korea.

Kuzniak, A., & Rauscher, J.C. (2011). How do Teachers' Approaches on Geometrical Work relate to Geometry Students Learning Difficulties? *Educational studies in Mathematics.77/1.* 129-147.

Lerman, I.C. (1981). *Classification et Analyse Ordinale des Données.* Paris: Dunod.

Linn, M. C., & Petersen, A. C. (1985). Emergence and characterisation of gender differences in spatial abilities: A meta-analysis. *Child Development, 56,* 1479-1498**.**

Lohman, D. F. (1988). Spatial abilities as traits, processes, and knowledge. In R. J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 4, pp. 181-248). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Michael, P., Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Monoyiou, A. (2009). Operative apprehension of geometrical figures of primary and secondary school students. *Proceedings of the Mediterranean Conference 2009* (pp. 22-26.) Plovdiv, Bulgaria.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Orlando, FL: Academic Press.

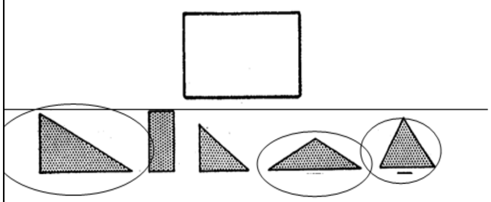
Velez, M. C., Silver, D., & Tremaine, M. (2005). Understanding visualization through spatial ability differences. *Proceedings of IEEE Visualization* (pp. 511-518). Minneapolis, MN, USA.

West, T. G. (1991). I*n the mind's eye.* Buffalo, New York: Prometheus Books. Didactique des Mathématiques.

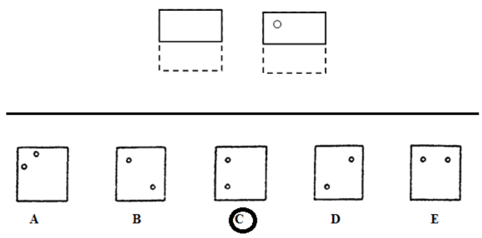
APPENDIX

SPATIAL ABILITY TESTS

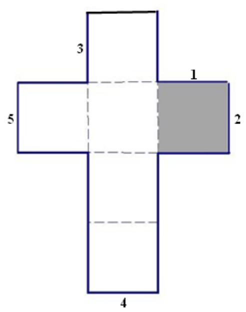
Decide which of the five shaded pieces can be put together to form the rectangle (Paper Form Board test).

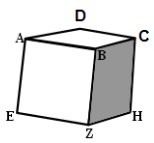


Try to find which of the five figures below the line shows where the holes will be when the paper is completely unfolded (Paper Folding test).

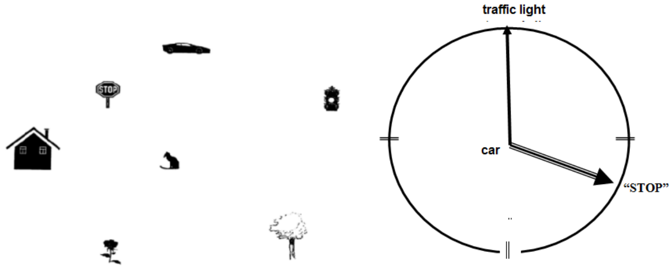


You are to imagine the folding and are to figure out which of the lettered edges on the object are the same as the numbered edges on the piece of paper at the left. Write the letters of the answers in the numbered spaces at the far right (Surface Development test).



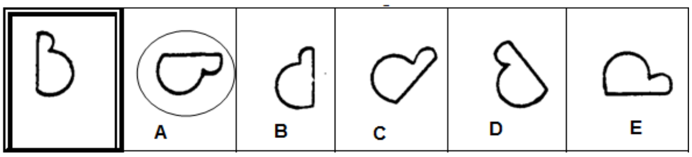


1	BC
2	CH
3	AD
4	DC
5	CH

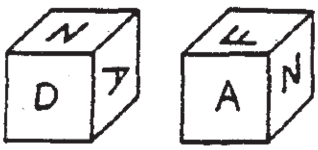


Imagine you are standing at the car and facing the traffic lights. Point to the STOP sight (Perspective Taking test).

You are to decide which of the five cards on the right is same as the card in the box is (Card Rotation test).

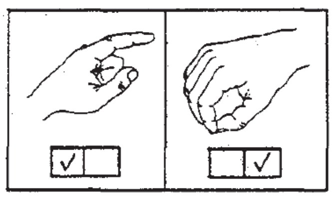


Compare the two cubes in each pair below (Cube Comparison test).

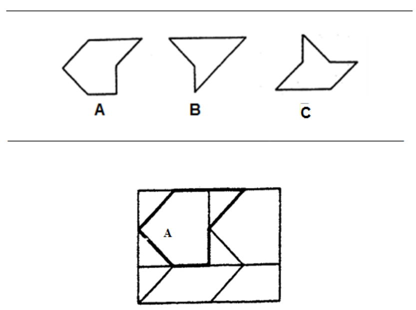


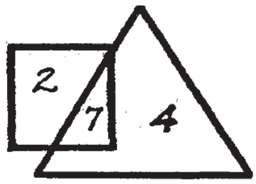
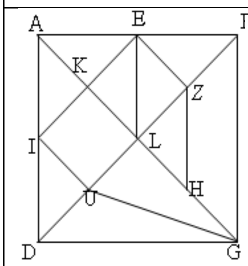
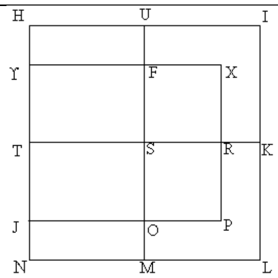
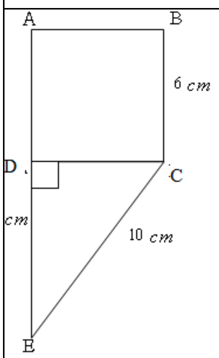
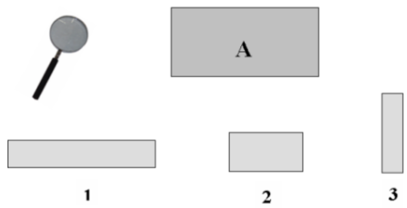
Same Different

If the picture represents a right hand put a check mark in the right square; if it represents a left hand put a check mark in the left square (Hands test).

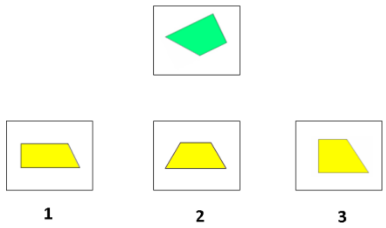


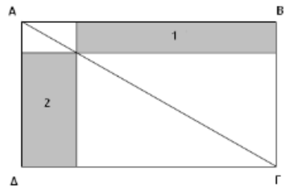
Write the letter of the figure which you find in the pattern (Hidden Figures test).



This test contains many rows of patterns. In each pattern you are to look for the model shown below (Hidden Patterns test): 	The diagram below consists of overlapping figures. Answer the following questions about the diagram (Overlapping Figures test).
 √ √	In following figure, which number is in the square but not in the triangle? 
GEOMETRICAL FIGURE APPREHENSION TASKS	
 **PE1** Name the figures: KEZL: EZHL: ZEL:	 Name the squares **PE2**
 Find the length of the side CD **PE3**	Shape A is the rectangle as it looks through a magnifier. Circle the picture that shows the rectangle, as it is in Vasilis writing book. **OPop1** 

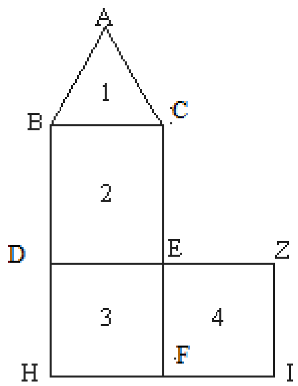
<table>
<tr>
<td>
Maria must match the cards with the same shape. Circle the yellow card that has exactly the same shape with Maria’s card. OPpw2



</td>
<td>


OPme1

Underline the correct sentence:
a) Rectangle 1 has bigger area than 2
b) Rectangle 1 has equal area with rectangle 2
c) Rectangle 1 has smaller area than rectangle 2
</td>
</tr>
<tr>
<td>
DI1



</td>
<td>
In the figure:
1 is equilateral triangle
2 is a rectangle
3 and 4 are squares
Show that the length of AC and FI are equal.
</td>
</tr>
</table>

AUTHORS:

1. Panagiota Kalogirou, University of Cyprus, Cyprus, pkalog01@ucy.ac.cy
2. Athanasios Gagatsis, University of Cyprus, Cyprus, gagatsis@ucy.ac.cy

PARASKEVI MICHAEL – CHRYSANTHOU, ATHANASIOS GAGATSIS

AMBIGUITY IN THE WAY OF LOOKING AT GEOMETRICAL FIGURES

AMBIGÜEDAD EN LA MANERA DE VER LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

ABSTRACT

This paper discusses the different ways the students look at geometrical figures in solving geometrical tasks and the different types of reasoning that occur in relation to the different types of figural apprehension, in the sense of Duval, that are mobilized. The personal Geometric Work Space (GWS) of the students at lower and upper secondary school in Cyprus is defined in respect to their way of looking at figures and the type of reasoning they produce.

KEY WORDS

operative apprehension, perceptual apprehension, graphic reasoning, discursive-graphic reasoning

RÉSUMÉ

Ce document examine les différentes façons les étudiants se penchent sur des figures géométriques pour résoudre des tâches géométriques et les différents types de raisonnement qui se produisent en relation de les différents types d'appréhension figural, dans le sens de Duval, qui sont mobilisés. L'espace de travail géométrique idoine des élèves de l'école secondaire inférieur et supérieur à Chypre est défini par rapport à leur façon de voir les figures et le type de raisonnement qu'ils produisent.

MOTS CLÉS

appréhension opératoire, appréhension perceptive, *inférence figurale, raisonnement discursivo-graphique*

RESUMEN

Este documento analiza las diferentes formas en que los estudiantes ven en las figuras geométricas en la resolución de tareas geométricas y los diferentes tipos de razonamiento que se producen en relación con los diferentes tipos de aprehensión figural, en el sentido de Duval, que se movilizó. El espacio de trabajo geométrico personal de los estudiantes de la escuela secundaria inferior y superior en Chipre se define con respecto a su manera de ver las cifras y el tipo de razonamiento que producen.

PALABRAS CLAVE

aprehensión operativa, aprehensión perceptiva, inferencia figural, razonamiento discursivo-gráfico

RESUMO

Este artigo analisa as diferentes formas em que os alunos vêem nas figuras geométricas na resolução de tarefas geométricas e diferentes tipos de raciocínio que ocorrem em relação aos diferentes tipos de apreensão figural, no sentido de Duval, que mobilizou. A geometria do espaço de trabalho pesso al estudantes da escola secundária inferior e superior em Chipre é definida com relação à maneira como você vê o número eo tipo de raciocínio que ocorrem.

PALAVRAS-CHAVE

apreensão operatória, apreensão perceptual inferência figural raciocínio discursivo gráfico

1. INTRODUCTION

Despite the fact that nowadays much software exist for constructing geometrical figures, figures are the blind spot for the teaching of geometry and for solving geometrical problems, because visualization is not truly succeeded by the students and the use of figures is often not very helpful for them to reach a solution (Duval, 1995). The issue of the students' acquisition of mobility in the vision of a figure – looking between areas, lines and points – led to working around the design and experimentation of situations where mobility is a key for the solution of the problem (Mathé, 2009). But how can students look at a change in the figures for getting access to geometrical concepts and problem solving?

In this paper the ambiguity in the character of the geometrical figures due to different ways of looking at them is discussed, by analyzing the students' reactions in geometrical tasks. Actually, the way the students look at geometrical figures is defined through a didactical analysis of their work in the tasks, which specifies the type of apprehension that was mobilized for the solution of the tasks. Furthermore, the results of this didactic analysis are used for setting the students' personal GWS (see Introduction, section 4), based on the type of reasoning the students produced for solving the tasks. Thus, in this paper we discuss how the work of Duval (2005) regarding the use of figures in geometric thinking permits the description of the organization of the components of the students' personal GWS. As we deal with the representation of geometrical figures, the emphasis is given on the real and local space of the GWS which is related to the cognitive procedure of visualization (see Introduction, Figure 1).

In addition, as the participants of the study are students from different educational levels, the results are discussed in relation to possible changes in their personal GWS after their transition from the lower to the upper secondary school. The description of the students' reactions according to the GWS can be used as an epistemological tool for teachers which can help them identify their students' needs and properly adjust their teaching methods (Kuzniak & Rauscher, 2011).

2. THEORETICAL BACKGROUND

Geometrical figures are the representations possessing a central role in the geometrical activity. A figure merges three semiotic representations: magnitude, shape configurations and words naming the given properties. According to Duval (2005), the crucial issue in the learning of geometry is the separation between magnitude and visualization, because magnitude causes visual illusions and wrong perceptual estimation for the relations between figural units. Thus, the difficulties for most students are created due to a cognitive gap between two opposite ways of looking at figures and recognizing what they stand for: the natural perceptive way as for any visual representation of material objects or spatial organization (images, diagrams, plans, etc.) and the mathematical way for reasoning, defining, solving problem or proving (Duval, 2011). Perceptual recognition is sometimes misleading for the recognition of geometrical properties and, therefore, for the recognition of the geometrical objects represented. On the other hand, visualization is independent from magnitude and concerns only shape discrimination and configuration (Duval, 1995). Visualization is the simultaneous and immediate apprehension of a configuration as a whole. The heuristic use of figures is based on seeing and the interactions between seeing and reasoning, which are represented in a given figure.

More specifically, Duval (1995) distinguishes four apprehensions for a geometrical figure: perceptual, operative, discursive and sequential. In this contribution we focus on the first three types. Particularly, the perceptive way of visual recognition focuses exclusively on the most global shape or closed outline, according to the principles stated by the Gestalt theory, thus the recognition of other possible reconfigurations is excluded. The perceptive way is activated and reinforced when figures are used as objects that can be empirically observed and it can either help or inhibit the heuristic recognition (Duval, 2011). The operative apprehension is a form of visual processing that concerns geometrical figures and depends on the various ways of modifying a given figure. One way is the mereologic that refers to the division of the whole given figure into parts and the combination of them in another figure or sub-figures (reconfiguration). Within the operative apprehension the given figure becomes a starting point to explore other configurations that stem from the applications of these visual operations. The discursive apprehension deals with the valid use of properties for deducing. A figure is seen in relation to denomination or a hypothesis that make certain properties explicit. Perceptual apprehension cannot determine the mathematical properties represented in a drawing (Duval, 1995), so some mathematical properties must be given through speech (denomination and hypothesis). The absence of denomination and hypothesis in a drawing makes it an ambiguous representation and, thus, the properties that are seen are not the same for everyone (Duval, 1995).

As the figural register can by its own visually demonstrate a property, setting of significant moments for the development of mental images, the idea of graphical expansion (Richard, 2004) is not contradictory to that of the operative apprehension; it is complementary. But, unlike the complete statements of discourse, the figural register does not allow the production of comments or arguments.

The graphical expansion can be, under certain conditions, likened to a discursive-graphic reasoning (Richard, 2004) and it can be expressed within the determined registers of semiotic representations. The discursive-graphic reasoning is a type of reasoning which articulates discursive and graphics proposals and actually is in line with the discursive reasoning as defined by Duval (1995), which refers to the coordination between registers. When a pupil moves from one utterance to a drawing, or from a drawing to a text, the coordination between the discursive and figural registers involves a cognitive activity of conversion which refers to the same object, even if the reference process to the ideal may be different. The figural inference is therefore the step of the discursive-graphic reasoning that changes the epistemic value, the semantics or the theoretical status of the discursive outcome (Richard, 2004).

3. METHODOLOGY

The methodology of this research is based on a part of a preliminary analysis of a questionnaire administered in order to examine the students geometrical figure apprehension in the sense of Duval's (1995) cognitive analysis. The tasks were administered to 616 students, aged 14 to 16, of lower (312 in Grade 9) and upper (304 in Grade 10) secondary schools in Cyprus. In this paper three tasks (see Appendix) are described and discussed. The main common point for the selection of these three tasks is the fact that they can be easily and very fast solved by the involvement of the operative apprehension. In fact, the students can have an immediate access to the answer if they succeed in using the mereologic modification (the reconfiguration of the given figure) and thus base their answer on a graphic reasoning (Richard, 2004). However, these three tasks are significantly differentiated between them as well, because of the different didactic variables they involve. Thus, despite the fact that the solutions of these tasks were expected to be related to the operative apprehension of geometrical figures, alternative solutions could be also provided by the students, associated to different types of cognitive procedures and figural apprehension.

Consequently, besides the correctness of the students' final answer, it was very important to take into account the different cognitive procedures that were related to their solutions. An a priori analysis was done, in order to trace the type of apprehension that was actually involved in the solution of the tasks. Therefore the proposed analysis is qualified in terms of the didactic variables involved, the figural apprehension that was mobilized and the type of reasoning that occurred in each task.

3.1. *A priori analysis of the tasks*

The first task (OP1) is a classic task, taken from a test constructed in France. The students had to compare the area of two figures. Actually, they were expected to perform a reconfiguration of Figure

B (see Appendix, Figure 8) in order to form a figure similar to Figure A. This type of task is a classic task that takes into account a very common and very strong misconception (even for adults), which is actually that "if two figures are not identical, they do not have the same area". Based on the a priori analysis and the students' explanations, their correct answers (choice b) were categorized according to the type of apprehension that was mobilized. Three categories of answers were set:

1. *OP1me:* This category includes right answers that occurred from a graphic reasoning with the involvement of the operative apprehension, in which the reconfiguration was explicit. The term "*explicit*" denotes a certainty that students have made a reconfiguration either by drawing extra lines in the figures or by the verbal description of the modifications made mentally (Figure 8).

2. *OP1pe:* In this category the students' right answers occurring from vision (counting the squares) were grouped. These answers occur mainly by the perceptual apprehension, whose mobilization was expected to be facilitated by the presence of the grid. The use of the grid is a didactical variable intuitively introducing the notion of magnitude (measures) and enhancing the confusion between area and perimeter.

3. *OP1da:* In this case the students' right answers that occurred from a different visual approach were grouped. There were answers based on the outline of the figures (e.g *"figure 1 is a rectangle, but figure 2 is not*", *"the lines forming figure 1 are straight, but in figure 2 they are not*") or by using measures and calculations.

The second task (OP2) was constructed by one of the authors and was used in previous researches. The students had to find the length of one side of the rectangle, based on the fact that its area is equal to the area of the trapezium. Students were expected to find the answer only by graphic reasoning and make a reconfiguration of the trapezium (a rectangle is formed by moving one of the two triangles and joining them properly). In this task the didactic variable of the notion of magnitude was introduced directly, with the presence of numbers on the given figure, in order to examine also whether the students would be influenced from the usual didactic contract (Brousseau, 1990) and proceed to an algorithmic solution using a formula. The students' answers were discriminated into two categories:

1. *OP2me:* this group includes the right answers that occurred from the operative apprehension and the reconfiguration of the figure was explicit, either by a verbal description or by drawing for showing the modifications on the given figure.

2. *OP2pe:* in this case the right answers that occurred from the perceptual apprehension are grouped. The students focused on the recognition of the global shape and/or its sub-figures and used a formula for finding the area of the trapezium. Then, they used the formula of the area of the rectangle for finding the missing side of the figure. Such answers occurred from the influence of the didactic variables (magnitude, didactic contract) and included the combination of the figural and the discursive register (discursive-graphic type of reasoning).

The third task (OP3), which is taken from Euclid and has been also used and discussed from Duval, included a rectangle divided to different sub-figures (triangles and rectangles) and the students had two compare the area of the two shadowed sub-figures. This task does not include the notion of magnitude, thus for its solution the reconfiguration of the given figure is necessary. This task is, however, clearly related to the deductive argumentation, or in other words, to the discursive-graphic reasoning, as the students have to use also their theoretical knowledge. The students' correct answers were categorized as below:

1. *OP3me:* in this category right answers that occurred from a mereologic argument were grouped. In fact, in the figure ABCD the diagonal AC divides the rectangle into two equal right-angled triangles (ADC and ABC). Each of these triangles includes two other right-angled triangles which occur from the division of two rectangles included in the figure ABCD respectively. Thus from the triangles ADC and ABC equal parts are subtracted. Consequently rectangle 1 and rectangle 2 have equal area. For such a solution procedure the operative apprehension must be mobilized for discriminating the different reconfigurations and realizing the relations between these subfigures. The students' were expected to go through these reconfigurations in order to solve the task, but the discursive register was also involved, so the discursive-graphic reasoning occurs.

2. *OP3pe:* in this case the students' right answers were justified with compensatory relations between the two shadowed rectangles (e.g. "*rectangle 1 is long and narrow, but rectangle 2 is short and wider*", "*if rectangle 1 is divided into two equal parts and these two parts are joined, then we get the rectangle 2*"), due to the mobilization of the perceptual apprehension.

3. *OP3da***:** this group includes right answers resulting from mere vision and thus a different approach including measuring the sides of the two shadowed rectangles for calculating their area.

4. RESULTS

4.1. *Descriptive analysis*

The students' right answers in the tasks in relation to the approach they used is presented in Table I. We shall note that the percentages of answers in each category are not very big, because of the limited proportion of students that provided an explanation for their answer. This is an important matter to take into account; however it exceeds the purpose of this paper. In the first task the prevailing type of reasoning was the graphic, as the mobilization of the operative apprehension gives the most correct answers. The number of students that succeed though the mobilization of the perceptual apprehension is not very big, thus the influence of the grid does not appear to be so intense. In the second task the greater percentage of correct answers occurred from the mobilization of the perceptual apprehension and the use of formulas. In this case the influence of magnitude and the didactic contract is more evident, which brought to the combination of the figural and the discursive register. Thus the discursive-graphic reasoning was found to be more effective than reconfiguration for succeeding a right answer. In the third task the number of right answers occurring from the predominance of mere vision is greater than the success through visualization. The involvement of perception or the students' tension for measurements gave more right answers than the reconfiguration of the given figure. in combination to the theoretical knowledge. Thus, in this task mere vision prevailed the students' discursive-graphic reasoning.

TABLE I

Percentages of students' answers in relation to the type of apprehension involved

	TASK 1		TASK 2		TASK 3	
	Grade 9 %	Grade 10 %	Grade 9 %	Grade 10 %	Grade 9 %	Grade 10 %
Right Answer	62.82	71.38	32.05	35.86	53.21	66.78
Operative apprehension (reconfiguration)	22.12	23.68	6.09	8.55	6.73	9.21
Perception	12.18	18.09	22.44	25.99	9.62	13.49
Different Approach	14.42	14.47	–	–	12.82	10.53

4.2. *Hierarchical clustering of variables*

To learn more about the students' personal GWS our data were analyzed using the hierarchical clustering of variables with the computer software C.H.I.C. (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). This method of analysis determines the hierarchical similarity connections of the variables. From the similarity diagram of the 9th graders' responses (Figure 1) three distinct similarity clusters can be identified, indicating three different groups of students, according to the type of figural apprehension they mainly mobilize for the solution of the tasks. The cluster 1 comprises of answers that occurred through the application of the mereologic modification. The cluster 2 includes mainly answers related to the perceptual apprehension, whereas the third one is formed by answers linked to the use of a different approach, mainly including to measurements and calculations. The clusters are formed in a similar way also in the similarity diagram for the 10th graders (Figure 2). However, in this grade the students do not display the same coherence regarding the mobilization of the operative and the perceptual apprehension, as there are similarity relations between the two types of solutions in the clusters 1 and 2.

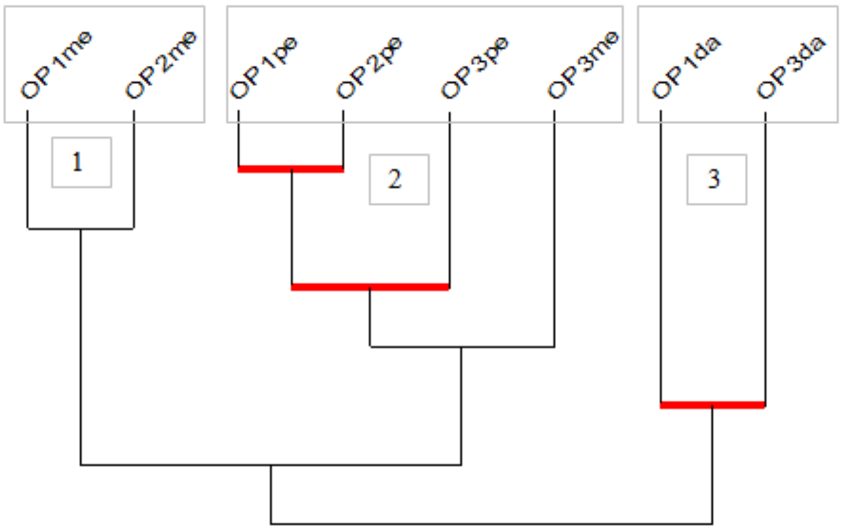


Figure 1. Similarity diagram of grade 9 students' approaches in the tasks

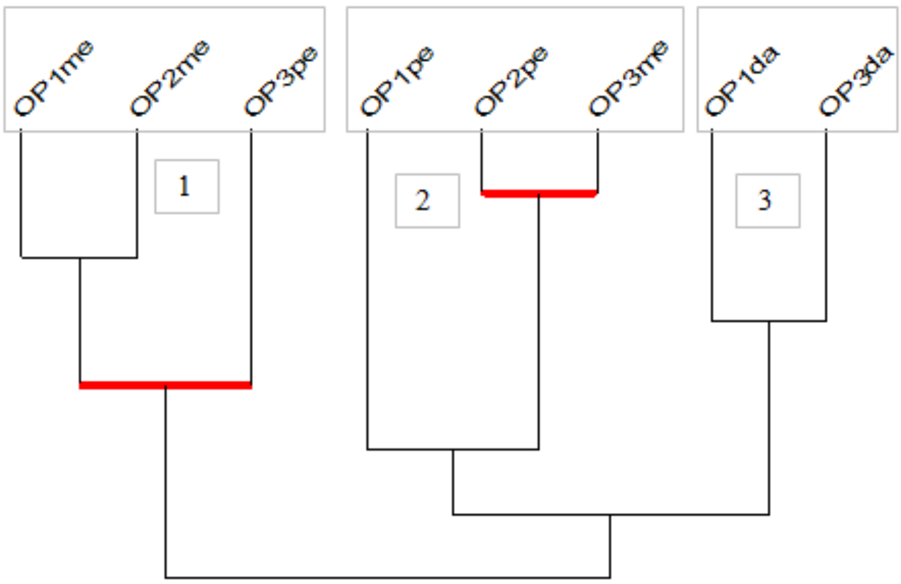


Figure 2. Similarity diagram of grade 10 students' approaches in the tasks

4.3. *An interpretation in terms of personal GWS*

The results of the similarity diagrams can be further interpreted in terms of the GWS, based on the type of reasoning included in the students' answer. Table II presents the type of reasoning that corresponds to each kind of answers.

TABLE II

The re-categorization of the students' answers in relation to the type of reasoning involved

Variable	**Type or reasoning**	**New variable**
Task 1		
OP1me	Graphic Reasoning	GR
OP1pe	Vision – Perception of Objects	VP
OP1da	Vision – Calculations	VC
Task 2		
OP2me	Graphic Reasoning	GR
OP2pe	Discursive - Graphic Reasoning	DGR
Task 3		
OP3me	Discursive – Graphic Reasoning	DGR
OP3pe	Vision – Perception of Objects	VP
OP3da	Vision – Measurements	VM

Based on this re-categorization according to the type of reasoning, the hierarchical clustering of variables was repeated (Figures 3 and 4), for expressing the previous results in relation to the students' personal GWS. What is extracted from the new diagrams is that, even when examining the results through the type of reasoning, the three groups of students are still distinguished. In the first group fall students that reason only in a graphic way, the second group includes the students that base their answers on the perception of objects and do also discursive-graphic reasoning, whereas the last group consists of students that look at figures through mere vision and thus use measurements and calculations.

What is also observed is that the graphic reasoning is compartmentalized from the discursive-graphic reasoning, but the visual approaches including measurements and calculations are also compartmentalized from the rest types or reasoning. Therefore the students do not succeed to coordinate these types of reasoning for the solution of geometrical tasks and each type seems to function independently. In addition, the visual approach related to the perception of objects is mainly linked to the discursive-graphic reasoning, especially in grade 9. This relation indicates that the students that approach the figure perceptually need to involve also the discursive register for supporting their answer. On the other hand, for the students that succeed visualization through the heuristic exploration of the figure, the system of reference does not seem to be necessary, as their solution is based on the reconfiguration of the given figure. Therefore their answer could be considered as a "proof without words" (Richard, 2003).

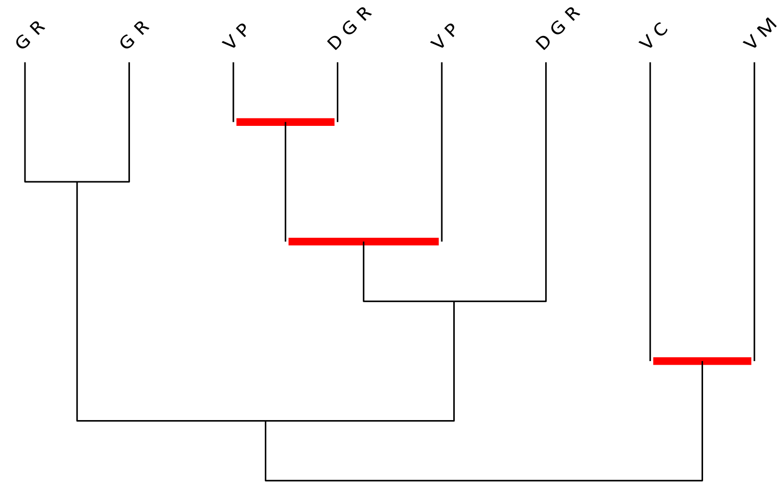


Figure 3. Similarity diagram of grade 9 students' approaches in the tasks

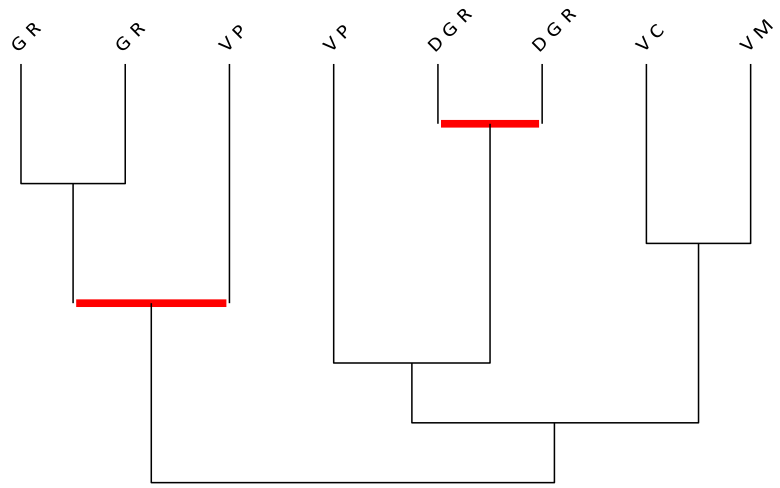


Figure 4. Similarity diagram of grade 10 students' approaches in the tasks

Based on these results, an effort to describe the students' personal GWS is done in Figure 5. In fact, our results indicate that within the epistemological plane, in the component of real and local space three main approaches appear. For the solution of geometrical tasks the students can either mobilize the operative apprehension, the perceptual apprehension or perform measurements/calculations. The mobilization of the operative apprehension is related to the graphic reasoning and thus during this cognitive process the video-figural genesis (see Introduction, Figure 4) proceeds according to the process of visualization and representation, respectively turned to the real and local space (Coutat & Richard, 2011). But this visualization process must be distinguished from mere vision or perception of objects, as it nourishes the intuition of the properties and it sometimes helps to establish cognitively the validity of these properties (see Introduction, section 2.2). On the other hand, the mobilization of the perceptual apprehension appears to lead the students to a discursive-graphic reasoning, thus during their solution procedure the discursive-graphic genesis is done, which bring the students to the production of a relevant proof. The involvement of vision, which leads to the use of measurements and calculations, is not related to a particular type of genesis. Consequently, different types of genesis are found to happen for the different groups of students within their personal GWS, according to the type of figural apprehension that is mobilized for their solution and correspondingly to the type of reasoning that is produced.

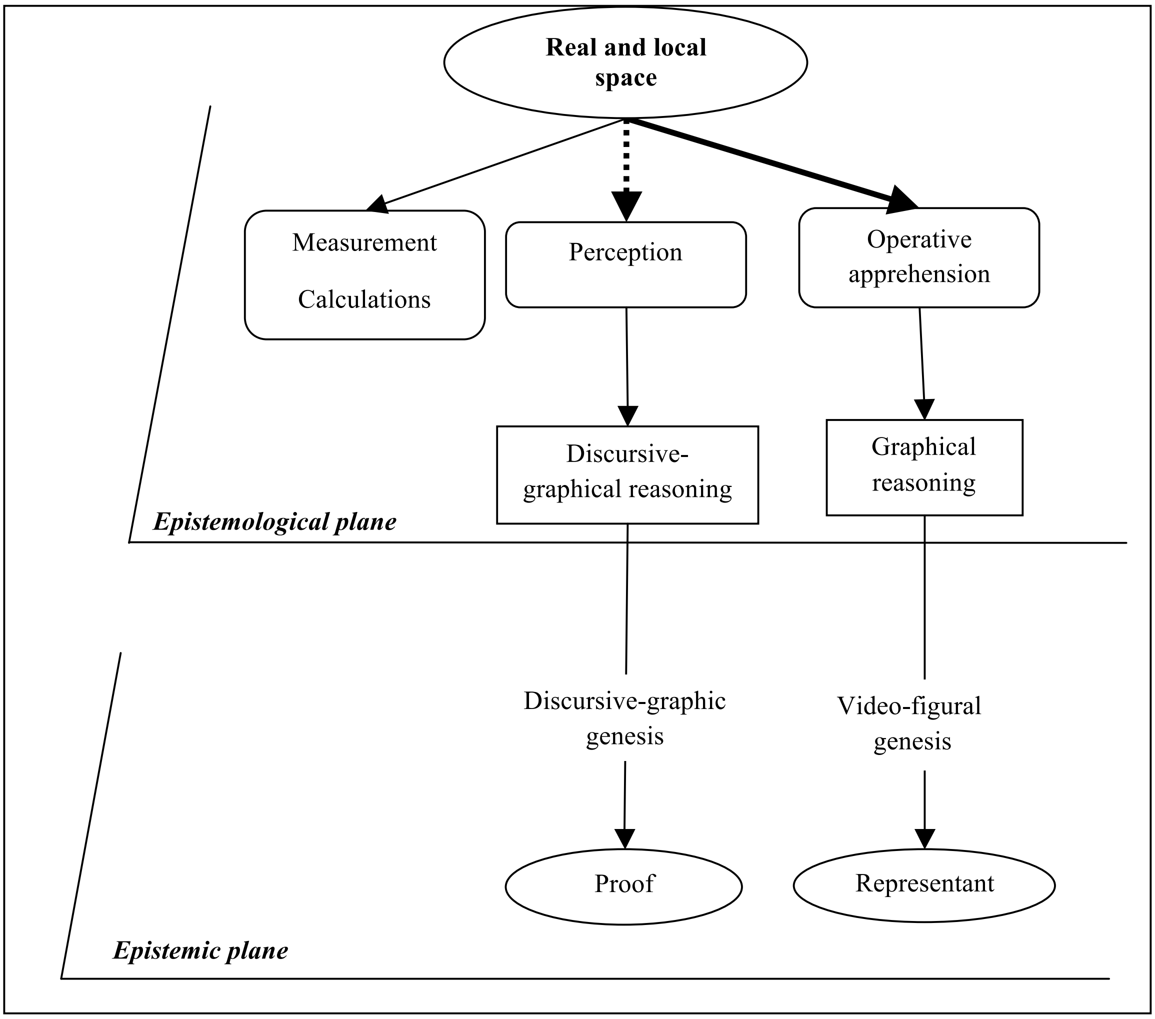


Figure 5. The students' personal GWS

5. CONCLUSIONS AND DISCUSSION

In this contribution an effort was done to show, based on empirical data, that what a geometrical figure shows to a students' eye is different, according to the way the student succeeds to look at the figure. The ambiguous character of geometrical figures influences the way the students approach them and use them for solving geometrical tasks. Based on the way the students are influenced by the ambiguity of geometrical figures, some conclusions are drawn about their personal GWS, focusing on the component of the real and local space.

From the analysis of the students' answers, it was obvious that the same given figure in a task can be seen in different ways, due to the mobilization of a different type of figural apprehension. The involvement of these different figural apprehensions was, in some cases, enhanced from the different didactical variables included in the tasks. Therefore, different kinds of reasoning were identified and different types of genesis were found to happen within their personal GWS. Actually, when the operative apprehension is mobilized the given figure is the source for the students' solution, because some relevant modifications bring the students to graphic reasoning, without involving any theoretical knowledge. Alternatively, the given figure can be the basis for the students' answer, as the students recognize perceptually some relevant properties in the figure and then use a proper theorem or formula, coming to the discursive-graphic reasoning. This case is in line with Duval (1995), who supports that in any geometrical situation the perceptual recognition of properties must remain under the control of statements, as what the perceived figure can represent is determined by speech acts and depends on the deductive dependence between statements (Duval, 1995). On the other hand, the mere vision of the given figure can lead the students in using other approaches as well, such as measuring and calculating.

Thereafter, the ambiguity in the way geometrical figures can be seen is also revealed from the diversity in the students' way of reasoning, as for the same given figure the graphic reasoning, the discursive-graphic reasoning or a more visual ways of thinking can occur. But do teachers understand that the ambiguous status of figures can cause difficulties to their students and how can they help the students realize that there are different ways to see the same figure? So we should reflect about a new approach for introducing geometry in primary and secondary levels, whose principle would be that the awareness of the different ways of looking at figures is prior to the knowledge of the classical basic figures (Duval, 2011). To this end teaching geometry should be focused in making students able to see flexibly in geometry, as it is possible to initiate the development of skills which enhance the mobility of seeing (Mathé, 2009). Thus, tasks about discriminating various figural units must be separated from the ones about magnitudes.

As the graphic reasoning is a step towards the discursive-graphic reasoning, the students' graphic reasoning must be developed by enhancing the operative apprehension of figures, which is complementary to such type of reasoning (Richard, 2004). In the absence of reference, momentarily, the processes resulting from the video-figural genesis play a heuristic role of first order (Coutat & Richard, 2011) and the students' ability in the heuristic exploration of figures helps them identify the relevant theorem for solving a task. Therefore, the flexible manipulation of figures within the figural register can bring the students more easily in combining effectively the discursive register also and use their reference knowledge, based on the realization of the relations between the different parts of the figures. The success of the exploration of the figure in the context of a given problem, will depend of the relationship between the operative apprehension of the figure and a discursive set of inferences which mobilizes a network of definitions and theorems (Duval, 1995).

Regarding the comparison between the two groups of students, we observe no striking difference between the two educational levels. No actual improvement is observed between the lower and the upper secondary school students regarding the graphic or the discursive-graphic reasoning. Therefore, the teaching of geometry in Cyprus does not seem to help the students develop the different types reasoning and genesis within the vertical planes of their personal GWS after their transition to a next educational level. Consequently, the enhancement of the operative apprehension must be continued until the upper secondary school and at this level specific tasks about the discursive must be also proposed, in order the students to use in a mathematical way properties and theorems.

REFERENCES

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000*). CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2.* Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Brousseau, G. (1990). Le contract didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique de Mathématiques, 9*, 308–336. Netherlands: Kluwer.

Coutat, S. & Richard,R.P. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des proprieties géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitive, 16,* 97 – 126.

Duval, R. (2011). Why figures cannot help students to see and understand in geometry? Analysis of the role and the cognitive functioning of visualization. *Abstract booklet of Symposium Mathematics Education Research at the University of Cyprus and Tel Aviv University* (pp. 22-23). Nicosia: Cyprus.

Duval R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer.

Kuzniak, A. & Rauscher, J.C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics, 77* (1), 129–147.

Mathé, A.C. (2009). Quelle articulation entre conceptualisation et confrontation aux objets sensibles en geometrie a l'ecole primaire? In A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyianni, & L.Vivier (Eds), *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (pp. 119-137). Lefkosia: University of Cyprus.

Richard, P.R. (2003). Proof Without Words: Equal Areas in a Partition of a Parallelogram. *Mathematics Magazine, 76* (5), 348.

Richard, P.R (2004), L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics*, 57, 229–263.

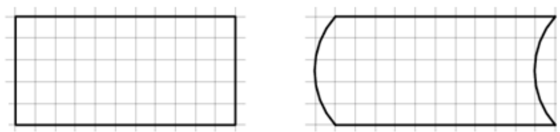
AUTHORS:

1. Paraskevi Michael - Chrysanthou, University of Cyprus, Cyprus, pmicha06@ucy.ac.cy

2. Athanasios Gagatsis, University of Cyprus, Cyprus, gagatsis@ucy.ac.cy

APPENDIX

Task 1

Underline the right sentence and explain your answer. a) Fig. A has bigger area than Fig. B b) Fig. A has equal area with Fig. B c) Fig. A has smaller area than Fig. B	 Fig. A Fig. B

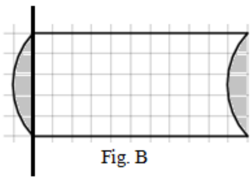
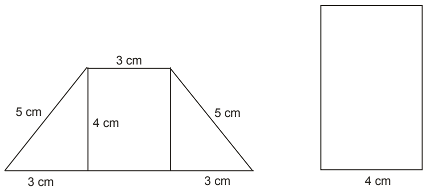


Figure 8. The explicit reconfiguration of figure B in task 1

Task 2

The trapezium and the rectangle have equal areas. Find the length of the missing side of the rectangle and explain your answer.



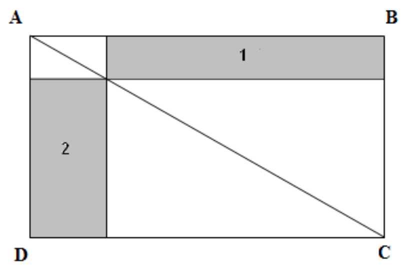
Task 3

The figure ABCD is a rectangle. Look at the shadowed rectangles 1 and 2 and choose the correct answer. Then justify your choice.

a. Rectangle 1 has bigger area than rectangle 2.

b. Rectangle 1 has equal area with rectangle 2.

c. Rectangle 1 has smaller area than rectangle 2.



ANNITA MONOYIOU AND ATHANASIOS GAGATSIS

THE RELATION OF THE COORDINATED AND ALGEBRAIC APPROACH WITH MAJOR ASPECTS OF THE CONCEPTUAL UNDERSTANDING OF FUNCTION

THE RELATION OF THE COORDINATED AND ALGEBRAIC APPROACH WITH MAJOR ASPECTS OF THE CONCEPTUAL UNDERSTANDING OF FUNCTION

ABSTRACT

In this study the concept of function is viewed from two different perspectives, the algebraic and the coordinated perspective. In the algebraic approach, a function is perceived of as linking x and y values: For each value of x, the function has a corresponding y value. In the coordinated approach, the students can "coordinate" two systems of representation, the algebraic and the graphical one. The present study investigates the relationship between the students' approach to function and their performance to some major aspects of the conceptual understanding of functions; in particular, giving a correct definition and examples of the concept, recognition of the concept given in various representations, making conversions from one mode of representation to another and solving complex problems. The participants were 279 Cypriot and 206 Italian pre-service teachers who completed two tests on functions that were constructed for the needs of the present study. The collected data were analyzed using different types of quantitative statistical methods. The results showed that students who employed the coordinated approach demonstrated considerably higher performance at the various aspects of the understanding of function relatively to the students who used the algebraic approach. Furthermore, within the coordinated approach group of pre-service teachers, problem solving was found to relate to all the other aspects of the conceptual understanding of function, whereas for the algebraic group, the phenomenon of compartmentalization was detected in their responses to the tasks which involved different mathematical reasoning and use of this concept. These findings are discussed and interpreted in light of the theoretical framework of mathematical work space (MWS).

KEY WORDS:

Function, algebraic approach, coordinated approach, semiotic representations, compartmentalization, mathematical work space

1. INTRODUCTION AND THEORETICAL FRAMEWORK

The concept of function is central in mathematics and its applications. The understanding of functions does not appear to be easy. Students of secondary or even tertiary education, in any country, have difficulties in conceptualizing the notion of function. The understanding of the concept of function has been a main concern of mathematics educators and a major focus of attention for the mathematics education research community (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1992). A factor that influences the learning of functions is the diversity of representations related to this concept (Hitt, 1998). An important educational objective in mathematics is for pupils to identify and use efficiently various forms of representation of the same mathematical concept and move flexibly from one system of representation of the concept to another.

The use of multiple representations has been strongly connected with the complex process of learning in mathematics, and more particularly, with the seeking of students' better understanding of important mathematical concepts (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Greeno & Hall, 1997), such as function. Given that a representation cannot describe fully a mathematical construct and that each representation has different advantages, using various representations for the same mathematical situation is at the core of mathematical understanding (Duval, 2002). Ainsworth, Bibby and Wood (1997) suggested that the use of multiple representations can help students develop different ideas and processes, constrain meanings and promote deeper understanding. By combining representations students are no longer limited by the strengths and weaknesses of one particular representation.

Some researchers interpret students' errors as either a product of a deficient handling of representations or a lack of coordination between representations (Greeno & Hall, 1997; Smith, DiSessa, & Roschelle, 1993). The standard representational forms of some mathematical concepts, such as the concept of function, are not enough for students to construct the whole meaning and grasp the whole range of their applications. Mathematics instructors, at the secondary level, traditionally have focused their teaching on the use of the algebraic representation of functions (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Sfard (1992) showed that students were unable to bridge the algebraic and graphical representations of functions, while Markovits, Eylon and Bruckheimer (1986) observed that the translation from graphical to algebraic form was more difficult than the reverse. Sierpinska (1992) maintained that students have difficulties in making the connection between different representations of functions, in interpreting graphs and manipulating symbols related to functions. Furthermore, Aspinwall, Shaw and Presmeg (1997) suggested that in some cases the visual representations create cognitive difficulties that limit students' ability to translate between graphical and algebraic representations.

The theoretical perspective used in this study is mainly based on the studies of Even (1998) and Mousoulides and Gagatsis (2004). Even (1998) focused on the intertwining between the flexibility in moving from one representation to another and other aspects of knowledge and understanding. This study indicated that subjects had difficulties when they needed to flexibly link different representations of functions. An important finding was that many students deal with functions pointwise (they can plot and read points) but cannot think of a function in a global way. The data also suggested that subjects who can easily and freely use a global analysis of changes in the graphical representation have a better and more powerful understanding of the relationships between graphical and symbolic representations. Mousoulides and Gagatsis (2004) investigated students' performance in mathematical activities that involved principally the conversion between systems of representation of the same function, and concentrated on students' approaches as regards the use of representations of functions and their connection with students' problem solving processes. The most important finding of this study was that two distinct groups were formatted with consistency, that is, the algebraic and the geometric approach group. The majority of students' work with functions was restricted to the domain of algebraic approach. Students who had a coherent understanding of the concept of functions (geometric approach) could easily understand the relationships between symbolic and graphical representations in problems.

In this study the concept of function is viewed from two different perspectives, the algebraic and the coordinated perspective. The algebraic perspective is similar to the pointwise approach described by Even (1998) and the one described by Mousoulides and Gagatsis (2004). In this perspective, a function is perceived of as linking x and y values: For each value of x, the function has a corresponding y value (Moschkovich, Schoenfeld, & Arcavi, 1993). The coordinated perspective combines the algebraic and the graphical approach. In this perspective, the function is thought from a local and a global point of view at the same time. The students' can "coordinate" (flexibly manipulate) two systems of representation, the algebraic and the graphical one. The aim of this research study was to examine the relationship between the students' approach to function and major aspects of the conceptual understanding of functions; in particular, giving a correct definition and examples of the concept, recognition of the concept given in various representations, making conversions from one mode of representation to another and in solving complex problems (Gagatsis & Monoyiou, 2011; Monoyiou, 2010). These findings may provide specific information about the personal MWS (Kuzniak, 2012) of the two groups of students and their differences in the learning of functions. A personal MWS is described as the space in which an individual (young student, student or teacher), deals with a problem that is posed to him/her (Kuzniak, 2012).

2. METHODOLOGY

The participants of this research study were 279 Cypriot and 206 Italian pre-service teachers. The subjects were admitted to the University of Cyprus and to the Universities of Bologna and Palermo on the basis of competitive examination scores. The above investigation is conducted in two countries in order to explore if there are differences between the Cypriot and Italian pre-service teachers concerning the use of the coordinated approach. The participation of pre-service teachers from two countries will give further validation to the results of the study. The fact that it is a comparative study is quite important, since these two countries have cultural similarities. It is noteworthy the fact that the impact of cultural tradition is highly relevant to mathematics learning. However, despite cultural similarities, differences are observed in the educational systems of the two countries. Two tests, consisted of nine and fourteen task, were administered to the teachers by the researchers in two 90 minutes sessions. The tests that were constructed in order to examine the hypotheses of this study included:

Five tasks demanding a definition or examples of the concept of function (D1, D2, D3, D4, Ex).Examples of these tasks are:

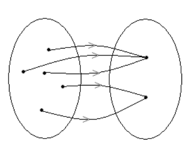
Task D2: Does there exist a function all of whose values are equal to each other? Explain your answer.

Task D3: Can f be a function, if $f(-2)=3$ and $f(-2)=0$? Yes or No

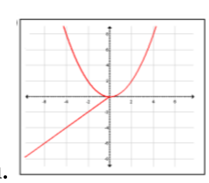
Task Ex: Give two simple examples from the applications of functions in everyday life.

Four tasks involving recognition of functions given in different modes of representation. There were given five Venn diagrams (Red1-Red5), six graphs (Reg1-Reg6), six symbolic expressions (Res1-Res6) and four verbal expressions (Rev1-Rev4). Examples of these tasks are:

Task Red1: Examine if the correspondence presented in the form of a Venn diagram is a function. Give an explanation.



Task Reg1: Examine if the following graph represents a function. Explain.



Task Res1: Examine whether the following symbolic expression may define a function and justify your answer.

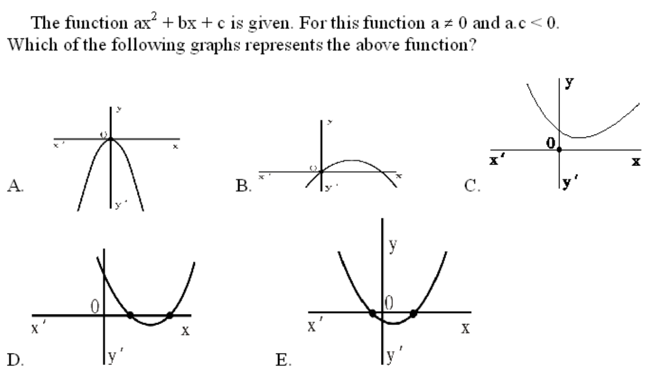
$$5x+3=0$$

Task Rev1: Explain whether we define a function when:

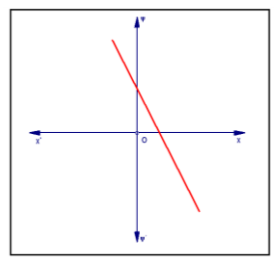
a) In the set of the girls of a class, we correspond a girl with different classmates of hers (George, Homer, Jason, Thanasis, etc.) with whom she will probably dance at a party.

Four tasks involving six conversions, three of them from an algebraic expression to a graphical representation and the other three from a graphical representation to an algebraic expression (Coag1, Coag2, Coag3, Coga1, Coga2, Coga3). Examples of these tasks are:

Task Coag1:



Task Coga1: Choose the function that corresponds to the graph.



a) $y+5x=0$ b) $y=-5x-2$

c) $y+3=2x$ d) $y+3x=1$

Four vertical transformation tasks concerning teachers' algebraic or coordinated approach. In each task, there were two linear or quadratic functions. Both functions were in algebraic form and one of them was also in graphical representation. There was always a relation between the two functions. Teachers were asked to interpret graphically the second function. (Apr1, Apr2, Apr3, Apr4). An example is:

Apr1: In the following diagram $y=2x$ is given. Draw the function $y=2x+1$.

A solution was coded as "algebraic" if students did not use the information provided by the graph of the first function and they proceeded constructing the graph of the second function by finding pairs of values for x and y. On the contrary, a solution was coded as coordinated if students observed and used the relation between the two functions in constructing the graph of the second function. In this case students used and coordinated two systems of representation the algebraic and the graphical one. They noticed the relationship between the two equations given and they interpreted this relationship graphically by manipulating the function as an entity.

Six complex problems with functions. Examples of these tasks are:

Task Pr3: The function $f(x)=ax^2+bx+c$ is given. Numbers a, b and c are real numbers and the $f(x)$ is equal to 4 when $x=2$ and $f(x)$ is equal to -6 when $x=7$. Find how many real solutions the equation ax^2+bx+c has and explain your answer.

Task Pr4: A parachutist jumps from an airplane which is in 3000 m height (above the earth). The parachutist falls with stable speed 30 m/s. (a) Express the parachutist's height as function of time, (b) Draw the graph of the above function, (c) Find the parachutist's height (from earth) 1 minute after his/her fall and (d) In what height the parachutist will be 20 minutes after his/her fall? (Give an explanation).

Right and wrong or no answers to the tasks were scored as 1 and 0, respectively. The results concerning pre-service teachers' answers to the tasks were codified with D (Definition), Ex (Example), Re (Recognition), Co (Conversions), Trans (Transformations) and Pr (Problems), followed by the number indicating the exercise number.

3. RESULTS

To address the aim of the present study, we used three types of quantitative statistical analysis: the hierarchical cluster analysis, multivariate analysis of variance (MANOVA) and the similarity analysis (Lerman, 1981). According to Kuzniak (2008) there is a need to increase our capacity to analyse large amounts of data through automation so as to gain further insight into students' personal work space in mathematics and to make this kind of research more accessible to researchers with different theoretical backgrounds. In order to examine whether the Cypriot and Italian teachers who used a coordinated approach to solve the simple functions tasks performed better in the other dimensions of the understanding of function (concept image, recognition, conversions, problem solving) the Ward's method of hierarchical cluster analysis was used. The teachers were clustered into three distinct groups.

Concerning the Cypriot teachers, in the first group 49 teachers were clustered who used systematically the coordinated approach ($\overline{X}$ coordinated=0.83, SDcoordinated=0.19; $\overline{X}$ algebraic=0.08, SDalgebraic=0.12). In the second group 108 teachers were clustered who used extensively the algebraic approach ($\overline{X}$ coordinated=0.06, SDcoordinated=0.11; $\overline{X}$ algebraic=0.82, SDalgebraic=0.18). In the third group 95 teachers were clustered who used other approaches or used equally the algebraic and coordinated approach ($\overline{X}$ coordinated=0.17, SDcoordinated=0.16; $\overline{X}$ algebraic=0.18, SDalgebraic=0.20).

Concerning the Italian teachers, in the first group 66 teachers were clustered who used systematically the coordinated approach ($\overline{X}$ coordinated=0.84, SDcoordinated=0.19; $\overline{X}$ algebraic=0.05, SDalgebraic=0.09). In the second group 43 teachers were clustered who used extensively the algebraic approach ($\overline{X}$ coordinated=0.03, SDcoordinated=0.09; $\overline{X}$ algebraic=0.72, SDalgebraic=0.18). In the third group 97 teachers were clustered who used other approaches or used equally the algebraic and coordinated approach ($\overline{X}$ coordinated=0.09, SDcoordinated=0.17; $\overline{X}$ algebraic=0.13, SDalgebraic=0.17).

In order to compare the performance between the three groups (coordinated, algebraic and various approaches groups) concerning their concept image, recognition, conversions and problem solving ability, two multivariate analyses of variance (MANOVA), one for the Cypriot and one for the Italian pre-service teachers, were performed. Furthermore, the Scheffe test was employed.

Overall, the effects of teachers' group were significant for both the Cypriot (Pillai's F(8, 494) = 983.66, p<0.001) and the Italian (Pillai's F(8, 402) = 85.30, p<0.001) pre-service teachers. Particularly, concerning the Cypriot teachers there were significant differences between the three groups concerning the concept image (F (4, 246) = 18.41, p<0.001), the recognition of functions given in various representations (F (4, 246) = 14.67, p<0.001), the conversions (F (4, 246) = 25.82, p<0.001) and problem solving (F (4, 246) = 54.55, p<0.001). Table 1 presents the means and standard deviations of concept image, recognition, conversions and problem solving of the three groups for Cypriot teachers.

Specifically concerning the concept definition, significant differences were found between the first and second group ($\overline{X}$ 1- $\overline{X}$ 2=.25, p<0.001) and the first and third group ($\overline{X}$ 1- $\overline{X}$ 3=.28, p<0.001). Similarly concerning the recognition of functions significant differences were found between the first and second group ($\overline{X}$ 1- $\overline{X}$ 2=.12, p<0.01) and the first and third group ($\overline{X}$ 1- $\overline{X}$ 3=.19, p<0.001). As far as the conversions is concerned significant differences were found between the first and second group ($\bar{X}$ 1- $\bar{X}$ 2=.13, p<0.05), the first and third group ($\bar{X}$ 1- $\bar{X}$ 3=.33, p<0.001) and the second and third group ($\bar{X}$ 1- $\bar{X}$ 2=.20, p<0.001). Lastly concerning problem solving significant differences were found between the first and second group ($\bar{X}$ 1- $\bar{X}$ 2=.38, p<0.001), the first and third group ($\bar{X}$ 1- $\bar{X}$ 3=.55, p<0.001) and the second and third group ($\bar{X}$ 1- $\bar{X}$ 2=.17, p<0.001).

TABLE 1

The mean and standard deviation of the concept image, the recognition, the conversions and problem solving for the three groups of Cypriot pre-service teachers

Groups	Concept image		Recognition of functions		Conversions of functions		Problem solving	
	$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD	$\bar{X}$	SD
1:Coordinated	0.81	0.25	0.86	0.18	0.88	0.20	0.74	0.35
2:Algebraic	0.56	0.28	0.74	0.19	0.75	0.28	0.36	0.30
3:Other approaches	0.53	0.27	0.67	0.20	0.55	0.30	0.19	0.27

Concerning the Italian teachers there were also significant differences between the three groups concerning the concept image (F (4, 200) = 26.29, p<0.001), the recognition of functions given in various representations (F (4, 200) = 20.74, p<0.001), the conversions (F (4, 200) = 17.82, p<0.001) and problem solving (F (4, 200) = 59.54, p<0.001). Table 2 presents the means and standard deviations of concept image, recognition, conversions and problem solving of the three groups for Italian teachers.

In all cases significant differences were found only between the coordinated and the algebraic group and the coordinated and the various approaches group. The differences between the algebraic and the various approaches group were not significant. Specifically concerning the concept image, significant differences were found between the first and second group (1- 2=.27, p<0.001) and the first and third group (1- 3=.35, p<0.001). Similarly concerning the recognition of functions significant differences were found between the first and second group (1- 2=.25, p<0.001) and the first and third group (1- 3=.32, p<0.001). As far as the conversions is concerned significant differences were found between the first and second group (1- 2=.20, p<0.05) and the first and third group (1- 3=.35, p<0.001). Lastly concerning problem solving significant differences were found between the first and second group (1- 2=.44, p<0.001) and the first and third group (1- 3=.43, p<0.001). In general, both the Cypriot and the Italian coordinated approach groups performed better than the other groups in all the dimensions of the understanding of function.

TABLE 2

The mean and standard deviation of the concept image, the recognition, the conversions and problem solving for the three groups of Italian pre-service teachers

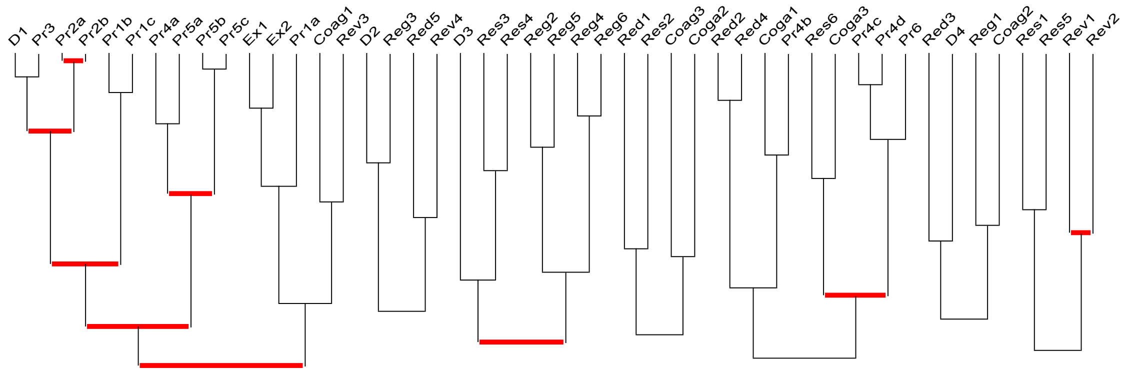
Groups	Concept image		Recognition of functions		Conversions of functions		Problem solving	
	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD
Coordinated	0.57	0.36	0.58	0.37	0.60	0.44	0.52	0.35
Algebraic	0.30	0.30	0.33	0.28	0.40	0.34	0.08	0.18
Other approaches	0.22	0.26	0.26	0.27	0.25	0.31	0.09	0.24

In order to examine whether there were differences in the way Cypriot and Italian teachers who used each approach behaved during the solution of the definition, examples, recognition, conversion tasks and problem solving the similarity analysis was performed using the computer software C.H.I.C. (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). Three similarity diagrams for Cypriot and three for Italian pre-service teachers were produced, one for each group.

Figure 1 and figure 2 show the similarity diagrams of the Cypriot and Italian teachers' responses participating in the coordinated, algebraic and various approaches group respectively. In the case of the Cypriot pre-service teachers' coordinated group, problem solving is related in the first and fifth cluster with all the other dimensions of the understanding of function, the definition and examples of the concept, the conversions from an algebraic to a graphical representation of the concept and vice versa and the recognition of the concept given in various representations. In the case of the Cypriot teachers' algebraic group, the problem solving tasks are "isolated" from the other dimensions of the understanding of function. Specifically, "Pr1a", "Pr1b", "Pr1c", "Pr2a", "Pr2b" and "Pr3" that are the problem solving tasks of the first test are strongly related between them and with the problem solving tasks "Pr5a", "Pr5b", "Pr5c" and "Pr6" that are involved in the second test. The problem solving tasks "Pr4a", "Pr4b", "Pr4c' and "Pr4d" are also connected in a separate cluster. In the similarity diagram of the Cypriot teachers' various approaches group, the problem solving is even more isolated forming a separate cluster. Only the problem solving task “Pr1a” is related with the examples of the concept “Ex1” and “Ex2”.

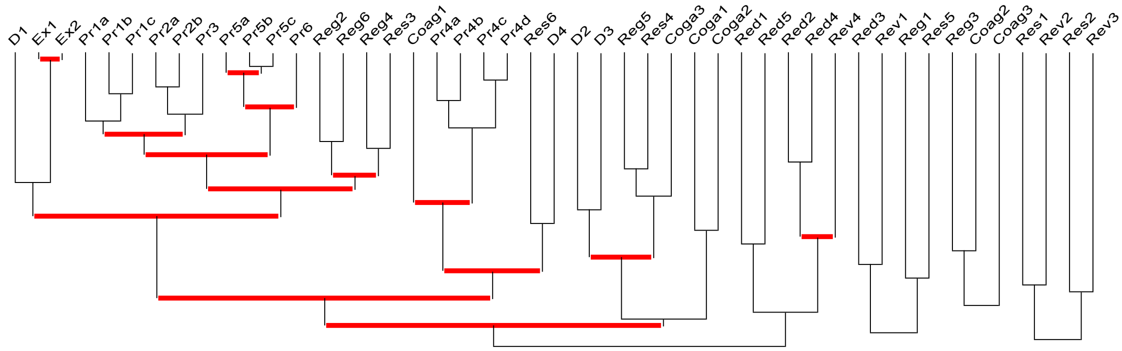
Similar results are obtained from the three similarity diagrams of Italian pre-service teachers. In the case of the Italian pre-service teachers’ coordinated group, problem solving is related in the first and fourth cluster with all the other dimensions of the understanding of function the definition and examples of the concept, the conversions from an algebraic to a graphical representation of the concept and vice versa and the recognition of the concept given in various representations. In the case of the Italian teachers’ algebraic group, the problem solving tasks are “isolated” from the other dimensions of the understanding of function. Specifically, “Pr1a”, “Pr1b”, “Pr1c”, “Pr2a”, “Pr2b”, “Pr3”, “Pr4a”, ‘Pr4b”, “Pr4c”, “Pr4d”, “Pr5b” and “Pr5c” are strongly connected in a separate cluster. The only exceptions are “Pr5a” which is connected with a conversion task and “Pr6” which is connected with a recognition task. In the similarity diagram of the Italian teachers’ various approaches group, the problem solving is even more isolated forming a separate cluster. Only the problem task “Pr6” is related with the definition of the concept “D3” but this connection is rather weak.

In general from the similarity diagrams of both the Cypriot and the Italian pre-service teachers it was noteworthy the fact that in the case of the algebraic and the various approaches groups, similarity groups by variables corresponding to the same cognitive type of tasks, i.e., function definition, examples, recognition of functions, conversions of functions and function problem solving, were formed revealing that pre-service teachers responded in tasks involving the same kind of mathematical thinking in a consistent and coherent manner. However, lack of connections between different types of tasks, i.e., providing a correct definition of function, recognizing the concept in different contexts, conversions from an algebraic to a graphical representation of function and function problem solving, indicated pupils’ incoherent behaviour in dealing with tasks of different cognitive features referring to the same concept.



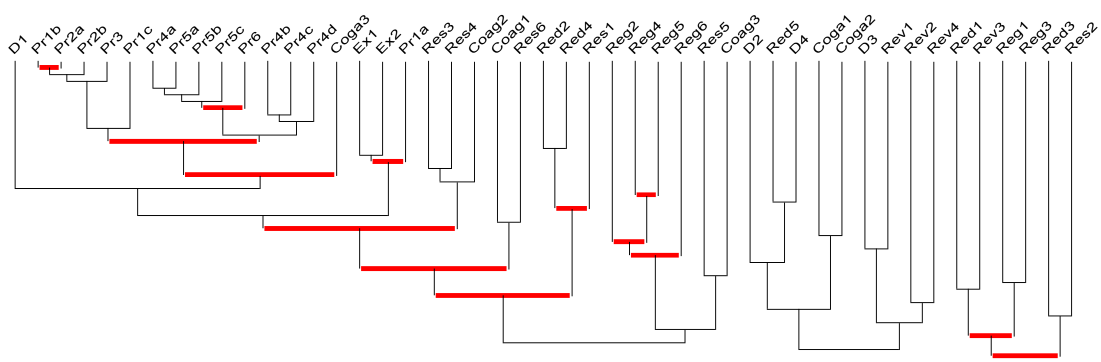
Similarity : C:\Documents and Settings\demetris\Desktop\phd\chic-cluster\datacy-coo.csv

1: Coordinated group



Similarity : C:\Documents and Settings\demetris\Desktop\phd\chic-cluster\datacy-alg.csv

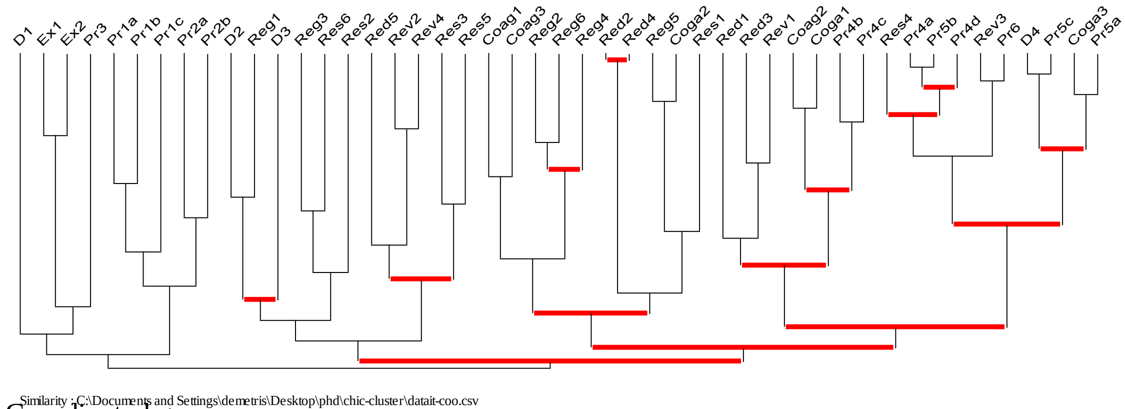
2: Algebraic group



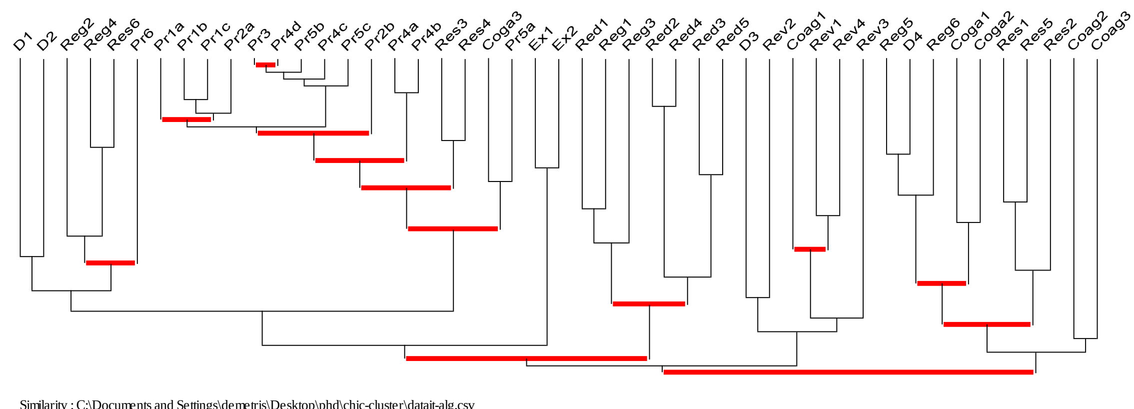
3: Various approaches group

Similarity : C:\Documents and Settings\demetris\Desktop\phd\chic-cluster\datacy-mix.csv

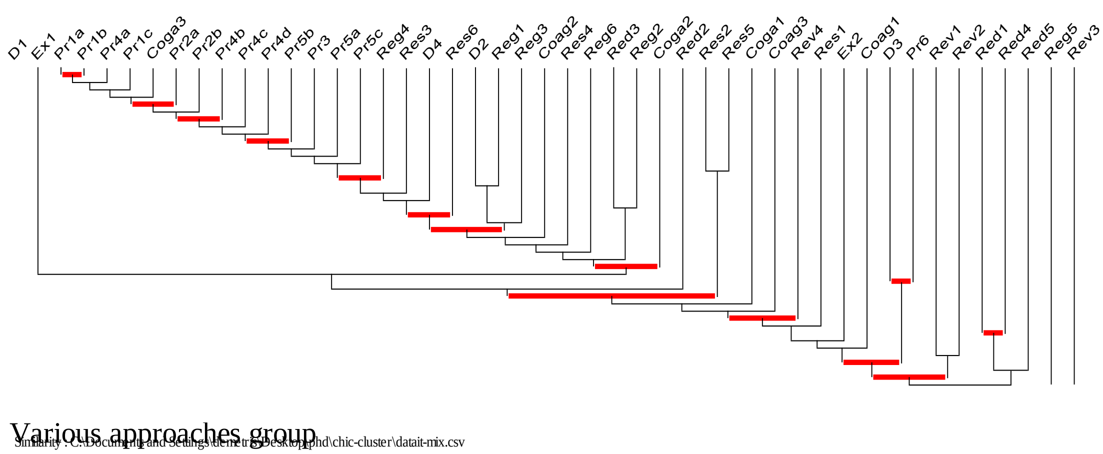
Figure 1. Similarity diagrams of the Cypriot pre-service teachers' responses within the coordinated, algebraic and various approaches groups respectively



Coordinated group



Algebraic group



Various approaches group

Figure 2. Similarity diagrams of the Italian pre-service teachers' responses within the coordinated, algebraic and various approaches groups respectively

Thus, the phenomenon of compartmentalization holds for these two groups of pre-service teachers (algebraic and various approaches group) in the case of tasks involving different mathematical reasoning and use of this concept. In the case of the coordinated approach group a de-compartmentalized way of thinking was observed since problem solving was found to be related to all the other dimensions of the conceptual understanding of function.

4. DISCUSSION

The aim of the present study was to explore the relationship between students' approaches in the learning of functions and some major aspects of the understanding of this concept. We will try to interpret our findings in light of the theoretical framework of MWS (Kuzniak, 2012) and provide specific information about the students' personal MWS related to the learning of functions.

Our discussion will focus on the distinction between the coordinated and the algebraic approach. The criterion to classify the students' approaches into the coordinated and the algebraic approach was the solution process of the vertical transformation tasks. While solving these tasks students may use all three types of genesis which are included in the MWS (semiotic, instrumental, discursive genesis). The geneses indicate how the students are engaged in the articulation between the epistemological level and the cognitive level related to a specific type of tasks. Within the semiotic genesis in these tasks the students carry out treatments and conversions of the algebraic and the graphical representations of functions; within the instrumental genesis they construct the graph of a function; and within the discursive genesis they use the properties of functions and their interrelations.

In the vertical transformation tasks the students who used the coordinated approach appeared to use fluently the required semiotic processes in connection to discursive reasoning about the functions at hand. They could elicit the properties of the given function from its symbolic and graphical representation and their coordination and use these properties to interpret the algebraic representation of the requested function. On the basis of these processes they could construct the graph of the requested function. Thus, the successful instrumental genesis was the result of a flexible and efficient interplay between the semiotic genesis and the discursive genesis associated with the task.

On the contrary, the students that used the algebraic approach or other approaches in the particular tasks appeared to employ mainly semiotic processes without any link to the theoretical frame of reference, i.e., the properties of the functions at hand and their relationship. It could be that these students faced difficulties with the discursive genesis and as a result they used the processes of the semiotic genesis in isolation. Therefore, the instrumental genesis and specifically the process of constructing a graph of a function was based on a rather procedural way of reasoning, e.g., the pointwise or the algebraic approach, without using the similarities and differences between the given function and the requested one.

The above interpretation of the two distinct approaches provides a basic description of the personal MWS of the two corresponding groups of students while solving the vertical transformation tasks, with emphasis on the various types of genesis that were used. At the same time this interpretation can serve as a basis for justifying the findings of the study and specifically the distinct ways of working with the various aspects of the understanding of function examined here by the two groups of students.

The students who employed the coordinated approach demonstrated considerably higher performance at the concept definition, the recognition, the conversion and problem solving tasks compared to the students using the algebraic approach. Furthermore, within the coordinated approach group of pre-service teachers, problem solving was found to relate to all the other dimensions of the conceptual understanding of function, whereas for the algebraic and various approaches group, the phenomenon of compartmentalization was detected in their responses to the tasks which involved different mathematical reasoning and use of this concept.

Before giving an interpretation for these findings based on the mathematical work space, it is important to consider the types of genesis that are involved in the other tasks on functions used in the study. The solution of the various tasks of the test involves one or more geneses. The tasks demanding a definition or examples of the concept of function involve mainly discursive genesis. The tasks involving the recognition of functions given in different modes of representation require discursive genesis (application of definition) and semiotic geneses (recognition and interpretation of different representations of algebraic relationships). The major genesis that is involved in the conversion tasks is semiotic genesis. In solving the complex problems on functions the students should be engaged in semiotic (e.g., conversion of representations), discursive (e.g., understand the properties of functions) and/or instrumental (e.g., process of construction of a graph using artefacts) geneses.

Within the coordinated approach group, students' high and flexible performance across the tasks corresponds to their coordinated approach to function in the vertical transformation tasks. In other words, they used all types of geneses flexibly not only within tasks (complex problems, vertical transformation tasks), but also across the various tasks. For example, since they could use fluently the discursive, semiotic and/or instrumental processes that are required in the complex problems, they could apply these processes also to other tasks that require one or more of these geneses (e.g., definition or examples tasks, recognition tasks).

This does not apply in the algebraic approach group of students. The low and compartmentalized performance of the algebraic group of students on the various types of tasks is in line with their algebraic approach to functions in the vertical transformation tasks and their tendency to engage only to processes within the semiotic geneses in an “isolated” way, without any interaction with discursive reasoning about functions. For example, their limited competence in the discursive genesis (inadequate concept image) for functions, did not allow them to apply adequately the definition or properties of functions and use efficiently the semiotic processes included in recognition tasks with different representations and in complex problems of functions. They could not conceptualize the mathematical object (functions) that was signified in the various representations used in the tasks.

Based on the above conclusions and on the fact that these conclusions hold for samples from two different countries and educational systems, a question that arises is whether the coordinated approach and the algebraic approach to functions constitute characteristics of two different paradigms with respect to functions and calculus in general. This is something that needs further consideration and investigation. Nevertheless, whether the two approaches belong to two different paradigms or not, what is more important here is that the reference MWS (Kuzniak, 2012) in schools should take into account the approach used by the students in tasks on functions, so that the learning activities in mathematics classrooms are organized to allow all the students to work adequately and develop their understanding of this mathematical concept.

REFERENCES

Ainsworth, S., Bibby, P.A., & Wood, D.J. (1997). Information technology and multiple representations: New opportunities - new problems. *Journal of Information Technology for Teacher Education, 6,* 93-104.

Bodin, A., Coutourier, R., & Gras, R. (2000). *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2.* Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Dubinsky, E.,&Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky&G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85–106). The Mathematical Association of America. Washington D.C.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109–122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 1(2), 1–16.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. InW. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 9–24). Mathematical Association of America. Washington D.C.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. The Journal of Mathematical Behavior, 17(1), 105-121.

Gagatsis, A. & Monoyiou, A. (2011). Towards a comprehensive theoretical model of pre-service teachers' conceptual understanding of functions. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 3[5th] Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.2* (pp. 369 – 376). Turkey: PME.

Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, 78, 361–367.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123–134.

Kuzniak, A. (2008). Personal geometrical working space: a didactic and statistical approach. In R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet, F. Spagnolo (Eds), *Statistical implicative analysis: theory and applications studies in computational intelligence* (Vol. 12, pp. 185-202). Heidelberg: Springer.

Kuzniak, A. (2012, in press). Understanding the Nature of the Geometric Work Through its Development and its Transformations. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, Korea.

Lerman, I. C. (1981). Classification et analyse ordinale des donn´ees. Paris: Dunod.

Markovits, Z., Eylon, B., & Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics*, 6(2), 18–28.

Monoyiou, A. (2010). Conceptual and representational understanding related to the concept of function: Comparative study between Cyprus and Italy. *Unpublished doctoral dissertation.* Lefkosia: University of Cyprus.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them. In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 69–100). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 385–392). Bergen, Norway: Bergen University College.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification—The case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59–84). The Mathematical Association of America. Washington D.C.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25–28). The Mathematical Association of America.Washington D.C.

Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (*1993*). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *Journal of the learning Sciences*, 3, 115–163.

XENIA XISTOURI, DEMETRA PITTA-PANTAZI, ATHANASIOS GAGATSIS

PRIMARY SCHOOL STUDENTS' STRUCTURE AND LEVELS OF ABILITIES IN TRANSFORMATIONAL GEOMETRY

ABSTRACT

This paper used CFA analyses to investigate the factors and structure of transformational geometry concepts ability. The results suggest that the three geometric transformations (translation, reflection, rotation) consist by four factors and have similar structures. RASCH analysis was used to create a scale of the factor items, which was interpreted in light of the theoretical framework of geometric work space. Five levels of visualization abilities in transformational geometry were identified. This paper suggests that the development of understanding in transformational geometry can be explained based on the visualization process of students' personal geometric work space.

KEY WORDS

transformational geometry, geometric work space, visualization, dimensional deconstruction

RÉSUMÉ

Cet article utilise l'analyse factorielle confirmatoire pour étudier les facteurs et la structure de l'habilité des concepts de géométrie des transformations. Les résultats suggèrent que les trois transformations géométriques (translation, réflexion, rotation) sont constituées de quatre facteurs et ont des structures similaires. L'analyse de RASCH a été utilisée pour créer une échelle des composants de facteur, qui a été interprétée à la lumière du cadre théorique de l'Espace de Travail Géométrique. Cinq niveaux d'habilités de visualisation de la géométrie des transformations ont été identifiés. Cet article suggère que le développement de la compréhension de la géométrie des transformations peut être expliqué en se basant sur le processus de visualisation de l'espace de travail géométrique personnel des élèves.

MOTS CLÉS

géométrie des transformations, espace de travail géométrique, visualisation, déconstruction dimensionnelle

RESUMEN

En este trabajo se usó el análisis factorial confirmatorio para investigar los factores y la estructura de la geometría transformacional conceptos habilidad. Los resultados sugieren que las tres transformaciones geométricas (traslación, reflexión, rotación) consisten por cuatro factores y tienen estructuras similares. Análisis de RASCH se utilizó para crear la escala de los ítems de los factores, lo que fue interpretado a la luz del marco teórico del espacio de trabajo geométrico. Cinco niveles de habilidades de visualización de la geometría transformacional fueron identificados. Este artículo sugiere que el desarrollo de la comprensión de la geometría transformacional se puede explicar basándose en el proceso de visualización del espacio de trabajo geométrica personal de los estudiantes.

PALABRAS CLAVE

geometría transformacional, espacio de trabajo geométrico, visualización, deconstrucción dimensional

1. INTRODUCTION

Transformational geometry (TG) refers to mental or physical transformation of shapes. According to NCTM's *Principals and Standards for School Mathematics* (2000), "Instructional programs from kindergarten through grade 12 should enable all students to apply transformations and use symmetry to analyze mathematical situations" (p.41).

Research in TG during the last few years has focused in the development of knowledge and understanding of transformations (Yanik & Flores, 2009) and various theoretical frameworks have been used (Hollebrands, 2003; Molina, 1990; Soon, 1989). Kidder (1976) suggests that performing geometric transformations is a multi-faceted mental operation. However, the components that synthesize this ability appear not to have been clearly defined. This seems to be critical in order to study the development of knowledge and understanding of TG.

Based on the pilot results of a large scale project investigating ability in TG, this paper aims to investigate the structure and development of primary school students' ability in TG concepts. Hence, its aim is twofold: 1) to investigate the components that synthesize primary school students' TG ability, drawing on the findings of previous studies, and 2) to describe primary school students' levels of abilities in TG, drawing on theoretical frameworks for understanding geometry and interpreting figures. Specifically, we draw on the notions of geometric work space (GWS) (Kuzniak, 2006), and visualization process (Duval, 2005).

2. LITERATURE REVIEW

2.1. *The development of knowledge and understanding of transformational geometry*

One of the first debates in TG research was the development of learning TG concepts. The first studies focused in the order of learning translation, reflection and rotation (Moyer, 1978). Schultz and Austin (1983) suggest that there cannot be a specific order for understanding the three geometric transformations, since some configurations can influence the relative difficulty of rotations and reflections, such as the direction of the transformation. However, these studies used only one type of task, that of performing a transformation.

The first attempts that used a variety of tasks to study the development of TG ability were based on the van Hiele levels of geometric understanding (Molina, 1990; Soon, 1989). These studies used different tasks matched to each level, such as: performing, recognizing, understanding and relating the properties of transformations. However, the components that synthesize this ability have not been confirmed in literature. Moreover, these studies focused on the type of task, ignoring previous findings regarding the order of difficulty in learning transformations and the configurations that influence difficulty.

Edwards (2003) proposed another model, which discriminates between two qualitatively different conceptions of geometric transformations: 1) motion, where the plane is conceived as a background and geometric figures are manipulated on top of it, and 2) mapping, where a transformation can be considered as a special function that maps all points in the plane to other points while preserving some properties and changing others.

Taking into consideration the various types of tasks and configurations found in previous studies, this paper emphasizes on visualization process and figure apprehension (Duval, 2011) to describe the levels of development that may qualitatively differentiate students' levels of knowledge and understanding of TG concepts. It is hypothesized that visualization process can explain the development of TG ability better than the type of geometric transformation or task.

2.2. *The geometric work space*

The GWS (Kuzniak, 2006, 2011) is the place organized to ensure the geometric work. From an epistemological view, it puts the following components in a network: a) the real and concrete objects, b) the artefacts, and c) a theoretical system of reference. Adapting Duval (1995), the cognitive processes for using these components in geometrical problem solving are: a) a visualization process with regard to space representation and material support, b) a construction process determined by the instruments and geometrical configurations, and c) a discursive reasoning process that conveys argumentation and proof. This paper will emphasize on the first process.

Three different levels can describe the diversity of GWS existing in school context: a) the reference, b) the appropriate, and c) the personal GWS (Kuzniak, 2011). Geometry intended by the teacher/curriculum is described in the reference GWS, which must be fitted out in an appropriate GWS, to enable an actual implementation in a classroom where each student works within his/her personal GWS. This paper focuses on the personal GWS. When a problem is posed to an individual, it is handled within his/her personal GWS, which generally depends on the person's cognitive abilities (i.e. visualization). Houdement and Kuzniak (1999) describe the way in which three different paradigms could explain the different forms of geometry. A paradigm is composed of a theory that guides observation, activity and judgment, and permits new knowledge production. In primary school, all GWS levels can be described within *Geometry I* (GI). GI finds its validation in the material and tangible world. When students pass to secondary education, they are expected to start working within *Geometry II* (GII). GII is built on a model that approaches reality without being fused with it (Kuzniak & Rauscher, 2011). Both Geometries have a close link to the real world, but in different ways (Kuzniak, 2012).

2.3. *Visualization in geometry*

There are two ways of looking at figures and recognizing what they stand for: the natural perceptive and the mathematical (Duval, 2011). One important issue in the learning of geometry is to identify the figural units which can be discriminated in any constructed figure. According to Duval (2011), visualization ability in geometry is closely related to the ability of recognizing all figural units that can be mathematically relevant. He argues that becoming aware of the different ways of looking at figures is prior to the knowledge of the classical basic figures.

According to Duval (1995), there are four apprehensions for a geometrical figure: perceptual, operative, discursive, and sequential. Visualization process is related to the first two types. Specifically, the perceptive way of visual recognition focuses exclusively on the most global shape or closed outline, and so the recognition of other possible reconfigurations is excluded. The perceptive way is activated and reinforced when figures are used as objects that can be empirically observed and it can either help or inhibit the heuristic recognition (Duval, 2011). Operative apprehension is a form of visual processing that concerns geometrical figures and relies on the different ways of modifying a certain figure. One way is dimensional deconstruction. Dimensional deconstruction describes the transition of a drawing seen as a tangible object to the figure conceived as a generic and abstract object (Duval, 2005). For example, a figure can be seen as a 2D-object (a triangle as an area), a set of 1D-objects (sides) or 0D-objects (vertices). Another example is when one recognizes embedded 2D figures within a 2D-object (e.g., a triangle inscribed in a circle). While the natural way perception focuses exclusively on 1D, 2D or 3D/3D figural units, just like material object, the mathematical way requires the dimensional deconstruction of any shape into figural units of 2D, 1D or 0D/2D. According to Bulf (2009), dimensional deconstruction is a possible strategy for 12-13 year old French students to solve symmetry tasks.

This paper demonstrates how Duval' theory (2005) about the role of figures in geometric reasoning can be used to describe the personal GWS of students at different levels of abilities in TG. Specifically, it focuses on the real and local space of the GWS which is related to visualization process and figure perception of primary school students.

3. METHODOLOGY

3.1. *Participants*

The participants were 166 primary school students. In order to study a wider spectrum of primary school students' development of TG abilities, participants were selected from three successive grades. Specifically, there were 52 fourth-graders, 53 fifth-graders and 61 sixth-graders.

3.2. *Instrument and procedure*

The instrument of the study was a TG test, developed especially for the purpose of the project. The test had three sections: one on translation, one on reflection and one on rotation. Each section had four different types of tasks (see Appendix): 1) recognising the image of a translation/reflection/rotation among other choices, 2) recognising a translation/ reflection/ rotation among other choices, 3) defining the parameters of a given translation/ reflection/ rotation, and 4) constructing the image for a given translation/ reflection/ rotation. For each type, at least three tasks were given: one in horizontal, one in vertical and one in diagonal direction. In types 3 and 4, there was an additional task with overlapping image and in type 4 an additional task with an unfamiliar shape in horizontal direction. The tasks were split and administered to all students in two equally difficult parts. Each item's difficulty within each section was estimated based on previous research finding of Schultz and Austin (1983). Students were given 40 minutes to complete each part. To avoid practice effects, half of the students received one part of the test first, while the rest of the students received the other part. Since instruction in geometric transformations in Cyprus was not emphasized in the curriculum and mainly focused on the concept of reflection through symmetry, operational definitions and examples were given to the students before completing the tests, using visual aids of paper cards and drawings on the whiteboard for illustration. Moreover, written mathematical definitions and illustrations of each transformation were included in the students' printed tests.

Based on the theoretical frameworks described above, an *a-priori* analysis of the tasks suggests that tasks of recognition (Types 1 and 2) can be solved efficiently with the use of a motion approach, as defined by Edward's (2003). Therefore, a student can solve a recognition task by visualising the figures changing positions as tangible 3D or 2D objects of the real world (GI) and without requiring dimensional deconstruction to 1D or to 0D. For example, in the recognising translation task (see Appendix), one is expected to imagine one or every shape sliding over the grid and onto the other shapes, in order to decide which one is matching. Tasks of Type 3 and 4, even though they can be approached using a motion strategy of visualising figures as tangible objects, it is expected that such an approach will often result to partially correct responses with errors in measures or image orientation. It is expected that the most efficient way to approach such tasks is mapping, as described by Edwards (2003). Thus, a student who is able to visualize the dimensional deconstruction of the figure to 1D or even 0D elements is more likely to succeed in such tasks. For example, in the case of constructing the reflection of a triangle over a vertical line accurately, one would have to focus on the points of the triangle's vertices, find their position on the other side of the line, and then reconstruct the triangle. However, it is expected that students at this level would still operate within GI, since they treat segments and points as material objects. Students who are able to understand the symbolic nature of points and their relations in space may be considered to be at a transitional stage to GII.

After completing the test, students' responses were graded. Types of tasks 1 and 2 were multiple choice, and were graded with 1 for correct and 0 for incorrect responses. In tasks of type 3 and 4, 0 marks were given for incorrect response and 1 for correct. Partial credit was given to responses with some correct elements. Items with no response received 0 marks.

3.3. *Statistical procedures*

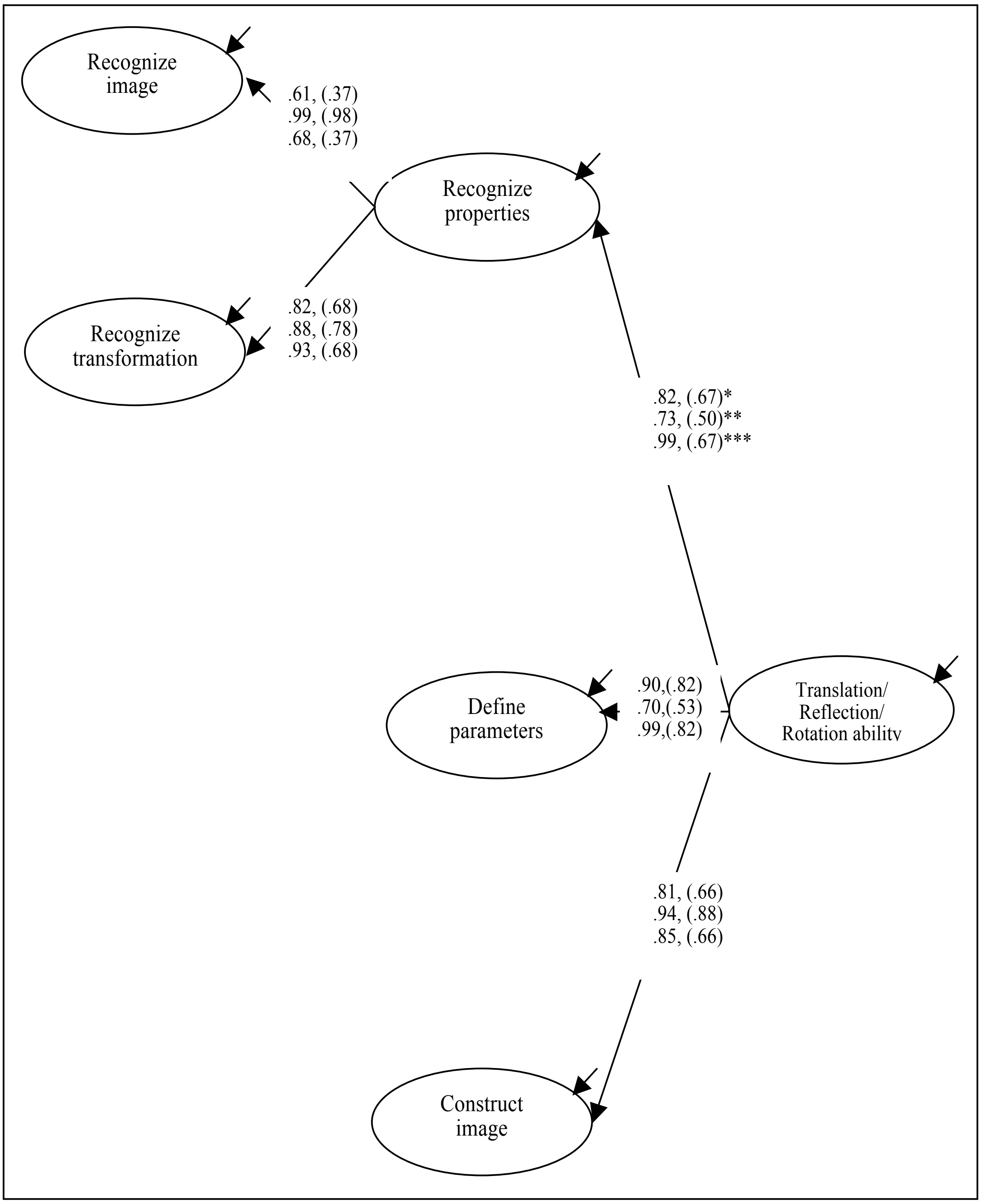
For testing the fit of the theoretical model regarding the structure of TG ability, MPLUS was used with Maximum Likelihood (ML) estimator. More than one fit indices were used to evaluate the extent to which the data fit the theoretical model. The fit indices and their optimal values were: a) the ratio of chi-square to its degrees of freedom, which should be less than 1.96, since a significant chi-square indicates lack of satisfactory model fit, b) the Comparative Fit Index (CFI), the values of which should be equal to or larger than .90, and c) the Root Mean Square Error of Approximation (RMSEA), with acceptable values less than or equal to .06 (Muthén & Muthén, 2004).

For investigating the development of knowledge and understanding of TG ability, RASCH analysis was used. This method is based on the assumption that the difference between item difficulty and person ability should govern the probability of any person being successful on any particular item, and ranks both the persons and the items on the same scale, based on these probabilities. The fit indices are: a) the infit (weighted) mean square statistic, and b) the outfit (unweighted) mean square statistic. The normalized statistics (using the Wilson–Hilferty transformation), infit t and outfit t, have a mean near zero and a standard deviation near one when the data conform to the measurement model. No items or persons should have a zero score or a perfect score. This study used the dichotomous model of RASCH, which predicts the conditional probability of a binary outcome (correct/incorrect). Therefore, for this analysis, the data were recoded into 1 mark for correct and 0 for incorrect or partially correct responses.

4. RESULTS

The first aim of this study was to investigate the components that synthesize primary school students' TG ability and its structure. For this aim, confirmatory factor analyses (CFA) with subsequent model tests were performed. The model presented in Figure 1 seems to have the best fit for all three TG concepts. As expected, there are four first-order factors for each geometric transformation: 1) "recognize the image", 2) "recognize the transformation" (translation, reflection, or rotation), 3) "define the parameters", and 4) "construct the image". Two of the expected factors, "recognise the image" and "recognise the transformation", seem to constitute a second order factor, which contributes significantly to ability at primary school. This factor was named "recognise properties", since the common characteristic shared by these tasks is the recognition of each transformations' properties regarding the preservation or change of the orientation, position, and/or size of the figure. Further CFA with students' mean scores for each of the twelve factors (4 for each transformation) confirm that "translation ability", "reflection ability", and "rotation ability" all load in a higher order factor, which is considered to be "TG ability" (CFI = .96, x^2=71.90, *df* =52, x^2/df =1.39, RMSEA = .05). The factor loadings and their interpreted dispersion (r^2) are .95 (.91) for "translation ability", .98 (.97) for "reflection ability", and .90 (.81) for "rotation ability".

The second aim was to describe primary school students' levels of abilities in TG. A RASCH dichotomous analysis was performed. The analysis suggests that the data fit the model well ($\overline{X}$ =.00, SD=1.81, Infit Mean Square=.99, Outfit Mean Square=1.01, Infit t=-.06, Outfit t=.12, Reliability of Estimates=.98). Figure 2 presents the scale that resulted from this analysis.



* Factor loading values for the translation ability model (CFI = .95, x^2=136.30, *df* =98, x^2/df =1.39, RMSEA = .05)

** Factor loading values for the reflection ability model (CFI=.93, x^2= 125.34, *df*=98, x^2/df=1.28, RMSEA=.04)

*** Factor loading values for the rotation ability model (CFI=.96, x^2 = 90.62, *df*=70, x^2/df=1.30, RMSEA=.04)

Figure 1: The proposed model of ability for the three geometric transformations

On the left side of the figure, the students are ranked according to their ability. Each X represents one student. On the right side of the figure, the items of the test are ranked according to their level of difficulty. More able students, i.e. those that correctly answered more items, are at the top of the scale while less able students are at the bottom. Similarly, items that were harder for the students are at the top of the scale while easier items are at the bottom. Each item is coded as a string of three symbols. The first symbol is a letter, which indicates the type of transformation: T for translation, F for Reflection and R for rotation; the second symbol is a number, which indicates the type of task, according to the factors described in the previous section: 1 for "recognize image", 2 for "recognize transformation", 3 for "define parameters", and 4 for "construct image". The last symbol is a number from 1 to 5, indicating the serial number of the item in the corresponding factor.

The dotted lines mark the different levels. There seem to be five levels of abilities: L1 (-5.0 to -2.5 logits), L2 (-2.49 to -0.9 logits), L3 (-0.89 to 0.89 logits), L4 (0.9 to 2.49 logits) and L5 (2.5 to 5.0 logits). After examining the assumptions suggested in literature that what forms the levels of abilities can be either the type of transformation or type of task, which did not give a clear picture of the qualitative differences between the levels, we decided to compare the levels in light of the personal GWS framework (Kuzniak, 2006) and specifically the visualization processes that we suppose are common requirements for solving the tasks that were grouped at the same level. Hence, we studied the similarities of the tasks that were grouped and we drew on the ideas of figure apprehension and dimensional deconstruction (Duval, 2005) to understand how students could have approached the task and how they visualised the figures. The naming of the levels was influenced by Edwards' (2003) terminology in the field of TG. Thus, they were named: 1) wholistic image, 2) motion of an object, 3) mapping of an object, 4) mapping of the plane, and 5) self-regulated mapping of the plane, for reasons that are explained further on.

In L1, "wholistic image", students seem to perceptually conceive simple relations of up-down and left-right within the figure, that exist in the real world, but without understanding neither the properties of the transformation nor of the geometrical figures represented. The focus is not on what the shapes represent, but on their positioning as part of a global figure. Students at this level have a personal GWS that allows them to visually process the figures only in a perceptual way. They seem to visualize figure of the plane and the objects as a whole image, as a realistic photograph in the physical world. They possibly cannot deconstruct this figure into units, and they see the grid which represents the plane and the images as a concrete part of it, without motion. In L2, "motion of an object", students begin to detach the shape from the figure of the plane and are able to visualize it moving on top of it. The emphasis is still on the shape as a tangible object, but the students can visualize the dimensional deconstruction of the representation to two separate 2D figures: the plane and the geometrical shape. Hence, they may be able to visualize a 2D/2D deconstruction. However, geometric reasoning in the personal GWS of students at this level still relies strongly on perceptual apprehension.

The tasks that were grouped in L3, "mapping of an object", suggest that students probably begin to dimensionally deconstruct the 2D shape into 1D sides, and focus on the sides and their mapping. Hence, the personal GWS of students at L3 begins to employ operative apprehension. Students seem to be able to visualize the mapping of a single side and use reconfigurations to reconstruct the image of the geometrical shape based on its definition and attributes (right angles, size etc). From a cognitive perspective, they begin to intuitively realize the transformation properties related to direction, orientation and distance, and they can apply them in simple situations such as constructing images in straight-line displacement and in recognizing circular displacement.

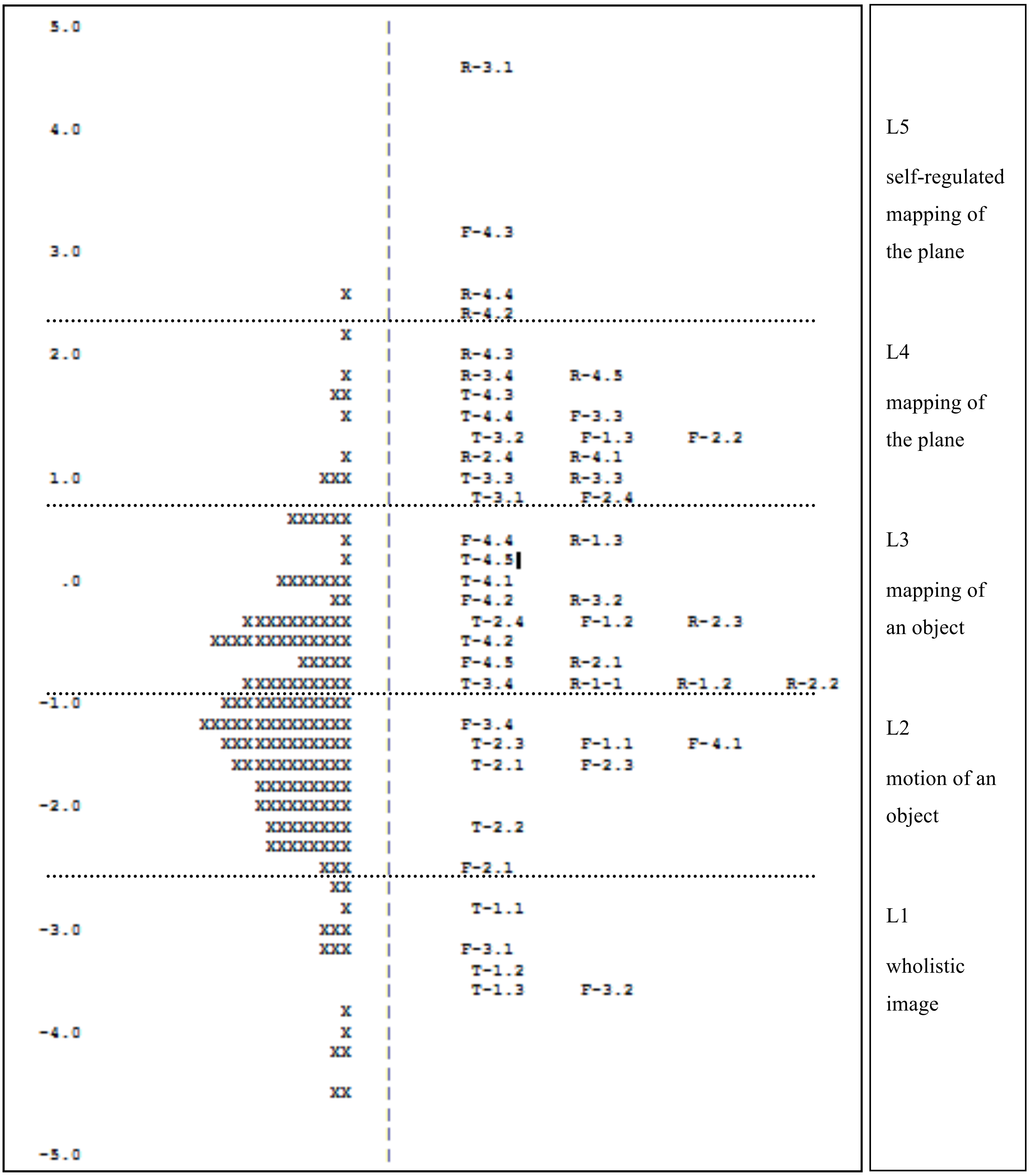


Figure 2: The scale of abilities in the transformational geometry concepts

Students at L4, "mapping of the plane", seem to have a strong operative apprehension and ability to deconstruct the 2D geometrical shape into both 1D and 0D points and they understand the mapping of all the points, based on the properties of TG. The shapes are not anymore perceived only as global figures, but they still visualize the plane figure as an object. They begin to discover and apply the transformations' properties to all the points of the shape, even in complex circular displacements. Note that students at this level were all sixth graders and their personal GWS at this age has probably been influenced by a more formal instruction on geometrical concepts that can be relevant to geometric transformations (i.e. shape properties, angles, circles). At L5, "self-regulated mapping of the plane", there is only one sixth-grade student. It is our belief that what differentiates this student from L4 students is the ability for a more flexible visualization of figures and the representation of space. This student seems to be able to dimensionally deconstruct both the geometrical shape and the plane into 0D points. He/she can visualize and perform the mapping of all the points in various routes and direction (straight and circular displacements) and realizes that transformation affects all points of the plane. According to Duval (2005), a deadlock in the teaching of geometry is that perceptive recognition of some figural units excludes the recognition of the others possible, and therefore goes against any possible transformation of a given figure into another. This student seems to have some flexibility in manipulating and controlling his/her mental images and can flexibly change between figural units of visualization and visual strategies. This could be evidence of "representational flexibility" (Gagatsis, Deliyianni, Elia & Panaoura, 2011) in the sense of flexibility to visualize and manipulate the mental representations of the different reconfigurations of a figure. Although we are not aware of many details regarding this student's cognitive profile, it is possible that his/her cognitive abilities may enable him/her to a personal GWS that is different from other students, perhaps with characteristics closer to GII. Hence, this student may reflect an "attempted transition to GII" (Bulf, 2009), a passage that remains blocked because the reference GWS in primary school is strongly rooted in GI. For most students, this negotiation between GI and GII appears and continues during secondary school.

5. Discussion

The aim of this paper was to describe primary school students' structure and levels of abilities in TG. In this section, we discuss the conclusions of our findings.

Regarding the first aim, our findings confirm Kidder's (1976) position that TG ability is multifaceted. It seems that the three geometric transformations are composed by similar factors, namely recognition of image, recognition of transformation, identification of parameters, and construction of image. Moreover, they seem to have a similar structure, with recognition of image and recognition of transformation factors forming a higher order factor – recognition of properties. This higher order factor and the two factors of identification of parameters and construction of image comprise ability in translation, reflection, and rotation respectively. The three factors of ability in each geometric transformation load on a higher order factor, which is TG ability.

For the second aim, we adopted the theoretical framework of GWS (Kuzniak, 2006) to interpret students' levels of ability. Five levels were found in relation to visualization process. Our findings suggest that the personal GWS of students at primary school level operates within GI and is strongly influenced by the natural world, even in their mental images. However, it seems that not all students that think within the same paradigm are at the same level of abilities nor share the same visualization process of geometrical reasoning. What seem to differentiate these levels may be some cognitive developmental abilities that form students' personal GWS, since the reference GWS does not emphasize instruction in geometric transformations and these differences cannot be attributed to teaching. Hence, even though they are not expected by the system to be working within GII for TG concepts, some students at the higher levels may have developed such a personal GWS regarding their visualization process of figures, which would make it possible for them to begin their transition to GII from primary school, given the appropriate GWS. This could suggest that some sixth grade students may be ready to be introduced to a more formal instruction on geometric transformations within GII. This should be taken into consideration by curriculum formers in the design of geometry curricula. However, this does not mean that students at the higher levels do not still approach the easier tasks within GI. Further research with qualitative data of students' arguments is required to describe the GWS paradigms primary school students at different levels of abilities when solving TG tasks. Further studies of students'cognitive profile may reveal reasons for the differentiation between levels. Such studies could focus on spatial ability, which is highly related to TG ability (Kirby & Boulter, 1999).

Our findings are important for the teaching of TG in primary school. They support that the theory of GWS can be a useful epistemological tool for understanding development of TG, and guide teachers into adjusting their teaching methods to help students achieve higher levels of performance. Moreover, it provides evidence for the importance of practicing students' ability to identify figural units in educational frameworks for the teaching of geometry in general, which according to Duval (2011) is a fundamental principle in the learning of geometry. Hence, we should reflect about a new approach for introducing geometry in primary and secondary levels, whose principle would be that the awareness of the different ways of looking at figures is prior to the knowledge of the classical basic figures (Duval, 2011).

ACKNOWLEDGMENTS

This work falls under the Cyprus Research Promotion Foundation's Framework Programme for Research, Technological Development and Innovation 2009 -2010 (DESMI 2009-2010), co-funded by the Republic of Cyprus and the European Regional Development Fund (Grant:PENEK/0609/57).

REFERENCES

Bulf, C. (2009). Analyses en termes d'espaces de travail géométrique sur l'enseignement français de la symétrie en début de college. In A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyianni & L. Vivier (Eds.) Research in Mathematics Education (pp. 51-70), Nicosia: University of Cyprus.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and Specific Processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de lápprentissage de la géométrie. Annales de *Didactique et des sciences cognitive, 10*, 5-54.

Duval, R., (2011). Why figures cannot help students to see and understand in geometry? Analysis of the role and the cognitive functioning of visualization. *Symposium Mathematics Education Research at the University of Cyprus and Tel Aviv University* (pp. 22-23). Nicosia: Cyprus.

Edwards, L. (2003). The nature of mathematics as viewed from cognitive science. *Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., & Panaoura, A. (2011). Explorer la flexibilité: le cas du domaine numérique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 25 – 44.

Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior, 22* (1), 55-72.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics 40*(3), 283-312.

Kidder, R. (1976). Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. *Journal for Research in Mathematics Education, 7* (1), 40-52.

Kirby, J. R., & Boulter, D. R. (1999). Spatial ability and transformational geometry. *European Journal of Psychology of Education*, *14*, 283-294. doi:10.1007/BF03172970

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. *Canadian Journal of Science and Mathematics, 6*(2), 167–187.

Kuzniak, A. (2011). The mathematical work space and its genesis. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A. (2012). Understanding the Nature of the Geometric Work Through its Development and its Transformations. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul, Korea.

Kuzniak, A. & Rauscher, J.C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics, 77* (1), 129–147.

Molina, D. (1990). *The applicability of the van Hiele theory to transformational geometry* (Unpublished doctoral dissertation). Dissertation Abstracts Online, 417A.

Moyer, J. (1978). The Relationship between the Mathematical Structure of Euclidean Transformations and the Spontaneously Developed Cognitive Structures of Young Children. *Journal for Research in Mathematics Education, 9*, 83-92.

Muthén, L., & Muthén, B. (2004). *Mplus User's Guide. Third Edition*. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.

National Council of Teachers of Mathematics (2002). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

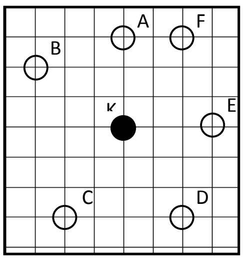
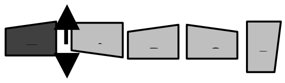
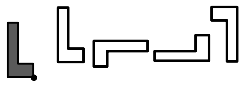
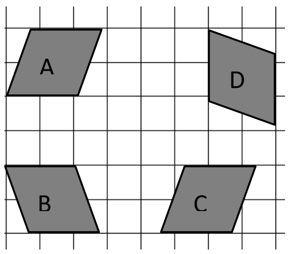
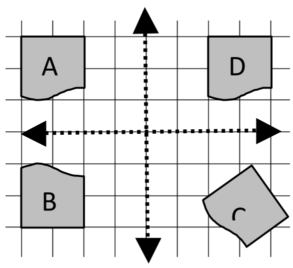
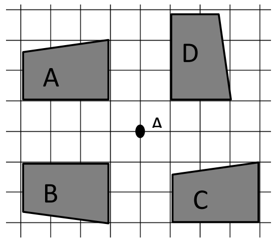
Schultz, K. & Austin, J (1983). Directional Effects in Transformation Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 95-101.

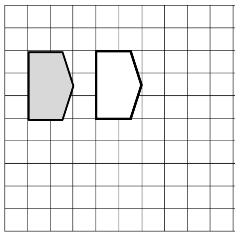
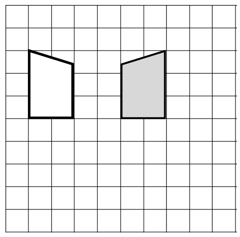
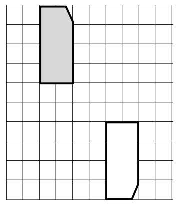
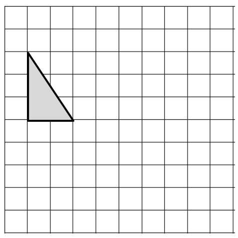
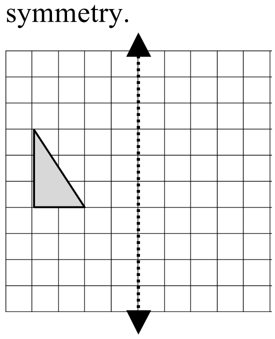
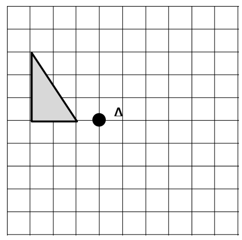
Soon, Y. P. (1989). *An investigation on van Hiele-like levels of learning transformation geometry of secondary school students in Singapore* (Unpublished doctoral dissertation). Dissertation Abstracts Online, 619A.

Yanik, H. & Flores, A. (2009). Understanding of rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 41-57.

APPENDIX

Examples of tasks in the transformational geometry ability test

Type of task	Translation example	Reflection example	Rotation example
1. Recognition of a transformation image	Which of the following images is the translation of the pre-image K, when it translates 3 units up? A C D E 	Which of the following shapes is the reflection of shape Z over a vertical line of symmetry? 	Which of the following shapes is the rotation of the grey figure at ¼ of a turn? 
2. Recognition of a transformation	Which of the following pairs of shapes show a translation? a) A and D b) B and C c) C and D d) A and C 	Which of the following pairs of shapes show a reflection? a) A and D b) B and C c) B and A d) C and D 	Which of the following pairs of shapes show a rotation? a) A and D b) B and C c) C and D d) A and C 

3. Defining of a transformation's parameters	Give the instructions for the translation of the shaded figure to the position of the white figure. 	Draw the line of symmetry for every case. 	Find the point of rotation and the fraction that shows how much the shape turned to the right.  1/4 2/4 3/4
4. Construction of an image under transformation	Translate 4 units to the right. 	Draw the reflection of each shape over the given line of symmetry. 	Rotate the shape ¼ of a turn to the right. 

AUTHORS

XeniaXistouri, University of Cyprus. xistouri@cytanet.com.cy

Demetra Pitta-Pantazi, University of Cyprus. dpitta@ucy.ac.cy

Athanasios Gagatsis, University of Cyprus. gagatsis@ucy.ac.cy

Iliada Elia ; Kyriacoulla Evangelou; Katerina Hadjittoouli; Marja van den Heuvel-Panhuizen

A KINDERGARTNER'S USE OF GESTURES WHEN SOLVING A GEOMETRICAL PROBLEM IN DIFFERENT SPACES OF CONSTRUCTED REPRESENTATION

EL USO DE GESTOS DE UN ESTUDIANTE DE KINDERGARTEN LA HORA DE RESOLVER UN PROBLEMA GEOMÉTRICO EN DIFERENTES ESPACIOS DE REPRESENTACIÓN CONSTRUIDO

Resumen. Este estudio investiga los gestos de un kindergartner, desde un punto de vista cognitivo, en una actividad geométrica con carácter comunicativo. La actividad consiste en un problema de la configuración de las formas de dos tipos diferentes de espacio de representación construido (ERC), es decir, en el ordenador y en el papel. En este sentido, seguimos el análisis cognitivo del pensamiento geométrico por Duval (1998) con un enfoque en l'apprehensión perceptiva y l' apprehensión operativa de figuras geométricas. Durante la actividad geométrica, el niño tuvo que dar instrucciones a un experimentador, de modo que el experimentador puede componer la figura indicada en la pantalla del ordenador mediante un applet matemático específico, y en el papel, respectivamente. El niño produjo gestos icónicos y deícticos en diferente medida en cada ERC. Cada tipo de gestos tenía una función cognitiva diferente en el proceso de solución del problema. Las conclusiones anteriores proporcionar información sobre el espacio de trabajo p ersonal de un niño pequeño durante la resolutión de actividad de configuración de las formas.

Palabras clave. Gestos, aprehensión figura geométrica, espacio de trabajo geométrico, configuración de las formas, kindergarten

Abstract. This study investigates a kindergartner's gestures, from a cognitive point of view, in a geometrical activity of communicative character. The activity involves a shape configuration problem in two different types of space of constructed representation (SCR), namely, on the computer and on paper. In this we follow the cognitive analysis of geometrical thinking by Duval (1998) with a focus on the perceptual and the operative apprehension of geometrical figures. During the activity, the child had to give instructions to an experimenter, so that the latter could compose the given figure on the computer screen using a specific mathematical applet, and on paper, respectively. The child was found to produce iconic and deictic gestures to a different extent in each SCR. Each type of gestures had a different cognitive function in solving the task. These findings provide insight into the personal geometric work space of a young child in carrying out a shape configuration task.

Keywords. Gesture, geometrical figure apprehension, spaces of constructed representation, geometrical work space, shape configuration, kindergarten.

Résumé. Cette étude examine, d'un point de vue cognitif, les gestes que l'enfant de la maternelle produit dans une activité géométrique avec communication. Cette activité s'appuie sur un problème de configuration de formes dans deux types d'espaces de représentation construite (ERC), l'ordinateur et le papier. Nous suivons l'analyse cognitive de la pensée géométrique selon Duval (1998) avec un accent mis sur les appréhensions perceptive opératoire des figures géométriques. Pendant l'activité, l'enfant devait donner des instructions à un expérimentateur pour que celui-ci puisse composer une figure sur le papier et aussi sur l'écran de l'ordinateur à l'aide d'un appliquette mathématique spécifique. L'enfant a produit des gestes iconiques et déictiques de façon différente dans chaque ERC. Chaque type de gestes avait une fonction cognitive différente dans le processus de résolution du problème. Ces résultats permettent de mieux comprendre l'espace de travail géométrique personnel d'un jeune enfant alors qu'il effectue une tâche sur des configuration des formes.

Mots clés. Geste, l'appréhension de figure géométrique, espaces de représentation construite, espace de travail géométrique, la configuration des formes, l'école maternelle

Resumo. Este estudo investiga os gestos de um kindergartner, do ponto de vista cognitivo, em uma atividade geométrica de caráter comunicativo. A actividade envolve um problema de configuração em forma de dois tipos diferentes de espaço de representação construído (SCR), ou seja, do computador e sobre o papel. Neste seguimos a análise cognitiva do pensamento geométrico por Duval (1998), com foco na percepção e apreensão operatória das figuras geométricas. Durante a atividade, a criança teve que dar instruções para um experimentador, de modo que este último poderia compor a dada figura na tela do computador usando um applet matemática específica, e em papel, respectivamente. A criança foi encontrada para produzir gestos emblemáticos e deictic de uma forma diferente em cada SCR. Cada tipo de gestos tinham uma função cognitiva diferente para resolver a tarefa. Estes resultados fornecem insights sobre o espaço de uma criança na realização de uma tarefa de configuração forma de trabalho pessoal.

Palavras-chave. Gesto, figura geométrica apreensão, espaços construídos de representação, espaço de trabalho geométrica, forma de configuração, jardim de infância.

IntroductiOn

Teaching geometry so that students develop meaningful geometrical knowledge requires careful observation of the ways students gain understanding of various geometrical topics (Battista, 1999). Thus, mathematics educators need to investigate and identify how students acquire geometrical knowledge. In order to attain more adequate information about children's geometrical knowledge development, it is important for teachers to recognize that the body and especially gestures could be considered as a reference point and as a source of experiences to reason, learn and grow (Kim, Roth, and Thom, 2011). To accurately assess what children really know, it is often important to look beyond their words. When children are asked to explain their behavior, their verbal expressions may not capture all components of their understanding, as a result of difficulties to tap some knowledge through verbal expressions (Ericsson and Simon, 1980). Thus, gestures can be another possible "location" where the generation of children's mathematical thinking and thus geometrical knowing can be observed.

Compared to other topics in mathematics, the role of gestures in early geometry learning has received limited attention. The purpose of the present study is to explore kindergartners' gestures, from a cognitive point of view, in a geometrical semiotic transformation activity of communicative character in two different types of *space of constructed representation* (SCR).

2. THEORETICAL FRAMEWORK

In the present paper we use as explanatory frameworks Duval's cognitive approach to geometry learning (Duval, 1995, 1998), the Geometrical Work Space (GWS) (Kuzniak, 2009; 2012) and previous research on gesture (McNeill, 1992) and its role in mathematics learning (Radford, 2009).

2.1. Duval's cognitive model of geometrical reasoning

Semiotic representations in elementary geometry are produced within three different registers: shape configuration, linguistic statements and numerical values and/or symbolic formulae. In addition, geometrical thinking involves three kinds of cognitive processes, that is, visualization, construction and reasoning processes (Duval, 1998).

In this study we concentrate on the register of geometrical figures and on the cognitive process of visualization (Duval, 1998). Visualization includes the recognition of figural units which can be identified in a configuration of shapes as well as figural treatment. The first cognitive process in the early years is based on the perceptual apprehension of figures, while the second one is a major component of the operative apprehension of geometrical figures. Perceptual apprehension refers to the recognition of a shape in a plane or in depth, the recognition of shapes in a perceived figure and the naming of shapes. Operative apprehension depends on the various ways of modifying a given figure: the mereologic, the optic and the place way. The mereologic way refers to the division of the whole given figure into parts of various shapes and the combination of them in another figure or place of figures (reconfiguration), the optic way is when one makes the figure larger or narrower, or slant, while the place way refers to its position or orientation variation. Each of these different modifications can be performed mentally or physically, through various operations. The shape configuration problem that is used in this study, is closely linked to perceptual and operative apprehension of geometrical shapes. The shape configuration problem in this study involves also discursive processes by the solver, and specifically explanation about which shapes to use and about their proper position and orientation in the composite figure. Thus, the geometrical activity used in this study incorporates two registers of representation, shape configuration and linguistic statements, as well as conversion processes between them. Furthermore, the activity used in this study takes place within 'microspace' (Brousseau, 1983). Microspace refers to a space of interactions tied to manipulation of small objects (Brousseau, 1983). The geometrical representation that is included in this study is constructed in two different types of micro-space: objects (2D-shapes) made of paper and computer screen. These SCRs, as we called them earlier, are likely to differ in the processes they stimulate to the students while constructing a composite geometrical representation with shapes. This could be caused by the use of the technological tools that are included in the applet for the manipulation of the geometrical figures (Duval, 1995).

2.2. Gestures in mathematics learning

Mathematical thinking cannot be reduced to working with abstract mathematical ideas. It is mediated by, but also located in, body, artifacts, and signs. This means that semiotic and physical resources as well as bodily activity, including gesture, are indispensable components of thinking and conceptualization at any level of development (Radford, Bardini, Sabena, Diallo, and Simbagoye, 2005). Because of their embodied character, gestures can play an objectifying role (Radford, 2003), that is, they serve as a representational tool of various mathematical ideas through which learners can gain a deeper level of consciousness of their culturally and historically developed meaning (Radford et al., 2005). In this way, learners can also communicate mathematical concepts more easily (Gallese and Lakoff, 2005; Nemirovsky and Ferrara, 2009).

According to McNeill (1992), "Speech and gesture are elements of a single integrated process of utterance formation in which there is a synthesis of opposite modes of thought—global-synthetic and instantaneous imagery with linear segmented temporally extended verbalization" (p. 35). This means that speech consists of segments that are produced linearly through time, whereas gesture is immediate, represents an image which depends on the whole and cannot be decomposed into parts with isolated meanings. This view, on the one hand, suggests that gestures' cognitive potential can be analyzed and understood only in the context of their interaction with other modalities (Radford, 2009) and primarily with language. On the other hand, it is suggested that the contribution of gesture to mathematical understanding, which almost always requires both analytic thinking and imagery, is distinct from the role of other modalities.

McNeill (1992) proposes four categories of gestures with respect to their meaning:

1) deictic gestures, pointing movements to existing or virtual objects and actions in space. For example, think of a child in a kindergarten who is asked by the teacher where the puppet is and the child says "Under the table", using a deictic gesture to point the specific location.

2) iconic gestures which are closely related to the semantic content of speech, that is, they visually represent the content of concrete entities and actions. For example, think of a child who is describing a spatial construction to a conversation partner and she makes a gesture of a round line in the air for the shape of cylinder.

3) metaphoric gestures, which represent an image of an abstract object or idea. For example, a speaker divides the space of gesture in front of him to illustrate the notions 'good' and 'bad' by moving his hands respectively to the right and to the left (or in the opposite direction) (McNeill, 1992).

4) temporal highlighting gestures, simple repeated gestures used for emphasis. They are used by the speaker to highlight something he/she feels is important, for example, when he/she first mentions a character of a story (McNeill, 1992).

2.3. The Geometrical Work Space (GWS) for the solution of the geometrical configuration problem in the present study

The present study is based on a geometrical activity which offers a place that is organized to enable children (in this study one child) to solve a geometrical problem. This place can be termed as Geometrical Work Space (Kuzniak, 2012). As the geometrical activity used in this study has a mathematical dimension, it is inevitable to comprise of three interacting components which can describe the epistemological level of GWS: real space, artifacts, a theoretical frame of reference. Furthermore, since a main focus of the study is to understand how children use geometrical knowledge to solve the problem included in the geometrical activity, it is essential to consider in our analysis the three processes involved in the GWS at the cognitive level: visualization, construction and proof. Working coherently and efficiently in the GWS entails an articulation between the epistemological level and the cognitive level. This process depends on transformations of the epistemological components into objects that can be used meaningfully in the cognitive processes of individuals. These transformations are found in three fundamental geneses: semiotic-figural, instrumental and discursive (Kuzniak, 2012).

In this study, the three dimensions introduced by Kuzniak (2012), including the epistemological components, the cognitive components and geneses, are adapted to meet the specific characteristics of the activity and of the young age level under study (kindergarten) and therefore some components of these dimensions are renamed. For example, the three cognitive processes involved in the particular geometrical activity are drawn from Duval's (1998) cognitive approach for the apprehension of geometrical figures (see above). The modified components are depicted in Figure 1, which is adapted from the GWS in Kuzniak (2012). This figure shows the resources and the work of an individual while solving the geometrical configuration problem proposed in this study (see Method section for the particular task) or other similar problems. All the dimensions of the GWS for this activity and their components are also described below. It should be noted that the particular activity is situated within the paradigm of Geometry I as it finds its validation in the material and tangible world (Kuzniak and Rauscher, 2011).

First dimension

Situation with configuration of geometrical figures (geometrical representation): the outline of geometrical figures and the available geometrical shapes (see Figure 2)

Visual genesis: observation and visual treatment of the geometrical configuration (e.g., recognizing that the configuration is made up of geometrical shapes placed in specific positions and orientations) and of the individual geometrical shapes (e.g., recognizing that individual geometrical shapes can be parts of a configuration if combined appropriately)

Perceptual apprehension of geometrical figures: recognition and naming of geometrical shapes that fit in the outline and specification of their position

Second dimension

SCRs and artifacts:1) First SCR, that is, computer, mathematical applet, tools available in the applet (e.g., spin tool), 2) Second SCR, that is, paper material (e.g., geometrical shapes and the outline of the composite figure made of paper)

'Experimental' genesis: manipulation of geometrical shapes through child's verbal instructions

Operative apprehension of geometrical figures: geometrical reconfiguration, place way modifications (rotation and translation) of shapes to fit in the outline,

Third dimension

Theoretical system of reference: knowledge of two dimensional geometrical shapes, geometrical transformations (rotation and translation) of shapes, spatial relationships (besides, right, left, on, under, etc).

Discursive genesis: Speech production about the visual recognition of shapes and their manipulation

Discursive reasoning for the solution of the problem: Production of coherent instructions for combining the geometrical shapes to compose the larger composite figure, implicit use of the notion that a shape remains the same in different positions and orientations.

The present study addressed the following research questions about early geometrical thinking evoked by two types of SCR, namely, on the computer, with the use of a digital mathematical applet, and on paper: (a) What are the types of gestures that are produced in a geometrical semiotic transformation activity including a two-dimensional shape configuration problem?; and (b) What are the interrelations between geometrical figure apprehension processes and gesturing? Investigating these questions may enable us also to gain useful understanding about young children's personal work space (Kuzniak, 2012) while dealing with such geometrical activities, with a focus on gestures and their role in geometrical work.

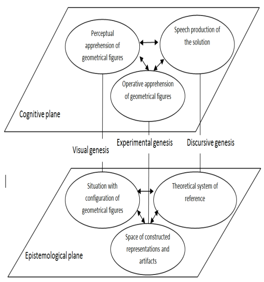


Figure 1. GWS for the solution of the shape configuration problem

3. METHOD

3.1 Nature of the study

To address the research questions, it is essential to acquire a profound insight into the phenomenon of gestures in early geometry learning. Radford (2009, p. 124) pointed out that "[t]o better weigh the role of gestures and bodily actions in mathematics cognition, more detailed investigations are required." Therefore, we carried out a qualitative single-case study, in which we examined one child while interacting with her kindergarten teacher in a geometrical activity in the context of two different SCRs. In particular, a 5-year-old girl was observed. She is a student in a public kindergarten, in Larnaca, Cyprus.

3.2 Activity and procedure

The activity that was used included a shape configuration problem (shape puzzle) in two different SCRs, namely, on the computer, with the use of a digital mathematical applet, patch tool, (http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=27), and on the paper, respectively. The goal of the activity in each SCR was the child to give the right instructions to the experimenter so that the experimenter could fill a composite figure with a given outline, by selecting appropriate shapes and by putting them in the proper place and orientation. Although the puzzle suggests the placement of each shape by including internal lines, each shape does not represent a unique role in the configuration (e.g., one shape for each part of the puzle) and does not touch other shapes only at a point. This means that several shapes are combined by matching their sides to make one part of the puzzle (Clements and Sarama, 2009). To accomplish the task the child needed to activate the following competences: recognizing a shape and indicating how to place it with respect to its orientation and its position relative to other shapes in the configuration.

The focus of our study by selecting this task and developing this activity was not to find out whether the child could solve successfully the problem. The rationale behind the design of this activity was based on gaining access to the child's mental processes when filling a shape configuration through her verbal and gestural acts. For this reason, the researcher encouraged the child to express her thinking by probing and asking questions to the child throughout the whole activity without providing any guidance for the solution of the puzzle.

Concerning the SCRs, our focus was to find out whether the interaction of the same child with a different SCR when dealing with the same task would differentiate substantially (or not) her geometrical thinking as "materialized" through her gestures and words. Since this is a single case study, having at first a specific order of the SCRs and then reversing this order would not contribute to this particular focus, because the combined knowledge and experience gained by the child in the first round (e.g., order: computer-paper) from using the two SCRs, would probably affect her cognitive processes while using the SCRs in the next round (e.g., reversed order: paper-computer), even if different configuration tasks were involved. Therefore, we chose not to reverse the order of the two SCRs.

At the first SCR, the computer, the user (in this study the experimenter following the instructions of the child) could move a shape using the mouse, rotate a shape using the spin tool and delete a shape using an eraser. These operations could be applied, also, in the second SCR (paper) by the experimenter, by using his hands. As shown in Figure 2, the same outline of composite figure and the same shapes (triangle, rhombus, square, trapezoid and hexagon) were used in both SCRs.

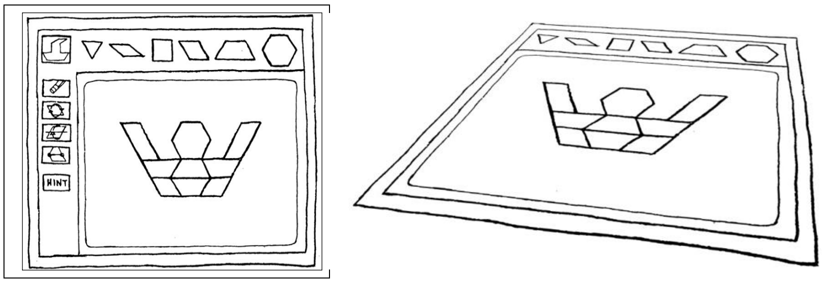


Figure 2. (a) First space of constructed representation (computer screen), (b) Second space of constructed representation (paper)

We admit though that having the computer activity first might have an effect on the child's behavior in the paper activity that followed, but we tried to diminish this effect by having an interval of two weeks between the two activities. Furthermore, if such an effect still occurs, we would consider it as an indication that the child, affected by the dynamic character of the computer, may be able to transfer the operations developed through gestures and language from using this first SCR on the second SCR, the paper. This is an interesting indication for further study, which would not occur if the reversed order of SCRs was applied instead (first: paper, second: computer). This is the reason we selected the particular order of SCRs, evethough the examination of such an indication is beyond the aims of the present case study.

Before starting each activity, the experimenter explained to the child the rules and the goal of the game. Specifically she told the child that she must give her instructions so that the shapes she had in front of her are combined to match the provided outline of the composite figure. In addition, in the first SCR she explained to the child the functions of the spin tool (i.e., turn the shape) and the eraser (i.e., remove the shape).

3.3 Data collection and analysis

To examine the child's gestures and language, her reactions and utterances during her participation in the activity were video-recorded. Guided by our research questions and theoretical framework, we conducted a microgenetic analysis (Siegler, 1995) of the child's utterances and gestures during the activity in both spaces. Specifically, we carried out an intensive analysis of the observed behavior of the child (Lavelli, Pantoja, Hsu, Messinger, and Fogel 2005). It is our contention that this microgenetic approach can shed some light on the processes the child goes through while thinking of, and communicating concepts related to geometrical figures during her interaction with each SCR in a shape configuration problem. In carrying out the microgenetic analysis, we focused on the child's use and coordination of two semiotic resources, namely, spoken words and gestures, in connection to the geometrical representations provided at each SCR.

4. RESULTS

The total number of gestures produced by the child while acting in the activity was 47 on the first SCR, i.e., the computer, and 38 on the second SCR, i.e., paper. On the computer 21 gestures were identified as deictic and 26 gestures were categorized as iconic. With the paper material, 10 gestures were iconic and 28 gestures were deictic. The duration of the activity was 13 min and 24 seconds on the computer and 10 min and 9 seconds on the paper.

4.1. Gestures' categorization

In order to address the first research question about the types of the kindergartner's gestures while dealing with the shape configuration problem, we categorize the gestures the child produced on the two SCRs according to the classification that was proposed by McNeill (1992). The child was found to produce two kinds of gestures, namely, deictic and iconic gestures, in each SCR.

4.1.1. Types of gestures at the first SCR

Below we first give the child's constructed representation in the first activity (see Figure 3). The figure is followed by an extract of the child's and experimenter's talk and gestural activity.

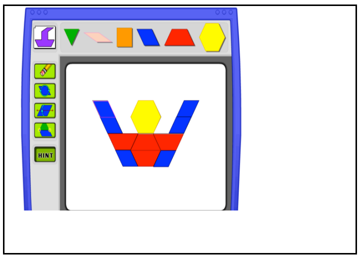


Figure 3. The combination of shapes made by child to fill the larger figure with the use of computer (lines 1-37)

E: I would like you to show me the first shape that you want to use.
C: I want to start with this shape *(shows with her pointing finger the rhombus).*
E: And where do you want to place it?
C: I want to place it here *(shows with her pointing finger down, on the right side of the figure).*
E: Ok, I am starting the game. This one is a rhombus *(puts the shape in the indicated place).* Is it right how I put it?
C: No.
E: What do you want to do?
C: You have to turn it *(makes a rotation with her pointing fingers, using both of them as moving points).*
E: Helen, you are amazing. I will turn it (*makes a rotation using her pointing fingers).* I am taking this tool and I am starting to turn it. Is it right here?
C: No, you have to turn the shape once more (*makes a rotation with her pointing fingers, using both of them as moving points).*
E: Once more. Is it right?

C: You have to turn it again (*makes a rotation with her pointing fingers, using both of them as moving points).*
E: Ok, I will turn it again. Is it right?
C: Yes.
E: Wonderful. Is the place absolutely right?
C: No.
E: What do I have to do?
C: You have to turn it on the left *(puts her palms opposite to one another in a vertical direction and she moves them on the left).*
E: On the left *(shows with her pointing finger on the left)*. Nice. Is it right?
C: Yes.
E: Nice. We have placed the shape on the right location. Let's place the second shape. Tell me, show me.
C: *(She shows the trapezoid with her pointing finger).*
E: Do you know its name?
C: Yes I know it…
E: It's tr…
C: A rectangle.
E: No, it's a trapezoid.
C: The trapezoid.
E: Excellent. So, I am choosing a trapezoid. And, where do you want to place it?
C: Here *(shows with her pointing finger the location on the bottom of the figure).*

When the child gestured about the geometrical transformations (i.e., rotation and translation of the shape) in order to fill the composite figure, these gestures were of iconic character. An example concerns the rotation (lines 9-10), for which the child made a rotation using her pointing fingers as moving points (see Figure 4a). A second example refers to the translation of the shape. Specifically, when the child wanted to move a shape, she moved her hand from the direction that she wanted to displace a shape to the direction that she wanted to place the shape (lines 23-24, see Figure 4b).

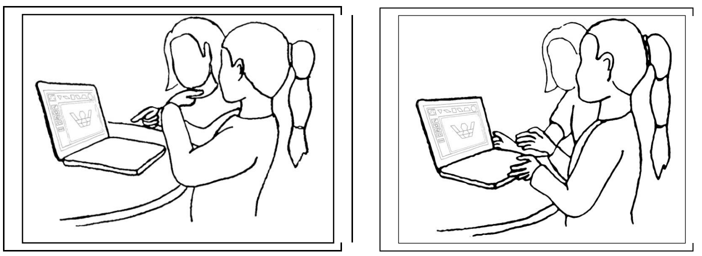


Figure 4. (a) Iconic gesture for the rotation of shape on computer (lines 9-10), *(b)* Iconic gesture for the shape translation on computer (lines 23-24)

The verbal expression "turn" was usually accompanied with the iconic gesture of rotation (line 13). However, the same verbal expression was used by the child when she talked about a shape's translation. In particular, many times when the girl wanted to move a shape from one place to another she used the word "turn" (lines 23-24). In these cases the role of gestures was very significant for both communication partners, the experimenter and the child. On the one hand, through gesture, the experimenter gained a clearer understanding about how the child wanted to manipulate the shape in order to fit on the composite figure. On the other hand, the child, despite her difficulty to describe verbally the particular geometrical transformation, using gesture, began to objectify and achieved to communicate this mathematical idea.

To show the selected shape and the place that the shape could fit, the child always produced deictic gestures, stretching her hand and pointing with her pointing finger the shape or the location (lines 29 and 37, see Figure 5a and 5b). This observation could be explained by the difficulties the girl had in naming the shapes or in describing the place of the shape. Often (12 times) these deictic gestures were not accompanied with any verbal expression. For example, when the child wanted to use the trapezoid, she conveyed her idea stretching her hand and pointing with her pointing finger the trapezoid without speaking (line 29). The child produced deictic gestures also when she used verbal expressions such as, “this shape” and “here” (9 times, e.g., lines 2-4).

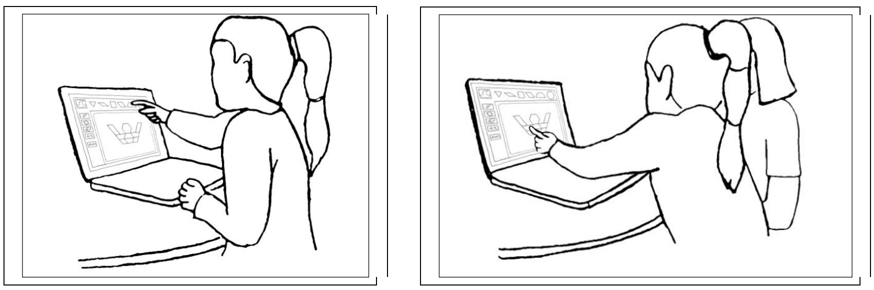


Figure 5. (a) Deictic gesture for the shape of trapezoid on composite figure on computer (line 29), (b) Deictic gesture for the place of trapezoid on composite figure on computer (line 37)

4.1.2. Types of gestures at the second SCR

The child’s constructed representation with paper is shown in Figure 6. Two extracts of the talk between the child and the experimenter and their gestural production at the beginning and at the end of the activity in the second SCR based on the video-recorded material are given next.

Figure 6. The combination of shapes made by the child to fill the larger figure with the use of paper (lines 38-82)

At the beginning of the activity:

38 E: I would like you to choose the first shape that you want.

C: This *(shows with her pointing finger the hexagon).*

E: This one? Nice. Do you remember its name? (….) Its name is hexagon. And, where do you want to put it?

C: *(shows with her pointing finger above the correct place, at the upper part of the figure).*

E: Fine. I will put it here. Is it right here?

C: No.

E: What would you like to do?

C: You must move it down *(she opens her palms to form a flat surface and moves them down).*

E: Nice, I will move it down. Is it right now?

C: Little, little *(she shows with her pointing finger up).*

E: Little bit up? Is it right?

C: Yes.

E: Nice. Show me the next shape that you want to continue with.

C: With this *(shows with her pointing finger the rhombus).*

E: With the rhombus, and where do you want to put it?

C: Here *(shows with her pointing finger close to the correct place, down on the left side of the outline).*

E: Nice, I will put it here. Is it right here?

C: No. You must turn it little bit here *(moves her hands from right to left).* Here?

E: Is this right?

C: Yes.

E: Wonderful. Let's continue. Choose a shape.

C: *(She shows with her pointing finger the trapezoid).*

E: Do you remember its name?(…) Trapezoid.

C: Trapezoid.

E: Where do you want to place it?

C: Here *(shows with her pointing finger the correct place, on the bottom of the figure).*

E: I have put it. Is it right?

C: No.

E: What do I have to do?

C: You have to turn it *(she makes a rotation with her pointing fingers using both of them as moving points).*

At the end of the activity:

E: Choose a shape.

C: *(She shows the trapezoid with her pointing finger).*

E: You chose the trapezoid again. I think you like this shape more than the other shapes. Where do you want to place it?

C: Here *(shows with her pointing finger a correct place on the left side of the outline).*

E: Is it right here?

C: Yes but move it little bit here *(she moves her right hand from the left to the right).*

Although the second activity differed in the SCR in which it was conducted, the child used the same kind of gestures about the rotation and translation of shapes as in the first SCR. For example, when the child asked the researcher to "turn" the trapezoid, she produced the same iconic gesture that she used on the first type of SCR (made a rotation using her pointing fingers as moving points) (lines 72-73, Figure 7a). Such a congruence was identified also in the case of the horizontal translation. In order to apply a horizontal translation on a shape she produced a similar iconic gesture which was produced on the first SCR (line 59, Figure 7b), using either the wrong term "turn" at the beginning, or the correct term "move" later on (line 81). For the vertical shape translation (up and down), though, there was a difference in her words between the two SCRs. Although the child produced the same iconic gesture in the two SCRs, in the second SCR she used the appropriate term “move” from the beginning of the activity, while in the first SCR she did so only towards the end of the activity.

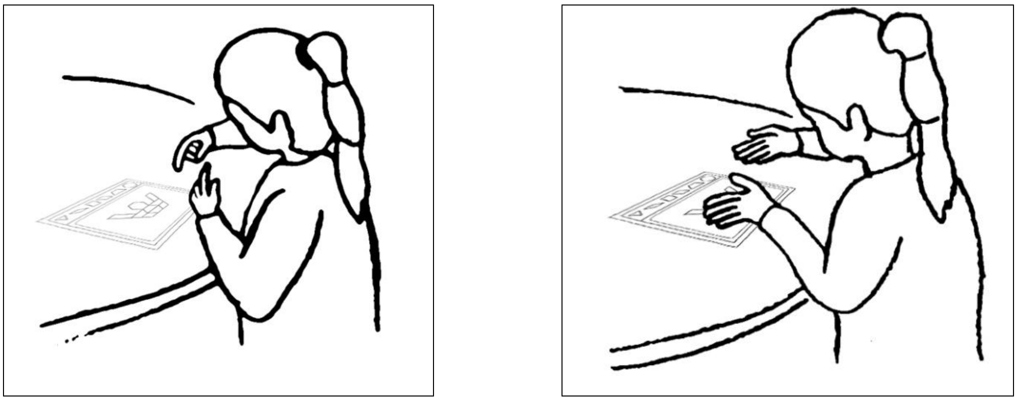


Figure 7. (a) Iconic gesture for the rotation (lines 72-73) (b) Iconic gesture for the translation of the shape on paper (line 59)

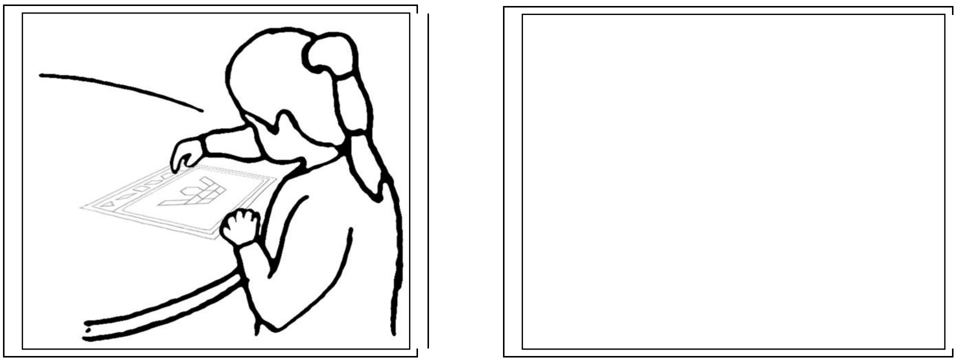


Figure 8. *(a)* Deictic gesture for the recognition of the shape on paper (line 63) *(b)* Deictic gesture for the recognition of the place of the shape (line 78-79)

Similarly to the first SCR, in the second SCR the child used deictic gestures with (e.g., lines 67-68) or without speech (e.g., lines 42-43) to show the shape she selected (Figure 8a) or the place of the shape on the composite figure (Figure 8b).

4.2. Interrelations between child processes of geometrical figure apprehension and gesturing

In examining the second research question, we found that the child used different types of gestures when activating the perceptual or the operative apprehension of geometrical figures in the shape configuration problem. In Table 1 some instances of the child’s verbal utterances and gestural production are analyzed to make apparent the connection between the child’s gesturing and processes of geometrical figure apprehension on the computer and on paper.

TABLE 1

Type of SCR	Child's words	Child's gesture	Type of gesture	Geometrical aspect	Type of geometrical figure apprehension
Both SCRs	*You have to turn it.*	She makes a rotation using her pointing fingers as moving points	Iconic gesture Lines: 9-10, 72-73 Figures 4a, 7a	Rotation	Operative Apprehension
Both SCRs	*You have to turn it on the left./ You must turn it little bit here.*	She puts her palms opposite to one another in a vertical direction and she moves them on the left	Iconic Gesture Lines: 23-24, 59 Figures 4b, 7b	Translation	Operative Apprehension
Paper	*Yes but move it little bit here.*	She moves her right hand from left to the right.	Iconic Gesture Lines: 81-82 Figure 9	Translation	Operative Apprehension
Paper	*You must move it down.*	She moves her hands down.	Iconic Gesture Lines: 47-48	Translation	Operative Apprehension
Both SCRs	*This.*	She points the rhombus at the first SCR and the hexagon at the second SCR	Deictic Gesture Lines: 2, 39	Shape recognition	Perceptual Apprehension
Both SCRs	No verbal expression	She points to the trapezoid	Deictic Gesture Lines: 29, 63 Figures 5a, 8a	Shape recognition	Perceptual Apprehension
Computer	*I want to place it here.*	She shows with her pointing finger the position of a rhombus, down, on the right side of the outline	Deictic Gesture Line: 4	Shape recognition	Perceptual Apprehension
Paper	No verbal expression	She shows with pointing finger the place of a hexagon in the outline of the composite figure	Deictic Gesture Lines: 42-43	Shape Recognition	Perceptual Apprehension

Interrelations between child's processes of geometrical figure apprehension and gesturing in the SCRs (computer and paper)

Table 1 shows that in both SCRs deictic gestures were likely to be produced by the child when she activated operations which were associated with the recognition of a shape or the recognition of the placement of a shape. Although the child was unable to name most of the shapes, her deictic gestures made obvious that she was able to recognize all the shapes in the composite figure. The recognition of shapes in a perceived composite figure is an important component of perceptual apprehension. Thus, deictic gestures conveyed information drawing on the perceptual apprehension of shapes, and therefore served as a window for the child's perceptual apprehension competences.

Additionally, in both SCRs, the child applied the place way of modifying a figure which is a basic component of the operative apprehension of geometrical figures. Specifically, when she selected the shape she thought it will fit on a specific place, she was applying the rotation and sometimes the translation of the particular shape. This shape modification was expressed by the child through verbal expression and also, by iconic gestures which were used as a representational tool of these geometrical transformations. It is noteworthy that when the child used wrong verbal expressions (e.g., lines 23-24) for these transformations, gestures had a significant role to convey her ideas. Our microgenetic analysis of the child's verbal and gestural production in both SCRs shows that at the first minutes of the activity in each SCR the child referred to two shape transformations (rotation and horizontal translation) using the same verbal expression, that is, "turn", but two distinct iconic gestures (e.g., lines 9-10 and lines 23-24). Furthermore, with the wrong term "turn" for the horizontal translation she used both her hands to represent this transformation (see Figure 4b). By the end of the first and the second activity the child seemed to distinguish the two different geometrical transformations, rotation and horizontal translation, not only by gesturing but also by using two distinct words, "turn" (e.g., lines 72-73) and "move" (line 81). This progress was accompanied by another change: the shortening and simplification of the gesture about the transformation of horizontal translation, by using only one hand, at the last minutes of the activity with paper (Figure 9). For the vertical translation of shapes, such a mismatch between the child's verbal utterances and gesture occurred only in the first SCR at the beginning of the activity, while the accompanying gesture did not change.

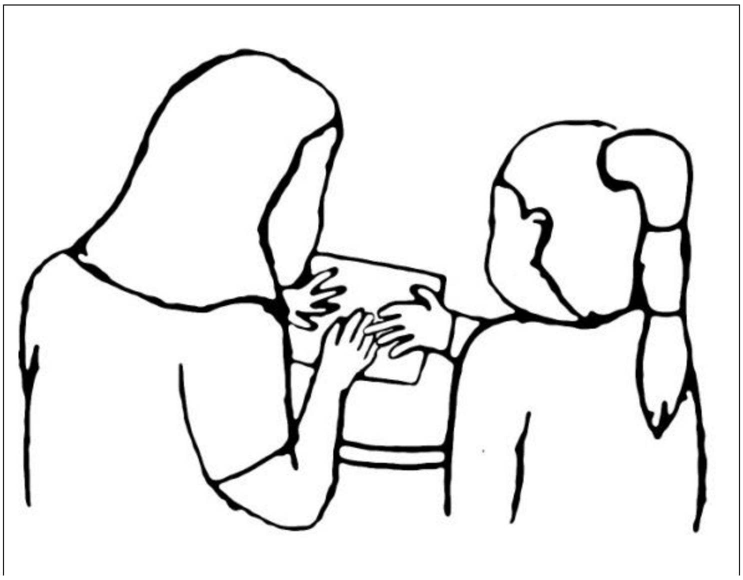


Figure 9. Shortened and simplified gesture for the translation on paper (line 81)

5. Discussion

5.1. Personal workspace of the child under study

Based on our results and the GWS for the solution of the shape configuration problem we can draw some conclusions about the personal GWS in which the child under study solved the particular task in the two SCRs and specifically about the three types of geneses. Our focus will be on the role of gestures within these geneses while the child dealt with the geometrical problem.

Within the visual genesis in both SCRs, the child's visual work on the shape configuration and on the individual shapes involved the production of gestures. In fact, the child used deictic gestures to point to the recognized shapes that could fit and their location in the outline. Although the child could visually identify all the shapes in the outline, at both spaces, she had difficulties in naming most of these shapes and, as a result the deictic gestures referring to the selected shapes were not always accompanied by the names of the shapes. This indicates that the deictic gestures had a significant role in conveying the child's ideas about the selection of shapes, but they were also an indispensible component of her visual thinking.

Within the experimental genesis in both SCRs, while 'manipulating verbally' the geometrical shapes, the child produced relevant gestures which had also a significant role. In the context of the experimental genesis though, the child did not use deictic, but iconic gestures which represented the shape transformations she proposed (rotation and translation).

Our results suggest that not only the verbal utterances of the child but also her gestures had an essential role within the discursive genesis while solving the shape configuration problem. Particularly, the child used deictic gestures to show the location of a recognized shape in the outline without giving exact verbal explanations about its spatial position or relations with other shapes in the outline. She either did not use any verbal utterances or used the verbal expression "here" with the deictic gestures. This indicates that the deictic gestures was a major component of the child's spatial thinking and conveyed information that was not found in the child's speech.

In the discursive explanations of the child about the shape transformations that were necessary for the shapes to fit in the outline, the iconic gestures had also a major role. This was more evident when wrong terms were used for a transformation by the child and the gesture conveyed the correct notion. At the beginning of each activity even though the child used the word "turn" to describe the horizontal translation of a shape she produced an iconic gesture with the proper meaning (representing the displacement of a shape). By the end of the activity in each SCR a significant progress was identified. The child used an appropriate term for the shape horizontal translation and at the same time produced a congruent and more simplified and shortened gesture. The micro-level study of the child's utterances and iconic gesture throughout the activity in both SCRs showed that the progress for the vertical translation occurred earlier relatively to the horizontal translation. An explanation is that the vertical shape translation is easier than the horizontal translation, as it involves the spatial concepts 'up' and 'down' which are less complex for young children than the concepts 'left' and 'right'. Furthermore, the latter spatial concepts are used not only as directions of moving horizontally a shape but also as directions of turning a shape.

These findings about the child's behavior in the context of discursive genesis indicated that both semiotic systems, words and iconic gestures, were necessary for the objectification of the notions of shape transformations by the child. Furthermore, they were essential for conveying the child's ideas which are associated with operations of different complexity involved in the operative apprehension of geometrical shapes and therefore served as a window for identifying the child's progress and difficulties.

In light of the above, deictic gestures' production was associated to the recognition of geometrical shapes and their position in the outline and had a major role in the perceptual apprehension of shapes. Iconic gestures which were used to represent shape transformations had an important role in the operative apprehension of shapes. Both types of gestures were an integral part of the discursive reasoning for the solution of the problem, including the production of coherent instructions for combining the geometrical shapes to compose the larger composite figure and the implicit use of the notion that a shape remains the same in different positions and orientations.

Overall, these conclusions, on the one hand, indicate the multifunctional role of gestures in the child's cognitive processes within the three fundamental geneses taking place in a relatively simple geometrical activity. On the other hand, these conclusions suggest that GWS could be a useful conceptual framework or tool to analyze the complex phenomenon of gestures in geometrical work.

5.2. *Concluding remarks*

The child in this case study was able to describe changes in the orientation and in the placement of geometrical shapes (e.g., trapezium) in both SCRs, implying that she could recognize geometrical shapes in different positions other than the prototypical ones (e.g. horizontal base) (Levenson, Tirosh and Tsamir, 2011). From a Piagetian perspective, this could be a result of the gestural and verbal production of the child, with gestures often preceding the appropriate words. However, these child's actions were enabled by a work space in which the geometrical activity took place (Kuzniak, 2012). From this broader perspective, the child's understanding was accomplished through the alignement of the meaning of the representations in this work space and the meaning constructed by the child for these representations (Radford et al., 2005) through her verbal and gestural acts framed by the adult (researcher) and the context of the particular activity. This finding actually indicates that there is something to gain from the complex interplay between the geometrical figures, configurations and spatial transformations provided by the computer or on paper, and the verbal utterances and gestures produced by herself while using them. This semiotic coordination of culturally developed and personally developed resources (Radford et al., 2005) within a GWS may have helped the child to enter into a process of differentiating between critical and non-critical attributes (position or orientation) of shapes.

The SCR which the child interacted with in the geometrical activity was found to differentiate her gestural production. Although in both SCRs the child produced the same two types of gestures, iconic and deictic, on the second SCR, the child produced a lower amount of iconic gestures than on the first SCR. This difference could be explained by the fact that the visual features of the first SCR, e.g., the image of the spin tool, and its clear dynamic character, e.g., the slow and step-by-step rotational function of the tool on shapes, encouraged the use of iconic gestures depicting spatial transformations. Considering the view that representational gestures are helpful when speakers have spatial images in mind (Kita, 2000), we can assume that the mathematical applet helped the child to produce these images in her mind and to be able to express them by gesturing. This inference is further supported by the fact that the child kept using the same types of iconic gestures also in the second SCR, the paper material. However, to be able to reach safer conclusions about the dynamics between the different SCRs in relation to children's semiotic activity in a geometrical task, as well as the influence of these SCRs on children's geometrical learning (e.g., lessening the impact of prototypes), the effects of reversing the order of the two SCRs need to be considered. This could be addressed in a future study with a larger number of participants.

The above findings and conclusions, which were drawn on the micro-analysis of the data in this case study, and their connection to the GWS, can be considered as useful hints about young children's embodied nature of thinking in relation to geometrical concepts. They could serve as a basis for continuing research about how gestures contribute to the investigation of the thinking of the children in the early years and support their learning in geometry. Longitudinal observations of a larger number of kindergarten children, even younger children, including boys and girls, in shape configuration tasks of various levels of complexity should be carried out to give further insight into the role of gestures and their interaction with the SCR in geometrical development.

REFERENCES

Battista, M.T. (1999). The importance of spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics,* 6 (3), 170-177.

Brousseau, G. (1983): Etude de questions d'enseignement, un exemple: la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique,* (pp.183-226). Grenoble: IMAG.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* New York: Routledge.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland and J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana and V. Villani (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic.

Ericsson, K. A., and Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological Review,* 87(3), 215-251.

Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in reason and language. Cognitive Neuropsychology, 22, 455–479.

Kim, M., Roth, W.M., and Thom, J. (2011). Children's gestures and the embodied knowledge of geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 9, 207-238.

Kita, S. (2000). How representational gestures help speaking. In D. McNeill (Ed.), *Language and gesture* (pp. 162-185). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kuzniak, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France. In A. Gagatsis, A. Kuzniak, E.Deliyianni, and L.Vivier (Eds), *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (pp. 71-90). Lefkosia: University of Cyprus.

Kuzniak, A. (2012). Understanding the Nature of the Geometric Work Through its Development and its Transformations. *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education.* Seoul, Korea. Retrieved on November 4, 2012 from http://www.icme12.org/upload/submission/1922_F.pdf

Kuzniak, A. and Rauscher, J.C. (2011). How do teachers' approaches to geometric work relate to geometry students' learning difficulties? *Educational Studies in Mathematics, 77* (1), 129–147.

Lavelli, M., Pantoja, A. P. F., Hsu, H., Messinger, D., & Fogel, A. (2005). Using microgenetic designs to study change processes. In D. M. Teti (Ed.), *Handbook of research methods in developmental science* (pp. 40-65). Malden, MA: Blackwell Publishing.

Levenson, E., Tirosh, D., & Tsamir, P. (2011). *Preschool geometry: Theory, research and practical perspectives.* Rotterdam: Sense Publishers.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought.* Chicago: The University of Chicago Press.

Nemirovsky, R., & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. Educational Studies in Mathematics, 70, 159–174.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics,* 70, 111-126.

Radford, L., Bardini, C., Sabena, C., Diallo, P., & Simbagoye, A. (2005). On embodiment, artifacts, and signs: a semiotic-cultural perspective on mathematical thinking. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 113-120. Melbourne: PME.

Siegler, R. S. (1995). How does change occur: A microgenetic study of number conservation. *Cognitive Psychology, 25*, 225–73.

Autoras

Iliada Elia, elia.iliada@ucy.ac.cy

Department of Education, University of Cyprus, Cyprus

Kyriacoulla Evangelou, koulae@windowslive.com

Department of Education, University of Cyprus, Cyprus

Katerina Hadjittoouli, katerina_h_1989@hotmail.com

Department of Education, University of Cyprus, Cyprus

Marja van den Heuvel-Panhuizen, m.vandenheuvel@fi.uu.nl

Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education & Faculty of Social and Behavioural Sciences, Utrecht University, The Netherlands

Picture books to learn mathematical language

Nathalie Martel[a], Marja van den Heuvel-Panhuizen[a], and Iliada Elia[b]

[a]Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education, Utrecht University, The Netherlands
[b]Department of Education, University of Cyprus, Nicosia, Cyprus
n.martel@uu.nl, m.vandenheuvel-panhuizen@uu.nl, elia.iliada@ucy.ac.cy

Recently, researchers have shown interest in the impact of using picture books in mathematics education in early childhood. Until now, little is known about the influence that picture books can have on the development of mathematics vocabulary on young children. The study reported in this poster is the first part of a four-year research on the influence that picture books can have on the development of mathematics vocabulary of young children. This pilot study was set up to test the suitability of the picture books to be used in the main research. The research question of the pilot study was: What mathematics-related vocabulary utterances are elicited in kindergartners when they are read a picture book?

Data was collected by reading 12 picture books to one kindergarten class in Canada. The children were between five and six years old and had as their home language French and/or English. All the picture books contain mathematics-related events about numbers or measurement (size, time) or spatial relationships. Half of the books have the story in words accompanied with pictures, and the other books have just pictures. The books were read in French or the teacher made a story of it in French. All picture book reading sessions were videotaped. An inventory of the utterances, i.e., the expressive language of the children, was made on the basis of the video recordings.

First thing that came out of the analysis is 61% of the total utterances were mathematics-related. Within the mathematics-related utterances the largest proportion of utterances were number-related (66%); most of them elicited by *Anno's counting book*. In the mathematics-related utterances we identified the use of mathematics vocabulary. For example, the size-measurement utterances include a rich variety of terms: petit/petite [small] (16x), grand/grande [tall] (6x) and gros/grosse [big] (5x).

We observe also, that a gripping story, engaged the children very much and led to many utterances related to mathematics. In the picture book "*Por la sabana"* by Virginia Ferrari, where the story is about an elephant who search for other animals in the savannah to make two teams and play tug-of-war, a little boy said spontaneously at the beginning of the story: "They are just 2, it is not enough!" Furthermore, on page 12-13, a little girl counted the animals presented on the illustration and said: "There are six animals now" and the little boy sitting next to her replied: "And after they will be seven". These examples show, how this picture book can be used by the teacher to teach the number sequence 1 to 10. Furthermore, we experienced that an interactive way of picture book reading with asking open-ended questions, related either to mathematical concepts or vocabulary, encouraged the children to use mathematical language in their answers and further remarks. For example, reading the picture book: "*Que fais-tu là Sacha?*" by Marie-Louise Guay about a little boy, it was found that asking the children "Is the boy underneath the carpet?" resulted mostly in "yes" or "no" answers, whereas asking them "Where is the boy?", made the children use position words like "under".

Picture books to be used for giving children support in developing mathematics vocabulary should not only contain mathematics-related events but also require a gripping story and eye-catching pictures that make the children engaged. This applies to both types of picture books used in this study. Moreover, the interaction during the picture book reading should enhance the possibilities to develop mathematics vocabulary. Asking open-ended questions is supportive to this.

At the ETM conference we like to discuss with the participants whether and how we can use in our study the framework of the mathematical work space (MWS), proposed by Kuzniak (2011).

References

Ferrari, V., & Bervejillo, M. (2007). *Por la sabana* [At the grassland]. México: Correo del Maestro.

Guay, M-L., *Que fais-tu là Sacha?* [What do you do Sacha?]. Canada: Dominique te compagnie.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.